

532.517.032

せまいすきまにおける放射状粘性流れに関する研究*

(第1報, 助走区間に対する理論解析)

石 沢 進 午**

The Axi-symmetric Laminar Flow in an Arbitrarily Shaped Narrow Gap

(1st Report, Theoretical Analysis for the Inlet Region)

by Shingo ISHIZAWA

A theoretical analysis is presented for the inlet region of the laminar, radial flow in an arbitrarily shaped narrow gap between two axi-symmetrically formed walls. A series expansion method is used and the most general form of the exact solutions of the boundary layer equations is obtained.

As an example, numerical calculations have been made for the flow in a radial diffuser formed by two parallel discs, by which the following important conclusions are confirmed.

Separation of flow from the wall occurs, the separation point moving to downstream direction as the Reynolds number decreases. When the Reynolds number further decreases, reaching a value below a certain small finite value, separation does not occur.

A result which is very important from the theoretical standpoint is that the separation point calculated in this study is not of a mathematical singularity. This is the first theoretical example verifying actually the existence of a non-singular separation, which has already been predicted by S. Goldstein, K. Stewartson and others.

1. 緒 言

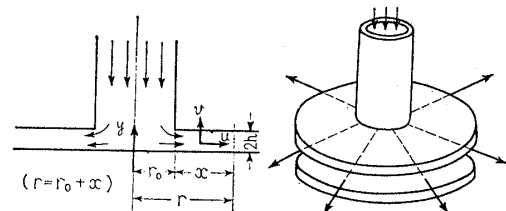
平行な二壁面間のせまいすきまにおける径方向粘性流れ(第1図)によって代表されるような流れ現象は, 多くの流体機器にしばしばみられるもので, しかもその流れ現象が複雑でいくつかの興味ある物理的性質を有しているという点で, 流体力学上基礎理論面からも, また応用工学分野からも重要視されている問題である。

すなわち実際応用面においてはよく知られているように, このような流れ現象は円形弁⁽¹⁾, ノズルフラップ, 空気マイクロメータ⁽²⁾などの流体サーボ, 計測機器においてそれらの作働特性に直接関係するものであり, さらにスラスト軸受, 空気軸受などの潤滑問題にも重要な関係をもっている。また最近では電解加工法において電解液の流動状態が加工精度に大きな影響を及ぼすことから, その流れ状態の解明が必要とされている。

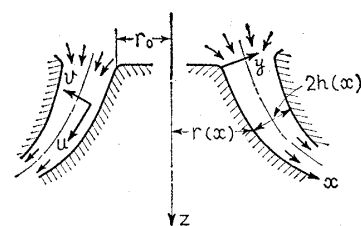
このように実際応用上の重要性から, 従来この問題

については多くの研究が行なわれてきた。しかしそれらのほとんどが応用工学的な立場からの研究であって, 流れ現象の物理的特徴を十分にはあくした精密な解析は, 筆者の知見する限りいまだなされていないようである(後述)。

本研究は, このような流れ現象を基礎的な境界層理論の立場から詳細に解明する目的で行なったものであ



第1図 平行二円板間の放射状流れ



第2図 せまいすきまの軸対称流れ

* 昭和39年4月1日 第41期通常総会講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和38年11月27日。

** 正員, 日立製作所中央研究所(東京都北多摩郡国分寺町恋ヶ窪280)。

る. 本研究においては第1図のような流れ状態をさらに拡張して, 第2図のように任意の軸対称形状の二つの壁面で形成された小さなすきまを, 流体がメリディアン方向に流れる場合を一般的にとりあつかう. x は一つの壁面上に沿っておかれたメリディアン座標(流れの入口を原点とし流れの方向を正とする), y は壁面に垂直方向の座標, u, v はそれぞれ流れの x, y 方向速度成分である. 壁面半径 r およびすきま $2h$ は一般に x にしたがって任意に変化するものとする. 流体は非圧縮性, 流れは定常, 層流の場合について考える. ここですきま $2h$ は壁面の曲率半径に比べて非常に小さく, またすきまの変化 $\left| \frac{dh}{dx} \right|$ は1に比して十分に小さいという条件をおく.

$$h(x) \ll \text{壁面の曲率半径} \dots\dots\dots(1 \cdot a)$$

$$\left| \frac{dh(x)}{dx} \right| \ll 1 \dots\dots\dots(1 \cdot b)$$

そうすると流れはすきま中心面に関してほぼ対称とみなせるから, 中心面のどちらか片側半分の流れのみを考えれば十分である. さらにこのような条件のもとでは, 流れの運動方程式として通常の軸対称物体上の境界層方程式⁽³⁾をそのまま用いることができる.

さて入口 $x=0$ における速度分布が一様であるとすると, 入口付近では二つの壁面上に形成された境界層の厚さがうすく中心部分にポテンシャル流れが存在し(助走区間), 下流に進むにつれて一般に境界層が成長してついには中心部のポテンシャル流れが消失するようになる(この領域を充満区間とよぶことにする)ことは, 円管あるいは平行二平板間の平面二次元的な流れなどと同様, 一般的にいえることである. ただしいまの場合特に流れの方向に流路断面積が急激に減少する場合 $\left(\frac{dr(x)}{dx} < 0 \right)$ には, 充満区間が全く形成されない, あるいは一度形成されても下流へ進むとふたたびすきま中心部にポテンシャルコアが生じてくることもありうる⁽²⁾.

基礎理論的な立場からみた場合, いま問題にしている流れ現象についての大きな興味は, 特に $\frac{dr(x)}{dx} > 0$ の場合(典型的な具体例は第1図, $r(x) = r_0 + x$ の場合)に, 流れのはく離とそれにひきつづいての再付着の二つがともに起りうるという点にある(壁面は十分下流まで続いているものとする). 第1図を例にとって説明しよう. 十分下流においては流れの慣性力が粘性力に比して無視できるほど小さくなることから, 入口においていかなる速度分布を与えても, $r \rightarrow \infty$ のとき常にいわゆるポアズイユ流れ(放物線速度分布)に漸近

するということは従来からよく知られていることである. したがってここではもちろん流れははく離していない. 一方助走区間において, ポテンシャルコア部分が境界層の排除作用による摂動をうけないとすると,

x 方向の圧力こう配は $\frac{dp}{dx} = \frac{\rho r_0^2 U_0^2}{r^3} [U_0 = U(0), r_0 = r(0)]$ となり, このような大きな圧力上昇のもとでは, 境界層前縁 ($x=0$) にきわめて近いところではげしいはく離が起ることが境界層理論からたしかめられる. 以上のことから流れは入口にかなり近いところ $x = x_s$ で壁面からはく離し, 下流のある点 $x = x_r$ で再付着して逆流が消滅し, さらに下流へ進むにつれてポアズイユ流れに漸近していくという流れのモデルが想定されるのである.

ここで, 実際には境界層の排除作用が結果において(連続の条件より)ポテンシャル流れを加速することになるので, 排除作用が強いほど(流れのレイノルズ数が小さくて境界層の成長が急激なほど)はく離傾向は緩和される. このことからレイノルズ数がある値以下になるとはく離が起らなくなるであろうことが予測される(事実後の解析で明らかとなるように, 第1図の流れではレイノルズ数が有限のある値ではく離しなくなることが確実である).

このように特徴的な流れ現象に対して明確な説明を与えうる理論は現在のところ全くない.

本研究においては, これら諸点を解明するために, はく離領域 ($x_r \geq x \geq x_s$) をも含めて境界層方程式を解くことを試みる(もちろん Navier-Stokes 方程式を解きうればもっとも理想的であるが, それはきわめて困難である). しかしそのためにはいうまでもなく, 境界層方程式におけるはく離点の特異性という根本的な問題について, あらかじめ十分に検討することが必要である. 以下この点について吟味し, いまの問題の流れに対しては, 上記の試みが正しく許されるものであることを明らかにしよう.

境界層方程式の解としてのはく離点の特異性に関しては, Goldstein⁽⁴⁾, Stewartson⁽⁵⁾ および Terrill⁽⁶⁾ らによって詳細に研究され, はく離点の特異性は境界層方程式固有の性質ではなくて, 主流速度 $U(x)$ の形によるものであるということが明らかにされている. すなわち主流速度が境界層自身との関連なしに, 物体表面上のポテンシャル流れとして独立に与えられた場合には, 一般にはく離点は境界層方程式の特異点となる. しかし実際には, このようなポテンシャル流れは境界層の排除作用によって変形されるのであって, このような主流と境界層との相互作用を考慮した場合に

は、必ずしも特異性が生じないのである。これと同様なことは Meksyn⁽⁷⁾ によっても主張されており、事実彼は“粘性によって変形された主流速度”(具体的には実測値)を与えて通常の境界層方程式を解くことにより、だ円柱のはく離領域の流れを求めている。

(なお実際の物理現象においては、はく離点にこのような特異性が存在しないことは明らかである。したがって Navier-Stokes 方程式の厳密解がかりに得られたとすれば、それにも特異性はあらわれないであろう。ここでの議論は層流境界層方程式の解に関するものであることに留意されたい)。

さて、今問題にしている流れの助走区間を境界層理論の立場から解く場合には、さきにものべたように、すきまにおける流量一定という条件を満足するように、境界層の排除作用を考慮して、ポテンシャルコア部分の流速を修正する。すなわち主流速度と境界層との間の相互作用を考慮するわけである。したがってこの場合には、上に述べたことからはく離点の特異点とならないであろうということが考えられるのである。

事実このことは次のようにして容易に確認することができる。すなわちもしはく離点 $x=x_s$ が特異点であるとすれば、壁面に垂直方向の速度は $v(x_s, y) = +\infty$ となる⁽⁸⁾。このような排除速度によって修正されたポテンシャルコアの x 方向速度こう配は明らかに $\frac{dU(x_s)}{dx} = +\infty$ となるから、壁面上の compatibility condition $U \frac{dU}{dx} = -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0}$ より $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0, x=x_s} = -\infty$ が得られる。一方、はく離点においては $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0, x=x_s}$ は一般に正の有限値であるはずであるからこれは矛盾である。よってこの場合 $x=x_s$ において $v(x_s, y) = +\infty$ とはなり得ない、すなわち特異性がないということになるのである。

なお以上の議論は助走区間におけるはく離点に関するものであるが、はく離流れの再付着がおこる場合についても、また助走区間ばかりでなく充満区間に対しても同様のことがいえる。

かくして、この場合にははく離点をこえてさらに下流まで連続した境界層方程式の解が存在することになるわけである。

つぎに、はく離領域においては境界層厚さが非常に厚くなるから、境界層近似が成立しなくなるのではないかという疑問が生じるかもしれない。それに対してはまず、Stewartson⁽⁵⁾ が指摘しているように、“流れのはく離 (separation)” と “主流のはがれ (break-

away)” の二つの現象を区別して考えることが必要である。いま問題にしている流れは、接近した二つの壁面によって拘束されているゆえに、はく離がおこっても主流が壁面近傍からはがれ去ること (breakaway) があり得ない。すなわちはく離がおこっても境界層の厚さは常にすきまの半分 h 以下で非常にうすいから (すなわち $u \gg v$)、境界層近似は依然成立していると考えられるのである。もっとも局所的にははく離領域における $u=0$ の線 (壁面とは別の) 近傍では $u < v$ となるから境界層近似はやぶれるが、それによる誤差は、平板形境界層の前縁における特異性、あるいは吹出し、殴込みのある境界層の壁面付近などと同様、局所部分に限られていて、他にはほとんど影響を及ぼさない。

以上にのべたことを総合すれば、結局いま問題にしている流れにおいては、はく離点、および再付着点の特異性をもたず、かつはく離しても主流の breakaway が起り得ないから、流れの全領域を境界層方程式の解として求めることができることになるわけである。

さてつぎに、ここでとり上げたような流れ現象に関する従来の研究について概観してみよう。壁面形状としては第 2 図のような一般的なものをとりあつた例はなく、すべて第 1 図の場合を対象としている。さきにものべたようにきわめて多くの研究がなされているが、それらのほとんどすべては流れの慣性力を無視している。すなわち $r \rightarrow \infty$ における漸近解を求めているにすぎない。助走区間を考慮したものとしては、筆者の知見では近似的な運動量積分法を用いた萩原⁽²⁾ と Woolard⁽⁹⁾ の研究があるのみである。前者の理論は限られた条件のもとではかなりよく実際と合うようであるが、しかし速度分布形状として流れの全領域を通じて相似な放物線分布を仮定したので、はく離現象に関連した流れの諸性質を記述し得ない。後者も助走区間に対して相似速度分布を仮定し、かつ主流速度があまり変化しないということを前提としている。

本論文は、第 1 報として助走区間のみを対象とし、級数解法と差分法とを併用して厳密な解析を行なったものである。級数解の収束性が不十分となる下流の領域に対する解析は、ひきつづき第 2 報において報告する予定である。

2. 理 論

2.1 境界層方程式とその変換 第 2 図に示される流れ現象を支配する基礎方程式は、1 章にのべたことから、(1) 式のような条件のもとに次のように与えられる⁽³⁾。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots(2 \cdot a)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(2 \cdot b)$$

ここに p, ρ, ν はそれぞれ流体の圧力, 密度および動粘性係数である. 境界条件は次のように与えられる.

$$x > 0 \begin{cases} y=0: & u=v=0 \dots\dots\dots(3 \cdot a) \\ y=h(x): & u=U(x), \quad v=U \frac{dh}{dx}, \end{cases}$$

$$[U(x): \text{未知}] \dots\dots\dots(3 \cdot b)$$

$$x=0: \quad u=U_0, \quad \text{const.} \dots\dots\dots(3 \cdot c)$$

まずすきまを流れる流量 q を表わす式を求めよう.

(2・b) 式より

$$(rv)_{y=h} = -\int_0^{h(x)} \frac{\partial(ru)}{\partial x} dy \\ = -\frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} ur dy + rU \frac{dh}{dx}$$

が得られるからこれと境界条件(3・b)とより, q は次のように表わされる.

$$q = 4\pi r \int_0^h u dy = 4\pi r_0 h_0 U_0, \quad \text{const.} \\ [r_0=r(0) \neq 0, \quad h_0=h(0) \neq 0] \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{境界層の排除厚 } \delta^*: \quad U\delta^* = \int_0^h (U-u) dy \dots\dots(5)$$

を用いれば(4)式は次のようになる.

$$q = 4\pi r(h - \delta^*)U, \\ \text{あるいは } U\delta^* = h \left(U - \frac{q}{4\pi r h} \right) \dots\dots\dots(6)$$

本論文は1章にのべたように助走区間を対象として考える. すきまの変化 $\left| \frac{dh}{dx} \right| \ll 1$ [(1・b)式]であれば,

助走区間のすきま中心 $y=h(x)$ においては, $v \ll u$, $\frac{\partial u}{\partial y} \cong 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cong 0$ と考えてよい. したがって(2・a)式より圧力は近似的に

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}, \\ \text{あるいは } p + \frac{1}{2} \rho U^2 = C, \quad \text{const.} \dots\dots\dots(7)$$

と与えられる. すなわち圧力と主流速度との関係は, この場合にも通常の境界層と同様に考えることができるわけである.

さてここで(2・a)(2・b)式において, 物理空間座標 (x, y) を次のような新しい変数 (ζ, η) に変換する.

$$\zeta = \left(\frac{16\pi^2 \nu}{q^2} \right) \int_0^x U r^2 dx = \int_0^\xi U_* r_*^2 d\xi \dots\dots(8 \cdot a)$$

$$\eta = \frac{U r y}{\left[2\nu \int_0^x U r^2 dx \right]^{1/2}} = \left(\frac{4\pi}{q} \right) \frac{U r y}{(2\zeta)^{1/2}} \dots\dots(8 \cdot b)$$

$$U_* = \frac{4\pi r_0 h_0 U}{q} = \frac{U}{U_0}; \quad r_* = \frac{r}{r_0}; \quad h_* = \frac{h}{h_0} \dots\dots\dots(9 \cdot a)$$

$$\xi = \frac{4\pi \nu r_0 x}{h_0 q} = \frac{\nu x}{U_0 h_0^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{x}{r_0} \right) \dots\dots\dots(9 \cdot b)$$

$$R = \frac{h_0 q}{4\pi \nu r_0^2} = \frac{U_0 h_0^2}{r_0 \nu}: \quad \text{レイノズル数} \dots\dots(9 \cdot c)$$

この場合の流れ現象の力学的相似性は, 以下の進展をみれば明らかのように, (9・c)式によって示される無次元パラメータ R によって支配される.

つぎに連続の式(2・b)を満足する流れの関数 $\Psi(x, y)$ として, 次の形を与える.

$$ru = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad rv = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \dots\dots\dots(10)$$

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{q}{4\pi} \right) (2\zeta)^{1/2} F(\zeta, \eta) \dots\dots\dots(11)$$

(8), (11)式を(10)式に代入すれば, u および v はそれぞれ次のように表わされる.

$$u = U F_\eta \\ v = -\left(\frac{4\pi \nu}{q} \right) \frac{U r}{(2\zeta)^{1/2}} \left[F + 2\zeta F_\zeta \right. \\ \left. + \left(2\zeta \frac{(U r)_\zeta}{U r} - 1 \right) \eta F_\eta \right] \dots\dots\dots(12)$$

(12), (7) および (8) 式によって, 運動方程式(2・a)は結局次のように変換される.

$$F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \lambda(\zeta)(1 - F_\eta^2) = 2\zeta [F_\eta F_{\eta\zeta} - F_{\eta\eta} F_\zeta] \dots\dots\dots(13)$$

$$\lambda(\zeta) = 2 \frac{\zeta}{U} \frac{dU}{d\zeta} = 2 \frac{\zeta}{U_*} \frac{dU_*}{d\zeta} \dots\dots\dots(14)$$

助走区間においては, y が $h(x)$ より小さなある値 δ に近づけば, u はすみやかに(指数関数的に) U に近づき, y が δ より大きなところ(ポテンシャルコア)では u はほぼ完全に U に一致していると考えてよい. したがって境界条件 $y=h(x): u=U(x)$ は, 助走区間に関するかぎり $\eta \rightarrow \infty: u \rightarrow U(x)$ とおきかえることができる.

$$F(\zeta, 0) = F_\eta(\zeta, 0) = 0; \\ [F_\eta(\zeta, \eta)]_{y=h(x)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta(\zeta, \eta) = 1 \dots\dots(15)$$

微分方程式系(13), (14), (15)は, Görtler⁽¹⁰⁾が二次元定常層流境界層の級数解法において用いた基礎式と全く同じ形である.

つぎに, 上と同様のことから(5)式における積分の上限 $y=h(x)$ も $\eta \rightarrow \infty$ とおきかえることができる.

$$U\delta^* = \left(\frac{q}{4\pi r} \right) (2\zeta)^{1/2} \int_0^{\eta=h(x)} [1 - F_\eta(\zeta, \eta)] d\eta \\ = \left(\frac{q}{4\pi r} \right) (2\zeta)^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F(\zeta, \eta)] \dots\dots(16)$$

(6)式と(16)式とを等置すれば, 次のように主流速

度と境界層の排除作用の関連を表わす重要な式が得られる。

$$U_* r_* h_* = 1 + (2\zeta)^{1/2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F(\zeta, \eta)] \dots (17)$$

通常の境界層問題においては、周知のように主流速度は境界層とは独立に境界条件としてあらかじめ与えられる。いまの場合にも境界層の排除作用を無視すれば、次の (17)' 式のように (17) 式の右辺第 2 項が消失し、主流速度 $U_{*\infty}$ は当然ながら流路形状 r_* および h_* のみによって決定されることになる。Meksyn のことば⁽⁷⁾ をかりれば、 $U_{*\infty}$ は “inviscid type の主流速度” ということができる。

$$U_{*\infty} r_* h_* = 1 \dots (17)'$$

(17) 式は 1 章にのべたように、このような “inviscid type” の $U_{*\infty}$ が、境界層の排除作用 (すなわち粘性の作用) によって変形されることを表わすものである。

ところで数式の上からみると、いまの問題においては通常の境界層問題と比較して一つの困難が付加される。すなわち (17) 式に示されるように、 U_* は、それ自身を与えることによって (13), (15) 式の解として求められるべき $F(\zeta, \eta)$ の影響をうけるのである。いかえれば、微分方程式系 (13), (14), (15) は (17) 式との連立の形のもとに解かれねばならない。しかしながらこの問題は、以下にのべるように級数解法を適用することにより、さほどの困難なしに解くことができる。本問題以外に、助走区間を級数解法によって解いた例としては、平行二平板間の平面二次元流れに対する Schlichting の研究⁽¹¹⁾ および円管に対する Atkinson と Goldstein の研究⁽¹⁷⁾ がある。しかしこれらの方法においては、級数展開によって得られた常微分方程式群を普遍化していない。

本研究においては、以下に詳述するように、いま問題にしているような助走区間の解析に対しても通常の境界層問題と同じように、それら常微分方程式群を普遍化してとりあつかうことが可能であることをみいだした。そのために、普遍化された常微分方程式群を一度解けば、いかなる流路形状に対してもその結果を共通に用いることができるばかりでなく、さらに本問題に限らず他のいろいろな境界層問題の計算にも利用することができるという利益を得ることができたのである。

2.2 主流速度 U_* および流路形状 r_*, h_* の級数展開

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; B_{1/2} = -\frac{2}{3} K_{1/2}; B_1 = \frac{1}{2} K_{1/2}^2 - \frac{1}{2} K_1 - a_1; \\ B_{3/2} &= -\frac{2}{5} K_{1/2}^3 + \frac{4}{5} K_{1/2} K_1 - \frac{2}{5} K_{3/2} + \frac{4}{5} K_{1/2} a_1 - \frac{4}{5} a_{3/2}; \\ B_2 &= \frac{1}{3} K_{1/2}^4 - K_{1/2}^2 K_1 + \frac{1}{3} K_1^2 + \frac{2}{3} K_{3/2} K_{1/2} - \frac{1}{3} K_2 - \frac{2}{3} K_{1/2}^2 a_1 + \frac{2}{3} K_1 a_1 + a_1^2 + \frac{2}{3} K_{1/2} a_{3/2} - \frac{2}{3} a_2; \end{aligned} \right\}$$

本研究においては上述のように微分方程式系 (13), (14), (15) および (17) を、 ζ をパラメータとする級数に展開して解く。(17) 式の右辺第 2 項に $\zeta^{1/2}$ が含まれていることを考慮すれば、この問題における級数としてはパラメータが $\zeta^{1/2}$ の公比をもつような形で表わされるものでなければならないことがわかる。そこでいま ($U_* r_* h_*$) および $F(\zeta, \eta)$ が次のような級数に展開できるものと仮定する。

$$U_* r_* h_* = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k/2} \zeta^{k/2} \dots (18)$$

$$F(\zeta, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{k/2} F_{k/2}(\eta) \dots (19)$$

(18), (19) 式を (17) 式に代入すれば、(18) 式の係数 $A_0, A_{1/2}, A_1, \dots$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1; A_{1/2} = \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta)]; \\ A_{k/2} &= -\sqrt{2} F_{1/2(k-1)}(\infty), \\ &\quad (k=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

(18) 式の展開に適合するためには、 $U_*(\zeta), r_*(\zeta)$ および $h_*(\zeta)$ はそれぞれ次のような級数で表わされるものでなければならない。

$$U_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{k/2} \zeta^{k/2}, \quad (K_0=1) \dots (21 \cdot a)$$

$$r_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k/2} \zeta^{k/2}, \quad (a_0=1, a_{1/2}=0) \dots (21 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} r_*(\zeta) \cdot h_*(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k/2} \zeta^{k/2}, \quad (b_0=1, b_{1/2}=0) \\ &\dots (21 \cdot c) \end{aligned} \right\}$$

ここで $a_{1/2}, b_{1/2}$ を 0 とした理由は後に説明する。

さて、微分方程式系 (13), (14), (15) および (17) はすべて変換された座標系 (ζ, η) によって表わされている。しかし流路形状 r_* および h_* は、通常このような変換された座標 ζ ではなくて、物理空間座標 x (あるいは ξ) の関数として与えられる。したがってまずここに ζ と ξ との対応関係を明らかにする必要がある。(8 \cdot a) 式の逆変換は

$$\xi = \int_0^{\zeta} [U_*(\zeta) \cdot r_*^2(\zeta)]^{-1} d\zeta \dots (22)$$

であるから、これに (21 \cdot a), (21 \cdot b) の級数表示を入れて整理すれば、次のように $\xi = \xi(\zeta)$ の級数表示が得られる。

$$\xi = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} B_{k/2} \zeta^{k/2} \dots (23)$$

$$\begin{aligned}
 B_{5/2} = & -\frac{2}{7} K_{1/2}^5 + \frac{8}{7} K_{1/2}^3 K_1 - \frac{6}{7} K_{1/2}^2 K_{3/2} + \frac{4}{7} K_{1/2} K_2 - \frac{6}{7} K_{1/2} K_1^2 + \frac{4}{7} K_1 K_{3/2} - \frac{2}{7} K_{5/2} \\
 & + \frac{4}{7} K_{1/2}^3 a_1 - \frac{4}{7} K_{1/2}^2 a_{3/2} - \frac{8}{7} K_{1/2} K_1 a_1 - \frac{6}{7} K_{1/2} a_1^2 + \frac{4}{7} K_{1/2} a_2 + \frac{4}{7} K_1 a_{3/2} \\
 & + \frac{4}{7} K_{3/2} a_1 + \frac{12}{7} a_1 a_{3/2} - \frac{4}{7} a_{5/2}; \dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

(23) 式を逆変換して $\zeta = \zeta(\xi)$ の級数表示を求めれば次のようになる。

$$\zeta = \xi \sum_{k=0}^{\infty} C_{k/2} \xi^{k/2} \dots\dots\dots \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 C_0 = & 1; C_{1/2} = -B_{1/2}; C_1 = -B_1 + \frac{3}{2} B_{1/2}^2; C_{3/2} = -B_{3/2} + \frac{7}{2} B_{1/2} B_1 - \frac{21}{8} B_{1/2}^3; \\
 C_2 = & -B_2 + 4B_{1/2} B_{3/2} - 10B_{1/2}^2 B_1 + 2B_1^2 + 5B_{1/2}^4; \\
 C_{5/2} = & -B_{5/2} + \frac{9}{2} B_{1/2} B_2 - \frac{99}{8} B_{1/2}^2 B_{3/2} + \frac{429}{16} B_{1/2}^3 B_1 - \frac{99}{8} B_{1/2} B_1^2 + \frac{9}{2} B_1 B_{3/2} - \frac{1287}{128} B_{1/2}^5; \dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

(25), (26) 式を (21・b), (21・c) 式に代入すれば, 物理空間座標 ξ の関数としての $r_*(\xi)$ および $h_*(\xi)$ の級数表示が与えられる。

$$r_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{k/2} \xi^{k/2} \dots\dots\dots \tag{27・a}$$

$$h_*(\xi) \cdot h_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{k/2} \xi^{k/2} \dots\dots\dots \tag{27・b}$$

$$\begin{aligned}
 r_0 = & 1; r_{1/2} = 0; r_1 = a_1; r_{3/2} = a_{3/2} + \frac{2}{3} K_{1/2} a_1; r_2 = a_2 + K_{1/2} a_{3/2} + a_1 \left(\frac{1}{6} K_{1/2}^2 + \frac{1}{2} K_1 + a_1 \right); \\
 r_{5/2} = & a_{5/2} + \frac{4}{3} K_{1/2} a_2 + \frac{5}{12} K_{1/2}^2 a_{3/2} + \frac{1}{90} K_{1/2}^3 a_1 + \frac{3}{4} K_1 a_{3/2} + \frac{2}{5} K_{3/2} a_1 + \frac{11}{30} K_{1/2} K_1 a_1 \\
 & + \frac{23}{15} K_{1/2} a_1^2 + \frac{23}{10} a_1 a_{3/2}; \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{28・a}$$

$$\begin{aligned}
 s_0 = & 1; s_{1/2} = 0; s_1 = b_1; s_{3/2} = b_{3/2} + \frac{2}{3} K_{1/2} b_1; s_2 = b_2 + K_{1/2} b_{3/2} + b_1 \left(\frac{1}{6} K_{1/2}^2 + \frac{1}{2} K_1 + a_1 \right); \\
 s_{5/2} = & b_{5/2} + \frac{4}{3} K_{1/2} b_2 + \frac{5}{12} K_{1/2}^2 b_{3/2} + \frac{1}{90} K_{1/2}^3 b_1 + \frac{3}{4} K_1 b_{3/2} + \frac{2}{5} K_{3/2} b_1 + \frac{11}{30} K_{1/2} K_1 b_1 \\
 & + \frac{23}{15} K_{1/2} a_1 b_1 + \frac{3}{2} a_1 b_{3/2} + \frac{4}{5} a_{3/2} b_1; \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{28・b}$$

さきにものべたように, r_* および h_* は通常物理空間座標 ξ (あるいは x) の関数として与えられる。すなわち (27・a), (27・b) 式における係数 $r_1, r_{3/2}, \dots, s_1, s_{3/2}, \dots$ が場合に応じて与えられるのである。なお, 流路形状 r_*, h_* は一般には任意に与えるものであるが, 級数解法によって解きうるためには, (27) 式の形の級数で表わされるものでなければならないわけである。なお筆者が前の論文⁽⁸⁾に報告したように, メリディアン座標 x の関数として表わされた壁面半径 $r(x)$ が物理的に実在するためには, 常に

$$\left| \frac{dr}{dx} \right| = \frac{1}{R} \left| \frac{dr_*}{d\xi} \right| \leq 1 \dots\dots\dots \tag{29}$$

の条件が満足されなければならない。またすきま $h(x)$ に関しては前にのべたとおり (1) 式の条件が付されている。前の (21・b), (21・c) 式において $a_{1/2} = b_{1/2} = 0$ としたために, (27) 式においても $\xi^{1/2}$ の項が欠けた形となっているが, このようにしたのは $r_*(\xi)$ および $h_*(\xi)$ が, 特に入力 $\xi=0$ においてこれらの条件を満足することの必要性からである。

さて r_1, \dots, s_1, \dots が与えられれば, a_1, \dots, b_1, \dots は (28・a), (28・b) 式の関係によって定められる。すなわちこれを逆に解けば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 = & r_1; a_{3/2} = r_{3/2} - \frac{2}{3} K_{1/2} r_1; a_2 = r_2 - K_{1/2} r_{3/2} + \frac{1}{2} K_{1/2}^2 r_1 - \frac{1}{2} K_1 r_1 - r_1^2; \\
 a_{5/2} = & r_{5/2} - \frac{4}{3} K_{1/2} r_2 + \frac{11}{12} K_{1/2}^2 r_{3/2} + \frac{4}{5} K_{1/2} K_1 r_1 - \frac{2}{5} K_{1/2}^3 r_1 \\
 & - \frac{3}{4} K_1 r_{3/2} - \frac{2}{5} K_{3/2} r_1 + \frac{4}{3} K_{1/2} r_1^2 - \frac{23}{10} r_1 r_{3/2}; \dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{30・a}$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= s_1; \quad b_{3/2} = s_{3/2} - \frac{2}{3} K_{1/2} s_1; \quad b_2 = s_2 - K_{1/2} s_{3/2} + \frac{1}{2} K_{1/2}^2 s_1 - \frac{1}{2} K_1 s_1 - r_1 s_1; \\ b_{5/2} &= s_{5/2} - \frac{4}{3} K_{1/2} s_2 + \frac{11}{12} K_{1/2}^2 s_{3/2} + \frac{4}{5} K_{1/2} K_1 s_1 - \frac{2}{5} K_{1/2}^3 s_1 - \frac{3}{4} K_1 s_{3/2} \\ &\quad - \frac{2}{5} K_{3/2} s_1 + \frac{4}{3} K_{1/2} r_1 s_1 - \frac{3}{2} r_1 s_{3/2} - \frac{4}{5} r_{3/2} s_1; \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30 \cdot b)$$

つきに、関数 $\lambda(\zeta)$ は (13) 式にみるように、境界層の性格を決定する唯一の重要な coefficient function である (Görtler はこれを “principal function” とよんだ)。 $\lambda(\zeta)$ の級数展開は、(14) 式に (21・a) 式を代入することによって、次のように与えられる。

$$\lambda(\zeta) = 2 \frac{\zeta}{U_*} \frac{dU_*}{d\zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(31)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1/2} &= K_{1/2}; \quad \beta_1 = 2K_1 - K_{1/2}^2; \quad \beta_{3/2} = 3K_{3/2} - 3K_{1/2}K_1 + K_{1/2}^3; \\ \beta_2 &= 4K_2 - 4K_{1/2}K_{3/2} - 2K_1^2 + 4K_{1/2}^2K_1 - K_{1/2}^4; \\ \beta_{5/2} &= 5K_{5/2} - 5K_{1/2}K_2 - 5K_1K_{3/2} + 5K_{1/2}^2K_{3/2} + 5K_{1/2}K_1^2 - 5K_{1/2}^3K_1 + K_{1/2}^5; \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

以下のすべての計算を通じて (31) 式の係数 $\beta_{k/2}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) は中心的な役割を演ずる。したがって $K_{k/2}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) はすべて $\beta_{k/2}$ にかき直して処理するのがよい。

$$\left. \begin{aligned} K_{1/2} &= \beta_{1/2}; \quad K_1 = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_{1/2}^2); \quad K_{3/2} = \frac{1}{3} \left(\beta_{3/2} + \frac{3}{2} \beta_{1/2} \beta_1 + \frac{1}{2} \beta_{1/2}^3 \right); \\ K_2 &= \frac{1}{4} \left(\beta_2 + \frac{4}{3} \beta_{1/2} \beta_{3/2} + \frac{1}{2} \beta_1^2 + \beta_{1/2}^2 \beta_1 + \frac{1}{6} \beta_{1/2}^4 \right); \\ K_{5/2} &= \frac{1}{5} \left(\beta_{5/2} + \frac{5}{4} \beta_{1/2} \beta_2 + \frac{5}{6} \beta_{1/2}^2 \beta_{3/2} + \frac{5}{12} \beta_{1/2}^3 \beta_1 + \frac{5}{8} \beta_{1/2} \beta_1^2 + \frac{5}{6} \beta_1 \beta_{3/2} + \frac{1}{24} \beta_{1/2}^5 \right); \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

かくして、以上の計算を総合すればわかるように、 $U_*(\zeta), r_*(\zeta)$ および $h_*(\zeta)$ などの級数展開における各係数は、すべて $\beta_{k/2}$ を与えることによって定められることになるわけである (r_1, \dots, s_1, \dots は既知ゆえ)。これら $\beta_{k/2}$ の値は (20) 式の関係をもつように決定されるのであるが、それについては後の 2・4 節においてのべる。

2・3 級数解 (19) 式および (31) 式を (13) 式に代入して ζ の指数の同じものをまとめれば、次式が得られる。

$$F_0''' + F_0 F_0'' = 0 \dots\dots\dots(34)$$

$$F_{k/2}''' + F_0 F_{k/2}'' - k F_0' F_{k/2}' + (k+1) F_0'' F_{k/2} = \beta_{k/2} (F_0'^2 - 1) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} \beta_{j/2} F_{i/2}' F_{(1/2)(k-i-j)'} + F_0' \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{j/2} F_{(1/2)(k-j)'} + \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) F_{j/2}' F_{(1/2)(k-j)'} - \sum_{j=1}^{k-1} (1+j) F_{j/2} F_{(1/2)(k-j)''} \dots\dots\dots(35)$$

ここに $k=1, 2, 3, \dots$ 。境界条件は (15) 式より次のようになる。

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0(\infty) = 1, \quad F_{k/2}(0) = F_{k/2}'(0) = F_{k/2}''(0) = 0, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots(36)$$

$F_{k/2}(\eta)$ にはパラメータ $\beta_{k/2}, \beta_{(1/2)(k-1)}, \dots, \beta_{1/2}$ が含まれているが、次のように分割してこれらパラメータに無関係な普遍関数群をつくり出すことができる。

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2} &= \beta_{1/2} f_{1/2}; \quad F_1 = \beta_1 f_1 + \beta_{1/2}^2 f_{1/2, 1/2}; \quad F_{3/2} = \beta_{3/2} f_{3/2} + \beta_1 \beta_{1/2} f_{1, 1/2} + \beta_{1/2}^3 f_{1/2, 1/2, 1/2}; \\ F_2 &= \beta_2 f_2 + \beta_1^2 f_{1, 1} + \beta_{3/2} \beta_{1/2} f_{3/2, 1/2} + \beta_1 \beta_{1/2}^2 f_{1, 1/2, 1/2} + \beta_{1/2}^4 f_{1/2, 1/2, 1/2, 1/2}; \quad \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

次のような微分演算子を定義し、

$$L_{k/2}[f] = f''' + F_0 f'' - k F_0' f' + (k+1) F_0'' f \dots\dots\dots(38)$$

(37) 式を (35) 式に代入すれば、次のような普遍関数に関する常微分方程式群が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_{1/2}[f_{1/2}] &= F_0'^2 - 1, \quad L_1[f_1] = F_0'^2 - 1, \quad L_1[f_{1/2, 1/2}] = 2F_0' f_{1/2}' + f_{1/2}''^2 - 2f_{1/2}' f_{1/2}'' \\ L_{3/2}[f_{3/2}] &= F_0'^2 - 1, \quad L_{3/2}[f_{1, 1/2}] = 2F_0' (f_{1/2}' + f_1') + 3f_{1/2}' f_1' - 2f_{1/2} f_1'' - 3f_{1/2}'' f_1 \\ L_{3/2}[f_{1/2, 1/2, 1/2}] &= 2F_0' f_{1/2, 1/2}' + f_{1/2, 1/2}''^2 + 3f_{1/2}' f_{1/2, 1/2}' - 2f_{1/2} f_{1/2, 1/2}'' - 3f_{1/2}'' f_{1/2, 1/2} \\ L_2[f_2] &= F_0'^2 - 1, \quad L_2[f_{1, 1}] = 2F_0' f_1' + 2f_1'' - 3f_1 f_1'' \\ L_2[f_{3/2, 1/2}] &= 2F_0' (f_{1/2}' + f_{3/2}') + 4f_{1/2}' f_{3/2}' - 2f_{1/2} f_{3/2}'' - 4f_{1/2}'' f_{3/2} \\ L_2[f_{1, 1/2, 1/2}] &= 2F_0' (f_{1/2, 1/2}' + f_{1, 1/2}') + f_{1/2, 1/2}''^2 + 2f_{1/2}' f_1' + 4f_{1/2}'' f_{1, 1/2}' \\ &\quad + 4f_{1/2, 1/2}' f_1' - 2f_{1/2} f_{1, 1/2}'' - 3f_{1/2, 1/2} f_1'' - 3f_{1/2, 1/2}'' f_1 - 4f_{1/2}'' f_{1, 1/2} \\ L_2[f_{1/2, 1/2, 1/2, 1/2}] &= 2F_0' f_{1/2, 1/2, 1/2}' + 2f_{1/2, 1/2, 1/2}''^2 + 4f_{1/2}' f_{1/2, 1/2, 1/2}' \\ &\quad + 2f_{1/2, 1/2, 1/2}''^2 - 2f_{1/2} f_{1/2, 1/2, 1/2}'' - 3f_{1/2, 1/2, 1/2} f_{1/2, 1/2}'' - 4f_{1/2}'' f_{1/2, 1/2, 1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

境界条件は、 $f(\dots)$ のすべての添字 (\dots) に対して同じ形で次のようになる。

$$f(\dots)(0) = f(\dots)'(0) = f(\dots)'(\infty) = 0 \dots\dots\dots(40)$$

これら微分方程式のうち、 $F_0, f_1, f_2, f_{1,1}$ に関するものは Görtler⁽¹⁰⁾⁽¹⁵⁾ によってすでに数値積分されているが、それ以外のものについてはまだ解かれていない。

本研究においては、これら微分方程式群 (34), (39) は、境界条件 (36), (40) 式のもとに、日立中研の HIPAC-103 を用いて数値積分した。積分方法は Runge-Kutta-Gill の方法⁽¹²⁾を用い、計算の有効けた数はすべてを通じて 11 けた、ステップサイズ 0.1、積分区間は $\eta=0\sim 6.1$ である。なおステップサイズについては、0.1 のほかに一部 0.01 のものも計算して結果を比較したところ、有効数字のはじめから 5 けためまではほとんどのものが一致することを確かめた。計算結果の詳細はここでは省略するが、数表を作成してあるので、要求に応じて提供することができる。

境界層の排除作用および壁面上せん断応力に関係す

るところの重要な $f(\dots)(\infty)$ と $f(\dots)''(0)$ の値は、まとめて第 1 表に示す。表中 () を付した数値は Görtler によって計算された値である。なお Görtler の結果は、有効けた数 14 けた、ステップサイズ 0.01、積分区間 $\eta=0\sim 6.0$ として計算されたものである。

以上の結果は、もちろん、主流速度および物体形状に無関係な普遍関数に関するものであるから、いま問題にしているような流れ現象のみならず、他のいろいろの境界層問題の計算にも利用できるものである。このように、本研究は、一般の境界層問題に関する級数解法において、普遍関数群の一つの系統を充足したという点でも、意味のあるものといえよう。

2.4 助走区間についての級数計算 2.2 節にのべたように、 $\lambda(\zeta)$ の級数各項の係数 $\beta_{k/2}(k=1, 2, 3, \dots)$ を決定することができれば、助走区間の流れは完全に求められることになる。

まず (21·a), (21·c) 式を (18) 式の左辺に代入して、さらに (30·b), (33) 式を用いれば、かなり長い計算の後に $A_{k/2}$ に関する次のような表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1/2} &= \beta_{1/2}; A_1 = \frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_{1/2}^2 + s_1; A_{3/2} = \frac{1}{3}\beta_{3/2} + \frac{1}{2}\beta_{1/2}\beta_1 + \frac{1}{6}\beta_{1/2}^3 + \frac{1}{3}\beta_{1/2}s_1 + s_{3/2}; \\ A_2 &= \frac{1}{4}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_{1/2}\beta_{3/2} + \frac{1}{8}\beta_1^2 + \frac{1}{4}\beta_{1/2}^2\beta_1 + \frac{1}{24}\beta_{1/2}^4 + \frac{1}{12}\beta_{1/2}^2s_1 + \frac{1}{4}\beta_1s_1 - r_1s_1 + s_2; \\ A_{5/2} &= \frac{1}{5}\beta_{5/2} + \frac{1}{4}\beta_{1/2}\beta_2 + \frac{1}{6}\beta_{1/2}^2\beta_{3/2} + \frac{1}{12}\beta_{1/2}^3\beta_1 + \frac{1}{8}\beta_{1/2}\beta_1^2 + \frac{1}{6}\beta_1\beta_{3/2} \\ &\quad + \frac{1}{120}\beta_{1/2}^5 - \frac{1}{3}\beta_{1/2}s_2 + \frac{1}{24}\beta_{1/2}^2s_{3/2} + \frac{1}{60}\beta_{1/2}^3s_1 + \frac{7}{60}\beta_{1/2}\beta_1s_1 + \frac{1}{8}\beta_1s_{3/2} \\ &\quad + \frac{1}{5}\beta_{3/2}s_1 + \frac{1}{3}\beta_{1/2}r_1s_1 - \frac{3}{2}r_1s_{3/2} - \frac{4}{5}r_{3/2}s_1 + s_{5/2}; \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots(41)$$

(37), (41) 式を (20) 式に代入して整理すれば、次のように $\beta_{k/2}$ を定める式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1/2} &= \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta)]; \beta_1 = -\beta_{1/2}^2 - 2\sqrt{2}f_{1/2}(\infty)\beta_{1/2} - 2s_1; \\ \beta_{3/2} &= -\frac{1}{2}\beta_{1/2}^3 - 3\sqrt{2}f_{1/2, 1/2}(\infty)\beta_{1/2}^2 - 3\sqrt{2}f_1(\infty)\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_{1/2}\beta_1 - \beta_{1/2}s_1 - 3s_{3/2}; \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots(42)$$

かくして、普遍関数の数値 (第 1 表) を代入すれば、 $\beta_{1/2}, \beta_1, \dots$ は順次に計算することができることになる。 $\beta_{5/2}$ まで求めた結果を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1/2} &= [1.72078]; \beta_1 = [-9.41184] - 2s_1; \\ \beta_{3/2} &= [96.0146 + 12.9991s_1] - 3s_{3/2}; \\ \beta_2 &= [-1288.73 - 183.892s_1 + 23.7500s_{3/2}] \\ &\quad - 4s_2 + 4r_1s_1; \\ \beta_{5/2} &= [19937.6 + 3217.83s_1 - 338.596s_{3/2} \\ &\quad + 36.8589s_2 + 53.7331s_1^2 - 36.8589s_1r_1] \\ &\quad - 5s_{5/2} - 0.75s_1s_{3/2} + 7.5s_{3/2}r_1 + 4s_1r_{3/2} \\ &\quad \dots\dots\dots(43) \end{aligned} \right\}$$

ここで $r_1, r_{3/2}, \dots, s_1, s_{3/2}, \dots$ は前にのべたとおり、流路形状として (27·a), (27·b) 式によって場合に応じて与えられるものである。

第 1 表 普遍関数

	$F_0''(0) = 0.469600(0.469600)$	$\lim_{\eta \rightarrow \infty} [\eta - F_0(\eta)] = 1.216778(1.216777)$
	$f(\dots)''(0)$	$f(\dots)(\infty)$
$f_{1/2}$	1.133057	1.325374
f_1	1.032362 (1.032361)	1.126367 (1.126359)
$f_{1/2, 1/2}$	-0.942913	-2.331610
$f_{3/2}$	0.961735	0.993889
$f_{1, 1/2}$	-1.630633	-3.929733
$f_{1/2, 1/2, 1/2}$	1.655014	5.228206
f_2	0.908121 (0.908119)	0.897566 (0.897559)
$f_{1, 1}$	-0.714749 (-0.714746)	-1.674479 (-1.674462)
$f_{3/2, 1/2}$	-1.461169	-3.449327
$f_{1, 1/2, 1/2}$	4.296575	13.304777
$f_{1/2, 1/2, 1/2, 1/2}$	-3.889644	-13.637353

$$r_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{k/2} \xi^{k/2}, \quad (r_0=1, r_{1/2}=0) \dots\dots\dots(27 \cdot a)$$

$$r_*(\xi) \cdot h_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{k/2} \xi^{k/2}, \quad (s_0=1, s_{1/2}=0) \dots\dots\dots(27 \cdot b)$$

なお (43) 式の各式の右辺で [] を付した部分は、境界層の排除作用によって誘起された項である。すなわち境界層の排除作用を無視し、主流速度として (17)' 式の $U_{*\infty}$ を与えた場合 [このときには (18), (41) 式における $A_{1/2}=A_1=\dots=0$ となる] には、これら [] の中はすべて 0 となり、[] の外の部分のみが残るのである。以下の式についても同様である。

かくして $\beta_{k/2}$ が与えられれば、 $U_*(\zeta)$ の級数各項の係数 $K_{k/2}$ は (43) 式を (33) 式に代入して次のように求められる。

$$U_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(21 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= 1; K_{1/2} = [1.72078]; K_1 = [-3.22537] - s_1; K_{3/2} = [24.7562 + 2.61225s_1] - s_{3/2}; \\ K_2 &= [-262.637 - 35.2914s_1 + 4.21671s_{3/2}] - s_2 + 0.5s_1^2 + s_1r_1; \\ K_{5/2} &= [3345.06 + 525.724s_1 - 54.2763s_{3/2} + 5.65099s_2 + 7.27398s_1^2 - 5.65099s_1r_1] \\ &\quad - s_{5/2} + 0.85s_1s_{3/2} + 1.5s_{3/2}r_1 + 0.8s_1r_{3/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(44)$$

$U_*(\zeta)$ が知られれば圧力分布 $\bar{p}(\zeta) = p/\rho U_0^2$ は (7) 式より容易に求められる。

$$\bar{p}(\zeta) = \frac{p}{\rho U_0^2} = H - \frac{1}{2} U_*^2(\zeta), \quad (H: \text{定数}) \dots\dots\dots(45)$$

r_* および h_* は (27 \cdot a), (27 \cdot b) 式によって ξ の関数としてあらかじめ与えられているから、 $r_*(\zeta)$, $h_*(\zeta)$ が必要なきには、(23) 式の座標変換を用いればよい。あるいは別に (21 \cdot b), (21 \cdot c) 式によって計算することもできる。

$$r_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(21 \cdot b)$$

$$r_*(\zeta) \cdot h_*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(21 \cdot c)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1; a_{1/2} = 0; a_1 = r_1; a_{3/2} = [-1.14719r_1] + r_{3/2}; \\ a_2 &= [3.09323r_1 - 1.72078r_{3/2}] + r_2 - r_1^2 + 0.5r_1s_1; \\ a_{5/2} &= [-16.3808r_1 + 5.13337r_{3/2} - 2.29438r_2 + 2.29438r_1^2 - 2.42153r_1s_1] \\ &\quad + r_{5/2} - 2.3r_1r_{3/2} + 0.75r_{3/2}s_1 + 0.4r_1s_{3/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 1; b_{1/2} = 0; b_1 = s_1; b_{3/2} = [-1.14719s_1] + s_{3/2}; \\ b_2 &= [3.09323s_1 - 1.72078s_{3/2}] + s_2 + 0.5s_1^2 - s_1r_1; \\ b_{5/2} &= [-16.3808s_1 + 5.13337s_{3/2} - 2.29438s_2 - 2.42153s_1^2 + 2.29438s_1r_1] \\ &\quad + s_{5/2} + 1.15s_1s_{3/2} - 1.5s_{3/2}r_1 - 0.8s_1r_{3/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

境界層の排除厚 δ^* は (16), (17) 式より次のように表わされる。

$$\delta^*/h = 1 - \frac{1}{U_* r_* h_*} \dots\dots\dots(48)$$

ζ の関数としての $(U_* r_* h_*)$ は (21 \cdot a), (21 \cdot c) 式から求めてもよいし、また (18) 式によって計算してもよい。

$$U_* r_* h_* = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(18)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1; A_{1/2} = [1.72078]; A_1 = [-3.22537]; A_{3/2} = [24.7562 + 3.18585s_1]; \\ A_2 &= [-262.637 - 37.3976s_1 + 4.21671s_{3/2}]; \\ A_{5/2} &= [3345.06 + 543.122s_1 - 55.3294s_{3/2} + 5.07740s_2 + 9.47228s_1^2 - 5.07740s_1r_1] \end{aligned} \right\} \dots\dots(49)$$

つぎに、壁面上のせん断応力 $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ は無次元化して次のように表わされる。

$$\bar{\tau}_w = \left(\frac{4\pi r_0 h_0^2 \tau_w}{\mu q} \right) = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} \left(\frac{U_0 h_0}{\nu} \right) = \frac{U_*^2 r_*}{(2\zeta)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{k/2} F_{k/2}''(0) \dots\dots\dots(50)$$

(37), (43) 式および第 1 表の数値を用いれば、係数 $F_{k/2}''(0)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_0''(0) &= 0.469\ 600; F_{1/2}''(0) = [1.949\ 75]; F_1''(0) = [-12.508\ 5] - 2.064\ 72s_1; \\ F_{3/2}''(0) &= [127.183 + 18.113\ 6s_1] - 2.885\ 21s_{3/2}; \\ F_2''(0) &= [-1\ 628.90 - 252.034s_1 + 29.110\ 9s_{3/2}] - 3.632\ 48s_2 - 2.859\ 00s_1^2 + 3.632\ 48s_1r_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(51)$$

最後に、以上のようにして $U_*, \bar{p}, \delta^*/h, \bar{v}_w$ などが ξ の関数として求められれば、(23)式によってこれらを物理空間座標へうつすことができる。

$$\xi = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} B_{k/2} \zeta^{k/2} \dots\dots\dots(23)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; B_{1/2} = [-1.147\ 19]; B_1 = [3.093\ 23] + 0.5s_1 - r_1; \\ B_{3/2} &= [-16.380\ 8 - 2.421\ 53s_1 + 2.294\ 38r_1] + 0.4s_{3/2} - 0.8r_{3/2}; \\ B_2 &= [131.887 + 19.871\ 9s_1 - 7.502\ 51r_1 - 2.552\ 76s_{3/2} + 2.294\ 38r_{3/2}] \\ &\quad + 0.333\ 333s_2 + 0.166\ 667s_1^2 - 1.333\ 333s_1r_1 + 1.666\ 67r_1^2 - 0.666\ 667r_2; \\ B_{5/2} &= [-1\ 360.88 - 225.838s_1 + 39.858\ 6r_1 + 24.035\ 1s_{3/2} - 8.160\ 53r_{3/2} - 2.597\ 87s_2 \\ &\quad - 4.554\ 30s_1^2 + 8.588\ 12s_1r_1 - 5.735\ 95r_1^2 + 2.294\ 38r_2] + 0.285\ 714s_{5/2} \\ &\quad + 0.328\ 571s_1s_{3/2} - 1.228\ 57s_{3/2}r_1 - 1.228\ 57s_1r_{3/2} + 3.028\ 57r_1r_{3/2} - 0.571\ 429r_{5/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

かくして、本問題の流れの助走区間に対する級数解法が完成された。級数の項数としては、本研究では以上のように 5/2 次までとって計算したが、これ以上項数をふやすと急速に計算がやっかいになるので、実際問題としてはこの程度までが限度であろう。

2.5 差分法による解の延長 通常の境界層問題

においては、はく離点の特異性をもっているために、問題を級数解法で解いた場合、はく離点の近くで急激に級数の収束性がわるくなることはよく知られている。しかし本問題においては、緒言に詳述したように、はく離点の特異性をもたないから、一般にはく離点において級数が発散するということは考えられない。しかしいづれにしても下流へ進むほど収束性がわるくなることは一般的にいて事実である。

そこで本研究では

- (1) 級数の収束性が不十分な下流の領域に対して精密な解を求める。
- (2) 本問題の流れのはく離点の特異性をもたないということを数値的に確認する。

という二つの目的のために、差分法によって級数解を延長することをこころみる。

通常の境界層問題における差分計算法としては、Görtler⁽¹³⁾によって開発され Witting⁽¹⁴⁾によって改良された方法がよく知られている。本研究においてもほぼこれと同様な方法を採用ことにしたが、ただこの場合通常の境界層と異なって、主流速度が既知でなく、流量に関する条件(4)を満足するように定められるべきものであるという点に留意せねばならない。

このような相違点を考慮し、さらに本研究では電子計算機(HIPAC-103)で計算するという前提のもとに、以下に概説するような計算法を考えた。

$\xi = \xi_0$ の点から差分法を適用するとし、メッシュ間

隔を ξ 方向に g , $y_* = (y/h_0)$ 方向に l とする。

$$\xi_i = \xi_0 + ig; y_{*k} = kl \dots\dots\dots(53)$$

ここに $i, k = 0, 1, 2, 3, \dots, y_* = \frac{y}{h_0}$

次のような階差を定義すれば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{i,k} &= u_{*i+1,k} - u_{*i,k} = g \left(\frac{\partial u_*}{\partial \xi} \right)_{i,k} \\ \nabla_{i,k} &= u_{*i,k+1} - u_{*i,k} = 2l \left(\frac{\partial u_*}{\partial y_*} \right)_{i,k} \\ \nabla_{i,k}^2 &= \nabla_{i,k+1} - \nabla_{i,k} = 4l^2 \left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial y_*^2} \right)_{i,k} \end{aligned} \right\} \dots\dots(54)$$

ここに $u_* = (u/U_0)$, $u_{*i,k} = u_*(\xi_i, y_{*k})$

Görtler-Witting と同様な方法で、(2・a), (2・b)式より次のような $\Delta_{i,k}$ を求めるための階差式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{i,k} &= \left[\frac{g}{l^2} (\nabla_{i,k}^2 - \nabla_{i,0}^2) + 2\nabla_{i,k} \sum_{j=1}^{k-1} \Delta_{i,j} \right. \\ &\quad \left. + g \left(\frac{r_*'}{r_*} \right)_i \nabla_{i,k} \left(2 \sum_{j=1}^{k-1} u_{*i,j} + u_{*i,k} \right) \right] \\ &\quad / [4u_{*i,k} - \nabla_{i,k}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

ここに $\nabla_{i,0}^2 = -4l^2(U_*U_*')_i$, $U_*' = \frac{dU_*}{d\xi}$

$$r_*' = \frac{dr_*}{d\xi}$$

なお、(54)式で、 $\Delta_{i,k}$ として特に 2-level ($\nabla_{i,k}$, $\nabla_{i,k}^2$ は 3-level) の階差をとったが (Görtler-Witting は $\Delta_{i,k}$ も 3-level), これは Görtler も指摘しているように、3-level の場合におこりうるような、出発点の誤差による解の振動傾向がないこと (本問題では流量に関する式と連立させるので特にこれが問題となる), ステップサイズの変更が容易であること, などを考慮したためである。

(55)式を計算する場合、 $\nabla_{i,0}$ および $\nabla_{i,1}^2$ の値は

(54)式からは得られないので、別に定めてやらねばならないが、これについてはいまの場合(軸対称)にも Witting が平面二次元の場合に対して与えた次式⁽¹⁴⁾をそのまま用いることができる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{i,0} &= -0.47347 \nabla_{i,0}^2 + 1.79091 u_{*i,3} \\ &\quad - 1.13331 u_{*i,4} + 0.23210 u_{*i,5} \\ \nabla_{i,1}^2 &= 0.68972 \nabla_{i,0}^2 - 1.43631 u_{*i,3} \\ &\quad + 1.53392 u_{*i,4} - 0.36535 u_{*i,5} \end{aligned} \right\} \dots(56)$$

なお Witting は壁面近く ($k=1, 2$) における (55) 式の精度を向上させるために、一つの方法を考えているが、これは本問題のように主流速度が既知でない場合には適用することができない。

さてつぎに、本問題では上の式のほかに、流量に関する式 (4) を満足することが必要である。積分を台形公式によれば次式が得られる。

$$r_{*i+1} \left[l \left(\sum_{j=1}^{n-1} u_{*i+1,j} + \frac{1}{2} u_{*i+1,n} \right) + (h_{*i+1} - nl) U_{*i+1} \right] = 1 \dots(57)$$

ここに n は計算のけた数の範囲(本計算では 11 けた)で $\nabla_{i+1,k} = \nabla_{i+1,k}^2 = 0$ となるような最小の k の値である。なお助走区間においては当然 $h_{*i+1} > nl$ 。

計算方法は次のとおりである。 ξ_i における速度分布 $u_{*i}(y_*)$ が与えられたとき、まず $\nabla_{i,0}^2$ (したがって U_{*i}') にあまりちがわくない二つの適当な値を仮定してそれぞれについて (55), (56) 式を計算し、 $u_{*i+1}(y_*)$ を求める。この場合計算は $k=n$ まで行なえば十分である。それらを (57) 式に代入すれば、一般に左辺は 1 とならないが、(57) 式の左辺は $\nabla_{i,0}^2$ に関して線形であるから、この二つの値から線形内そうによって正しい解が得られる。このようにして $\nabla_{i,0}^2$ の値が決定されれば

$$U_{*i+1} = U_{*i} + g U_{*i}' = U_{*i} - \frac{g}{4l^2} \nabla_{i,0}^2 \dots(58)$$

によってつぎのステップにおける主流速度 U_{*i+1} が定められることになるのである。

3. 計算例ならびに考察

本理論は、流路形状として、(1) および (29) 式の条件をみたし (27) 式の級数で表わされるようなすべてのものを包括しているが、ここでは実際問題としてもっとも重要な平行二円板間の放射状流れ(第1図)を例にとって計算する。なお第1図は流れが半径 r_0 からすきまにはいって外側に流れる場合であるが、参考のために逆に外周半径 r_0 からすきまにはいって中心向きに流れこむ場合をもあわせてとりあつかう。

3.1 計算結果 この場合の壁面形状は

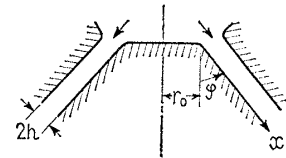
$$r_* = 1 \pm \left(\frac{x}{r_0} \right) = 1 \pm R\xi, \quad h_* \equiv 1 \dots(59)$$

と表わされる。ここで + は外向き流れ、- は中心向き流れの場合である。したがって (27·a), (27·b) 式の各項係数は次のようになる。

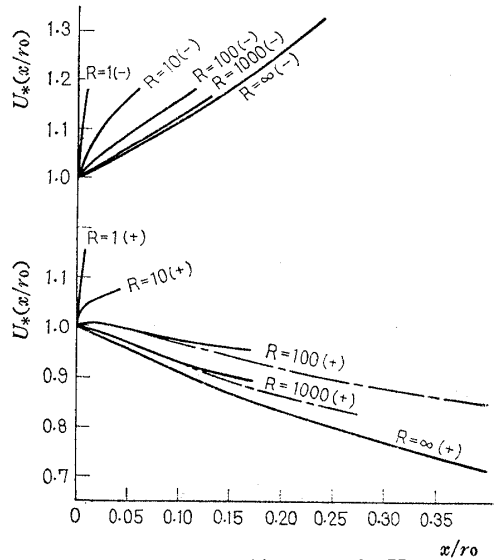
$$\left. \begin{aligned} r_1 = s_1 &= \pm R, \\ r_{3/2} = r_2 = \dots = s_{3/2} = s_2 = \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(60)$$

なお第3図に示すような半頂角 φ ($\pi/2 > \varphi > -\pi/2$) の円すい壁面(入口半径 r_0 , すきま $2h$ 一定)の場合には

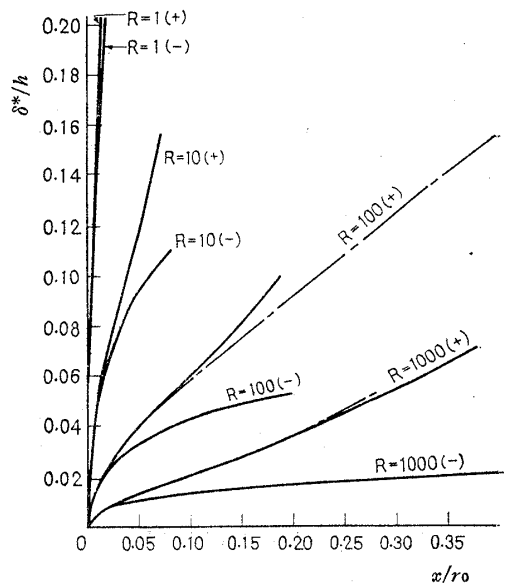
$$r_* = 1 + \sin \varphi \left(\frac{x}{r_0} \right) = 1 + \sin \varphi R\xi \dots(61)$$



第3図 円すい形壁面形状



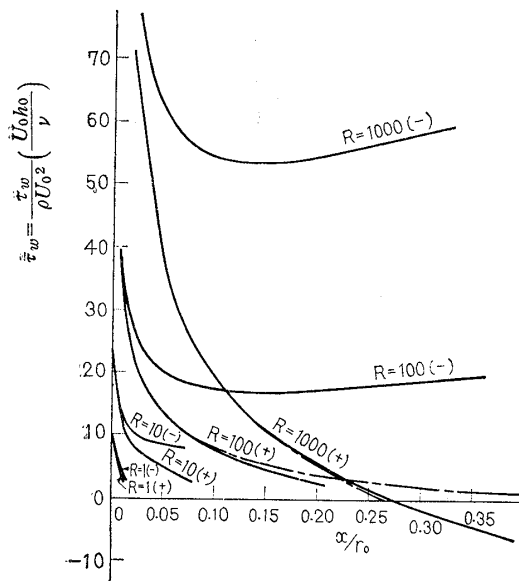
第4図 主流速度分布 U_*



第5図 境界層排除厚 δ^*/h

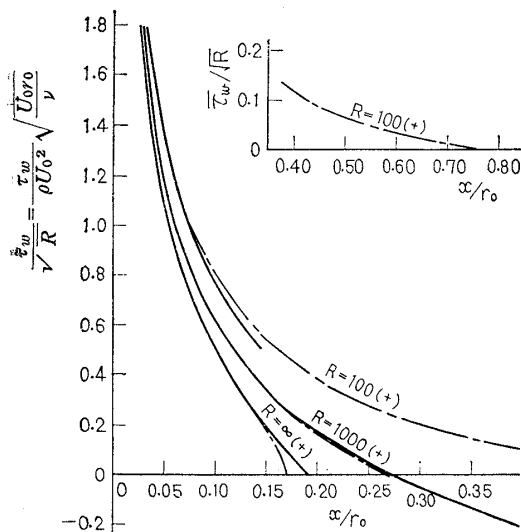
であるから、 $|\sin\varphi|R$ をあらためて R とかけば、(59) 式と同じ形となり、したがって両者の流れに関する解も ξ -空間に関して全く同一となる。すなわち第3図の流れは、等価的に平行二円板間の流れ(第1図)におきかえて考えることができるわけである。

さて(60) 式を2.4節で得られた級数解の諸式に代入して、 R を1, 10, 100 および 1000 とした場合の計算結果を第4, 5, 6 図に示す。図中 R の数値に付した(+) は外向き流れ、(-) は中心向き流れを表わす。これらの図には、級数の収束性がおおむね良好な範囲のみを示した。第6図は



第6図 壁面上のせん断応力

$$\bar{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} \left(\frac{U_0 h_0}{\nu} \right)$$



第7図 壁面上のせん断応力

$$\bar{\tau}_w/\sqrt{R} = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}}$$

$$\bar{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} \left(\frac{U_0 h_0}{\nu} \right)$$

に関するものであるが、これを

$$\bar{\tau}_w/\sqrt{R} = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2} \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}}$$

について整理しなおすと第7図のようになる(外向き流れのみを示す)。同様に第8図は、第5図の δ^*/h を

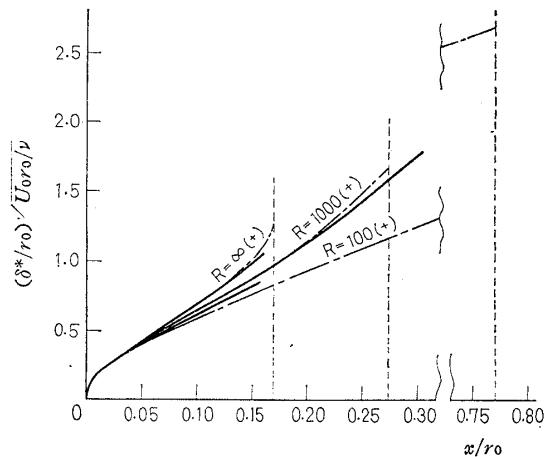
$$\sqrt{R} \left(\frac{\delta^*}{h} \right) = \frac{\delta^*}{r_0} \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}}$$

について整理しなおしたものである(外向き流れのみ)。また境界層速度分布の一例として $R=1000(+)$ の場合を第9図に示す。

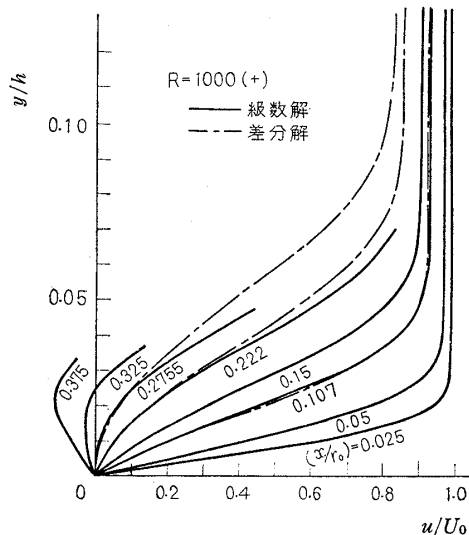
つぎに、境界層の排除作用を考慮しない場合、すなわち主流速度として(17)' 式

$$U_{*\infty} = \frac{1}{r_*} = \frac{1}{1+x/r_0}$$

を与えた場合の計算結果を第4, 7 および 8 図に $R=\infty(+)$ として示す。このときは主流速度が既知であ



第8図 境界層排除厚 $(\delta^*/r_0) \sqrt{U_0 r_0 / \nu}$



第9図 境界層速度分布の一例

るから、前にのべたように、通常の境界層問題となるわけである。

座標変換 [(8・a) 式] は

$$\bar{\xi} = \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \dots\dots\dots(62)$$

ここに $\bar{\zeta} = R\zeta$, $\bar{\xi} = R\xi = \frac{x}{r_0}$

となり、これより principal function (14) は

$$\lambda(\bar{\zeta}) = -2\bar{\zeta} + 4\bar{\zeta}^2 - 8\bar{\zeta}^3 + 16\bar{\zeta}^4 - 32\bar{\zeta}^5 + \dots\dots\dots(63)$$

となって、級数展開における $(n-1/2)$ 次 ($n=1, 2, 3, \dots$) の項が消失する。すなわちいまの計算例においては、 $(n-1/2)$ 次の項は境界層の排除作用によって誘起されたものであることがわかる。このようなタイプの級数に対する (13), (15) 式の解は、すでに Görtler⁽¹⁰⁾ によって与えられている (Görtler の分類では Class I, Case A に相当) ので、その普遍関数表⁽¹⁵⁾ を用いて $\bar{\tau}_w/\sqrt{R}$ および $\frac{\delta^*}{r_0} \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}}$ を計算した結果 (級数は五次の項までとってある) が、第 7, 8 図の $R=\infty(+)$ の曲線である。

さて、これら級数解の収束性がわるくなる下流領域に対して、精密な解を求めるために、 $R=100(+)$, $1000(+)$ および $\infty(+)$ の三つの場合について、2・5 節にのべた差分法で計算した結果を第 4~9 図の一点鎖線で示す。なお、この際、いうまでもなく $R=\infty(+)$ の場合には、主流速度が既知であるから、(57)式は用いない。ξ 方向のステップ g ははく離点に近づけたがって小さくする必要があるが、本計算ではつぎのように選んだ。

- $R=100(+)$: $\xi \times 10^4 = 4(0.1)34.3(0.05)$
 $44.6(0.02)64.08(0.01)70.0(0.005)77.0$
- $R=1000(+)$: $\xi \times 10^5 = 2.5(0.1)10.7(0.05)$
 $21.2(0.02)24.8(0.01)26.83(0.005)27.4$
- $R=\infty(+)$: $\bar{\xi} = 0.14(0.002)0.154(0.001)$
 $0.164(0.0005)0.170$

ここで、 $A(\epsilon_1)B(\epsilon_2)C\dots$ は、 $A(B)$ と $B(C)$ の間を $\epsilon_1(\epsilon_2)$ のステップで計算したことを表わす。 y_* 方向のステップ l は、 $R=100(+)$ のとき 0.01, $1000(+)$ のとき 0.0025, $\infty(+)$ のとき $\sqrt{R}y_* = \frac{y}{r_0} \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}}$ のスケールで 0.2 とした。

3・2 考察

まず第 4, 5 図よりわかるように、レイノルズ数 R が小さいほど、境界層の成長が急速であって、それにとまって主流速度の加速される割合も大きくなる。一般に同じレイノルズ数では、外向き流れよりも中心向き流れのほうの境界層厚さがうすい。

また中心向き流れでは、はく離はもちろん起り得ない (第 6 図)。

本理論は、助走区間を対象として構成されたものであり、一方助走区間と充満区間の間にはもちろん明確な境界というものが存在しないから、級数解は下流へ進むにしたがい、徐々に (急激でなく) 収束性がわるくなるであろうということが予測されるが、実際これら計算結果も $R=\infty(+)$ の場合を除き、すべてそのような傾向を示している。

また一般に、レイノルズ数が小さいほど、級数の収束性のよい範囲がせまくなっているが、これはレイノルズ数が小さくなるほど、助走長さが短くなることによるものと考えられる。

なお、本理論による級数解では、 U_* , δ^*/h , $\bar{\tau}_w$ などで、それぞれの収束性のよい範囲が必ずしも一致していないということに注意すべきである。たとえば、 $R=1000(+)$ のときには、 $\bar{\tau}_w$ は $(x/r_0) \cong 0.4$ までよく収束しているのに対し、 U_* は $(x/r_0) \cong 0.18$ 付近から徐々に誤差がふえてきている。このことは、第 9 図の境界層速度分布をみればいっそうはっきりする。すなわち $R=1000(+)$ の場合には、級数解の収束性は境界層の外側のほうから早くわるくなっていくのである。ただしこのような傾向は、レイノルズ数の値が変ればまた異なったものとなるのであって、たとえば $R=100(+)$ では $\bar{\tau}_w$ と U_* の収束性のよい範囲はともに $(x/r_0) \leq 0.10$ となってほぼ一致する。

つぎに、外向き流れにおけるはく離の問題について考える。まず全般的にいって、レイノルズ数が小さくなるにつれてはく離点が下流側へ移動していくという重要な事実がみとめられる (第 6, 7 図)。これは緒言に詳述した予測を明確にうらづけるものである。通常の境界層問題においては、レイノルズ数は流れの y 方向の尺度を伸縮させるだけで、 x 方向にはなんら変化をもたらしえないということに対比すれば、このことは重要な相違点である。またこのように、レイノルズ数が小さくなるにつれて、はく離点が下流側へ移動する一方、助走長さはしだいに短くなるから、レイノルズ数がかかなり小さければ、はく離は充満区間にはいってから起るようになるであろう。

さらに、 $R \rightarrow 0$ のときには、(59)式よりわかるように、流れは同心二重円筒間の軸方向流れと同じ状態に近づく [なおいまの場合、(1・a)式の条件があるから、これはまた平行二平板間の平面二次元流れの状態と同じものとみなせる]。このような状態においては明らかにはく離は起らない。したがってこのことから、レイノルズ数 R が有限のある値ではく離がおこらなくな

るということがたしかめられるのである。

さて、 $R=1000(+)$ のときには、はく離が $\bar{\tau}_w$ の級数解の収束性の十分よいところで起るために、 $\bar{\tau}_w(x/r_0)$ に関する級数解と差分解とはきわめてよく一致している〔第 6, 7 図。両者によるはく離点はそれぞれ 0.276 (級数解) と 0.274 (差分解)〕。

これに対し $R=100(+)$ となると、はく離が級数解の収束性がすでにわるくなったところで起るために、第 6, 7 図のようにならぬ差を生じている(差分解によるはく離点は 0.770)。

これらレイノルズ数 R が有限の場合の差分解の数値を詳細に検討すると、はく離点 ($x=x_s$) における

$\tau_w(x)$ および $\delta^*(x)$ のこう配 $\left(\frac{d\tau_w(x_s)}{dx}, \frac{d\delta^*(x_s)}{dx}\right)$ が、いずれも有限の値をとっているという重要な事実がみとめられる。 $\left\{ \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}} \left(\frac{r_0}{\rho U_0^2} \right) \frac{d\tau_w(x_s)}{dx} = -1.58 [R=1000(+)], -0.14 [R=100(+)]; \sqrt{\frac{U_0 r_0}{\nu}} \frac{d\delta^*(x_s)}{dx} = 8.85 [R=1000(+)], 2.65 [R=100(+)] \right\}$ 。このことは、

Stewartson の議論⁽⁵⁾ より明らかなように、はく離点が特異性をもたないということを数値的に証明するものである。通常の境界層問題〔本研究における $R=\infty(+)$ もその一つ〕においては、一般にはく離点が特異性をもつ

ために、 $\left(\frac{d\tau_w(x)}{dx}\right)_{(x-x_s) \rightarrow 0}$ が $-\infty$ 、 $\left(\frac{d\delta^*(x)}{dx}\right)_{(x-x_s) \rightarrow 0}$ が $+\infty$ となることはよく知られている。第 7, 8 図の $R=\infty(+)$ の差分解も明らかにそのようになっており、 R が有限の場合に比較して、明確な傾向の相違がみとめられる (差分解によるはく離点は 0.170)。

なおこれに関連して興味あることは、 $R=1000(+)$ という大きなレイノルズ数は、現象として $R=\infty(+)$ にならぬ近い状態と考えられるにもかかわらず、級数解の収束性が、 $R=\infty(+)$ のときはく離点の少し上流のところ急激にわるくなるのに対し、 $R=1000(+)$ のときはかなり上流から徐々にわずかなづつわるくなるという明らかに相異なつた傾向を示すことである。このようなことも、はく離点の数学的性質 (特異性の有、無) に関係があるものと考えられ、主流速度が境界層の排除作用によってコントロールされるかされないかで、境界層方程式の解の性質がいかに変わるかということを示すものとして、興味ぶかいことである。

4. 結 言

二つの軸対称任意形状壁面によってつくられたせま

いすきまにおける層流の助走区間に対して、境界層方程式の厳密な級数解を求めた。2・4 節にまとめられたそれらの結果は、実際応用分野にも有効に利用されるものとする。

代表例として、平行二円板間の放射状流れについて、詳細な計算を行ない、さらに差分法による計算も行なって結果を比較した。その結果、はく離点 (x_s/r_0) は、レイノルズ数 $R=(U_0 h_0^2/\nu r_0)$ が小さくなるにつれて下流側へ移動すること、および R がある値より小さくなればはく離が全くおこらなくなること、さらに緒言に詳述したとおり、本問題の流れにおけるはく離点には、数学的な特異性がないということなどがたしかめられた。したがって本理論による級数解は、収束性のよい範囲内において、はく離点をこえてさらに下流域までを正しく表わすことができるものである。

なお、このようにはく離点に特異性を生じないためには、主流速度が境界層の排除作用によって調節されることが必要である。

これらの結論は、Goldstein, Stewartson, Meksyn らの定常層流境界層方程式におけるはく離点の性質に関する議論に対して、特異性をもたないはく離点の可能性についての一つの具体例を提供するものである。はく離点が特異性をもたないような定常層流境界層方程式の理論解としては、本研究の結果がおそらくはじめてのものであらうと考えられる (他に特異性のないはく離の可能性を指摘したものとして、Fraenkel⁽¹⁶⁾ の研究などがあるが、しかしこれは境界層方程式にもとづく解析ではない)。

なお、本計算例の $R=1000$ 程度の大きなレイノルズ数においては、実際現象はほとんど乱流に遷移してしまうであろうが、ここでは境界層方程式の数学的性質の検討のために、特にこのような値をもえらんだのである。

本研究による級数解の精度がわるくなる下流 (充満区間をも含めて) に対しては、別の解析を行なわねばならない。緒言にのべたような、はく離がおこらなくなる臨界レイノルズ数の存在、下流におけるはく離流れの再付着など興味ある現象の理論的解明は、ひきつづき第 2 報として報告する予定である。

終りに、本研究における HIPAC-103 を用いた諸計算のプログラミングその他は、水沼聡子研究員によるものであることを記し、ここに感謝の意を表す。

文 献

- (1) 沖, 機械学会論文集, 28-195 (昭 37-11), 1450, その他。
- (2) 萩原, 機械学会論文集, 28-186 (昭 37-2), 138, 145, 150。

- (3) 石沢, 機械学会論文集, 28-195 (昭 37-11), 1 512.
- (4) S. Goldstein, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1(1948), 43.
- (5) K. Stewartson, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 11 (1958), 399.
- (6) R.M. Terrill, *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A*, 253-1022 (1960), 55.
- (7) D. Meksyn, *New Methods in Laminar Boundary Layer Theory*, (1961), Pergamon Press.
- (8) L.D. Landau, *Fluid Mechanics* (Vol.6 of Course of Theoretical Physics, translated by J.B. Sykes, & W.H. Reid), (1959), 151, Pergamon Press.
- (9) H.W. Woolard, *J. Appl. Mech.*, 24-1 (1957), 9.
- (10) H. Görtler, *J. Math. Mech.*, 6-1 (1957), 1.
- (11) H. Schlichting, *Z. AMM*, 14 (1934), 368.
- (12) S. Gill, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47 (1951), 96.
- (13) H. Görtler, *Ing.-Arch.*, 16 (1948), 173.
- (14) H. Witting, *ZAMP*, 4 (1953), 376.
- (15) H. Görtler, *DVL Berich*, Nr.34 (1957).
- (16) L.F. Fraenkel, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 267 (1962), 119; 272 (1963), 406.
- (17) S. Goldstein, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, (1938), Clarendon Press, Oxford.

討 論

〔質問〕 (1) 数値計算された外向き流れで, 断面の速度分布は下流に進むにつれてどのように変化してゆくのか. または離領域ではどのような速度分布になるのか. 文献 (11) で助走区間の速度分布が図示されているように, 図示されると良いと思う.

(2) 中心向き流れでは, 上流側の条件を与えて流れを求めるのが普通だが, 中心向き流れの数値計算例ではこの点の取扱いはどのようにされたのか. ご意見を伺いたい.

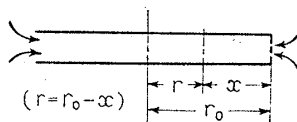
(3) (3-b) 式境界条件 $v=U \cdot dh/dx$ はどのようにして導いたか. (伊藤 英覚)

〔回答〕 (1) ご質問により境界層速度分布の一例を本文 3.2 節に図とともに追加いたしました.

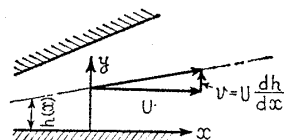
(2) x 座標の定義の問題であるが, 本研究では本文にものべてあるように, 流れの入口 ($r=r_0$) を原点とし, 流れの方向を正にとってある. したがって中心向き流れの場合でも $x=0$ が流れの入口である. なお中心向き流れでは $(x/r_0)=1$ が流れの集中する中心点であって $(x/r_0)>1$ の領域は実在しないわけである (付図 1).

(3) 本理論では壁面形状に対して (1-a), (1-b) 式のような制限条件を付しているから, 流れはすきま中心に関して対称とみなせる. したがってすきま中心 $y=h(x)$ 上では, 流線の方向は中心線と一致すると考えてよいから, 付図 2 のように, ご質問の境界条件が得られる.

なお参考までに, 主流に関するベルヌーイの式は, 上のことから正確には (7) 式の代りに



付図 1



付図 2

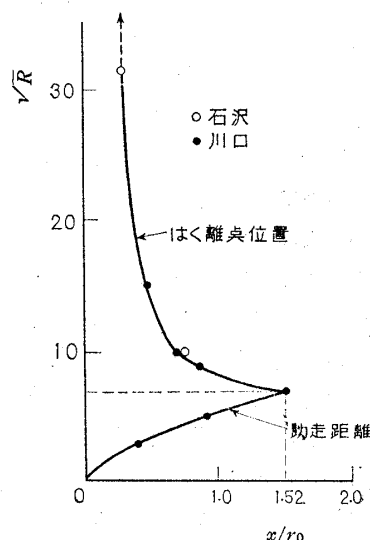
$$p + \frac{1}{2} \rho(U^2 + v_{y=h}^2) = p + \frac{1}{2} \rho U^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right\} = \text{一定}$$

と与えられる. したがって本理論では, $\left(\frac{dh}{dx} \right)^2$ 以上の高次の項を省略してとりあつかっていることになるわけである. なお, いうまでもなく, すきまが一定の場合には $(dh/dx)=0$ ゆえ, (7) 式は境界層近似の範囲内で厳密に正しい.

〔質問〕 (1) 二次元境界層の Görtler の級数解法を放射状通路の助走区間にも拡張され, さらに普遍関数群系を充足されたことに敬意を表します. または離点がこの場合には, 方程式の特異点にならないで主流がはがれずに進行することを明らかにされたことは興味深いものと思う.

(2) 平行二枚円板間の流れのはく離点と助走距離について, 川口達二氏が運動量式を用いて近似計算を行なった (未発表) 結果を本研究の計算結果と比較すると, 付図 3 のようにほぼ等しい結果となる. 厳密解を与えられたことに敬意を表します.

またレイノルズ数 $R=(U_0 h/\nu)(h/r_0)$ が小さくなるとはく離が全くおこらなくなる以前にポテンシャル流



付図 3

れが消失するためはく離をおこさないと思われるがどうか。(古屋 善正)

〔回答〕 未発表であるが現在筆者も運動量積分式を用いた近似計算を行なっているが、それによるとはく離点の位置に関しては、厳密解と比較してある程度の差を生じている。それに比べて川口氏の近似計算は非常に精度がよいものと思われる。詳しい内容を拝見し参考にさせていただきたい。

つぎに、助走区間のあとの、ポテンシャル流れが消失した領域においては、はく離が起り得ないであろうというご意見に対しては、次のように考える。

Pohlhausen 法などでは、境界層厚さとして近似的に有限の値を考えているが、厳密には周知のように、境界層と主流とを区別する明確な境界というものがないから、助走区間と充満区間との間で、流れの力学的性質が不連続に変ることはないと考えられる。したがって、助走区間の終る直前において圧力が増大しつつあるときには、ポテンシャル流れが消失してからさらに下流のある位置まで圧力は上昇を続けるものと考えられるから、そこでは流れのはく離が起ることもあり得ると考えられるのである。なお、十分下流では粘性損失のために圧力が流れ方向に減少していくようになるから、そこでははく離が起り得ないことは確かである。

ちなみに、Woolard の近似理論〔文献(9)〕によれば、ポテンシャル流れが消失したあとではく離が起るという結果が得られている。もっとも、この Woolard の理論はかなりあいまいな近似を行なったものではあるが、いずれにしても、上述のことを考え合わせれば、ポ

テンシャル流れが消失すればもはやはく離は全く起り得ないとする確定的な根拠はないものと考えられる。

〔質問〕 計算は流入部に均一流を仮定しているが、流入部に鋭い角があればこれが流れにいかに関与するか。(村上 光清)

〔回答〕 すきま入口におけるかどが流れに及ぼす影響については、空気マイクロメータとか円形弁などの実際問題の研究分野において実験的にかなりしらべられている。

入口におけるかどが鋭い場合には、一般にそこから流れのはがれ(これは本文にのべた分類でいえば一種の breakaway 現象である)が起り、圧力損失の増大、流れの不安定などをひきおこす。このような傾向は流れのレイノルズ数が大きいほど著しくなるが、一方レイノルズ数がかなり小さければほとんど問題にならない。

このような流れのはがれは、かどにまるみをつけることによってかなり効果的に防止できることはよく知られている。

さらに詳細については文献(2)のほか、P.S. Moller, *Aeron. Quart.*, 14(1963), 163; 石原, 機械学会論文集, 20-93(昭29), 334; 中山, 機械学会論文集, 30-210(昭39), 202などを参照されたい。

この問題を理論的に詳細にとりあつかうことはかなり困難であると考えられる。そのため従来行なわれている研究もすべて実験的なものに限られている。本研究では、これ自身一つの問題として別途に考えることとし、考慮しないことにした。



電気泳動式セラミック被覆

スリップから純度の高い製品を鋳造する方式として「電気泳動」方式が、セラミック産業界から注目を浴びている。この方式はソ連で開発され、まだ研究所の段階のものである。この方式の原理は鋳型を電極のひとつとして使用し、電流がスリップを通過するようにすれば、セラミック粒子が帯電し、この電極に付着するということである。この方法により、従来の鋳造、スプレ、浸し掛け方式によるよりもはるかに一定な、また純度の高い被覆と鋳造ができる。

ソ連の A. I. Avgustinik の研究チームは、セラミック電気泳動方式の研究を完了したが、その研究中に銅線、棒、シリンダにセラミック被覆を施す方法を開発した。この新方式は電気分解による化学反応を起し、ガスを発生させて、ユニフォームな被覆を不可能にする危険があるので、懸濁液を使用するわけに行かない。研究員達は、エチル、メチルアルコール、アセトン、またはそれらに似た液体を使用するとよいといっている。

ガラス状エナメル方式の場合のように、セラミック被覆が金属に施される場合は、被覆される品物の表面を脱脂するかその他の処理が絶対に必要である。ソ連の研究員達によれば、銅に電気泳動方式でセラミックを付着させる場合にはこの処理は不必要である。なぜかといえば欠点のないスムーズな被覆ができあがるし、電極間を通過する電圧を変えることによって、その厚さをコントロールすることができるからである。

またこの場合、いくつかの成分を持った被覆を施すこともできる。伝統的セラミック方式の場合には成分をガラス化したり融合させたりする必要があるが、新方式ではその必要がない。

新方式においては被覆過程中に汚染が生じやすいから、この点に十分注意しなければならない。

(New Scientist, 1964, Vol. 22, No. 397, p. 806~807)

(日本科学技術情報センター提供)