

# The laws of flow in rough pipes

## Strickler, Manning, Nikuradse & drag-velocity

BY JAMES WILLIAMSON

M. I. C. E.

*Texte français, p. 749.*

### INTRODUCTION

From checking and re-examination of the mass of observational data given in the Nikuradse Report (1) evidence is found which casts grave doubts on the justification of the Nikuradse formula for flow in rough pipes. Further evidence adverse to the Nikuradse formula is adduced from actual experience with large concrete pipes.

The Author concludes that the Nikuradse formula should be discarded but that the Strickler and Manning types of formulae are fundamentally correct for small and large pipes in the  $V^2$ -law region of flow.

From analysis of the effects of different roughness sizes ( $k$  sizes) on velocities near the side of a pipe, it is found that a velocity  $V_D$  close to the side of the pipe (actually at  $1.5 k$  from the

surface) has fundamental importance in relation to the generation of turbulence. Work appears to be done in the generation of turbulence (small spinning masses of water) at a rate proportional to the cube of  $V_D$ , and the dissipation of this turbulence in the flowing stream produces loss of head. This leads to the Author's new "drag-velocity" formula for loss of head (2) :

$$S = 0.0015 \frac{V_D^3}{V_q R} \text{ (metre sec. units)} \quad (14)$$

Co-ordinating factors are given for relating  $V_D/V_q$  to  $d/k$  in the foregoing formula, and for relating  $n$  to  $k$  in Manning's formula and it is shown that the drag-velocity formula (14) produces the same results as the Manning formula. Attention is called to the significance of the  $V_D^3$  term in the formula.

### FORMULAE FOR FLOW IN ROUGH PIPES

In the fully-rough, or  $V^2$ -law region of flow many Engineers on the Continent of Europe use the Strickler formula :

$$v = KR^{2/3} S^{1/2} \quad (1)$$

while in the English-speaking countries the Manning formula :

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (2)$$

finds similar extensive use. The two formulae are identical, Strickler's  $K$  being the reciprocal of Manning's  $n$  which again is nearly the same as

(1) *Strömungsgesetze in Rauhen Röhren*; J. NIKURADSE, Göttingen, 1933.

(2) *Drag-Velocity in relation to production of Turbulent Energy and Loss of Head in Pipes in the  $V^2$  Law region of Flow*. JAMES WILLIAMSON, M.I.C.E., Inst. of Civil Engineers, 1948.

Kutter's coefficient. With change of the unit of length to feet instead of metres Manning's formula becomes :

$$v = \frac{1.486}{n} R^{2/3} S^{1/2} \text{ (foot sec. units) (3)}$$

In the following discussion the metrical form will be used, and as transposed for finding resistance to flow it becomes :

$$S = \frac{V^2 n^2}{R^{1.33}} \quad (4)$$

The general coefficient  $\lambda$  in the formula  $S = \frac{\lambda V^2}{2gd}$  is, for the Manning formula (4) :

$$\lambda = \frac{2gn^2 \times 6.35}{d^{0.33}} \quad (5)$$

where  $d$  is the diameter of the pipe.

Some Engineers and Scientists consider that the laboratory and mathematical support given to the Nikuradse formula for flow in the rough-law region justify its use in preference to the Strickler or Manning formula.

The Nikuradse formula is :

$$\lambda = \frac{1}{(1.74 + 2 \log r/k)^2} \quad (6)$$

where  $r$  = half diameter of the pipe.

$k$  = diam. of sand grains used in forming the rough surface.

## MANNING FORMULA IN RELATION TO THE NIKURADSE EXPERIMENTAL DATA

When the Nikuradse investigation came to the Author's notice, some time after he had adopted the Manning formula for general use, he obtained a copy of the actual report and studied carefully the great mass of recorded data. He found that within the experimental range the Manning formula would average the experimental results as well as the Nikuradse formula, and that Manning's  $n$  was a roughness factor related to Nikuradse's  $k$  by the formula :

$$k = 3.4 n^6 \times 10^{10} \text{ cm}$$

or

$$k = 3.4 n^6 \times 10^8 \text{ m} \quad (7)$$

Using this relationship in conjunction with formula (5) we find that for the Manning formula the resistance coefficient is :

$$\lambda = 0.180 (k/d)^{1/3} \quad (8)$$

This is a simple formula, presenting rather a clearer picture to the mind than Nikuradse's logarithmic formula and producing nearly the same results within the Nikuradse experimental range which used rough surfaces made up of sand grains having diameters, or  $k$ -sizes, of 0.01, 0.02, 0.04, 0.08 and 0.16 cm in pipes of 2.5, 5.0 and 10.0 cm diam. The pipes and sand grains were used in combination to give six different  $r/k$  ratios varying from 15 to about 500, where  $r$  is the half-diameter of the pipe.

Results by formula (6) begin to deviate appreciably from the results of formula (8) at the higher  $r/k$  values and the divergence becomes rapidly greater in the field of still higher values, which is beyond the scope of small-scale laboratory experiment, but is of great importance to the hydraulic engineer who has to deal with large pipes.

## GRAPHICAL COMPARISON OF MANNING AND NIKURADSE FORMULAE

The two formulae are graphically compared in fig. 1 on a logarithmic diagram with  $\log 100 \lambda$  plotted in relation to  $\log r/k$ . The whole of the Nikuradse data applicable to rough-law flow is summarised in average figures at the right of the diagram and the points plotted are shown by full black circles. Two separate points, widely apart, are shown against the ratio  $r/k = 15$ , the lower point showing the correction of a whole section of records which appears to have been subject to miscalculation which resulted in coincidence with the upper point (page 17 of Nikuradse's Report). Some uncertainty therefore

arises in interpreting the upper end of the range.

Nikuradse's formula :

$$\lambda = \frac{1}{(1.74 + 2 \log r/k)^2}$$

is shown by a full curved line, while the exponential formula  $\lambda = 0.180 (k/d)^{1/3}$  is shown by a straight broken line, and the lines are extended with rapidly increasing departure down to the low value of  $\lambda = 0.0079$  ( $\log 100 \lambda = \bar{1}.900$ ). The extent of the departure is much obscured by the logarithmic plotting since at the base of the

diagram the difference in the logarithmic numbers is only 26 % while the difference in  $r/k$

ratios is between 5,700 ( $\log r/k = 3.76$ ) and 57,000 ( $\log r/k = 4.76$ ) or about 1,000 %.

### CRITICISM OF NIKURADSE'S DEDUCTIONS

In Nikuradse's experiments the sand grain surface applied on the inside of the pipe received a fixing coat of thin lacquer covering the sand grains and filling by capillarity the inner-most

the effective depth of the recesses in which turbulences (small spinning masses) are formed. The same thickness of coating on the largest grains (0.16 cm dia.) would add a negligible percentage to the size. Nikuradse considered that the effective height remained unaltered by the lacquer coating, but the Author considers that it must have affected the relative proportions of the roughnesses and should have been allowed for. There is no record of the actual thickness of the coating but the diagram (fig. 1) shows in the table at the side, the effect on the  $r/k$  ratio of a very thin coating of only 0.0006 cm which would increase the diameter of the smallest grains by 0.0012 cm or 12 % and the largest by less than 1 %. The result would be to bring down the  $r/k$  ratio from 507 to 440 and the next two ratios would be 235 and 120 instead of 252 and 126 respectively. By these corrections the two lower plotted points would be moved to the left away from the Nikuradse line, and nearer to the Manning line.

A further correction is required on the two lower points if, as the Author finds from analysis of the figures given on page 18 of the report, there has been a miscalculation of the mean velocities in the high-velocity  $V^2$ -law cases for  $r/k = 507$  and  $r/k = 252$ . This point is referred to again later in connection with the consideration of the velocity distribution curves, but as the velocities in all the pertinent cases which can be checked have been taken too low the values of  $\lambda$  or  $100 \log \lambda$  calculated from these velocities will be too high and should be reduced. The corrections have been approximately estimated and have the effect of lowering the plotted points vertically towards the Manning line. The two corrections taken together, that is, for  $r/k$  ratio and for value of  $\lambda$ , have the effect of moving the points diagonally to the left and placing them practically on the Manning line. The Nikuradse curve and the corresponding formula for flow in rough pipes appear therefore to rest on a very uncertain experimental basis.

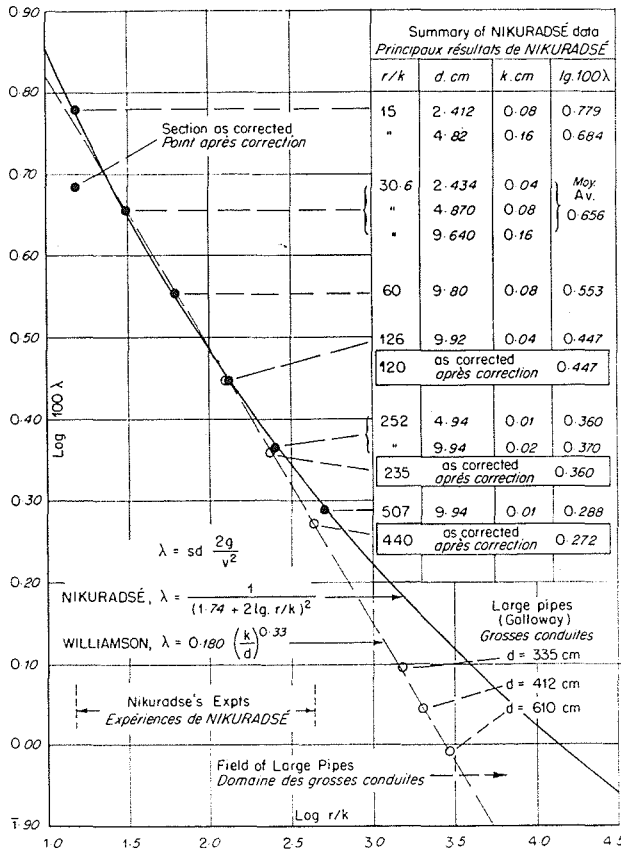


FIG. 1.

Comparison of resistance coefficient by Nikuradse and Williamson formulae for flow in rough pipes.

Comparaison des coefficients de résistance donnés par les formules de Williamson et de Nikuradse pour l'écoulement dans les conduites rugueuses.

spaces. The smallest grains were only 0.01 cm diameter and a very thin coating would add an appreciable percentage to their size and increase

### REFERENCE TO LARGE-SCALE EXPERIENCE

The question of which curve is nearer the truth is not easy to determine by laboratory experiment owing to the extremely small size of the roughness required to obtain high  $r/k$  ratios

in small pipes. Evidence must be sought from large pipes, the larger the better. The experience with three large concrete-lined aqueducts and another of smaller size which came under the

Author's design and supervision in the Galloway Water Power Scheme in Scotland provides such evidence which is all in favour of the Manning formula. The coefficient  $n$  for a reinforced concrete pressure pipe 4'6" (137 cm) dia. with the usual irregularities at the joints is known from its performance, without special test, to be approximately 0.012. The three large aqueducts, one a lined tunnel and the others surface aqueducts made of reinforced concrete, were all similarly made at about the same time with internal travelling steel forms, whose plates produced comparatively smooth panels, intersected by a regular pattern of joint marks. The flatter parts of the inverts were made by shaping the concrete without the use of forms and were somewhat rougher than the upper portions. An

engineer accustomed to the estimation of roughness coefficients could readily judge that as a whole the surfaces in the four cases had approximately the same class of roughness. The turbine efficiency and surge tank tests provided data on flow and loss of head for the three large aqueducts from which Manning's  $n$  was calculated. It was found to be nearly the same in each case, viz. 0.012 to 0.0122 (Strickler's  $k=83$  to 82). This is consistent with practically uniform roughness which from formula (7) for  $n=0.012$  would be  $k=0.10$  cm. That is the equivalent average grain diameter would be 0.10 cm with an effective projection of about half that amount or 0.05 cm, which is a reasonable and credible value for the actual roughness.

**MANNING AND NIKURADSE FORMULAE APPLIED TO SMALL AND LARGE PIPES**

The three large aqueducts have diameters of 335, 412, and 610 cm respectively, and the following Table A shows the application of the Manning formula to the several cases, together with two further small pipes of 7.5 and 30 cm dia. assumed as having the same class of surface, with  $n=0.012$ , and chosen for illustration

because they come inside the range where Manning and Nikuradse produce practically the same results.

It is seen that application of the Manning formula to the large aqueducts, along with the Williamson formula for  $\lambda$ , leads to resistance coefficients in practical agreement with the

TABLE A  
MANNING FORMULA APPLIED TO SMALL AND LARGE CONCRETE PIPES

Dia. of pipe, d.cm. ....	7.5	30	137	335	412	610
Manning's $n$ .....	0.012	0.012	0.012	0.0122	0.012	0.012
Roughness, $k = 3.4 n^6 \times 10^{10}$ cm .....	0.10	0.10	0.10	0.11	0.10	0.10
Ratio $d/k$ .....	75	300	1,370	3,050	4,100	6,100
Williamson, $\lambda = 0.180 (k/d)^{1/3}$ .....	0.042	0.027	0.0163	0.0125	0.0112	0.00985
$\lambda$ from flow tests .....				0.0125	0.0111	0.0098

TABLE B  
NIKURADSE FORMULA APPLIED TO SMALL AND LARGE CONCRETE PIPES

Dia. of pipe cm. ....	7.5	30	137	335	412	610
Accepted value of $\lambda$ .....	0.042	0.027	0.0163	0.0125	0.0111	0.0098
$r/k$ by Nikuradse formula .....	37	150	1,110	4,030	6,760	15,500
$d/k = 2 r/k$ .....	74	300	2,220	8,060	13,500	31,000
$k$ cm. ....	0.10	0.10	0.062	0.041	0.03	0.02

actual test values, and as will be seen below the results for the two small pipes agree with the Nikuradse determination.

Table B above shows the application of the Nikuradse formula in reverse to find the  $k$  sizes starting from the accepted and proved values of  $\lambda$  taken from the preceding Table A.

It is seen that for the two pipes of 7.5 cm and 30 cm dia. which have been chosen with  $r/k$  ratios within the Nikuradse experimental range, the results are the same by either formula. All other cases are beyond the experimental range and the application of the Nikuradse formula leads to values for  $k$  in the bottom line of the table which diminish rapidly with increase of

size of the pipe, and fall to incredibly low values in the case of the large pipes. From this and other comparisons with large pipes the Author has no doubt whatever that the Nikuradse formula is wrong and should not be used for  $V^2$ -law flow in the field of large pipes, where there is a wealth of practical experience to justify the use of the Manning (or Strickler) formula. If the Nikuradse formula is wrong then its theoretical basis must also be at fault and it would be well to make further investigation of the ideas of "boundary layers" and "mixing lengths" which are introduced in support of the theory but are difficult to relate to the facts of turbulent hydraulic flow.

### INVESTIGATION OF DRAG OR SHEAR VELOCITY

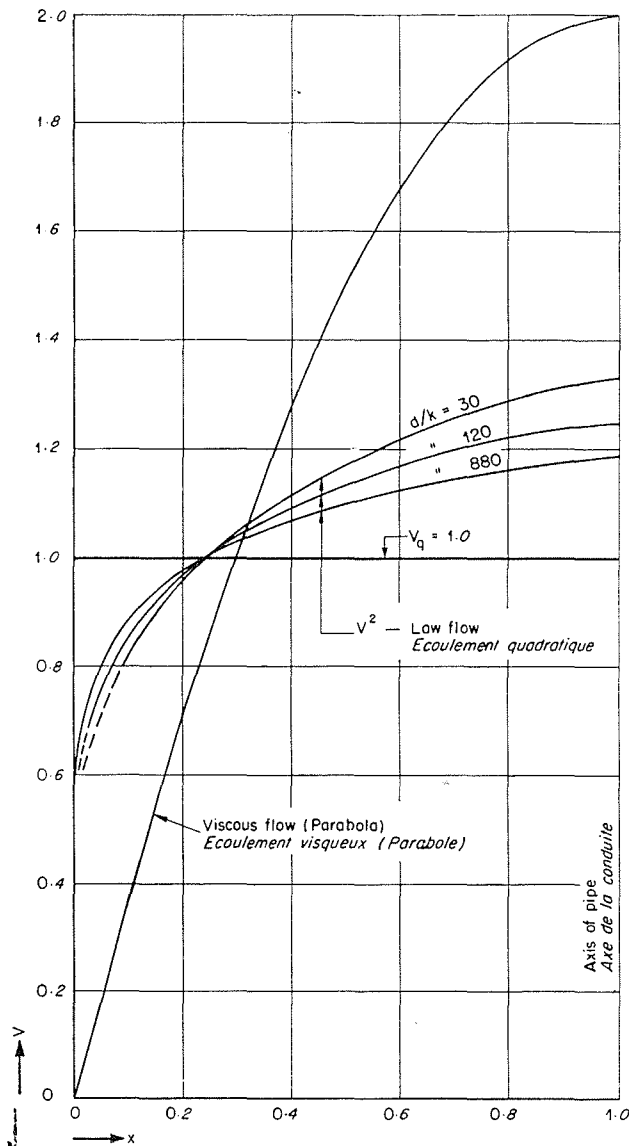


FIG. 2.

Velocity distribution curves.  
Courbes de distribution de vitesse.

In the following investigation of drag or shear velocity use has been made of the velocity distributions in the  $V^2$ -law region of flow given on pages 18 and 19 of Nikuradse's report.

Three typical curves for the rough-law cases  $d/k = 30, 120$  and  $880$  respectively are shown in fig. 2 along with the widely different parabolic curve for completely viscous flow. The curves are plotted on the common basis of  $V_q = 1$ . An outstanding difference is the extremely steep velocity gradient near the side for the rough pipes as compared with the much flatter gradient for viscous flow. This is worth considering closely in connection with any theory based on a viscous boundary layer. It is notable that the *smoothest* of the rough pipes shows the greatest departure from the form of viscous flow.

For the investigation of velocities close to the side of the pipe, in the case of the higher  $d/k$  ratios, it was necessary to obtain formulae which would reproduce the observed distributions with a very close degree of accuracy. Nikuradse used in his investigations an approximate logarithmic formula based on the ratio  $r/k$ . This gave the approximate shape of part of the curve but failed in the parts near the side and near the axis.

The Author found that the whole curve from the axis up to  $1.5k$  from the side could be represented much more closely by an exponential formula of the type

$$V = Ax^n - Bx^{An/B} + 1 + B - A \quad (9)$$

where  $A$  represents generally the ratio of maximum velocity to mean velocity  $V_m/V_q$  and  $B$  and  $n$  vary in consistent fashion with the ratio  $V_m/V_q$  so that for each case the whole curve including the sharper turn which merges to the horizontal at the apex is faithfully reproduced.

The formulae are given below :—

TABLE C  
FORMULAE FOR VELOCITY DISTRIBUTION CURVES

Roughness Ratio $d/k$	Velocity Ratio $V_m/V_q$	Formula for V. Basis $V_m = 1$	$x$ at $1.5 k$ from side	$V_D$ at $1.5 k$	
				$V_m = 1$	$V_q = 1$
1	2	3	4	5	6
	2.000	<i>Viscous Flow</i> $2x - x^2$	—	—	—
		<i>Rough Pipe Flow</i>			
30	1.330	$1.340 x^{0.165} - 0.020 x^{11.0} - 0.320$	0.100	0.596	0.793
60	1.285	$1.285 x^{0.144} - 0.017 x^{10.9} - 0.268$	0.050	0.568	0.729
120	1.250	$1.250 x^{0.131} - 0.015 x^{10.9} - 0.235$	0.025	0.536	0.670
240	1.223	$1.233 x^{0.120} - 0.013 x^{11.3} - 0.210$	0.0125	0.512	0.626
470	1.202	$1.202 x^{0.113} - 0.012 x^{11.9} - 0.190$	0.0064	0.487	0.586
880	1.188	$1.188 x^{0.108} - 0.011 x^{11.7} - 0.177$	0.0034	0.465	0.552

NOTE. —  $x$  is the distance from the side of the pipe, expressed as a fraction of the radius.

Brief reference may be made to the fact that the origin of each distribution curve is below the base, thus indicating negative velocity close to the side. Small negative velocity or an upstream component near the side is understandable from the conception of the production of spinning masses as indicated in fig. 3, where the direction of the spinning motion is upstream at the inner parts of the recesses. A viscous boundary layer wriggling between the projecting roughness grains in a downstream direction and existing side by side with energetic turbulent production is much more difficult to imagine. The velocity must, of course, merge to zero at contact with the surface.

The formulae were obtained by analysis of the distribution data given on pages 18 and 19 of the Nikuradse Report, for cases which come into the  $V^2$ -law region. Nikuradse states that for Reynolds numbers greater than 300,000, that is for the larger flows, the discharge was found, not by tank measurement but by integration of the distribution curve to find the mean velocity. It was not found possible at first to get satisfactory co-ordination in some cases between the formulae and the distribution data until it was

ascertained by recalculation and careful checking that Nikuradse's calculation for the mean velocity was wrong in a goodly proportion of the recorded examples. For instance, at the top of page 18 in the group given for  $r/k = 507$ , the two cases of highest mean velocity which are in the  $V^2$ -law region are given as 720 and 838 cm/s whereas recalculation from the recorded data makes them 736 and 853 respectively. The velocities given for the other examples in that group check well with the distribution data.

Again in the succeeding table for  $r/k = 252$  the two highest mean velocities are given as 840 and 1,127 cm/s whereas recalculation makes them 865 and 1,142 respectively. Numerous other corrections, not generally so large as those mentioned above, had to be made in other cases and invariably the alteration required was an increase in velocity.

The ratio  $V_m/V_q$  forms an important factor in the distribution formulae, and when the corrections are made to the mean velocities in order to obtain the proper ratio  $V_m/V_q$  for each case, the correspondance between the distributions calculated by the formulae and the distributions recorded in the tables on pages 18 and 19 is

amazingly close, the velocity ordinates being reproduced usually to well within half of one per cent for the range from  $x = 0.10$  (near the side) to  $x = 1$  (the axis).

A secondary result of using mean velocities which are less than the true values in the  $V^2$ -law

sections of  $r/k = 507$  and  $r/k = 252$  is that values of  $\lambda$  calculated from the tabular velocity figures are too high. The Author has therefore made an approximate estimate of the average reduction which should be made in the values of  $\lambda$  and has used the revised values in preparing fig. 1.

### DRAG-VELOCITY DETERMINED AT 1.5 k FROM SIDE OF PIPE

Several considerations led the Author to expect that in rough pipes the high velocity near the side shooting past the projecting roughnesses, would constitute the mechanism for production of turbulence, that is spinning masses formed

in the recesses which are emitted periodically into, and travel with, the stream where their energy is gradually dissipated thus producing loss of head. If a particular velocity existed which was responsible for the production of tur-

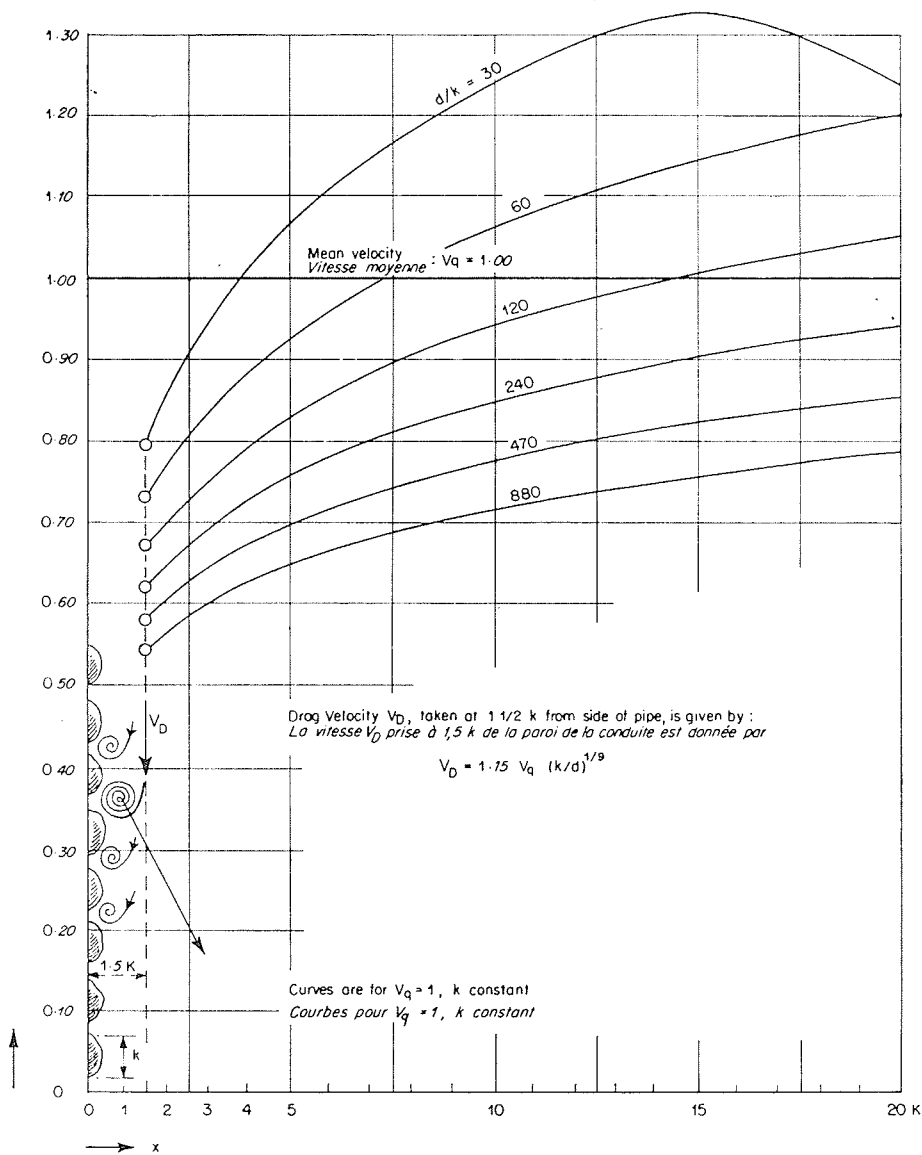


FIG. 3.  
Velocity distribution curves at side of pipe.  
*Courbes de distribution de vitesse au voisinage de la paroi.*

bulence it should, from similarity, occur near the side at a distance comparable with and proportional to the roughness size  $k$  and should do work in producing turbulence at a rate proportional to its cube, just as the machinery of a ship, when the resistance varies as  $V^2$  has to do work proportional to  $V^3$ .

The investigation of velocities close to the side of the pipe was carried out by adopting a constant mean velocity and a constant  $k$ -size large enough to enable visual and scalar comparisons to be made and using the formulae of Table C to plot parts of the distribution curves near the side. The  $k$ -size being constant the diameters have to be varied to give the appropriate  $d/k$  ratios and the curves are expanded in the horizontal direction to allow for this.

Fig. 3 shows the portions of the curves plotted on the basis  $k$  constant and  $V_q$  constant. The Author found by examining the velocity relationships at various short distances from the side that the expected conditions were obtained at  $1.5 k$  from the side, where the velocity (denoted  $V_D$ ) increases regularly as the relative roughness increases and in such a way that the shearing force or drag, for the same mean velocity ( $V_q$  constant) varies as  $V_D^3$ . The drag-determining velocity is therefore located at  $1.5 k$  from the side.

$V_D$  can be represented very closely, as shown in the Table D below, by the exponential formula :

$$\frac{V_D}{V_q} = 1.15 (k/d)^{1/9} \tag{10}$$

TABLE D

$d/k$	30	60	120	240	470	880
$V_D = 1.15 V_q (k/d)^{1/9}$ .....	0.789	0.730	0.675	0.625	0.581	0.542
$V_D$ at $1.5 k$ , table C, col. 6 .....	0.793	0.729	0.670	0.626	0.586	0.552

FORMULAE BASED ON DRAG-VELOCITY

If the power expended on generation of turbulent energy per unit area is proportional to  $V_D^3$ , and the conditions of flow are steady so that dissipation of energy proceeds at the same rate as generation then the loss of head should be proportional to  $\frac{4\pi R V_D^3}{4\pi R^2 V_q}$  where  $R$  is the hydraulic mean radius, equal to  $d/4$ . In this formula the numerator is proportional to the production of energy around the circumference per unit length and time, and the denominator is proportional to the mass of water per unit time in which the energy is dissipated. The rate of loss of head should therefore be given by the formula

$$S = C \frac{V_D^3}{V_q R} \tag{11}$$

where  $C$  is a constant, and frictional drag, or the shearing force at the wall, should be given by

$$S_D = C_D \frac{V_D^3}{V_q} \tag{12}$$

where  $C_D$  is another constant.

With a coefficient determined from the ex-

perimental resistances the rate of loss of head is given actually by the non-dimensional formula :

$$S = 0.0295 \frac{V_D}{V_q} \frac{V_D^2}{2 g R} \tag{13}$$

In metre-second units the formula (drag-velocity formula) becomes :—

$$S = 0.0015 \frac{V_D^3}{V_q R} \tag{14}$$

In foot-second units the formula is :

$$S = 0.00046 \frac{V_D^3}{V_q R} \tag{15}$$

The formulae are simple and as may be judged from No (13) they are of completely rational form for flow in the  $V^2$ -law region. Although the fundamental basis has been shifted from the mean velocity  $V_q$  of the Manning formula to the shear-producing side velocity  $V_D$  and the resulting drag-velocity formula (14) has a widely different appearance from that of Manning (4), the two formulae produce the same results.



**CORRESPONDENCE OF MANNING AND DRAG-VELOCITY FORMULAE**

That the formulae correspond can be shown by calculating the general coefficient  $\lambda$  from formula (14). Putting  $R = d/4$  we have :

$$S = 0.006 \frac{V_D^3}{V_q d} \tag{16}$$

but :

$$\lambda = \frac{2 g d S}{V_q^2}$$

Substituting the value of S obtained from equation (16) this becomes :

$$\lambda = 2 g \times 0.006 \left( \frac{V_D}{V_q} \right)^3$$

but from equation (10) :

$$\frac{V_D}{V_q} = 1.15 (k/d)^{1/9}$$

From which :

$$\begin{aligned} \lambda &= 19.62 \times 0.006 \times 1.15^3 (k/d)^{1/3} \\ &= 0.180 (k/d)^{1/3} \end{aligned} \tag{8}$$

This is identical with the general coefficient  $\lambda$  of the Manning formula and the two formulae (Manning and drag-velocity) therefore produce the same results, when  $n$  and  $k$  are co-ordinated

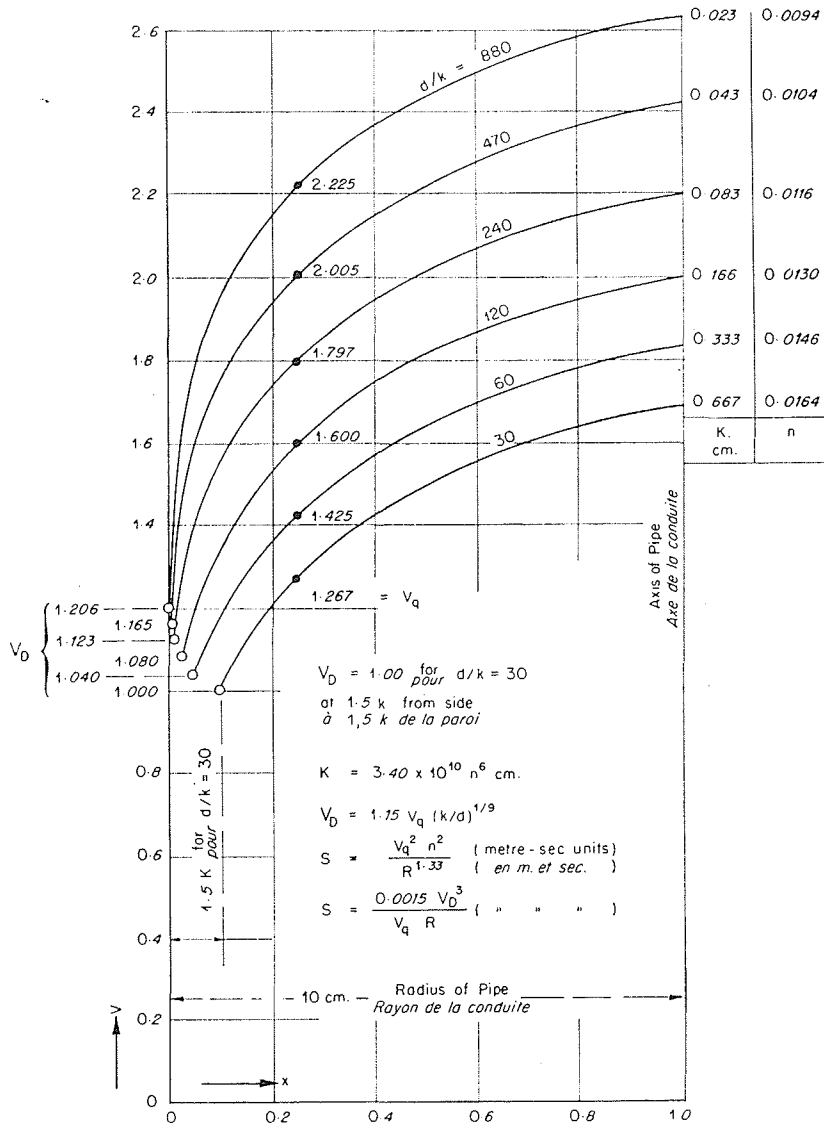


FIG. 4.

Velocity distributions for same loss of head in 20 cm pipe.  
 Courbes de distribution de vitesse pour une m\^eme perte de charge dans une conduite de  $\varnothing$  20 cm.

by the equation  $k = 3.4 n^6 10^{10}$  cm and  $V_D$  and  $V_q$  by the equation :

$$\frac{V_D}{V_q} = 1.15 (k/d)^{1/9}$$

An interesting comparison of the two methods is provided by fig. 4 which shows the velocity distribution curves for a pipe of 20 cm diam. when the same loss of head is obtained from various roughness sizes. Six different  $k$ -sizes are used to cover the range of roughness usually found for pipes in practice, namely 0.023, 0.043, 0.083, 0.166, 0.333 and 0.667 cm which produce  $d/k$  ratios in the Nikuradse range, viz. 880, 470, 240, 120, 60 and 30 respectively. The corresponding values of Manning's  $n$  are 0.0094, 0.0104, 0.0116, 0.0130, 0.0146 and 0.0164 respectively, and the Strickler's coefficients are 106, 96, 86, 77, 68 and 61.

At the same mean velocity the loss of head in a smooth pipe is less than in a rough pipe of the same diameter because on the drag-velocity basis  $V_D$  for the smooth pipe is less than for the rough pipe. If the velocity in the smooth pipe is increased  $V_q$  and  $V_D$  will increase in the same proportion, and when  $V_D$  becomes equal to that in the rough pipe there will then be equal generation of turbulent energy but as the smooth pipe will now have a proportionately greater  $V_q$  and consequently a greater discharge, its loss of head will still be below that of the rough pipe. Simple analysis shows that equality in loss of head will be attained when  $V_D \propto (d/k)^{1/18}$ ,  $V_D$  being then *greater* the smoother the pipe, with  $V_D^3/V_q$  becoming constant for the various roughnesses.

The curves of fig. 4 have been plotted by vertical expansion on this basis starting from the values of  $V_D$  given in the upper line of Table D, and using the appropriate curves defined by the formulae of Table C. The set of curves so obtained then gives a visual comparison of the mean velocities and the velocity distributions required to obtain equal loss of head in a pipe of constant diameter from the different roughnesses. To enable comparisons to be made by calculation the principal figures concerned are marked against each curve,  $V_D$  and  $V_q$  for the drag-velocity formula and  $V_q$  and  $n$  for the Manning formula. The essential requirements of  $V_D^3/V_q$  constant, and  $V_q^2 n^2$  constant are met to a practical degree, and almost the same results for loss of head are obtained by the application of either formula (4) or formula (14).

A comparison by calculation, as given below, makes this clear.

*Flow in 20 cm pipe*

$R = 0.05$  m :

$k = 3.4 n^6 \times 10^{10}$  cm

Manning formula :

$$S = \frac{V_q^2 n^2}{R^{1.33}} = \frac{V_q^2 n^2}{0.0184}$$

Drag Velocity formula :

$$S = \frac{0.0015 V_D^3}{V_q R} = \frac{0.03 V_D^3}{V_q}$$

TABLE E

$d/k$	$k$ cm	$n$	$V_D$ for $V_q = 1$	$V_D$ for equal loss	$V_q$ for equal loss	$\frac{V_q^2 n^2}{0.0184}$	$\frac{0.03 V_D^3}{V_q}$
30	0.667	0.0164	0.789	1.000	1.267	0.0235	0.0237
60	0.333	0.0146	0.730	1.040	1.425	0.0235	0.0237
120	0.166	0.0130	0.675	1.080	1.600	0.0235	0.0236
240	0.083	0.0116	0.625	1.123	1.797	0.0236	0.0236
470	0.043	0.0104	0.581	1.165	2.005	0.0236	0.0237
880	0.023	0.0094	0.542	1.206	2.225	0.0238	0.0236

As the curves of fig. 4 plotted with vertical expansion from the distribution formulae, have

the appearance of a set of parallel curves they have been replotted in fig. 5 using the mean

velocity  $V_q$  as common reference line, and it is seen that for equal loss of head in pipes of the same diameter but with different roughnesses the figure of velocity distribution is a bullet-

shaped body with nearly constant form of nose and various lengths of cylindrical body, the length increasing as  $d/k$  increases. As a result of the nearly constant nose form the mean velocity occurs at nearly the same place, generally between  $x = 0.24$  and  $x = 0.25$ , but about  $x = 0.255$  for the roughest pipe.

CONCLUSIONS

The Nikuradse formula for flow in rough pipes is not well supported by laboratory experiment or by experience with large pipes.

The Manning formula or its equivalent the Strickler formula may be used with confidence for large and small pipes when the flow has reached  $V^2$ -law conditions. Manning's  $n$  is a roughness coefficient directly related to the roughness size  $k$ , with  $k$  varying as the sixth power of  $n$ .

The Author's drag-velocity formula

$$S = \frac{0.0015 V_D^3}{V_q R}$$

introduces a velocity  $V_D$  located at  $1.5 k$  from the side of the pipe which appears to be closely concerned with the production of turbulence and consequent loss of head. The drag-velocity formula leads to the same results as the Manning or Strickler formulae.

For general use in problems of flow of water in rough pipes the Manning and Strickler formulae are more convenient than the drag-velocity formula. The latter however is in a more illuminative form and throws light on the cause of the high-resistance met with in special cases such as pipe bends where by reason of change in the distribution of flow the velocity distribution is different from that of fully-developed rough-pipe flow, and the drag-velocity is consequently different also. The great importance of the drag-velocity is indicated by the  $V_D^3$  term which shows that a local increase of  $V_D$  (without increase of  $V_q$ ) such as occurs on one side of a pipe in vortex-flow in bends will produce a much magnified increase in production of turbulent energy and consequently in loss of head, even although the high-velocity effect is restricted to part of the circumference.

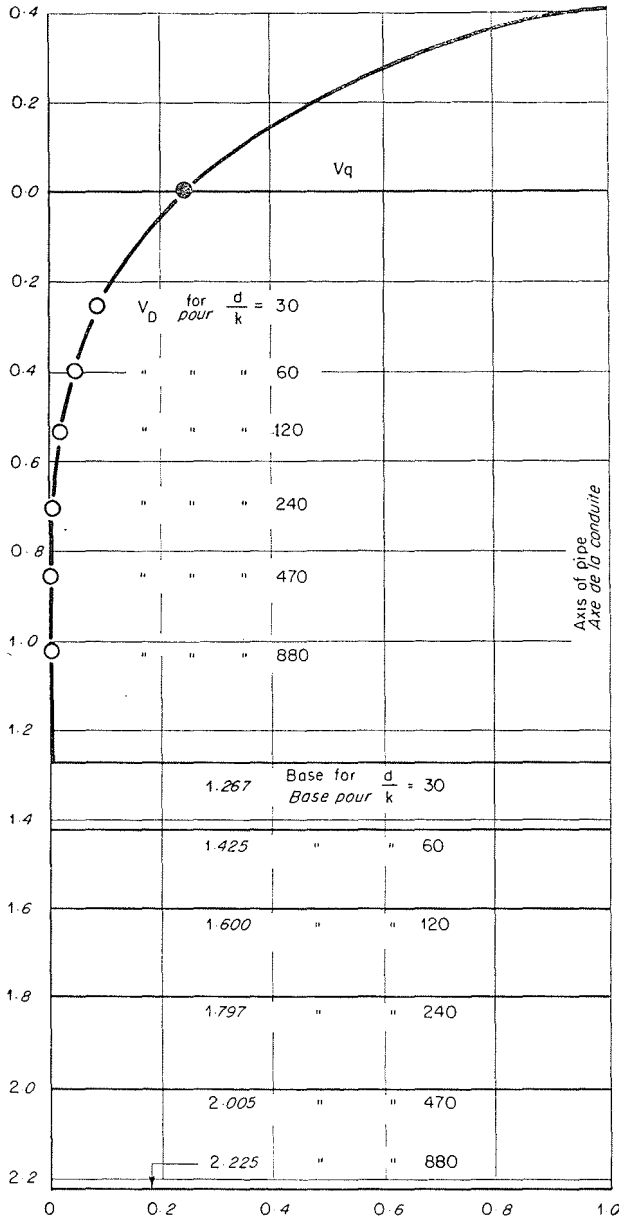


FIG. 5.

Distribution curves of fig. 4 for same position of  $V_q$ .

Les courbes de distribution de la fig. 4 après adoption de la vitesse moyenne  $V_q$  comme base de référence.

# Les lois de l'écoulement dans les conduites rugueuses

Strickler, Manning, Nikuradse et la "Vitesse de traînée"

BY JAMES WILLIAMSON

M. I. C. E.

*English text, p. 738.*

Se reporter au texte anglais, p. 738, pour les figures.

## INTRODUCTION

Si l'on collationne et réexamine la masse des données expérimentales fournies dans le rapport de NIKURADSE (1), on se trouve de toute évidence amené à émettre des doutes sérieux sur l'exactitude de la formule de NIKURADSE relative aux conduites rugueuses. Les résultats obtenus effectivement sur des conduites en béton de grand diamètre infirment encore la formule de NIKURADSE.

L'auteur conclut que cette formule doit être écartée, mais que les formules du type STRICKLER et MANNING sont foncièrement correctes pour les petites et les grosses conduites dans la zone des pertes de charge quadratiques.

Si l'on analyse l'effet de rugosité de différentes dimensions ( $k$ ) sur les vitesses au voisinage de la paroi, on constate qu'il y a une vitesse  $V_D$  au voisinage immédiat de la paroi (à  $1,5 k$  de la paroi)

dont l'influence est essentielle sur la naissance de la turbulence. L'intensité des phénomènes qui accompagnent l'apparition de la turbulence (petits tourbillons) semble proportionnelle au cube de  $V_D$ ; cette turbulence envahit l'écoulement et produit une perte de charge. Ceci amène l'auteur à proposer une nouvelle formule de perte de charge (2) :

$$S = 0,0015 \frac{V_D^3}{V_q R} \quad (\text{en m et s}) \quad (14)$$

Il existe des coefficients liant  $V_D/V_q$  à  $d/k$  dans la forme ci-dessus, et liant  $n$  à  $k$  dans la formule de MANNING; on montre que la formule ci-dessus (14) amène aux mêmes résultats que celle de MANNING. L'attention est attirée sur la signification du terme  $V_D^3$  de la formule.

## FORMULES D'ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES

Pour la zone d'écoulement complètement « rugueux » ou « quadratique », de nombreux ingénieurs en Europe continentale utilisent la formule de STRICKLER :

$$V = kR^{2/3} S^{1/2} \quad (1)$$

alors que, dans les pays de langue anglaise, on se

sert tout aussi généralement de la formule de MANNING :

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (2)$$

Les deux formules sont identiques, le coefficient  $k$

(1) *Strömungsgesetze in Rauhen Rohren*, J. NIKURADSE, Göttingen, 1933.

(2) *Drag-Velocity in relation to production of Turbulent Energy and Loss of Head in Pipes in the  $V^2$ -Law region of Flow*, James WILLIAMSON, M.I.C.E., Inst. of Civil Engineers, 1948.

de STRICKLER étant l'inverse du coefficient  $n$  de MANNING qui, lui, est à peu près le même que le coefficient de KUTTER. Si l'on prend comme unités les pieds au lieu des mètres, la formule de MANNING devient :

$$v = \frac{1,486}{n} R^{2/3} S^{1/2} \text{ (en pieds et s)} \quad (3)$$

Dans la suite, nous adopterons cette formule sous sa forme métrique et en la transformant de façon à obtenir la résistance à l'écoulement, soit :

$$S = \frac{V^2 n^2}{R^{1,33}} \quad (4)$$

Le coefficient  $\lambda$  de la formule  $S = \frac{\lambda V^2}{2 g d}$  a pour valeur dans la formule de MANNING (4) :

### LA FORMULE DE MANNING ET LES EXPÉRIENCES DE NIKURADSE

Lorsque les recherches de NIKURADSE parvinrent à sa connaissance, peu de temps après qu'il eut adopté d'une façon générale la formule de MANNING, l'auteur put se procurer une copie du rapport original et étudia soigneusement toute la masse des observations enregistrées. Il constata que, dans le domaine expérimenté, la formule de MANNING traduisait la moyenne des résultats obtenus aussi bien que celle de NIKURADSE et que le  $n$  de MANNING était un coefficient de rugosité lié au  $k$  de NIKURADSE par la formule suivante :

$$k = 3,4 n^6 \times 10^{10} \text{ cm}$$

$$\text{ou } k = 3,4 n^6 \times 10^8 \text{ m} \quad (7)$$

Si l'on rapproche cette relation de la formule (5), on trouve que, pour la formule de MANNING, le coefficient  $\lambda$  est :

$$\lambda = 0,180 (k/d)^{1/3} \quad (8)$$

### COMPARAISONS GRAPHIQUES DES FORMULES DE MANNING ET DE NIKURADSE

Les deux expressions sont comparées graphiquement sur un diagramme logarithmique donnant  $\log 100 \lambda$  en fonction de  $\log r/k$  (fig. 1). L'ensemble des observations de NIKURADSE s'appliquant à l'écoulement « rugueux » est résumé par les chiffres moyens sur la droite du diagramme et les points obtenus sont représentés par des cercles pleins noirs. Pour la valeur  $r/k = 15$ , on trouve sur le diagramme deux points distincts nettement séparés : le plus bas de ces points tient compte de la correction de toute une partie des résultats qui semblent entachés de fautes de calculs se traduisant par une coïncidence avec le point supérieur (page 17 du rapport de NIKURADSE). Il y a donc une certaine incertitude dans l'interprétation de la partie supérieure du domaine exploré.

$$\lambda = \frac{2 g n^2 \cdot 6,35}{d^{0,33}} \quad (5)$$

( $d$  est le diamètre de la conduite).

Certains ingénieurs et certains chercheurs estiment que, grâce à son support expérimental et mathématique, la formule de l'écoulement « rugueux » de NIKURADSE doit être utilisée de préférence à celle de STRICKLER ou de MANNING.

La formule de NIKURADSE est :

$$\lambda = \frac{1}{(1,74 + 2 \log r/k)^2} \quad (6)$$

où  $r$  est le rayon moyen de la conduite, et  $k$  le diamètre des grains de sable utilisés pour réaliser la surface rugueuse.

Ceci est une formule simple dont la forme est beaucoup plus plaisante que celle de la formule logarithmique de NIKURADSE; elle donne à peu près les mêmes résultats à l'intérieur du domaine exploré par NIKURADSE qui se servait de rugosités de surface constituées par des grains dont les diamètres ( $k$ ) étaient de 0,01 — 0,02 — 0,04 — 0,08 — 0,16 cm dans des conduites de 2,5 — 5 et 10,0 cm de diamètre. Les conduites et les grains de sable étaient combinés de manière à donner 6 rapports différents  $r/k$  variant de 15 à environ 500 ( $r$  est le demi-diamètre de la conduite).

Les résultats de la formule (6) s'écartent notablement de ceux de la formule (8) pour les plus grandes valeurs de  $r/k$  et cette divergence s'accroît rapidement au fur et à mesure que  $r/k$  augmente et sort du domaine des essais sur modèle réduit en laboratoire pour entrer dans celui qui intéresse l'ingénieur hydraulicien aux prises avec les problèmes que posent les grosses conduites.

La formule de NIKURADSE :

$$\lambda = \frac{1}{(1,74 + 2 \log r/k)^2}$$

se traduit par la courbe en traits pleins, alors que la formule  $\lambda = 0,180 (k/d)^{1/3}$  se traduit par la droite en traits mixtes : ces deux courbes vont en s'écartant rapidement jusqu'à la valeur inférieure de  $\lambda = 0,0079$  ( $\log 100 \lambda = 1,900$ ).

Le choix d'une échelle logarithmique dissimule l'importance de cet écart; en effet, à la partie inférieure des courbes, l'écart entre les valeurs logarithmiques est seulement de 26 %, tandis que l'écart entre les valeurs de  $r/k$  atteint environ 1.000 % ( $r/k = 5.700$  pour  $\log r/k = 3,76$  —  $r/k = 57.000$  pour  $\log r/k = 4,76$ ). . .

### CRITIQUES DES INTERPRÉTATIONS DE NIKURADSE

Dans les expériences de NIKURADSE, les rugosités en grains de sable appliquées à l'intérieur de la conduite recevaient une couche de fixage constituée d'un vernis recouvrant les grains et remplissant par capillarité les intervalles les plus profonds. Les plus petits grains ayant seulement 0,01 cm de diamètre, une pellicule très fine est susceptible d'augmenter très sensiblement leurs dimensions et d'accroître la profondeur réelle des anfractuosités où la turbulence prend naissance. La même épaisseur de vernis sur des grains plus gros (0,16 cm de  $\varnothing$ ) n'ajoutera que relativement peu à leurs dimensions. NIKURADSE admettait que la hauteur effective des rugosités n'était pas modifiée par la pellicule de vernis; l'auteur estime, quant à lui, que ceci affectait la rugosité et qu'il convenait d'en tenir compte. Il n'y a aucune mesure concernant l'épaisseur réelle de cette pellicule : sur le diagramme de la figure 1, on peut voir dans le tableau la répercussion, sur le rapport  $r/k$ , d'une pellicule extrêmement mince de seulement 0,0006 cm augmentant le  $\varnothing$  des grains de 0,0012 cm, soit 12 % pour les plus petits et seulement 1 % pour les plus gros. Il en résulte un abaissement du rapport  $r/k$  de 507 à 440, et les deux rapports précédents auraient pour valeur 235 et 120, au lieu de 252 et 126. A la suite de ces corrections, les deux points inférieurs notés sur le diagramme

se trouvent décalés vers la gauche en dehors de la courbe de NIKURADSE et se rapprochent de la droite de MANNING.

Une autre correction s'avère nécessaire pour les deux points inférieurs si, ainsi que l'auteur l'a constaté d'après une analyse des chiffres donnés à la page 18 du rapport original, il y a eu une faute de calcul des vitesses moyennes pour les grandes vitesses du domaine quadratique, aux points  $r/k = 507$  et  $r/k = 252$ . Nous reparlerons de cette question plus loin, au sujet des courbes de distribution de vitesses, mais, étant donné que les vitesses, dans tous les cas cohérents qui ont été mesurés, ont été prises trop faibles, les valeurs de  $\lambda$  ou de  $100 \log \lambda$ , calculées à partir de ces vitesses, sont trop élevées et doivent être réduites. Ces corrections ont fait l'objet d'estimations approximatives et ont pour effet d'abaisser les points calculés suivant la verticale en direction de la droite de MANNING. Si l'on tient compte des deux corrections (celle relative à  $r/k$  et celle relative à  $\lambda$ ), on constate que les points se déplacent en diagonales vers la gauche et vers le bas et viennent pratiquement s'aligner sur la droite de MANNING. La courbe de NIKURADSE et la formule correspondante pour l'écoulement dans les conduites rugueuses semblent bien, par conséquent, reposer sur des bases expérimentales très fragiles.

### ESSAIS A GRANDE ÉCHELLE

La question de savoir laquelle des deux courbes est la plus proche de la réalité n'est pas facile à trancher par des essais sur modèles réduits, par suite de la très grande finesse de rugosité nécessaire pour obtenir des valeurs élevées de  $r/k$  dans des conduites de petit diamètre. Seules de grosses conduites peuvent donner des résultats probants, d'autant plus probants qu'il s'agit de plus grands diamètres. L'auteur a mis au point et dirigé, aux installations de Galloway en Ecosse, une série d'essais sur trois conduites de grand  $\varnothing$  à revêtement en béton et sur une autre plus petite; les résultats de ces essais sont manifestement en faveur de la formule de MANNING. A la lumière de ces résultats, la valeur du coefficient  $n$  pour une conduite en charge en béton armé de 137 cm de  $\varnothing$  comportant les irrégularités habituelles au niveau des joints, est environ 0,012, dans des conditions tout à fait normales. Les trois grandes conduites — une galerie revêtue et deux conduites de surface en béton armé — ont été réalisées en même temps et de la même façon, à l'aide de coffrages mobiles en acier dont les parties planes donnaient des panneaux relativement

lisses, intercalés dans un réseau assez régulier constitué des traces des joints. Les radiers étaient troussés sans coffrage et étaient un peu plus rugueux que les parties supérieures. Un ingénieur, entraîné à estimer des coefficients de rugosité, constatait facilement que, dans l'ensemble, les rugosités des quatre conduites envisagées appartenaient à la même catégorie. Les essais, concernant les rendements de la turbine et le fonctionnement de la cheminée d'équilibre, fournirent des renseignements sur le débit et la perte de charge des trois grosses conduites, renseignements à partir desquels fut calculé le  $n$  de MANNING. Ce coefficient est, en fait, à peu près le même dans chaque cas, soit 0,012 et 0,0122 (ce qui correspond à une valeur du coefficient  $k$  de STRICKLER comprise entre 83 et 82). D'après la formule (7), on devrait avoir pour  $n=0,012$  une rugosité uniforme telle que  $k = 0,10$  cm. Autrement dit, cette rugosité correspondrait à des grains de sable d'un  $\varnothing$  moyen de 0,10 cm faisant saillie d'environ la moitié, soit 0,05 cm, ce qui représente une valeur raisonnable et admissible de la rugosité réelle.

### LES FORMULES DE MANNING ET DE NIKURADSE APPLIQUÉES AUX PETITES ET AUX GROSSES CONDUITES

Les diamètres des trois grosses conduites étaient respectivement : 315, 412 et 610 cm; le tableau A ci-dessous résume l'application de la formule de MANNING dans ces trois cas; il mentionne également les résultats obtenus avec de plus petites conduites de

7,5 et de 30 cm de  $\varnothing$  supposées appartenir à la même catégorie de rugosité, avec  $n = 0,012$ , et choisies à titre d'exemple car elles sont dans la bande où les formules de MANNING et de NIKURADSE donnent à peu près les mêmes résultats.

TABLEAU A  
FORMULE DE MANNING APPLIQUÉE A DES PETITES  
ET A DES GROSSES CONDUITES

Diamètre de la conduite (cm).....	7,5	30	137	335	412	610
$n$ de MANNING.....	0,012	0,012	0,012	0,0122	0,012	0,012
Rugosité $k = 3,4 n^6 \times 10^{10}$ cm .....	0,10	0,10	0,10	0,11	0,10	0,10
$d/k$ .....	75	300	1.370	3.050	4.100	6.100
Williamson, $\lambda = 0.180 (k/d)^{1/3}$ .....	0,042	0,027	0,0163	0,0125	0,0112	0,00985
D'après les essais : $\lambda$ .....				0,0125	0,0111	0,0098

On voit que l'application de la formule de MANNING aux grosses conduites, avec la formule de WILLIAMSON pour  $\lambda$ , conduit à des coefficients de résistance concordant pratiquement avec les valeurs effectivement trouvées, et comme nous le verrons plus loin, les résultats pour les deux petites conduites sont en accord avec la formule de NIKURADSE.

Le tableau B, qui suit, résume l'application de la formule de NIKURADSE à l'envers, c'est-à-dire, en cherchant les valeurs de  $k$  à partir des valeurs de  $\lambda$  admises et contrôlées qui se trouvent dans le tableau A.

On constate que, pour les deux conduites de 7,5 et de 30 cm qui ont été choisies avec des rapports

TABLEAU B  
APPLICATION DE LA FORMULE DE NIKURADSE  
A DES CONDUITES EN BÉTON DE PETIT ET DE GRAND  
DIAMÈTRES

Diamètre de la conduite (cm).....	7,5	30	137	335	412	610
Valeur admise pour $\lambda$ .....	0,042	0,027	0,0163	0,0125	0,0111	0,0098
$r/k$ d'après la formule de Nikuradse.....	37	150	1.110	4.030	6.760	15.500
$d/k = 2 r/k$ .....	74	300	2.220	8.060	13.500	31.000
$k$ cm .....	0,10	0,10	0,062	0,041	0,03	0,02

$r/k$  du même ordre de grandeur que ceux obtenus par NIKURADSE dans ses expériences, les résultats sont les mêmes qu'avec l'autre formule. Tous les autres cas sont en dehors de la bande expérimentée et l'application de la formule de NIKURADSE donne des valeurs de  $k$ , à la dernière ligne du tableau, qui diminuent rapidement ou fur et à mesure que les diamètres augmentent, pour tomber finalement à des valeurs invraisemblablement basses dans le cas de grosses conduites. A la lumière de ces résultats et d'autres confrontations avec de grosses conduites, l'auteur est convaincu que la formule

de NIKURADSE est défectueuse et ne devrait pas être utilisée dans le cas des écoulements quadratiques en grosses conduites, cas où l'on trouve, en abondance, des expériences pratiques justifiant la formule de MANNING (ou de STRICKLER). Puisque la formule de NIKURADSE est défectueuse, sa base théorique doit être également mise en doute, et il serait intéressant d'approfondir les notions de « couche-limite » et de « longueurs de mélange » qui sont introduites à l'appui de la théorie, mais que l'on a de la peine à relier aux faits que l'on constate dans le domaine de l'écoulement turbulent.

### RECHERCHES CONCERNANT LA « VITESSE DE TRAINÉE » OU « VITESSE DE CISAILLEMENT » (1)

Dans l'étude qui suit, nous adopterons, pour la

(1) Ces deux expressions tentent de traduire les termes de l'auteur : « Drag or Shear Velocity. » (N. d. T.)

portion quadratique de l'écoulement, les distributions de vitesses données aux pages 18 et 19 du rapport de NIKURADSE. Sur la figure 2, on a tracé trois courbes-type d'écoulement turbulent pour des

valeurs de  $r/k$  respectivement égales à 30, 120 et 880; on a tracé également la courbe parabolique tout à fait différente, qui correspondrait à un écoulement entièrement laminaire. Les courbes ont été tracées en prenant comme vitesse unité la vitesse moyenne ( $V_q = 1,0$ ). Il y a une différence frappante entre la valeur élevée du gradient de vitesse au voisinage de la paroi, dans le cas des conduites rugueuses, et la diminution considérable de ce gradient dans le cas du régime laminaire. Ceci mérite d'être retenu soigneusement, quelle que soit la théorie que l'on édifie en la fondant sur l'existence d'une couche limite laminaire. Il est à remarquer que c'est pour la plus lisse des conduites rugueuses que la courbe s'écarte le plus de celle correspondant à l'écoulement laminaire.

Pour l'étude des vitesses au voisinage immédiat de la paroi, dans le cas des plus grandes valeurs du rapport  $d/k$ , il est indispensable d'obtenir des formules traduisant les phénomènes observés avec une très grande approximation. NIKURADSE, dans ses

recherches, se servait d'une formule logarithmique approximative basée sur le rapport  $r/k$ . Ceci conduisait à un tracé approximatif d'une partie de la courbe, mais s'avérait inexact dans les régions voisines de la paroi et de l'axe.

L'auteur estime que la totalité de la courbe, depuis l'axe jusqu'à une distance  $1,5k$  de la paroi, serait représentée beaucoup plus fidèlement par une formule de la forme :

$$V = Ax^n - Bx^{An/B} + 1 + B - A \dots \quad (9)$$

où A représente, comme de coutume, le rapport de la vitesse maximum à la vitesse moyenne ( $V_m/V_q$ ); alors que B et n sont choisis suivant la valeur de  $V_m/V_q$ , de façon que, dans chaque cas, la totalité de la courbe se trouve fidèlement traduite, y compris la partie à forte courbure dont la tangente devient horizontale sur l'axe de la conduite.

Voici les formules :

TABLEAU C  
FORMULES DES COURBES DE DISTRIBUTION DE VITESSE

Rugosité rapport $d/k$	Vitesse rapport $V_m/V_q$	Formules avec $V_m$ comme unité de vitesses ( $V_m = 1$ )	$x$ à $1,5k$ de la paroi	$V_D$ à $1,5k$	
				$V_m = 1$	$V_q = 1$
1	2	3	4	5	6
	2,000	<i>Écoulement laminaire</i> $2x - x^2$	—	—	—
		<i>Écoulement « rugueux »</i>			
30	1,330	$1,340 x^{0,165} - 0,020 x^{11,0} - 0,320$	0,100	0,596	0,793
60	1,285	$1,285 x^{0,144} - 0,017 x^{10,9} - 0,268$	0,050	0,568	0,729
120	1,250	$1,250 x^{0,131} - 0,015 x^{10,9} - 0,235$	0,025	0,536	0,670
240	1,223	$1,233 x^{0,120} - 0,013 x^{11,3} - 0,210$	0,0125	0,512	0,626
470	1,202	$1,202 x^{0,113} - 0,012 x^{11,9} - 0,190$	0,0064	0,487	0,586
880	1,188	$1,188 x^{0,108} - 0,011 x^{11,7} - 0,177$	0,0034	0,465	0,552

NOTE :  $x$  est la distance à partir de la paroi de la conduite exprimée en fraction de rayon.

Il convient de remarquer brièvement le fait que l'origine de chacune des courbes est en dessous de la ligne de référence, et que l'on a ainsi une vitesse négative au voisinage de la paroi. L'existence d'une petite vitesse négative ou d'une composante à contre-courant au voisinage de la paroi, s'explique si l'on admet le mécanisme de la production des tourbillons tel que le montre la figure 3 : le mouvement du

tourbillon est dirigé vers l'amont à l'intérieur des anfractuosités. Une couche limite laminaire ondulant dans le sens de l'écoulement pour suivre les sinuosités de la paroi et coexistant avec une émission d'énergie turbulente est beaucoup plus difficile à imaginer. La vitesse doit naturellement tendre vers 0 au contact avec la paroi.



Les formules ont été obtenues en analysant les observations sur les distributions de vitesses données aux pages 18 et 19 du rapport de NIKURADSE, dans le domaine des pertes de charge quadratiques. NIKURADSE précise nettement que, pour les nombres de REYNOLDS supérieurs à 300.000, autrement dit pour les grands débits, le débit a été apprécié non pas par mesure à la capacité jaugée, mais par intégration de la courbe de distribution et détermination de la vitesse moyenne. De prime abord, nous ne parvenions pas, dans certains cas, à faire coïncider, de façon satisfaisante, les formules et les observations relatives à la distribution des vitesses; c'est alors que, après avoir repris et contrôlé rigoureusement les calculs, nous acquîmes la certitude que le calcul de la vitesse moyenne par NIKURADSE était erroné dans beaucoup des exemples présentés. Par exemple, en haut de la page 18, dans le paragraphe relatif à  $r/k = 507$ , les deux plus grandes vitesses moyennes — on se trouve dans le domaine quadratique — sont données égales à 720 et 838 cm/sec, alors que les calculs, à partir des données, conduisent respectivement à 736 et 853. Les vitesses données par ailleurs, dans ce paragraphe, coïncident avec les données.

Une fois de plus, dans le tableau suivant, pour  $r/k = 252$ , les deux vitesses moyennes les plus éle-

vées sont chiffrées à 840 et 1.127 cm/sec, alors qu'en reprenant les calculs, on trouve respectivement 865 et 1.142. Il y aurait à faire de nombreuses autres corrections, généralement moins importantes que celles mentionnées ci-dessus; dans tous les cas, c'est une augmentation de la valeur de la vitesse qu'il convient d'adopter.

Le rapport  $V_m/V_q$  constitue un coefficient important dans les formules de distribution, et une fois les corrections effectuées sur la vitesse moyenne, de façon à obtenir, dans chaque cas, le rapport  $V_m/V_q$  exact, la coïncidence entre les distributions calculées suivant les formules et les distributions enregistrées sur les tableaux des pages 18 et 19 du rapport, est étonnamment bonne: les ordonnées des vitesses sont couramment reproduites à moins de 1% près dans la région comprise entre  $x = 0,10$  (près de la paroi) et  $x = 1$  (à l'axe).

Autre conséquence de l'utilisation de vitesses moyennes sous-estimées dans la région quadratique ( $r/k = 507$  et  $r/k = 252$ ), les valeurs de  $\lambda$  calculées d'après les chiffres du tableau sont trop élevées. L'auteur a donc procédé à une estimation de la réduction moyenne qu'il convenait d'opérer sur les valeurs de  $\lambda$  et ce sont ces valeurs réduites qui ont été utilisées dans la préparation de la figure 1.

#### DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE TRAINÉE A 1,5 k DE LA PAROI DE LA CONDUITE

De nombreuses considérations ont conduit l'auteur à penser que, dans les conduites rugueuses, ce sont les grandes vitesses au voisinage de la paroi qui, au passage des aspérités, seraient à l'origine de la turbulence: des tourbillons, formés dans les anfractuosités, sont émis périodiquement dans l'écoulement qui les entraîne et la dissipation progressive de leur énergie provoque une perte de charge. S'il existe une vitesse particulière déterminant la naissance de la turbulence, elle devrait se trouver, en accord avec l'hypothèse ci-dessus, près de la paroi, à une distance comparable et proportionnelle à l'importance de la rugosité  $k$ ; le travail qu'elle accomplit lors de la naissance de la turbulence devrait être proportionnel au cube de sa valeur, exactement comme la puissance des machines d'un navire doit être proportionnelle à  $V^3$ , lorsque la résistance à l'avancement varie comme  $V^2$ .

L'étude des vitesses au voisinage de la paroi a été poursuivie en adoptant, pour la vitesse moyenne et pour la hauteur  $k$  des rugosités, des valeurs suffi-

samment grandes pour permettre des comparaisons perceptibles et chiffrées; les formules utilisées pour le tracé des courbes au voisinage de la paroi sont celles du tableau « C ».  $k$  étant constant, il fallait, pour obtenir les valeurs désirées de  $d/k$ , jouer sur le  $\emptyset$  et, à cet effet, dilater plus ou moins les courbes dans le sens horizontal.

La figure 3 montre les tronçons des courbes tracées sur la base de  $k$  et  $V_q$  constants. L'auteur a découvert, en examinant les lois de variations de vitesses à diverses distances au voisinage de la paroi, que la loi prévue se trouvait réalisée à 1,5  $k$  de la paroi, où la vitesse (notée  $V_D$ ) augmente régulièrement avec la rugosité relative de telle manière que la force de frottement varie comme  $V^3$  pour la même vitesse moyenne ( $V_q$  constant). La vitesse caractéristique de trainée se trouve à 1,5  $k$  de la paroi.  $V_D$  peut être représenté très exactement, comme le montre le tableau « D » ci-dessous, par la formule:

$$V_D/V_q = 1,15 (k/d)^{1/9} \quad (10)$$

TABLEAU D

$d/k$	30	60	120	240	470	880
$V_D = 1.15 V_q (k/d)^{1/9}$ .....	0,789	0,730	0,675	0,625	0,581	0,542
$V_D$ à 1,5 $k$ , tableau C, col. 6 .....	0,793	0,729	0,670	0,626	0,586	0,552

### FORMULES BASÉES SUR LA « VITESSE DE TRAINÉE »

Si la puissance absorbée pour la production d'une énergie turbulente par une unité de surface est proportionnelle à  $V_D^3$ , et si les conditions d'écoulement sont stables de sorte que la perte d'énergie se poursuive au même rythme que sa production, la perte de charge est proportionnelle à  $\frac{4 \pi R V_D^3}{4 \pi R^2 V_q}$  où R est le rayon hydraulique moyen égal à  $d/4$ . Dans cette formule, le numérateur est proportionnel à la production d'énergie sur le pourtour de la circonférence par unité de longueur et de temps et le dénominateur est proportionnel au volume d'eau par unité de temps, dans lequel l'énergie se dissipe. La perte de charge par unité de longueur peut s'exprimer par la formule :

$$S = C \frac{V_D^3}{V_q R} \quad (11)$$

où C est une constante, et la force de frottement le long de la paroi est :

$$S_D = C_D \frac{V_D^3}{V_q}$$

où  $C_D$  est une autre constante.

La perte de charge unitaire est donnée, en fait,

par la formule sans dimension (13) ci-dessous, dont le coefficient numérique est conforme aux données expérimentales.

$$S = 0,0295 \frac{V_D}{V_q} \cdot \frac{V_D^2}{2 g R} \quad (13)$$

En utilisant les m et les sec, la formule devient (formule en vitesse de trainée) :

$$S = 0,0015 \frac{V_D^3}{V_q R} \quad (14)$$

En utilisant les pieds et les secondes :

$$S = 0,00046 \frac{V_D^3}{V_q R} \quad (15)$$

Ces formules sont simples et, comme le montre l'équation (13), elles sont d'une forme parfaitement logique pour l'écoulement quadratique.

La formule en vitesse de trainée (14) est établie en partant de la vitesse tangentielle caractéristique  $V_D$ , alors que la formule de MANNING part de la vitesse moyenne  $V_q$ ; elle est en apparence bien différente de la formule de MANNING et pourtant les deux formules conduisent aux mêmes résultats.

### CORRESPONDANCE ENTRE LA FORMULE DE MANNING ET LA FORMULE EN VITESSE DE TRAINÉE

Le fait que les formules correspondent peut être prouvé en calculant le coefficient général  $\lambda$  d'après la formule (14). En posant  $R = d/4$ , on a :

$$S = 0,06 \frac{V_D^3}{V_q d} \quad (16)$$

Mais :

$$\lambda = \frac{2 g d S}{V_q^2}$$

En substituant la valeur de S obtenue ci-dessus (16) :

$$\lambda = 2 g \times 0,006 \left( \frac{V_D}{V_q} \right)^3$$

Mais, d'après (10) :

$$\frac{V_D}{V_q} = 1,15 (k/d)^{1/9},$$

donc :

$$\begin{aligned} \lambda &= 19,62 \times 0,006 \times 1,15^3 (k/d)^{1/3} \\ &= 0,180 (k/d)^{1/3} \end{aligned} \quad (8)$$

Ceci est identique au coefficient général de la formule de MANNING et les deux formules (celle de

MANNING et celle en vitesse de trainée) conduisent aux mêmes résultats lorsque  $n$  et  $k$  sont liés par l'équation :

$$k = 3,4 n^6 10^{10} \text{ cm} \quad \text{et} \quad V_D \text{ et } V_q$$

par :

$$\frac{V_D}{V_q} = 1,15 (k/d)^{1/9},$$

La figure 4 illustre une comparaison intéressante des deux méthodes : on y voit les courbes de distribution de vitesses pour une conduite de 20 cm de diamètre, lorsque la même perte de charge est obtenue en faisant varier la hauteur des rugosités. Pour couvrir le domaine des rugosités rencontrées couramment dans les conduites industrielles, nous avons choisi 6 valeurs de  $k$  : 0,023, 0,043, 0,083, 0,166, 0,333 et 0,667 en cm. Ceci correspond à des valeurs  $d/k$  de l'échelle de NIKURADSE égales à : 880, 470, 240, 120, 60 et 30.

Les valeurs correspondantes du  $n$  de MANNING sont respectivement : 0,0094, 0,0104, 0,0116, 0,0130, 0,0146 et 0,0164.

Les coefficients de STRICKLER seraient : 106, 96, 86, 77, 68 et 61.

Pour la même vitesse moyenne, la perte de charge dans une conduite lisse est plus faible que dans une conduite rugueuse, de même diamètre, car la valeur

de la vitesse  $V_D$  est plus faible dans le cas de la conduite lisse que dans celui de la conduite rugueuse. Si, dans la conduite lisse, la vitesse augmente,  $V_q$  et  $V_D$  augmenteront dans la même proportion; lorsque  $V_D$  devient égal à ce qu'il est dans la conduite rugueuse, il y aura égale production d'énergie turbulente, mais étant donné que  $V_q$  sera proportionnellement plus grand et que le débit sera par conséquent plus élevé, la perte de charge sera plus faible que dans la conduite rugueuse. Un calcul simple montre que l'égalité de perte de charge sera atteinte lorsque  $V_D \equiv (d/k)^{1/18}$ ,  $V_D$  étant alors *d'autant plus grand* que la conduite est plus lisse et le rapport  $(V_D^3/V_q)$  devenant constant pour les diverses rugosités.

Les courbes de la figure 4 ont été tracées à partir de cette base, en partant des valeurs de  $V_D$  données à la ligne supérieure du tableau D, et en utilisant les courbes correspondantes définies par les formules du tableau C. L'allure de ces courbes montre bien la comparaison des vitesses moyennes et des courbes de distribution de vitesse nécessaires pour obtenir une perte de charge égale dans les conduites de même diamètre mais de rugosité différente. Afin de faciliter des comparaisons pour le calcul, les

principales valeurs intéressantes ont été notées sur chaque courbe,  $V_D$  et  $V_q$  pour la formule en vitesse de trainée, et  $V_q$  et  $n$  pour la formule de MANNING. Les conditions essentielles  $V_D^3/V_q$  et  $V_q^2 n^2$  constants se rencontrent pratiquement et l'application de l'une ou l'autre des formules (4) et (14) conduit pour la perte de charge à peu près au même résultat.

L'exemple de calcul que nous donnons ci-dessous est particulièrement parlant.

*Ecoulement dans une conduite de diamètre 20 cm.*

$$R = 0,05$$

$$k = 3,4 n^6 10^{10} \text{ cm}$$

Formule de MANNING :

$$S = V_q^2 n^2 / R^{1,485} = V_q^2 n^2 / 0,0184$$

Formule en vitesse de trainée :

$$S = \frac{0,0015 V_D^3}{V_q R} = \frac{0,03 V_D^3}{V_q}$$

TABLEAU E

$d/k$	$k$ cm	$n$	$V_D$ pour $V_q = 1$	$V_D$ à perte de charge égale	$V_q$ à perte de charge égale	$\frac{V_q^2 n^2}{0,0184}$	$\frac{0,03 V_D^3}{V_q}$
30	0,667	0,0164	0,789	1,000	1,267	0,0235	0,0237
60	0,333	0,0146	0,730	1,040	1,425	0,0235	0,0237
120	0,166	0,0130	0,675	1,080	1,600	0,0235	0,0236
240	0,083	0,0116	0,625	1,123	1,797	0,0236	0,0236
470	0,043	0,0104	0,581	1,165	2,005	0,0236	0,0237
880	0,023	0,0094	0,542	1,206	2,225	0,0238	0,0236

Comme les courbes de la figure 4, établies à partir des formules de distribution, apparaissent comme un réseau de courbes parallèles, elles ont été retracées sur la figure 5 en prenant comme base de référence commune la vitesse moyenne  $V_q$ , et on voit que dans des conduites de même diamètre, mais de rugosité différente, la courbe de distribution de vitesse, dans le cas d'une même perte de charge,

a une forme d'ogive, le profil de la pointe dans un plan quelconque passant par l'axe, restant à peu près constant, et les longueurs du corps cylindrique variant dans le même sens que  $d/k$ . Par suite du profil à peu près constant de la pointe, la vitesse moyenne se trouve à peu près à la même place, généralement entre  $x = 0,24$  et  $x = 0,25$ , mais autour de  $x = 0,255$  pour la conduite la plus rugueuse.

### CONCLUSIONS

La formule de NIKURADSE pour l'écoulement dans les conduites rugueuses ne concorde pas avec les expériences de laboratoire, ou avec les essais à grande échelle. La formule de MANNING, ou son équivalent,

celle de STRICKLER, peut être utilisée avec confiance dans le cas des grosses et des petites conduites, lorsqu'il s'agit d'écoulement du type quadratique. Le  $n$  de MANNING est un coefficient de rugo-

sité lié directement à la hauteur  $k$  de rugosité,  $k$  variant comme la sixième puissance de  $n$ .

La formule en vitesse de trainée de l'auteur  $S = 0,0015 V_D^3 / (V_q R)$  introduit une vitesse  $V_D$  située à  $1,5 k$  de la paroi de la conduite; cette vitesse  $V_D$  semble jouer un rôle important dans la naissance de la turbulence et la perte de charge qui en résulte.

Cette formule conduit aux mêmes résultats que la formule de MANNING ou de STRICKLER.

D'une façon générale, les formules de MANNING et de STRICKLER sont plus commodes que celle de l'auteur pour l'étude de l'écoulement de l'eau dans des conduites. Celle-ci se présente pourtant sous une forme plus lumineuse et éclaire le problème des

hautes résistances rencontrées dans certains cas spéciaux, tels que les coudes, dans lesquels, par suite d'une modification de l'écoulement, la distribution des vitesses, et par conséquent la vitesse de trainée, diffère de ce que l'on rencontre dans un écoulement en conduites rugueuses normal. La grande importance de la vitesse de trainée est illustrée par le terme  $V_D^3$  qui montre qu'une augmentation locale de  $V_D$  (sans accroissement de la vitesse moyenne), telle qu'il peut s'en produire sur une paroi d'une conduite avec les perturbations dues à un coude, provoquera une augmentation considérable de la production d'énergie turbulente, et par conséquent de la perte de charge, même si les effets de la grande vitesse sont limités à une partie seulement de la section.

