

Bohdan Zelinka

Grafy, jejichž všechny kostry jsou spolu isomorfní

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 33--40

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117710>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

GRAFY, JEJICHŽ VŠECHNY KOSTRY JSOU SPOLU ISOMORFNÍ

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 16. května 1969)

Pod pojmem graf se v této práci rozumí konečný neorientovaný souvislý graf bez smyček a vícenásobných hran. Stromem se rozumí konečný souvislý neorientovaný graf bez kružnic, tedy i graf sestávající z jediného izolovaného uzlu.

J. SEDLÁČEK vyslovil hypotézu, kterou zde dokážeme jako větu. Nejprve definujeme třídy grafů \mathfrak{G}_1 a \mathfrak{G}_2 .

Budiž $k \geq 3$ přirozené číslo, T strom, a jeho uzel. Grafem $G(k, T, a)$ nazveme graf sestrojený následujícím způsobem. Vezmeme kružnici K délky k , její uzly buďtež po řadě u_1, \dots, u_k . Dále vezmeme k stromů T_1, \dots, T_k vesměs isomorfních s T a nechť a_i je uzel stromu T_i odpovídající v příslušném isomorfismu uzlu a stromu T . Ztotožněním uzlu a_i s u_i pro každé i dostáváme graf $G(k, T, a)$. Třidu všech možných grafů $G(k, T, a)$ pro lichá k označíme \mathfrak{G}_1 .

Nyní definujeme graf $G(k, T', a', T'', a'')$. Budiž $k \geq 4$ sudé přirozené číslo, T', T'' stromy, a' uzel stromu T' a a'' uzel stromu T'' . Vezmeme kružnici K délky k , její uzly buďtež po řadě u_1, \dots, u_k . Nyní buďtež T_i pro lichá i od 1 do $k-1$ stromy isomorfní s T' a pro sudá i od 2 do k stromy isomorfní s T'' . Pro liché (resp. sudé) i budiž a_i uzel stromu T_i odpovídající ve zmíněném isomorfismu uzlu a' (resp. a'') stromu T' (resp. T''). Ztotožněním uzlů a_i a u_i pro každé i dostáváme graf $G(k, T', a', T'', a'')$. Třidu všech možných grafů $G(k, T', a', T'', a'')$ označíme \mathfrak{G}_2 .

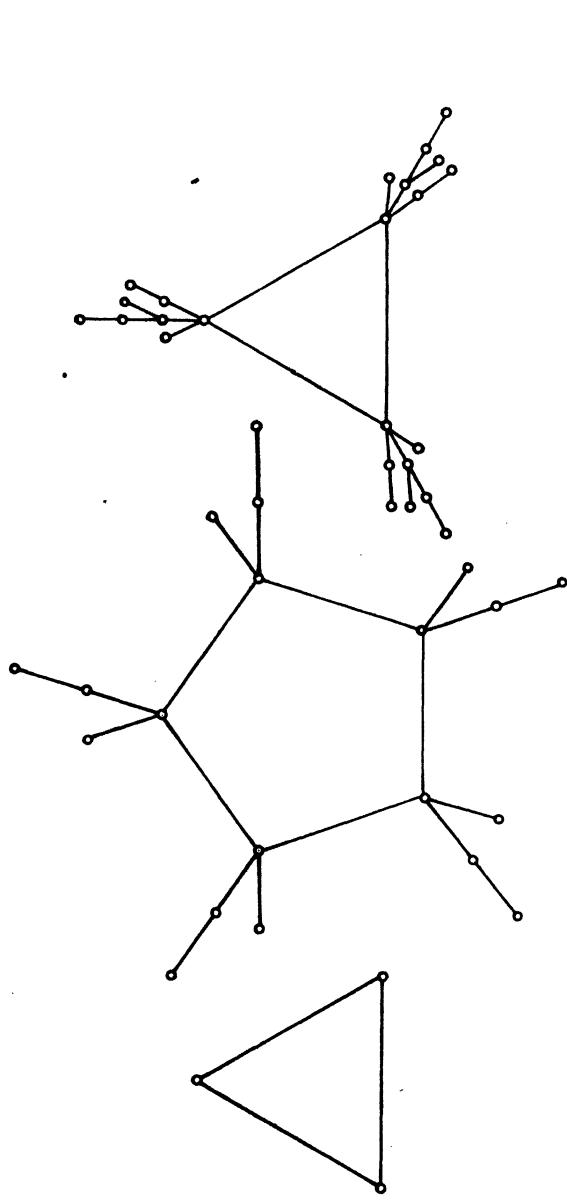
Speciálním případem grafu z \mathfrak{G}_1 je kružnice liché délky. Speciálními případy grafů z \mathfrak{G}_2 jsou kružnice sudé délky a graf $G(k, T, a)$ pro sudé k . Různé příklady grafů z \mathfrak{G}_1 jsou na obr. 1, grafů z \mathfrak{G}_2 na obr. 2.

V dalším $d_G(x, y)$ znamená vzdálenost uzlů x a y v grafu G a $U(G)$ znamená množinu uzlů grafu G (pro libovolný graf G).

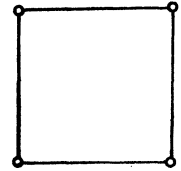
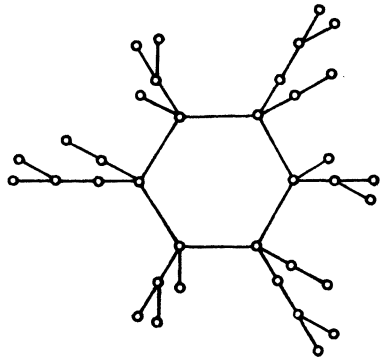
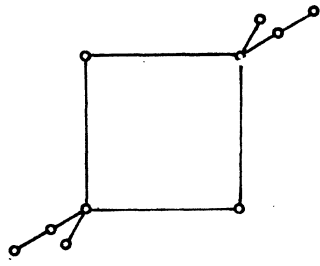
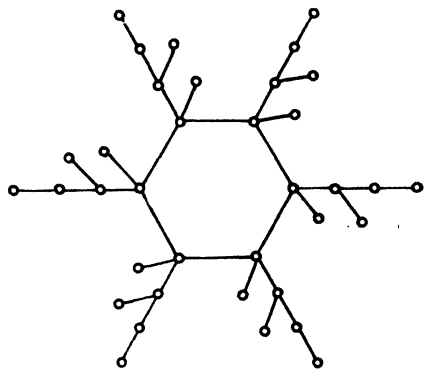
Nyní vyslovíme zmíněnou větu.

Věta. *Budiž G graf, jehož všechny kostry jsou spolu isomorfní. Pak buď G je strom, nebo $G \in \mathfrak{G}_1$, nebo $G \in \mathfrak{G}_2$.*

Zmíněnou vlastnost grafu budeme nazývat vlastnost (KI).



Obr. 1



Obr. 2

V důkazu této věty budeme rozlišovat grafy podle jejich cyklomatických čísel. Cyklomatické číslo v grafu G podle [1] je maximální počet nezávislých kružnic v tomto grafu a lze je vyjádřit vzorcem $v = m - n + p$, kde m je počet hran, n je počet uzlů a p počet komponent grafu. U souvislého grafu je tedy $v = m - n + 1$. Cyklomatické číslo grafu je vždy nezáporné celé číslo a určuje (u souvislých grafů), kolik hran je třeba z grafu odstranit, abychom dostali jeho kostru.

Vezměme nejprve grafy, pro něž $v = 0$. Takovéto grafy jsou právě všechny stromy. Strom má jedinou kostru – sebe sama – a tedy pro něj tvrzení věty platí.

Dále zkoumejme grafy, pro něž $v = 1$. Každý takovýto graf obsahuje právě jednu kružnici. Můžeme tedy každý takovýto graf sestrojit následujícím způsobem. Vezměme kružnici K o k uzlech u_1, \dots, u_k , $k \geq 3$ a k stromů T_1, \dots, T_k . V každém ze stromů T_i ($i = 1, \dots, k$) zvolíme uzel a_i . Pak ztotožníme uzly a_i a u_i pro $i = 1, \dots, k$.

Nyní dokážeme několik lemmat. Pod označením G rozumíme graf výše popsany.

Lemma 1. *Nechť G má vlastnost (KI). Budiž S_i (resp. S_h) kostra grafu G vzniklá odstraněním hrany $u_i u_{i+1}$ (resp. $u_h u_{h+1}$) pro $1 \leq i \leq k$, $1 \leq h \leq k$ (indexy se berou modulo k). Budiž \mathfrak{F}_{hi} množina isomorfních zobrazení kostry S_h na kostru S_i . Pro $1 \leq j \leq k$, $j \neq h$ existuje nejvýše jedno i tak, že $i \neq j - 1$, $i \neq j$ a uzel u_j je samodružný v zobrazení z \mathfrak{F}_{hi} . Přitom je-li u_j samodružný v některém zobrazení z \mathfrak{F}_{hi} , uzly u_{j-1} , u_{j+1} v tomto zobrazení samodružné nejsou.*

Důkaz. Uvažujme množinu větví \mathfrak{B}_i (viz [1]) vycházejících z uzlu u_j v kostře S_i . Je-li q stupeň uzlu u_j v grafu G , pak těchto větví je buď $q - 1$ (je-li $i = j - 1$ nebo $i = j$), nebo q . Přitom každá z množin \mathfrak{B}_i obsahuje všechny větve stromu T_j vycházející z $a_j = u_j$, a to v počtu $q - 2$. (Je-li $q = 2$, pak ovšem takové větve neexistují.) Množinu těchto větví označme \mathfrak{B} a budiž $\mathfrak{B}'_i = \mathfrak{B}_i \div \mathfrak{B}$. Nechť nyní u_j je samodružným uzlem v zobrazení $\varphi \in \mathfrak{F}_{hi}$. Znamená to, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi větvemi z množin \mathfrak{B}_h a \mathfrak{B}_i tak, že odpovídající si větve jsou spolu isomorfní. Totéž platí tedy i o množinách \mathfrak{B}'_h a \mathfrak{B}'_i . Předpokládejme $h \neq j - 1$, $h \neq j$. Budiž $\mathfrak{B}'_h = \{B_h^+, B_h^-\}$, kde B_h^+ (resp. B_h^-) je větev z \mathfrak{B}_h obsahující uzel u_{j+1} (resp. u_{j-1}). Podobně definujme $\mathfrak{B}'_i = \{B_i^+, B_i^-\}$. Je tedy buď $B_h^+ \cong B_i^+$ a $B_h^- \cong B_i^-$, nebo $B_h^+ \cong B_i^-$ a $B_h^- \cong B_i^+$. (Symbol \cong označuje isomorfismus dvou grafů.) Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že uzly u_{j+1} , u_i po dvou oddělují uzly u_j , u_h na kružnici K . Znamená to, že B_h^+ vznikne z B_i^+ odstraněním hrany $u_h u_{h+1}$ a případně dalších uzlů a hran a je tedy vlastním podstromem stromu B_i^+ . Proto nemůže být $B_h^+ \cong B_i^-$. Je tu tedy pouze možnost $B_h^+ \cong B_i^+$, $B_h^- \cong B_i^-$ a uzly u_{j-1} , u_{j+1} tedy nebudou samodružné ve φ . Předpokládejme nyní, že existují čísla i_1, i_2 taková, že $1 \leq i_1 \leq k$, $1 \leq i_2 \leq k$, $i_1 \neq j - 1$, $i_1 \neq j$, $i_2 \neq j - 1$, $i_2 \neq j$ a uzel u_j je samodružný v zobrazení $\varphi_1 \in \mathfrak{F}_{hi_1}$ a současně v zobrazení $\varphi_2 \in \mathfrak{F}_{hi_2}$. Označme opět analogicky předešlému $\mathfrak{B}'_{i_1} = \{B_{i_1}^+, B_{i_1}^-\}$, $\mathfrak{B}'_{i_2} = \{B_{i_2}^+, B_{i_2}^-\}$. Máme $B_h^+ \cong B_{i_1}^-$, $B_h^- \cong B_{i_1}^+$, $B_h^+ \cong B_{i_2}^-$, $B_h^- \cong B_{i_2}^+$. Je tedy $B_{i_1}^+ \cong B_{i_2}^+$ a $B_{i_1}^- \cong B_{i_2}^-$, což je možné, jak bylo ukázáno výše, pouze při $i_1 = i_2$.

Lemma 2. *Centrum každé kostry grafu G s vlastností (KI) je uzel kružnice K .*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že průměr kostry S_i pro některé i je sudé číslo δ a centrum c_i této kostry (které je podle [1] jediné) je uzel stromu T_j různý od u_j . Centrem c_i prochází alespoň jedna diametrální cesta tak, že c_i je rovněž centrem této cesty. Alespoň jeden z koncových uzlů této cesty je rovněž koncovým uzlem stromu T_j , označme jej v . Máme $d(c_i, v) = \frac{1}{2}\delta$, což je poloměr kostry S_i . Budiž nyní $1 \leq h \leq k$, $h \neq i$ a vezměme kostru S_h . Protože $S_h \cong S_i$, kostra S_h musí mít tentýž průměr i poloměr jako S_i . Centrum c_h kostry S_h je opět jediné (neboť průměr je opět sudý) a jeho vzdálenost od v nesmí přesahovat $\frac{1}{2}\delta$; tedy je to opět uzel stromu T_j různý od u_j . Existuje-li diametrální cesta kostry S_i , která je celá obsažena v T_j , pak tato cesta je diametrální cestou i v S_h a její centrum c_i je rovněž centrem stromu S_h , a tedy $c_i = c_h$. V opačném případě každá diametrální cesta kostry S_i má jeden koncový uzel v T_j , druhý mimo T_j , tedy prochází uzlem u_j a totéž platí i pro diametrální cesty kostry S_h . Budiž D_i diametrální cesta kostry S_i a D_h diametrální cesta kostry S_h . Budiž v koncový uzel cesty D_i v T_j ; koncový uzel cesty D_h ležící v T_j označme w . Cesta D_i obsahuje úsek D'_i z u_j do c_i , cesta D_h obsahuje úsek D'_h z u_j do c_h . Budiž x společný uzel cest D'_i a D'_h takový, že úsek cesty D'_i z x do c_i a úsek D'_h z x do c_h nemají společný uzel kromě x . Zřejmě nyní

$$d(v, w) = d(c_i, v) + d(c_i, x) + d(c_h, x) + d(c_h, w).$$

Avšak

$$d(c_i, v) = d(c_h, w) = \frac{1}{2}\delta,$$

a protože δ je průměr kostry S_h , musí být

$$d(v, w) \leq \delta.$$

Je tedy

$$d(c_i, x) = d(c_h, x) = 0$$

a tedy $c_i = c_h = x$. Ale protože společný uzel x mohl být totožný s u_j , je buď u_j centrem obou koster S_i, S_h , nebo je $c_i = c_h \neq u_j$. Tím jsme dokázali při sudém δ , že v případě, kdy centrum některé kostry grafu G je uzlem některého stromu T_j různým od u_j , splývá toto centrum s centry ostatních koster. Při lichém δ lze analogicky dokázat, že v případě, kdy centrální hrana některé kostry grafu G je hranou některého stromu T_j , splývá tato centrální hrana s centrálními hranami ostatních koster. Protože při isomorfním zobrazení stromu na strom se centrum zobrazí opět jako centrum a centrální hrana opět jako centrální hrana, centrum (resp. centrální hrana) každé kostry grafu G je samodružné (resp. samodružná) ve všech isomorfních zobrazeních jedné kostry na druhou. Budiž φ isomorfní zobrazení kostry S_i na kostru S_h . Zřejmě lze zvolit φ tak, že všechny uzly stromu T_j se zobrazí na sebe (neboť všechny větve stromu T_j vycházející z u_j s výjimkou nejvýše dvou jsou společné všem kostrám grafu G). Tedy u_j je uzel samodružný ve všech zobrazeních ze všech \mathfrak{F}_{ih} , což je spor s lemmatem 1.

Lemma 3. *Budiž uzel u_i grafu G s vlastností (K1) jediným centrem kostry S_j . Při lichém k platí $j \equiv i + \frac{1}{2}(k - 1) \pmod{k}$ a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j patří diametrálním cestám kostry S_j . Při sudém k platí buď $j \equiv i + \frac{1}{2}(k - 2) \pmod{k}$, nebo $j \equiv i + \frac{1}{2}k \pmod{k}$ (přičemž pro obě taková j je u_i centrem kostry S_j) a všechny hrany kružnice K kromě $u_{i+\frac{1}{2}(k-2)}u_{i+\frac{1}{2}k}$ a $u_{i+\frac{1}{2}k}u_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, kde indexy se berou modulo k , patří diametrálním cestám kostry S_j .*

Důkaz. Jestliže některá kostra S_h grafu G obsahuje všechny diametrální cesty kostry S_j , jsou tyto cesty i diametrálními cestami kostry S_h (poněvadž všechny kostry grafu G mají tentýž průměr). Pak také u_i je centrem kostry S_h a tedy je samodružným uzlem v některém zobrazení jedné kostry grafu G na druhou. Proto existuje nejvýše jedno h takové, že S_h obsahuje všechny diametrální cesty kostry S_j . Proto všechny hrany kružnice K s výjimkou $u_j u_{j+1}$ (která se nevyskytuje v S_j) a $u_h u_{h+1}$ patří diametrálním cestám kostry S_j . Jestliže takové h existuje, je zřejmě buď $j = h + 1$, nebo $j = h - 1$ (indexy bereme modulo k). Obě kostry S_j a S_h mají společný podstrom T_i . Budiž φ isomorfní zobrazení S_j na S_h takové, že všechny uzly stromu T_i jsou samodružné ve φ . To lze, protože u_i je samodružný uzel a strom T_i je tvořen větvemi obou koster vycházejícími z uzlu u_i . Zbývají dvě větve B_j^+ , B_j^- které nepatří stromu T_i ; větev B_j^+ obsahuje uzel u_{i+1} , větev B_j^- obsahuje uzel u_{i-1} . Předpokládejme bez újmy na obecnosti $j = h + 1$. Definujme v S_h obdobně větve B_h^+ , B_h^- . Podobně jako v důkazu lemmatu 1 máme $B_h^+ \cong B_j^-$, $B_h^- \cong B_j^+$. Snadno zjistíme, že větev B_j^+ obsahuje jako vlastní podgraf větev B_h^+ a jako další podgraf uzlově disjunktní s B_h^+ obsahuje strom T_j . Podobně větev B_h^- obsahuje jako vlastní podgraf větev B_j^- a jako další podgraf uzlově disjunktní s B_j^- obsahuje rovněž strom T_j . Protože strom T_j k B_h^+ v B_j^+ je připojen hranou $u_h u_j$ a k B_j^- v B_h^- je připojen hranou $u_j u_{j+1}$, musejí být uzly $u_h = u_{j-1}$ a u_{j+1} stejně vzdáleny od u_i v S_h i v S_j . Tedy

$$j + 1 - i \equiv i - (j - 1) \pmod{k},$$

z toho

$$2j \equiv 2i \pmod{k}.$$

Je-li k liché, je

$$j \equiv i \pmod{k}$$

a tedy $j = i$, což nevyhovuje, proto pro k liché neexistuje žádné výše zmíněné h a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j jsou hranami diametrálních cest kostry S_j . Je-li k sudé, pak

$$j \equiv i \pmod{\frac{1}{2}k},$$

z toho vyhovující řešení je

$$j \equiv i + \frac{1}{2}k \pmod{k},$$

potom

$$h \equiv i + \frac{1}{2}(k - 2) \pmod{k}.$$

Lemma 4. Budiž hrana $u_i u_{i+1}$ grafu G s vlastností (KI) centrální hranou kostry S_j . Pak je zřejmě k sudé a platí $j \equiv i + \frac{1}{2}k \pmod{k}$ a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j patří diametrálním cestám kostry S_j . (Indexy se berou opět modulo k .)

Důkaz je analogický důkazu lemmatu 3.

Lemma 5. Budiž δ průměr kostry S_i . Pro každé $j = 1, \dots, k$ je vzdálenost uzlu u_j od libovolného uzlu x stromu T_j menší než $\frac{1}{2}\delta$ při δ sudém a menší než $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ při δ lichém.

Důkaz. Jak známo, v případě δ sudého je vzdálenost každého uzlu stromu od (jediného) centra tohoto stromu nejvýše $\frac{1}{2}\delta$ (tj. poloměr stromu), v případě δ lichého je vzdálenost každého uzlu od bližšího z obou center nejvýše $\frac{1}{2}(\delta - 1)$. Podle lemmatu 2 centrum kostry S_i je uzel kružnice K . Uzel u_j je ze všech uzlů kružnice K uzlu x (patřícímu do T_j) nejbližší, tedy jeho vzdálenost od x nepřesahuje vzdálenost x od centra kostry S_i .

Důsledek lemmatu 5. Žádná diametrální cesta kostry S_j grafu G s vlastností (KI) neobsahuje uzly stromu T_i různé od u_i , kde u_i je centrum kostry S_j .

Lemma 6. Necht' cykломatické číslo grafu G s vlastností (KI) je rovno jedné. Pak pro graf G věta platí.

Důkaz. Necht' k je liché, δ sudé. (δ je průměr kostry.) Pak ke každému $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ je vzájemně jednoznačně přiřazeno $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že

$$j \equiv i + \frac{1}{2}(k - 1) \pmod{k}$$

a každý uzel kružnice K je (jediným) centrem právě jedné kostry grafu G . Strom T_i je složen ze všech větví kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k-1)}$, v uzlu u_i , které neobsahují diametrální cesty. Protože při isomorfním zobrazení $S_{i+\frac{1}{2}(k-1)}$ na $S_{h+\frac{1}{2}(k-1)}$ se zobrazí u_i na u_h , také T_i se zobrazí na T_h . Všechny stromy T_j pro $j \in \{1, \dots, k\}$ jsou tedy navzájem isomorfní, a to tak, že uzly u_j si vždy odpovídají. Je tedy $G \in \mathfrak{G}_1$.

Budiž nyní k sudé, δ sudé. Budiž u_i centrem některé kostry grafu G .

Podle lemmatu 3 je u_i centrem koster $S_{i+\frac{1}{2}(k-2)}$, $S_{i+\frac{1}{2}k}$. Kdyby byl uzel u_{i+1} centrem některé kostry grafu G , musel by být centrem koster $S_{i+\frac{1}{2}k}$, $S_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, což nelze, protože centrem kostry $S_{i+\frac{1}{2}k}$ je u_i a existuje jediné centrum, neboť δ je sudé. Proto u_{i+1} není centrem žádné kostry, ale u_{i+2} musí být centrem kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, a tedy rovněž kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k+4)}$. Jdeme-li takto dále, vidíme, že centra koster grafu G jsou právě všechny uzly u_j , kde $j \equiv i \pmod{2}$. Tedy také všechny stromy T_j pro $j \equiv i \pmod{2}$ jsou isomorfní s T_i , a to tak, že v příslušném isomorfismu uzel u_j odpovídá uzlu u_i . Budiž tedy $j \equiv i \pmod{2}$. Při isomorfním zobrazení kostry $S_{j+\frac{1}{2}(k-2)}$ na kostru $S_{j+\frac{1}{2}k}$, v němž je uzel u_j samodružný, se zobrazí (opět podle lemmat 3 a 5) uzel u_{j-1} na u_{j+1} a uzel u_{j+1} na u_{j-1} . Tedy také $T_{j-1} \cong T_{j+1}$ a při

příslušném isomorfismu uzlu u_{j-1} odpovídá uzel u_{j+1} . Protože j bylo libovolně zvolené číslo kongruentní s i modulo 2, platí pro libovolné $h \equiv i + 1 \pmod{2}$ vztah $T_h \cong T_{i+1}$ a v příslušném isomorfismu uzlu a_{i+1} odpovídá uzel a_h .

V případě δ lichého je důkaz analogický, pouze místo center uvažujeme centrální hrany.

Lemma 7. *Neexistují grafy s vlastností (KI) o větším cykломatickém čísle než jedna.*

Důkaz. Kostru grafu sestavujeme obvykle tím způsobem, že postupně odstraňujeme hrany patřící kružnicím, a takto postupně, po jednotkách, snižujeme cykломatické číslo grafu až na nulu. Proto stačí se omezit na grafy o cykломatickém čísle dvě. Budiž G takovýto graf. Kostry dvou grafů z $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ jsou spolu isomorfní zřejmě právě tehdy, jsou-li tyto grafy spolu isomorfní. Proto každý graf vzniklý odstraněním jedné hrany patřící kružnici z grafu G musí být isomorfní s určitým grafem G' z $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$. Graf G' obsahuje jedinou kružnici K' ; její délka budiž k . Její uzly označíme u'_1, \dots, u'_k ; stromy T'_1, \dots, T'_k budtež analogické stromům T_1, \dots, T_k výše definovaným. Budiž $l(G') = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{x \in U(T'_i)} d(u'_i, x)$.

Vznikne-li G z grafu G' přidáním hrany spojující dva uzly kružnice v G' , pak odstraněním libovolné hrany této kružnice dostaneme z grafu G graf G'' o cykломatickém čísle rovném jedné, ale s kružnicí délky menší než k . Nechť tedy vznikne G z grafu G' přidáním hrany spojující dva uzly stromů T'_i, T'_j pro $i \neq j$ tak, že alespoň jeden z nich není uzlem kružnice K' . Budiž bez újmy na obecnosti koncový uzel v této hrany ležící v T'_i různý od u'_i . Odstraníme-li hranu incidentní s u'_i ležící na cestě z u'_i do v , dostáváme z G graf G'' s touž kružnicí jako G' , avšak obdobně definovaný strom T'_i zřejmě nebude isomorfní se stromy T'_h pro $h \equiv i \pmod{2}$. Konečně vznikne-li G z G' přidáním hrany spojující uzly téhož T'_i , pak odstraněním hrany kružnice K' incidentní s u'_i dostaneme graf G'' opět o cykломatickém čísle rovném jedné, ale zřejmě obdobně definované $l(G'')$ je větší než $l(G')$.

Důkaz věty. Je-li cykломatické číslo grafu G rovno nule, pak G je strom; má tedy pouze jedinou kostru a věta pro něj platí. Pro grafy o cykломatickém čísle rovném jedné věta platí podle lemmatu 6. Pro grafy o cykломatickém čísle větším než jedna platí lemma 7, tedy žádné takovéto grafy s vlastností (KI) neexistují.

Literatura

[1] O. Ore: Theory of Graphs. Providence 1962.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (VŠST).

Summary

THE GRAPHS, ALL OF WHOSE SPANNING TREES ARE ISOMORPHIC TO EACH OTHER

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Let $k \geq 3$ be a positive integer, T a tree, a its vertex. Construct the graph $G(k, T, a)$ in the following manner: Take a circuit K of the length k , let its vertices be u_1, \dots, u_k in this order. Further take k trees T_1, \dots, T_k all isomorphic to T and let a_i be the vertex of the tree T_i corresponding in the isomorphism to the vertex a of the tree T . By identifying the vertex a_i with u_i for each i we obtain the graph $G(k, T, a)$. The class of all possible graphs $G(k, T, a)$ for odd numbers k will be denoted by \mathfrak{G}_1 .

Now let us define the graph $G(k, T', a', T'', a'')$. Let $k \geq 4$ be an even positive integer, T', T'' trees, a' a vertex of the tree T' and a'' a vertex of the tree T'' . Take a circuit K of the length k , let its vertices be u_1, \dots, u_k in this order. Let T_i for odd i from 1 to $k - 1$ be trees isomorphic with T' and for even i from 2 to k trees isomorphic with T'' . For an odd (even) i let a_i be the vertex of the tree T_i corresponding in the mentioned isomorphism to the vertex a' (a'') of the tree T' (T''). By identifying the vertices a_i and u_i for each i we obtain the graph $G(k, T', a', T'', a'')$. The class of all possible graphs $G(k, T', a', T'', a'')$ will be denoted by \mathfrak{G}_2 .

Now the following theorem is proved.

Theorem. *Let G be a finite graph, all of whose spanning trees are isomorphic to each other. Then either G is a tree, or $G \in \mathfrak{G}_1$, or $G \in \mathfrak{G}_2$.*

This theorem was expressed as a conjecture by J. SEDLÁČEK.