非線形制御系における外乱の隔離可能性†

石　島　辰太郎*

The Disturbance Decoupling Problem of Nonlinear Control Systems

Shintaro ISHIJIMA*

In the disturbance decoupling problem (DDP) of the linear system (A, B, C), the A-invariant subspace and the (A, B)-invariant subspace are proved to play a key role. The purpose of this paper is to extend the study of the DDP to nonlinear control systems.

It must be noted that the problems are stated on the tangent bundle over the state space. The state space and the tangent bundle over it can be identified in the analysis of linear systems, but they must be distinguished in the case of nonlinear systems. So it is needed to establish the corresponding concepts in the state space to extend the A-invariance and the (A, B)-invariance to nonlinear systems. From such a point of view, the invariant structure and the structure which can be modified invariant by nonlinear state feedback are introduced as the state space representations of the A-invariant subspace and the (A, B)-invariant subspace.

The main result obtained here, is the algebraic necessary and sufficient condition for the DDP of the nonlinear control systems.

1. はじめに

外乱の隔離可能性の問題は，状態フィードバックを考慮したシステムの分割問題などの基礎となる問題として重要である．すでに線形システムにおいては，この問題は多くの人達によって研究され，ほぼ完全な形で解決されている．とくに Wonham らは[1]，このような問題では，システムオペレータに対して不変な部分空間 (A-invariant subspace) と，状態フィードバックによって不変にできる部分空間 ((A, B)-invariant subspace) とが重要な役割を果すことを示した．

一方，非線形システムの可制御性や可観測性に関して，微分幾何学的な手法を適用することにより，いくつかの代数的な結果が導かれている[2),3),7)]．そしてこれらの結果もまた，幾何学的には，システムの定義するベクトル場に対する部分多様体の不変性に密接に関係している．したがって，非線形システムの外乱の隔離可能性の問題においても，線形システムにおける (A, B)-invariant subspace に相当するような概念が重要となると予測される．

本論文の目的は，以上の観点から線形システムにおける二つの不変部分空間の概念を非線形システムに拡張し，これらの概念を用いて，非線形システムにおける外乱の隔離可能性に関する代数的な条件を導くことである．ところで，線形システムでは，その線形性により状態空間と接空間をまったく同一視して扱うことができたが，非線形システムでは，これらは厳密に区別されるべきである．実際，線形システムで，A-invariant subspace とよばれている部分空間は，接空間における部分空間であり，状態空間における幾何学的な理論展開のためには，これに対応する不変性の概念を状態空間に導入する必要がある．このような考察に基づいて，2節で，不変構造および不変化可能構造の概念が導入される．つぎに，3節では，不変構造についての基本的な性質を，接バンドルにおける特徴という立場から考察する．これらの結果を用いて，4節では，不変化可能構造に対する代数的な結果を導き，外乱の隔離可能性に対する局所的な必要十分条件を導く．

2. 問題の記述と定義

議論の対象は，つぎの微分方程式で記述されるシステムとする．

$$\dot{x}=X_0(x)+\sum_{j=1}^{r} X_j(x)u_j \tag{1}$$

$$y=g(x) \tag{2}$$

R^n を n 次元ユークリッド空間とし，これを状態空間とする．また，$x(t)\in R^n$ を状態，$y(t)\in R^m$ を出力，

---

† 第2回システムスシンポジウムで発表（昭 51・7）

* 東京都立工科短期大学　日野市旭が丘 6-6
* Metropolitan College of Technology, Tokyo, Hino

(Received January 28, 1977)

$u(t)=(u_1, \cdots, u_r)(t) \in R^r$ を入力とよぶ.

$X_j(x)$, $j=0, 1, \cdots, r$ は, R^n で定義された完備な解析ベクトル場とし, $g(x)$ は, R^n から R^m への解析写像とする. ここで, 集合Dを $D \triangleq \{X_0, \cdots, X_r\}$ と定義し, (1), (2)式で記述されるシステムをシステム (D, g) とよぶ.

システム (D, g) に対して, 外乱 $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_l)$ が加わるつぎのようなシステムを考える.

$$\dot{x}=X_0(x)+\sum_{j=1}^{r} X_j(x)u_j+\sum_{j=1}^{l} Y_j(x)\omega_j \quad (3)$$

$$y=g(x) \quad (4)$$

この時, $L=\{Y_1, \cdots, Y_l\}$ とし, このシステムをシステム (D, g, L) とよぶ. ただし, Y_i, $i=1, \cdots, l$ は R^n 上の解析ベクトル場とする. いま, Ωを有界可測関数の集合とし, これを許容制御とよぶ. また, 微分方程式(3)の x_0 を初期値とし, $u \in \Omega^r$, $\omega \in \Omega^l$ に対する解を $x(t, x_0, u, \omega)$ で表す.

【定義 2.1】

システム (D, g, L) において, 点 $x_0 \in R^n$ の近傍Uで, $x_s \in U$ とするとき, $x(t, x_s, u, 0) \in U$ かつ $x(t, x_s, u, \omega) \in U$であるような任意の t と, $u \in \Omega^r$, $\omega \in \Omega^l$ に対して

$$g(x(t, x_s, u, 0))=g(x(t, x_s, u, \omega)) \quad (5)$$

が成立するものが存在するなら, 外乱ωは, システムの入出力関係から隔離されているという.

つぎに,次式のようなフィードバック制御を考える.

$$u_j(t)=f_j(x(t))+v_j(t) \quad j=1, \cdots, r \quad (6)$$

ここで, f_j, $j=1, \cdots, r$ は R^n 上の解析関数とする. 状態フィードバック(6)をシステム (D, g, L) に施したときの点 x_0 を初期点とし, $v=(v_1, \cdots, v_r) \in \Omega^r$ および $\omega \in \Omega^l$ を入力とする解を $\hat{x}(t, x_0, v, \omega)$ で表す.

【定義 2.2】

システム (D, g, L) において, 点 $x_0 \in R^n$ の近傍UとUで定義された状態フィードバック(6)でつぎの性質を満たすものが存在するとき, 外乱 ω は, 点 x_0 でシステムの入出力関係から隔離可能であるという.

$$\forall x_s \in U, \quad \forall u \in \Omega^r, \quad \forall \omega \in \Omega^l,$$
$$\hat{x}(t, x_s, u, \omega) \in U,$$
$$\hat{x}(t, x_s, u, 0) \in U \Rightarrow$$
$$g(\hat{x}(t, x_s, u, \omega))=g(\hat{x}(t, x_s, u, 0)) \quad (7)$$

さらに, システム (D, g, L) において, 外乱 ω が任意の点 $x_0 \in R^n$ で隔離可能であるとき, ω は隔離可能であるという.

(注意 2.1)　以下の議論はすべて局所的な議論である. したがって, 解の存在は常に保証されていると考えても一般性は失われない. また, ここでは状態空間をユークリッド空間としているが, 状態空間を一般的な解析多様体としても, 以下の議論はそのまま成立する.

ベクトル場の集合Hが与えられたとき, Hとベクトル場の間のリー積 $[\,,\,]$ によって生成されるリー代数を記号 $\mathscr{D}(H)$ で表す. また $\mathscr{D}(H)$ の積分多様体で, 点 $x_0 \in R^n$ を通るものを $I(\mathscr{D}(H), x_0)$ で表す. ただし, リー積 $[\,,\,]$ は, ベクトル場

$$X=\sum_{j=1}^{n} \xi_j \partial/\partial x_j, \quad Y=\sum_{j=1}^{n} \eta_j \partial/\partial x_j$$

に対して, 次式で定義される[4].

$$[X, Y]=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k \frac{\partial \eta_j}{\partial x_k}-n_k \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

ここで, システム (D, g) は可到達であると仮定する. すなわち, 任意の点 $x \in R^n$ で

$$\dim \mathscr{D}(D)(x)=n \quad (8)$$

が成立すると仮定する[3]. ただし, $\mathscr{D}(D)(x)$ はリー代数 $\mathscr{D}(D)$ の要素によって点xで張られるベクトル空間を表す. 一般に, この仮定が成立しない場合については4節の最後で論じる.

線形システムでは, このように定義される外乱の隔離可能性についてつぎの定理が知られている[1]. いま, システム (A, B, C, E) を次式で記述されるものとする.

$$\dot{x}=Ax+Bu+E\omega \quad (9)$$

$$y=Cx \quad (10)$$

《補助定理 2.1》[1]

線形システム (A, B, C, E) で, 外乱 ω がシステムの入出力関係から隔離されているための必要十分条件は, 次式を満たす部分空間$\mathcal{S}$が存在することである.

$$\mathscr{R}(E) \subset \mathcal{S} \subset \mathscr{N}(C) \quad (11)$$

$$A\mathcal{S} \subset \mathcal{S} \quad (12)$$

また, 外乱ωが隔離可能であるための必要十分条件は(11)式を満たし, かつ次式を満たす部分空間 $\mathcal{S}$ が存在することである.

$$A\mathcal{S} \subset \mathcal{S}+\mathscr{R}(B) \quad (13)$$

ただし, $\mathscr{R}(K)$ はマトリクスKの値域を表し $\mathscr{N}(C)$ はCの null space を表すとする.

(12)式の性質を満たす部分空間はA-invariant subspace とよばれ, (13)式の性質を満たす部分空間は(A, B)-invariant subspace とよばれる. ところで, 前節でも述べたように $\mathcal{S}$ は, 状態空間における部分空間ではなく, その接空間における部分空間であると考えるのが自然である. そこで, 状態空間における対応する概念を得るために, 定義2.1を直接適用してみよ

う．定義 2.1 によれば，点 x_0 で外乱 ω が隔離可能であるとは，次式が成立することと等価である．

$$Ce^{At}x_0+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\{Bu(\tau)+E\omega(\tau)\}d\tau$$
$$=Ce^{At}x_0+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (14)$$

そこで，上式の右辺を $Cx(t, x_0, u)$，左辺を $Cx(t, x_0, u, \omega)$ とおき，$x(t, x_0, u, \omega)-x(t, x_0, u)=\Delta x(t, \omega)$ とおけば，上式から $\Delta x(t, \omega)\in\mathcal{S}$ が常に成立していることが容易に導ける．すなわち，(14)式は状態空間 R^n において，部分空間 $\mathcal{S}$ によって定義される等価関係を表している．いま，この等価関係によって R^n に定義される葉層構造[5]を考えると，(14)式は，この葉層構造がシステム (D, g, L) の任意の解曲線に対して不変であることを表していると考えることもできる．この考え方を一般化して，接空間における不変性に対応した状態空間における不変性の概念をつぎのように導くことができる．

【定義 2.3】

システム (D, g) において，その状態空間に葉層構造 $\mathcal{L}$ が定義されているとする．このとき，システム (D, g) の任意の解曲線 $x(t, x_0, u)$ に対して

$$\forall t\in R \quad x(t, \mathcal{L}(x_0), u)=\mathcal{L}(x(t, x_0, u)) \qquad (15)$$

が成立するとき，葉層構造 $\mathcal{L}$ は D 不変構造であるという．さらに，状態フィードバック(6)で

$$\forall t\in R \quad \hat{x}(t, \mathcal{L}(x_0), v)=\mathcal{L}(\hat{x}(t, x_0, v)) \qquad (16)$$

を満たすものが存在するとき $\mathcal{L}$ を D 不変化可能構造であるという．

3.　D 不変構造

前節で導入した D 不変構造はその定義からも明らかなように，システムの可観測性と密接に関係している．いま，D 不変構造 $\mathcal{L}$ は，その定義から局所的には，一定の次数をもつ部分多様体の集まりとなっている．そこで，$\mathcal{L}(x)$ で x を通る葉を表すとすれば，$\mathcal{L}(x)$ は局所的につぎのように表すことができる．

$$U\cap\mathcal{L}(x)=\{z\in U|h(z)=h(x)\}$$

ただし，U は x の適当な近傍とする．ここで，h を $\mathcal{L}$ の局所表現とよぶことにする．したがって，D 不変構造はつぎのようにいいかえることができる．

《補助定理 3.1》

葉層構造 $\mathcal{L}$ の局所表現を h とする．このとき，$\mathcal{L}$ が D 不変構造であるための必要十分条件は，システム (D, g) の任意の解曲線 $x(t, u)$ に対して

$$h(x_1)=h(x_2),\quad x_1\in U,\quad x_2\in U$$
$$\Rightarrow \forall t\in I=\{t|x(t, x_1, u)\in U,\ x(t, x_2, u)\in U\}$$
$$h(x(t, x_1, u))=h(x(t, x_2, u))$$

が成立することである．

したがって，D 不変構造 $\mathcal{L}$ はシステム (D, h) の分離不能多様体を葉とする葉層構造であるといいかえることができる．ところで，著者らは文献 7) において，すでに分離不能多様体の接空間の構造についてつぎの結果を導いている．多様体 M の点 x における接空間を $T_x(M)$ で表し，M を底空間とする接ハンドルを $T(M)$ で表す．また，M 上で定義されたすべての解析ベクトル場の集合を $V(M)$ で表す．

《補助定理 3.2》

システム (D, h) の点 x_0 を通る分離不能多様体は，局所的には，$V(U)$ の部分リー代数 $\mathcal{L}$ で，つぎの性質を満たすものの積分多様体 $I(\mathcal{L}, x_0)$ で与えられる．

$$[D, \mathcal{L}]\subset\mathcal{L} \qquad (17)$$
$$dh\cdot\mathcal{L}=0 \qquad (18)$$

ただし，U は $x_0\in R^n$ の適当な近傍とし，$[D, \mathcal{L}]$ は集合 $\{Z|Z=[X, Y],\ X\in D,\ Y\in\mathcal{L}\}$ を表す．

この定理によって，D 不変構造は(17)式の性質を満たす部分リー代数 $\mathcal{L}$ によって定義されることがわかる．一般に，リー代数 $\mathcal{L}$ が与えられたとき，$\mathcal{L}$ は必ずしも任意の点 $x\in R^n$ の近傍に葉層構造を定義する[5]とは限らないが，仮定(8)が満たされるなら(17)式を満たす部分リー代数 $\mathcal{L}$ は必ず葉層構造を定義することが証明できる．

《補助定理 3.3》

R^n の点 x_0 の近傍 U で定義された解析的なリー代数 $\mathcal{L}$ が条件(17)を満たし，かつ D が条件(8)を満たすとする．このとき，$\mathcal{L}$ は条件

$$\forall x\in U,\quad \dim\mathcal{L}(x)=k \quad (\text{定数}) \qquad (19)$$

を満たす．いいかえれば，$\mathcal{L}$ は U に葉層構造を定義する．

(証明)　二つの点 x_1 および x_2 において $\dim\mathcal{L}(x_1)\neq\dim\mathcal{L}(x_2)$ が成立するとする．いま，D が条件(8)を満たすことから $\mathcal{D}(D)$ の適当なベクトル場 X の積分曲線 $X_t(\cdot)$ によって x_1 と x_2 を結ぶことができる．すなわち，

$$X_t(x_1)=x_2$$

を満たす t が存在する．解の存在と唯一性により，$X_t(x_1)$ は $T_{x_1}(U)$ から $T_{x_2}(U)$ への微分同相写像 $(X_t)_*$ を誘導する．ところで，任意の解析ベクトル場 Y についてつぎのテーラー展開が知られている[4]．

$$(X_t)_*Y(x_1)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-t)^h}{h!}[X^h, Y](x_2)$$

ただし，$[X^h, Y]=[X, [X^{h-1}, Y]]$，$[X^0, Y]=Y$ とする．ところが(17)式から，$Y\in\mathcal{L}$ なら任意の $X\in\mathcal{D}$

(D) に対して $[X, Y]\in\mathcal{L}$ が成立する．ゆえに

$$(X_t)_*\mathcal{L}(x_1)\subset\mathcal{L}(x_2)$$

となり，逆もまったく同様に証明できる．したがって，

$$(X_t)_*\mathcal{L}(x_1)=\mathcal{L}(x_2)$$

が成立し，したがって $\dim\mathcal{L}(x_1)\neq\dim\mathcal{L}(x_2)$ とはなり得ない．∎

（注意 3.1） (19)式の条件を満たすリー代数は一般に involutive analytic distribution とよばれている[4]．定理では(17)式の性質を満たすリー代数が(19)式を満たすために，システム (D, g) の可到達性(6)を仮定したが，実際にはより弱いつぎの仮定で十分である．

$$\forall x\in R^n,\quad \mathcal{D}(D)(x)+\mathcal{L}(x)=T_x(R^n) \qquad (20)$$

(20)式は $\mathcal{D}(D)$ の積分多様体と $\mathcal{L}$ の積分多様体が横断的に交わることを意味している．

以下，(17)式を満たすリー代数をD不変リー代数とよぶ．D不変リー代数は，線形システムにおける A-invariant subspace の概念の自然な拡張となっている．ところで，つぎの定理は補助定理 3.2 から明らかである．

《補助定理 3.4》

システム (D, g) で，つぎの性質を満たす最大のリー代数 $\hat{\mathcal{L}}$ が存在する．

$$[D, \hat{\mathcal{L}}]\subset\hat{\mathcal{L}} \qquad (21)$$

$$dg\cdot\hat{\mathcal{L}}=0 \qquad (22)$$

（証明） $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ を (21), (22)式を満たすリー代数とする．このとき，フロベニウスの定理からリー代数 $\mathcal{D}(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2)$ も (22)式を満たす．ゆえに (21)式が $\mathcal{D}(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2)$ について成立することを示せば定理は証明される． $Y_1\in\mathcal{L}_1$, $Y_2\in\mathcal{L}_2$ とする．このとき，任意の $X\in D$ に対して

$$[X, [Y_1, Y_2]]=[Y_1, [X, Y_2]]-[Y_2, [X, Y_1]] \in\mathcal{D}(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2) \qquad (23)$$

が成立する． Y_1, Y_2 は任意だから，(23)式より明らかに $[D, \mathcal{D}(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2)]\subset\mathcal{D}(\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2)$ となる．∎

$\hat{\mathcal{L}}$ の積分多様体 $I(\hat{\mathcal{L}}, x)$ は点 x を通るシステム (D, g) の分離不能多様体を表している．また，ベクトル場 Y が $\hat{\mathcal{L}}$ の要素であることを示すために，$Y=0 \bmod (D, g)$ とかく．以上の定理によって，つぎのことがわかる．

《定理 3.1》

システム (D, g, L) で，外乱 ω が点 x_0 でシステムの入出力関係から隔離されているための必要十分条件は，x_0 の近傍Uで定義されたリー代数 $\hat{\mathcal{L}}$ で，つぎの性質を満たすものが存在することである．

$$L\subset\hat{\mathcal{L}},\quad dg\cdot\hat{\mathcal{L}}=0 \qquad (24)$$

$$[D, \hat{\mathcal{L}}]\subset\hat{\mathcal{L}} \qquad (25)$$

（注意 3.2） 文献 7) でも述べたように，$\hat{\mathcal{L}}=\{0\}$ であることが，システム (D, g) が分離可能となるための必要十分条件であるが，離散値系の可観測性の問題においても指摘されているように[8]，必ずしも，任意の初期点を区別するような入力列が存在することを保証しているわけではない．すなわち，$\hat{\mathcal{L}}=\{0\}$ であっても，初期状態を決定するためには，いわば“多重実験”が必要とされることもありうる．

4. 外乱の隔離可能性

システム (D, g) に状態フィードバック(6)を施せば，つぎのようなシステムとなる．

$$\dot{x}=X_0+\sum_{j=1}^{r}f_jX_j+\sum_{j=1}^{r}X_jv_j$$

$$y=g(x)$$

このシステムをシステム $(D(f), g)$ とよぶ．ここで，$D(f)=\left\{X_0+\sum_{j=1}^{r}f_jX_j,\ X_1, \cdots, X_r\right\}$ である．このとき，外乱の隔離可能性の問題は，システム $(D(f), g, L)$ において

$$L=0 \bmod (D(f), g) \qquad (26)$$

を満たす状態フィードバック(6)が存在するための条件を求める問題にほかならない．ここで，状態フィードバック(6)によって，システムの可到達性は影響されない[2]ということに注意する必要がある．したがって，システム (D, g) が可到達であるという仮定のもとでは，システム $(D(f), g)$ も可到達となり補助定理 3.3 により $D(f)$ 不変な構造としては葉層構造を考えれば十分であることがわかる．

いま，葉層構造 $\mathcal{L}$ が与えられたとき，$\mathcal{L}$ がD不変化可能構造であるとすれば，補助定理 3.2 により，$\mathcal{L}$ はつぎの性質を満たすリー代数 $\mathcal{L}$ によって与えられる．

$$\left[X_0+\sum_{j=1}^{r}f_jX_j,\ \mathcal{L}\right]\subset\mathcal{L} \qquad (27)$$

$$[X_j, \mathcal{L}]\subset\mathcal{L},\quad j=1, \cdots, r \qquad (28)$$

(27), (28)式から次式が成立する．

$$[X_0, \mathcal{L}]\subset\mathcal{L}+\{X_1, \cdots, X_r\} \qquad (29)$$

ただし，$\{X_1, \cdots, X_r\}$ は $X_1, \cdots, X_r$ によって生成される C^ω 加群を表す．ここで，C^ω は R^n 上の解析関数を表す．したがって，$\mathcal{L}$がD不変化可能構造となるためには，(28), (29)式が成立しなければならないが，実は，これらの条件は十分条件ともなっている．いま，余次元 $n-l$ の葉層構造 $\mathcal{L}$ に対して，その葉層座標近傍 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$[5] をとる．定義により，$\mathcal{L}$ の葉 L_α は

$$\{(x_1, \cdots, x_n)\in\varphi_\lambda(U_\lambda);\ x_{l+1}=c_{l+1}, \cdots, x_n=c_n\}$$

と表される．ただし $c_{l+1}, \cdots, c_n$ は葉によってきまる定

数である．以下では，このような座標を葉層座標とよぶ．この座標のもとでのベクトル場X_j, $j=0,1,\cdots,r$の成分表示を$X_j=\sum_{k=1}^{n}\xi_j{}^k\partial/\partial x_k$で表す．また，$0x_k$で点$(0,\cdots,0,\ x_{k+1},\cdots,x_n)$を表す．つぎの定理はポアンカレの定理からの直接的な帰結である．

《補助定理 4.1》

n変数の関数$\alpha^p(x)$, $p=1,\cdots,l$が条件

$$\frac{\partial\alpha^p}{\partial x_q}-\frac{\partial\alpha^q}{\partial x_p}=0\,,\quad p,q=1,\cdots,l$$

を満たすなら，次式を満たす関数$\alpha(x)$が存在する．

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_p}=\alpha^p\quad p=1,\cdots,l$$

(証明) $n-l$個の関数α^k, $k=l+1,\cdots,n$を次式で定義する．

$$\alpha^k=\int_0^{x_1}\frac{\partial\alpha^1}{\partial x_k}dx_1+\int_0^{x_2}\left(\frac{\partial\alpha^2}{\partial x_k}\right)(0x_1)dx_2+\cdots+\int_0^{x_l}\left(\frac{\partial\alpha^l}{\partial x_k}\right)(0x_{l}-1)dx_l$$

このとき，関数系$\alpha^1,\cdots,\alpha^n$にポアンカレの定理を適用すれば，定理は明らかに成立する．▮

《補助定理 4.2》

関数$\alpha_s{}^i,\xi_s$, $i=1,\cdots,l$, $s=1,\cdots,r$が条件

$$\sum_{s=1}^{r}\left(\frac{\partial\alpha_s{}^i}{\partial x_j}-\frac{\partial\alpha_s{}^j}{\partial x_i}\right)\xi_s=0\,,\quad \frac{\partial\xi_s}{\partial x_i}=0\,,\quad i,j=1,\cdots,l \tag{30}$$

を満たすなら

$$\frac{\partial\hat{\alpha}_s{}^i}{\partial x_j}-\frac{\partial\hat{\alpha}_s{}^j}{\partial x_i}=0\,,\quad i,j=1,\cdots,l \tag{31}$$

$$\sum_{s=1}^{r}\hat{\alpha}_s{}^j\xi_s=\sum_{s=1}^{r}\hat{\alpha}_s{}^j\xi_s \tag{32}$$

を満たす関数$\hat{\alpha}_s{}^i$, $i=1,\cdots,l$, $s=1,\cdots,r$が存在する．

(証明) 証明は帰納法による．はじめに$l=2$とする．いま，$f^{12}{}_s=\partial\alpha_s{}^1/\partial x_2-\partial\alpha_s{}^2/\partial x_1$として，次式で$\hat{\alpha}_s{}^1$, $\hat{\alpha}_s{}^2$を定義する．

$$\hat{\alpha}_s{}^1=\alpha_s{}^1-\int_0^{x_2}f_s{}^{12}dx_2\,,\quad \hat{\alpha}_s{}^2=\alpha_s{}^2 \tag{33}$$

このとき，$\hat{\alpha}_s{}^1,\hat{\alpha}_s{}^2$は明らかに(31)式を満たす．ところで仮定により，$\sum_{s=1}^{r}f_s{}^{12}\xi_s=0$であるから，両辺を$x_2$で積分し，条件$\partial\xi_s/\partial x_2=0$を用いれば，$\hat{\alpha}_s{}^1,\hat{\alpha}_s{}^2$は(32)式も満たしている．

いま，$l=l_0-1$に対して定理が成立すると仮定する．したがって，$\alpha_s{}^1,\cdots,\alpha_s{}^{l_0-1}$, $s=1,\cdots,r$は(31), (32)式を満たしていると仮定してよい．そこで，$f_s{}^{l_0p}$, $p=1,\cdots,l_0-1$を次式で定義する．

$$f_s{}^{l_0,p}=\frac{\partial\alpha_s{}^{l_0}}{\partial x_p}-\frac{\partial\alpha_s{}^p}{\partial x_{l_0}} \tag{34}$$

このとき，$f_s{}^{l_0p}$は次式を満たす．

$$\frac{\partial f_s{}^{l_0,p}}{\partial x_q}-\frac{\partial f_s{}^{l_0,q}}{\partial x_p}=0 \tag{35}$$

そこで，$\hat{\alpha}_s{}^{l_0}$を次式で定義する．

$$\hat{\alpha}_s{}^{l_0}=\alpha_s{}^{l_0}-\int_0^{x_1}f_s{}^{l_0,1}dx_1-\int_0^{x_2}f_s{}^{l_0,2}(0x_1)dx_2-\cdots-\int_0^{xl_0-1}f_s{}^{l_0,l_0-1}(0xl_0-2)dx_{l_0-1} \tag{36}$$

このとき，$\hat{\alpha}_s{}^{l_0},\alpha_s{}^{l_0-1},\cdots,\alpha_s{}^1$は条件(31)を満たす．また，仮定$\partial\xi_s/\partial x_p=0$, $p=1,\cdots,l_0$により$\sum_{s=1}^{r}\hat{\alpha}_s{}^{l_0}\xi_s=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s{}^{l_0}\xi_s$は容易に証明できる．▮

以上の補助定理を用いて，つぎの定理を容易に証明することができる．

《定理 4.1》

葉層構造$\mathcal{L}$が点x_0でD不変化可能構造であるための必要十分条件は，x_0の近傍Uで

$$[X_0,\mathcal{L}]\subset\mathcal{L}+\{X_1,\cdots,X_r\} \tag{37}$$

$$[X_i,\mathcal{L}]\subset\mathcal{L}\quad i=1,\cdots,r \tag{38}$$

が成立することである．

(証明) 必要性は明らかであるから十分性のみを示す．(37), (38)式がUで成立すれば，補助定理4.1および4.2から，$\mathcal{L}$の葉層座標に対して，次式を満たす関数f_sがx_0の適当な近傍で存在する．

$$\left[X_0+\sum_{s=1}^{r}f_sX_s,\ \mathcal{L}\right]\subset\mathcal{L}$$

実際，条件(38)は，この葉層座標に対して成分表示すれば，$\partial\xi_s{}^j/\partial x_p=0$, $p=1,\cdots,l$, $j=l+1,\cdots,n$と等価である．また，(37)式を成分表示すると$\partial\xi_0{}^j/\partial x_p=\sum_{s=1}^{r}\alpha_s{}^p\xi_s{}^j$, $j=l+1,\cdots,n$, $p=1,\cdots,l$を得る．この式から，容易に$\sum_{s=1}^{r}(\partial\alpha_s{}^p/\partial x_q-\partial\alpha_s{}^q/\partial x_p)\xi_s{}^j=0$, $p,q=1,\cdots,l$が導ける．これは，補助定理4.2の条件にほかならない．

したがって，$\mathcal{L}$は状態フィードバック，$u_j=f_j+v_j$, $j=1,\cdots,r$によって$D(f)$不変となる．▮

定理4.1により，局所的な外乱の隔離可能性の問題は，つぎのように解決される．

《定理 4.2》

システム(D,g,L)は可到達とする．このとき，外乱ωが点x_0でシステムの入出力関係から隔離できるための必要十分条件は，D不変化可能構造$\mathcal{L}$で

$$dg\cdot\mathcal{L}=0$$

$$L\subset\mathcal{L}$$

を満たすものが x_0 の近傍 U に存在することである．

D 不変化可能構造 $\mathcal{L}$ の表現(37)，(38)が線形システムにおける (A,B)-invariant subspace の自然な拡張となっていることは，つぎのようにしてわかる．いま $\mathcal{S}$ を (A,B)-invariant subspace とし，$\mathcal{S}$ のベクトルを定数ベクトル場と考える．また，Ax および B の各従ベクトル bi もベクトル場と考えると，定数ベクトル間のリー積が 0 になることに注意すれば，条件(38)は線形システムでは常に満たされていることがわかる．また，条件(37)が $A\mathcal{S}\subset\mathcal{S}+\mathcal{R}(B)$ を意味することは明らかである．

(注意 4.1) システム (D,g) が可到達性の仮定を満たさない場合には，以上の議論をそのまま成立させるためには，システムの初期点 x_0 を固定して，多様体 $I(\mathcal{D}(D),x_0)$ 上に議論を限定することが必要となる．しかし，このとき定理 4.2 でその存在が保証されるフィードバック $f_i(x)$ は，初期点 x_0 に依存するという意味で，純粋なフィードバックとはいえないと考えられる．

［例題］ つぎのシステムを考える．

$$\dot{x}_1=x_1(1+x_1)+x_1u+x_1\omega$$
$$\dot{x}_2=-x_2(1-x_1)+x_2u-x_2\omega$$
$$y=x_1x_2$$

定理の記号と合わせるため，$X_0=x_1((1+x_1)\partial/\partial x_1-x_2(1-x_1)\partial/\partial x_2$，$X=x_1\partial/\partial x_1+x_2\partial/\partial x_2$，$Y=x_1\partial/\partial x_1-x_2\partial/\partial x_2$，$g=x_1x_2$ とする．簡単な計算により

$$[X,Y]=0$$
$$[X_0,Y]=-x_1\cdot X$$

が導ける．定理 4.1 から，このとき $x_1x_2=0$ の点を除いて，システムは可到達だから，局所的に定理の仮定を満たし，$Y(f)=-x_1$ を満たす f が存在する．実際 $f=-x_1$ とすればよい．このことは，$u=-x_1+v$ として y を微分すれば，$\dot{y}=2yv$ となることからも明らかである．このとき，外乱 ω は大域的にもシステムの入出力関係から隔離される．

一般に，システムの線形近似モデルに対して外乱がその入出力関係から隔離可能であっても，つぎの例に示すようにそのシステムの入出力関係から外乱を隔離することができるとは限らない．

$$\dot{x}_1=-x_1+x_2+(1+x_2)u+\omega$$
$$\dot{x}_2=x_1+(1+x_1x_2)u-\omega$$
$$y=x_1+x_2$$

このシステムで，$X_0=(-x_1+x_2)\partial/\partial x_1+x_1\partial/\partial x_2$，$X=(1+x_1x_2)\partial/\partial x_2$，$Y=\partial/\partial x_1-\partial/\partial x_2$，$g=x_1+x_2$ とすれば，$dg\cdot Z=0$ を満たすベクトル場の集合は $\{Y\}$ となり

$$[X,Y]=-\partial/\partial x_1+x_2\partial/\partial x_2\notin\{Y\}$$

である．したがって，定理 4.1 の条件(48)が上記システムでは成立せず，外乱は隔離できない．しかし，このシステムを定常解 $x=0$，$u=0$，$\omega=0$ のまわりで線形近似したモデル，

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+bu+c\omega, \\ \quad A=\begin{bmatrix}-1,1\\1\ \ 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \\ y=Hx,\quad H=[1,1] \end{cases}$$

では

$$A\mathcal{R}(c)\subset\mathcal{R}(c)+\mathcal{R}(b)$$
$$\mathcal{R}(c)\subset\mathcal{N}(H)$$

が成立する．したがって，この近似モデルでは，補助定理 2.1 から，外乱 ω は隔離可能となる．

5. おわりに

本論文では，非線形システムにおける外乱の隔離可能性に対する局所的な必要十分条件を導いた．このために線形システムにおける二つの不変部分空間の概念の拡張として，D 不変構造および D 不変化可能構造の概念を導入し，その代数的な性質について考察した．これらの概念は，非線形システムの代数的な構造をフィードバック制御をも含む形で取扱うとき重要な働きをすると期待される．また，ここでは議論を局所的なものに限定したが，大域的な性質として議論を展開することが，このためにも必要となると思われる．

終りに，日頃ご指導いただいている早稲田大学 示村悦二郎教授に感謝致します．

参考文献

1) W.M. Wonham: Linear Multivariable Control—A Geometric Approach, Springer-Verlag, (1974)
2) H.J. Sussman, and V. Jurdgevic: Controllability of Nonlinear Systems, J. Diff. Equations, **12**, 55/116 (1972)
3) C. Lobry: Dynamical Polysystems and Control Theory, Geometric Methods in System Theory, D. Reidel, 1/42 (1973)
4) C. Chevalley: Theory of Lie Groups, Princeton Univ. Press (1946)
5) 田村一郎：葉層のトポロジー，岩波書店，96/110(1976)
6) 石島辰太郎，示村悦二郎：非線形システムにおけるいくつかの代数的性質，計測自動制御学会論文集，**12**-2, 227/232 (1976)
7) 石島辰太郎，示村悦二郎：ある種の非線形システムの可観測性，計測自動制御学会論文集，**12**-3, 239/244(1976)
8) 舟橋康行，稲垣真人：双線形システムの状態推定について，Mathematical System Theory シンポジウム資料，29/34 (1976)