

# ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFOCOMMUNICATION TECHNOLOGIES

УДК 519.6

DOI 10.18413/2687-0932-2020-47-2-412-421

## СЖАТИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕЙЛЯ – ГЕЙЗЕНБЕРГА

### IMAGE COMPRESSION USING DISCRETE WEYL – HEISENBERG TRANSFORM

**В.П. Волчков, В.М. Асирян**  
**V.P. Volchkov, V.M. Asiryanyan**

Московский технический университет связи и информатики,  
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а  
Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,  
Россия, 119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4

Moscow Technical University of Communications and Informatics,  
8a Aviamotornaya St., 111024, Moscow, Russia  
National University of Science and Technology MISiS,  
4 Leninsky prospekt, 119049, Moscow, Russia

E-mail: volchkovvalery@mail.ru, dmc5mod@yandex.ru

#### Аннотация

Предлагается новый подход к сжатию растровых изображений, основанный на использовании двухстороннего вещественного дискретного преобразования Вейля – Гейзенберга. Данное преобразование является ортогональным и строится на основе оптимального сигнального базиса Вейля – Гейзенберга, обладающего наилучшей частотно-временной локализацией. Указанные свойства обеспечиваются за счет выбора оптимальной функции формирования базисного эталона и наилучшего соотношения его параметров. Кроме того, для оценивания потенциальных возможностей использования дискретного преобразования Вейля – Гейзенберга (DWHT) в задачах сжатия были сформулированы основные критерии эффективности сжатия и проведено сравнение DWHT с другими известными ортогональными преобразованиями – дискретного косинусного преобразования (DCT) и дискретного преобразования Хартли (DHT). Экспериментально показано, что предложенный метод сжатия на основе DWHT обладает лучшими характеристиками по всем введенным критериям. Приводятся результаты сравнения трех методов сжатия в виде таблиц и восстановленных изображений.

#### Abstract

This article proposes a new approach to raster image compression, based on the use of the two-dimensional real discrete Weyl – Heisenberg transform (DWHT). This discrete transform is orthogonal and is based on the optimal Weyl – Heisenberg signal basis, which has the best time-frequency localization. The indicated properties are ensured by choosing the optimal forming function of the basis and the best ratio of its parameters. In addition, to assess the potential possibilities of using the discrete Weyl – Heisenberg transform in compression problems, the main criteria for compression efficiency were formulated and DWHT was compared with other well-known orthogonal transforms – discrete cosine transform (DCT) and discrete Hartley transform (DHT). It is experimentally shown that the proposed method based on discrete Weyl – Heisenberg transform has much better compression characteristics. The paper also presents the results of comparing three compression methods (DHT, DCT and DWHT) in the form of corresponding tables and figures of the restored images.

**Ключевые слова:** обработка изображений, сжатие, косинусное преобразование, преобразование Хартли, хорошая локализация, оптимальный базис.

**Keywords:** imaging, compression, cosine transform, Hartley transform, Weyl-Heisenberg transform, good localization, optimal basis.

## Введение

В настоящее время важнейшую роль в цифровой обработке сигналов играют дискретные ортогональные преобразования, которые активно применяются в различных задачах цифровой фильтрации и спектрального анализа. Между тем математический аппарат дискретных ортогональных преобразований находит свое применение и в области сжатия данных для последующего экономичного хранения или передачи информации. Примером тому является дискретное косинусное преобразование (DCT) [Ахмед, Рао, 1980; Smith, 1999; Ahmed et al., 1974], получившее широкую популярность и послужившее основой для разработки таких алгоритмов сжатия информации, как JPEG, MPEG и др.

На сегодняшний день значительный технологический прогресс, достигнутый в разработке новых алгоритмов передачи и обработки информации, делает особенно актуальными исследования все более сложных методов получения частотных и частотно-временных характеристик сигналов. Синтез универсального базиса, который позволяет функционально разделять сигнал в частотно-временной области на определенные фрагменты, а затем внутри них анализировать спектральные особенности сигнала, представляет сложную задачу. Однако именно с помощью таких базисов можно учесть нестационарные особенности сигнала и получить большую эффективность сжатия.

Общей теории построения хорошо локализованных базисных систем и соответствующих спектральных разложений посвящены работы [Gabor, 1946; Wexler, Raz, 1990; Добеши, 2001; Volchkov, 2007]. Однако наиболее важными примерами таких систем являются базисы Вейля – Гейзенберга (WH-базисы) [Волчков, 2009; Volchkov, Petrov, 2009], получаемые путем равномерных сдвигов по времени и частоте одной или целого семейства сдвинутых по фазе функций, а также похожие на них по структуре фрейм-системы [Volchkov, Sannikov, 2018; Volchkov et al., 2019]. В данных работах показано, что базис Вейля – Гейзенберга, построенный на основе произвольного формирующего импульса, не будет оптимальным, поскольку частотно-временная локализация базисных функций может оказаться неприемлемой. Именно поэтому особый интерес в исследовании представляет базис Вейля – Гейзенберга, в основу которого положены оптимальные частотно-временные свойства гауссиана. Известно, что сдвиги по времени и частоте гауссовой функции приводят к базису Габора [Gabor D., 1946], но такой базис не является ортогональным, а построенные на его основе вычислительные алгоритмы спектрального разложения и обратного восстановления оказываются неустойчивыми и сложными в реализации [Волчков, 2009; Волчков, Петров, 2010]. В то же время в работах [Волчков, Асирян, 2017; Асирян, Волчков, 2018] описывается синтез вычислительно эффективных алгоритмов формирования ортогональных WH-базисов большой размерности, у которых базисные функции близки по локализации к гауссиану. Причем процедура синтеза и ее последующее применение ориентированы на обработку конечных дискретных реализаций сигнала.

Отметим, что классический метод синтеза дискретных базисов [Gabor, 1946; Добеши, 2001; Wexler, Raz, 1990] предполагает, что входные сигналы являются бесконечными последовательностями (вещественными или комплексными). Это диктует применение соответствующего аппарата  $Z$ -преобразований, сверток и разложений на бесконечном дискретном временном интервале. В результате полученная структура WH-базисов не может быть непосредственно использована для практической обработки конечных реализаций сигналов и изображений. Нужна их дополнительная модификация и доработка для перевода аналитического описания и соответствующих быстрых алгоритмов на конечный интервал.

В работах [Волчков, Петров, 2009; Волчков, Петров, 2010; Bolcskei et al., 1999] используется алгебраический подход к синтезу оптимальных сигнальных WH-базисов, который

изначально предполагает конечную длительность обрабатываемых сигналов. При этом используется алгебраический аппарат временных и спектральных преобразований на конечном интервале с групповыми операциями сложения и вычитания по модулю. Поэтому синтезированные на их основе базисные функции имеют циркулянтную структуру сдвигов по времени и частоте, согласованную с конечным интервалом обработки, и создаются предпосылки для построения эффективных вычислительных алгоритмов с использованием полифазных циркулянтных разложений и быстрых конечных спектральных преобразований. Таким образом, реализуется известный математический принцип – синтезировать оптимальные алгоритмы обработки следует в таких евклидовых пространствах, которые согласованы со структурой обрабатываемых сигналов.

В данной статье предлагается и исследуется новый подход к сжатию растровых изображений, основанный на применении дискретного ортогонального  $WN$ -базиса, специально оптимизированного под задачу обработки вещественных изображений. Для этого строится двухстороннее вещественное преобразование Вейля – Гейзенберга (DWHT), обладающее свойством ортогональности и наилучшей частотно-временной локализацией. Указанные свойства обеспечиваются за счет выбора оптимальной формирующей функции базиса и наилучшего соотношения его параметров. Для того чтобы оценить потенциальные возможности дискретного  $WN$ -преобразования в задаче сжатия изображения формулируются критерии эффективности сжатия, основанные на вычислении коэффициента сжатия, вычислении нормы разности исходного и сжатого изображений, а также их визуальном сравнении. В качестве альтернативы для сравнения по указанным критериям используются два других известных дискретных ортогональных преобразования: косинусное (DCT, [Ахмед, Rao, 1980; Smith, 1999; Ahmed et al., 1974]) и преобразование Хартли (DHT, [Hartley, 1942]).

Проведенное экспериментальное исследование показывает, что метод сжатия на основе дискретного  $WN$ -преобразования обладает более лучшими характеристиками по всем перечисленным показателям. Это объясняется тем, что используемое  $WN$ -преобразование, в отличие от DCT и DHT, задействует не только частотную, но и временную область и имеет хорошую частотно-временную локализацию. А значит  $WN$ -преобразование обеспечивает гораздо лучшую фрагментацию анализируемого изображения в спектральной области для последующего отсеивания несущественных спектральных компонент.

## 1. Дискретные ортогональные преобразования

Основная идея дискретных ортогональных преобразований заключается в изменении сигнала с целью придания ему другой формы, в которой он имеет, возможно, непривычный вид, но обладает полезными свойствами. Главной особенностью ортогональных преобразований являются их обратимость, вычислительная устойчивость и простота реализации. Это значит, что преобразованный сигнал, изменивший свою форму и вид, можно легко вернуть в первоначальное состояние [Асирян, Волчков, 2018; Асирян, Волчков, 2017].

Любое дискретное ортогональное преобразование является линейным и имеет матричное представление. При этом важнейшим свойством, которым должна обладать матрица преобразования, является свойство унитарности (или ортонормированности, если преобразование вещественное), которое записывается как

$$\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{U}$  – квадратная матрица преобразования, у которой по столбцам стоят дискретные ортонормированные базисные функции (векторы). Таким образом, любое дискретное ортогональное преобразование задается матрицей базисных векторов.

Одностороннее прямое и обратное ортогональные преобразования сигнального вектора вычисляются по формулам

$$\mathbf{b} = \mathbf{U}^* \mathbf{a}, \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{U} \mathbf{b}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор-столбец элементов сигнала,  $\mathbf{b}$  – вектор-столбец элементов спектра,  $\tilde{\mathbf{a}}$  – вектор-столбец элементов восстановленного сигнала.

В свою очередь, формулы для двухсторонних прямого и обратного ортогональных преобразований матрицы изображения записываются в следующем виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U}, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{U}^*. \quad (5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица элементов изображения,  $\mathbf{B}$  – матрица элементов спектра изображения,  $\tilde{\mathbf{A}}$  – восстановленное изображение. В частности,  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$  при отсутствии дополнительных процедур сжатия и выполнении условия унитарности (1).

Одним из первых дискретных ортогональных преобразований, нашедших широкое применение в задачах обработки и фильтрации сигналов, является дискретное преобразование Фурье. Однако, как известно, дискретное преобразование Фурье нацелено на обработку комплексных последовательностей данных, в то время как на практике зачастую приходится работать с вещественными сигналами (например, растровыми изображениями).

В 1942 году Р. Хартли опубликовал интегральное преобразование, тесно связанное с комплексным преобразованием Фурье, но отображающее вещественные сигналы в вещественный спектр. В дальнейшем данное преобразование получило название в честь фамилии автора и стало называться преобразованием Хартли. В 1983 году Р. Брейсуэллом был представлен его дискретный вариант и один из алгоритмов его эффективной вычислительной реализации. В работе [Sunder et al., 2006] отмечаются перспективы применения дискретного преобразования Хартли для обработки изображений, в том числе и в области сжатия.

Матрица дискретного ортонормированного преобразования Хартли размерности  $(N \times N)$  определяется так:

$$\mathbf{U}_{DHT}(k, l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{cas} \left( \frac{2\pi k l}{N} \right),$$

$$k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, N-1,$$

где  $\text{cas}(t) = \cos(t) + \sin(t)$  – ядро Хартли.

Несложно заметить, что преобразование Хартли отличается от преобразования Фурье выбором ядра. Напомним, что для преобразования Фурье функция ядра записывается как

$$\exp(-jt) = \cos(t) - j \sin(t),$$

где  $j$  – мнимая единица.

Другим важным вещественным аналогом преобразования Фурье является дискретное косинусное преобразование, которое было представлено Н. Ахмедом в 1972 году [Ahmed et al., 1974] и, начиная с 1973 года, начало активно применяться в области сжатия изображений.

Матрица косинусного преобразования размерности  $(N \times N)$  определяется согласно следующему выражению

$$\mathbf{U}_{DCT}(k, l) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & \text{при } k = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left( \frac{\pi(2l+1)k}{2N} \right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, N-1.$$

Как было отмечено ранее, целью данного исследования является построение вещественного аналога комплексной матрицы преобразования Вейля – Гейзенберга и его применение в области сжатия изображений. Комплексная матрица ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга размерности  $(N \times N)$  определяется выражением [Volchkov, 2007; Volchkov, Petrov, 2009; Волчков, Асиян, 2017]:

$$\mathbf{U} = \text{Re}\{\mathbf{U}_R\} + j \text{Re}\{\mathbf{U}_I\}, \quad (6)$$

элементы которой вычисляются согласно выражениям

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_R(n, lM + k) &= g[(n - lM)_N] e^{2\pi j \frac{k}{M}(n - \alpha/2)}, \\ \mathbf{U}_I(n, lM + k) &= jg[(n + \frac{M}{2} - lM)_N] e^{2\pi j \frac{k}{M}(n - \alpha/2)}, \\ n &= 0, \dots, N - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \quad l = 0, \dots, L - 1, \quad N = LM, \end{aligned}$$

где  $M$  – количество сдвигов по частоте,  $L$  – количество сдвигов по времени,  $\alpha$  – фазовый параметр,  $g(\cdot)$  – оптимизированная формирующая WH-функция размерности  $N$ . При этом матрица  $\mathbf{U}$  является унитарной, т. е. удовлетворяет (1).

Следует отметить, что в задачах сжатия изображений мы имеем дело с вещественным двумерным сигналом, а это значит, что применение комплексной матрицы Вейля – Гейзенберга не является целесообразным. По аналогии с преобразованием Хартли [Hartley, 1942] мы можем построить вещественную версию матрицы (6), которая определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{U}} = \text{Re}\{\mathbf{U}\} + \text{Im}\{\mathbf{U}\}. \quad (7)$$

Формула (7) может быть записана в эквивалентном виде

$$\tilde{\mathbf{U}} = \text{Re}\{\mathbf{U}_R\} + \text{Re}\{\mathbf{U}_I\}, \quad (8)$$

а соответствующие формулы преобразований для матрицы (8) будут аналогичны (2–5).

Чтобы оценить разницу между исходным изображением и восстановленным с помощью дискретного ортогонального преобразования, вычислим норму Фробениуса разности между матрицами исходного и восстановленного изображений:

$$E = \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij} - \tilde{\mathbf{A}}_{ij})^2}. \quad (9)$$

В дальнейшем формула (9) будет служить критерием качественных потерь, то есть главным не визуальным показателем отличия восстановленного изображения от исходного.

На рис. 1 представлены исходное монохромное квадратное изображение «lena.jpg» ( $512 \times 512$  пикселей) и его двухсторонние дискретные ортогональные преобразования (DHT, DCT и DWHT). В свою очередь в таблице 1 приведены результаты восстановления исходного изображения «lena.jpg» с использованием трех дискретных ортогональных преобразований (DHT, DCT и DWHT).

Очень малые ошибки восстановления в данном случае обусловлены только вычислительной погрешностью, поскольку сжатия нет, т. е.  $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$ .

## 2. Пороговое сжатие изображений

Сжатие данных по пороговому значению представляет собой процедуру обнуления всех тех значений преобразованного изображения, модуль которых меньше определенного значения порога  $T$ . Данный процесс представляет собой сжатие с потерями. Ниже представлен алгоритм сжатия данных вещественной матрицы  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_{i,j})$  по пороговому значению  $T$ .

$$\tilde{\mathbf{V}}_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{при } |\mathbf{V}_{i,j}| < T, \\ \mathbf{V}_{i,j}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При оптимально выбранном пороге сжатия  $T$  потери будут незначительными, что позволит устранить лишнюю информацию, сохранив при этом целостность и качество восстанавливаемого изображения. Однако на практике не всегда удобно подбирать пороговое значение вручную, поэтому введем такую величину, как коэффициент сжатия  $K$ . Данная величина представляет собой отношение

$$K = \frac{N_Z}{N_T} \cdot 100\%,$$

где  $N_Z$  – количество обнуленных элементов спектра изображения в том или ином базисе, а  $N_T$  – общее количество анализируемых элементов этого спектра (для всех рассматриваемых преобразований  $N_T = N^2$ ).



Рис. 1. Исходное изображение (слева сверху), DHT (справа сверху), DCT (слева снизу) и DWHT (справа снизу)  
 Fig. 1. Original image (top-left), DHT (top-right), DCT (bottom-left) and DWHT (bottom-right)

Таблица 1  
 Table 1

Результаты восстановления изображения  
 Results of image reconstruction

Преобразование	DHT	DCT	DWHT
Потери качества, $E$	2.2745e-11	2.6144e-09	2.2792e-09

После обнуления определенного количества элементов спектра, заданного коэффициентом сжатия  $K$ , восстановленное изображение становится моделью исходного изображения и уже  $\mathbf{A} \neq \hat{\mathbf{A}}$ . Кроме того, чем более корректно выбран базис, тем более качественно модель отображает исходное изображение при заданном количестве не обнуленных элементов спектра  $P = N_T - N_Z$ . При этом существует некоторое критическое значение  $P = P_o$ , называемое факторной размерностью изображения, ниже которого качество восстановления аномально падает. Соответствующие элементы редуцированного спектра можно рассматривать как базовые факторные параметры модели изображения для выбранного базиса. Эксперимент показал, что факторный размер модели изображения для DWHT метода равен  $P_o = 7865$ , что соответствует коэффициенту сжатия  $K = 97\%$ .

Чтобы сравнить между собой представленные выше ортогональные преобразования по критерию качественных потерь (9) при восстановлении изображения, установим одинаковые значения коэффициента сжатия для всех трех преобразований

$$K = K_{DWHT} = K_{DCT} = K_{DHT}. \quad (10)$$

На рисунках 2–4 демонстрируются визуальные результаты сжатия одного и того же изображения «lena.jpg» с использованием трех дискретных ортогональных преобразований (DHT, DCT и DWHT) для трех фиксированных значений коэффициента сжатия ( $K = 93\%$ ,  $95\%$ ,  $97\%$ ). Изображения обрезаны для визуального сравнения артефактов сжатия.



Рис. 2. Сжатое изображение с использованием DHT (слева), DCT (посередине), DWHT (справа) для  $K = 93\%$

Fig. 2. Compressed image using DHT (left), DCT (middle), DWHT (right) for  $K = 93\%$



Рис. 3. Сжатое изображение с использованием DHT (слева), DCT (посередине), DWHT (справа) для  $K = 95\%$

Fig. 3. Compressed image using DHT (left), DCT (middle), DWHT (right) for  $K = 95\%$



Рис. 4. Сжатое изображение с использованием DHT (слева), DCT (посередине), DWHT (справа) для  $K = 97\%$

Fig. 4. Compressed image using DHT (left), DCT (middle), DWHT (right) for  $K = 97\%$

В таблицах 2–4 приведены подробные численные результаты сжатия изображения «lena.jpg» для трех ортогональных преобразований, позволяющие количественно оценить и сравнить все три метода сжатия.

Таблица 2

Table 2

Сравнение методов сжатия (при  $K = 93\%$ )  
Comparison of image compression ( $K = 93\%$ )

Преобразование	DHT	DCT	DWHT
Кол-во элементов, $N_T$	262144	262144	262144
Кол-во нулевых эл-в, $N_Z$	243793	243793	243793
Потери качества, $E$	528.0564	369.8089	243.9116

Таблица 3

Table 3

Сравнение методов сжатия (при  $K = 95\%$ )  
Comparison of image compression ( $K = 95\%$ )

Преобразование	DHT	DCT	DWHT
Кол-во элементов, $N_T$	262144	262144	262144
Кол-во нулевых эл-в, $N_Z$	249036	249036	249036
Потери качества, $E$	626.6192	461.0988	332.5995

Таблица 4

Table 4

Сравнение методов сжатия (при  $K = 97\%$ )  
Comparison of image compression ( $K = 97\%$ )

Преобразование	DHT	DCT	DWHT
Кол-во элементов, $N_T$	262144	262144	262144
Кол-во нулевых эл-в, $N_Z$	254279	254279	254279
Потери качества, $E$	831.1223	631.0928	496.8902

Сравнительный анализ визуальных и численных характеристик показывает, что наименьшие потери качества при сжатии изображения получаются именно в случае преобразования DWHT. Причем получаемый относительный выигрыш в процентном соотношении

$$\eta = 100\% \cdot (E - E_{DWHT}) / E_{DWHT}$$

оказывается весьма существенным и в случае  $K = 97\%$  (для DHT и DCT) составляет  $\eta_{DHT} = 67.2$  и  $\eta_{DCT} = 27.0$ , соответственно (см. таблицу 4).

### 3. Заключение

По результатам исследований алгоритмов сжатия, представленных выше, можно заключить, что по сравнению с другими известными ортогональными преобразованиями (DCT, DHT) оптимальный базис Вейля – Гейзенберга при фиксированном коэффициенте сжатия демонстрирует наименьшие потери качества при восстановлении изображения.

Таким образом, использование оптимального базиса Вейля – Гейзенберга оказывается весьма эффективным инструментом в задаче сжатия изображений. Объясняется это тем, что изображение представляет собой нестационарный двухмерный случайный процесс, а преобразование Вейля – Гейзенберга позволяет более корректно учитывать эти нестационарные особенности, поскольку разбивает его в частотно-временной области на хорошо локализованные фрагменты для последующего эффективного отсеивания несущественных спектральных компонент и, как следствие, сжатия изображения.



### Список литературы

1. Асирян В.М., Волчков В.П. 2017. Применение ортогонального преобразования Вейля – Гейзенберга для сжатия изображений. Телекоммуникации и информационные технологии. 4 (1): 50–56.
2. Асирян В.М., Волчков В.П. 2018. Вычислительно эффективная реализация прямого и обратного преобразований Вейля – Гейзенберга. Телекоммуникации и информационные технологии. 5 (1): 5–10.
3. Ахмед Н., Рао К.Р. 1980. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. Пер. с англ./Под ред. Фоменко И.Б., М.: Связь, 248. (Ahmed N, Rao K.R. 1975. Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 264).
4. Волчков В.П., Асирян В.М. 2017. Вычислительно эффективный алгоритм формирования оптимального базиса Вейля – Гейзенберга. Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. М., МИРЭА. Часть 4: 1151–1154.
5. Волчков В.П. 2009. Новые технологии передачи и обработки информации на основе хорошо локализованных сигнальных базисов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15 (70): 181–189.
6. Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Условия ортогональности обобщенных базисов Вейля – Гейзенберга для OFTDM сигналов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15 (70): 190–199.
7. Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Оптимизация ортогонального базиса Вейля – Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 1 (56): 102–112.
8. Волчков В.П., Петров Д.А. 2010. Обобщенная теорема Найквиста для OFTDM сигналов. Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. М., Издательский дом Медиа публишер. 1 (1): 28–32.
9. Добеши И. 2001. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 464. (Daubechies I., 1992. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 378).
10. Ahmed N. et al. 1974. Discrete Cosine Transform. IEEE Transactions on Computers. Vol. C-23, no. 1: 90–93.
11. Bolcskei H. et al. 1999. Efficient design of OFDM/OQAM pulse shaping filter. Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC 99). Vol. 1: 559–564.
12. Gabor D. 1946. Theory of communication. J. Inst. Elect. Eng. (London), vol. 93, no. 111: 429–457.
13. Hartley R.V. 1942. A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems. Proceedings of the IRE (March), 30 (3): 144–150.
14. Smith S.W. 1999. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. California Technical Publishing, 2nd ed.: 496–503.
15. Sunder R. et al. 2006. Medical image compression using 3-D Hartley transform. Computers in biology and medicine, Vol. 36: 958–973.
16. Volchkov V.P. 2007. Signal bases with good time-frequency localization. Electrosvyaz, no. 2: 21–25.
17. Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems. Proc. of ICUMT, St. Petersburg: Oct.
18. Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018). Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
19. Volchkov V. et al., 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508.
20. Wexler J., Raz S. 1990. Discrete Gabor expansions. Signal Processing, vol. 21, no. 3: 207–220.

### References

1. Asiryany V.M., Volchkov V.P. 2017. Application of the Weyl-Heisenberg orthogonal transform for image compression. Telekommunikacii i informacionnye tehnologii [Telecommunications and information technologies]. 4 (1): 50–56.

2. Asiryanyan V.M., Volchkov V.P. 2018. A computationally efficient implementation of the direct and inverse Weyl-Heisenberg transforms. *Telekommunikacii i informacionnye tehnologii [Telecommunications and information technologies]*. 5 (1): 5–10.
3. Ahmed N., Rao K.R. 1980. *Ortogonal'nye preobrazovanija pri obrabotke cifrovyh signalov*. Per. s angl./Pod red. Fomenko I.B., Moscow: Svjaz', 248. (Ahmed N, Rao K.R. 1975. *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 264).
4. Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2017. Computationally efficient algorithm of forming an optimal basis for the Weyl-Heisenberg. *Fundamental problems of electronic instrument engineering*. Moscow, MIREA. Part 4: 1151–1154.
5. Volchkov V.P. 2009. A new technology of transmitting and processing of information based on well-localized signal basis. *Nauchnye vedomosti BelGU. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political Science Economics Information technologies]. 15(70): 181–189.
6. Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Generalized Weyl-Heisenberg bases orthogonality conditions for OFTDM signals. *Nauchnye vedomosti BelGU. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]. 15 (70): 190–199.
7. Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Orthogonal Weyl-Heisenberg basis optimisation for digital communication systems based on OFDM/OQAM. *Nauchnye vedomosti BelGU. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]. 1 (56): 102–112.
8. Volchkov V.P., Petrov D.A. 2010. The generalized Nyquist's theorem for OFTDM of signals. *Synchronization system, shaping and signal processing*. M., Publishing House Media Publisher. 1 (1): 28–32.
9. Daubechies I. 2001. *Desjat' lekcij po vejvletam*. Izhevsk: RHD, 464. (Daubechies I., 1992. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 378).
10. Ahmed N. et al., 1974. Discrete Cosine Transform. *IEEE Transactions on Computers*. Vol. C-23, no. 1: 90–93.
11. Bolcskei H. et al. 1999. Efficient design of OFDM/OQAM pulse shaping filter. *Proceedings of IEEE International Conference on Communications (ICC 99)*. Vol. 1: 559–564.
12. Gabor D. 1946. Theory of communication. *J. Inst. Elect. Eng. (London)*, vol. 93, no. 111: 429–457.
13. Hartley R.V. 1942. A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems. *Proceedings of the IRE (March)*, 30 (3): 144–150.
14. Smith S.W. 1999. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 2nd ed.: 496–503.
15. Sunder R. et al. 2006. Medical image compression using 3-D Hartley transform. *Computers in biology and medicine*, Vol. 36: 958–973.
16. Volchkov V.P. 2007. Signal bases with good time-frequency localization. *Electrosvyaz*, no. 2: 21–25.
17. Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Orthogonal Well-Localized Weyl-Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems. *Proc. of ICUMT*, St. Petersburg: Oct.
18. Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. 2018 *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018)*. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
19. Volchkov V. et al. 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508.
20. Wexler J., Raz S. 1990. Discrete Gabor expansions. *Signal Processing*, vol. 21, no. 3: 207–220.

**Ссылка для цитирования статьи  
For citation**

Волчков В.П., Асирян В.М. 2020. Сжатие изображений с использованием дискретного преобразования Вейля – Гейзенберга. *Экономика. Информатика*. 47 (2): 412–421. DOI: 10.18413/2687-0932-2020-47-2-412-421.

Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2020. Image compression using discrete Weyl – Heisenberg transform. *Economics. Information technologies*. 47 (2): 412–421 (in Russian). DOI: 10.18413/2687-0932-2020-47-2-412-421.