A. A. Mogulskii, E. I. Prokopenko, The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1449–1463

DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.19.100

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1449–1463 (2019) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2019.19.100 MSC 60K05, 60F10

ФУНКЦИЯ УКЛОНЕНИЙ И БАЗОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.А. МОГУЛЬСКИЙ, Е.И. ПРОКОПЕНКО

Abstract. We consider two multidimensional compound renewal processes $\mathbf{Z}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$. Assuming that the increments satisfy the Cramer's condition, we define and investigate the rate functions and the fundamental functions for the processes $\mathbf{Z}(t)$ and $\mathbf{Y}(t)$.

Keywords: compound multidimensional renewal process, large deviations, Cramer's condition, deviation (rate) function, fundamental function, Legendre transformation.

1. Введение. Формулировки основных результатов

Условимся элементы d-мерного Евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{x} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(d)})$, $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0)$. Скалярное произведение для элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} := x_{(1)}y_{(1)} + \cdots + x_{(d)}y_{(d)}.$$

Норму в $\mathbb{R}^d$ обозначим $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$. Случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$ тоже будем обозначать полужирными буквами, например, $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$. Через

$$\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta}) = (\tau, \zeta_{(1)}, \cdots, \zeta_{(d)})$$

будем обозначать случайный вектор (с.в.) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных

Mogulskii, A.A., Prokopenko, E.I., The rate function and the fundamental function for multidimensional compound renewal process.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00129).

Поступила 4 июня 2019 г., опубликована 17 октября 2019 г.

векторов $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2)$, $\boldsymbol{\xi}_3 = (\tau_3, \boldsymbol{\zeta}_3), ...$, где $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau > 0$, $\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$. Обозначим

$$T_0 = 0, \quad \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \quad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

При $t \geqslant 0$ определим два функционала

$$\eta(t) := \min\{k \geqslant 0 : \ T_k > t\}, \qquad \nu(t) := \max\{k \geqslant 0 : \ T_k \leqslant t\},$$

так что при всех $t \geqslant 0$ выполняется $\eta(t) = \nu(t) + 1$.

Первый обобщенный процесс восстановления (о.п.в.) $\mathbf{Z}(t)$ определяется равенствами

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Z}(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Наряду с первым о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ мы будем изучать также второй о.п.в.

$$\mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)} = \mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\zeta}_{\eta(t)} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \text{так что} \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{cases} \boldsymbol{\zeta}_1, & \text{если } \tau_1 > 0; \\ \boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{\zeta}_2, & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Траектории процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ непрерывны справа.

Обзор результатов по предельным теоремам для о.п.в. можно найти в [1], [2]. Ниже, при формулировании основных результатов настоящей работы мы упомянем известные нам результаты других авторов, относящиеся к близкой проблематике.

В дальнейшем везде будем предполагать, что выполнено условие Крамера в следующем виде

$[\mathbf{C}_0]$ $\qquad \mathbf{E}e^{v|\boldsymbol{\zeta}|} < \infty$ *при некотором* $v > 0$.

Кроме того, везде в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением *только однородного* первого о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и *только однородного* второго о.п.в. $\mathbf{Y}(t)$, для которых *распределение первого вектора* $\boldsymbol{\xi}_1 = (\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$ совпадает с распределением «общего» вектора $\boldsymbol{\xi} = (\tau, \boldsymbol{\zeta})$:

$$\boldsymbol{\xi}_1 \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\xi}$$

и, в частности, выполняется $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{Y}(0) = \boldsymbol{\zeta}_1$.

Во избежание повторений, условие $[\mathbf{C}_0]$ и соглашение $\boldsymbol{\xi}_1 \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\xi}$ напоминаться не будут.

Положим

$$\psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}}, \quad A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) := \ln \psi(\lambda, \boldsymbol{\mu}), \quad (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{1+d};$$

$$\mathcal{A} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) < \infty\}, \quad \mathcal{A}^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_Z^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \ : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0, \lambda \leqslant \lambda_+\}, \quad \mathcal{A}_Y^{\leqslant 0} := \{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \ : \ A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0, \boldsymbol{\mu} \in [\mathcal{M}]\},$$

где

$$\lambda_+ := \sup\left\{\lambda \geqslant 0 : \quad \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\right\}, \quad \mathcal{M} := \left\{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{E}e^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\zeta}} < \infty\right\},$$

$[\mathcal{M}]$—замыкание множества $\mathcal{M}$. Ясно, что если $\lambda_+ > 0$, то в соответствии с условием $[\mathbf{C}_0]$ внутренность $(\mathcal{A})$ множества $\mathcal{A}$ содержит точку $(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = (0, \mathbf{0})$ и является областью аналитичности функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$. Определяющую роль в дальнейшем играют следующие три функции аргумента $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$:

$$A(\boldsymbol{\mu}) := -\sup\{\lambda : \ (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}\}, \tag{1.1}$$

где, по определению, считаем $\sup\{\lambda:\ \lambda\in\emptyset\}=-\infty$;

$$A_Z(\boldsymbol{\mu}):=\max\{A(\boldsymbol{\mu}),\ -\lambda_+\},\quad A_Y(\boldsymbol{\mu}):=\begin{cases} A(\boldsymbol{\mu}), & \text{если } \boldsymbol{\mu}\in[\mathcal{M}];\\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\mu}\notin[\mathcal{M}].\end{cases} \tag{1.2}$$

Как установлено в работах [7], [8] (см. также теоремы 1.3, 1.4 ниже), функции $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ определяют (при некоторых дополнительных условиях) логарифмическую асимптотику при $t\to\infty$ преобразования Лапласа над распределениями $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, соответственно. Следуя [1], [2], мы назовем функции $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ *базовыми функциями* (б.ф.) для процессов $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, соответственно (см. также теоремы 1.3, 1.4 ниже).

Для функции $G=G(\boldsymbol{\mu})$, отображающей $\mathbb{R}^d$ в множество $(-\infty,\infty]$, определим преобразование Лежандра $G^{\mathfrak{Le}}=G^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha})$, положив (см., например, [10]):

$$G^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}):=\sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-G(\boldsymbol{\mu})\},\quad \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d.$$

Будем называть функцию $H=H(\boldsymbol{\alpha})$, отображающую $\mathbb{R}^d$ в $[0,\infty]$, *компактной*, если для любого $c\geqslant 0$ множество $\{\boldsymbol{\alpha}:\ H(\boldsymbol{\alpha})\leqslant c\}$ есть компакт в $\mathbb{R}^d$. Легко показать, что любая компактная функция $H(\boldsymbol{\alpha})$ полунепрерывна снизу.

Обозначим далее для $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$

$$D=D(\boldsymbol{\alpha}):=A^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}),\quad D_Z=D_Z(\boldsymbol{\alpha}):=A_Z^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}),\quad D_Y=D_Y(\boldsymbol{\alpha}):=A_Y^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.3}$$

Основные свойства функций $A(\boldsymbol{\mu})$, $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$, $D(\boldsymbol{\mu})$, $D_Z(\boldsymbol{\mu})$, $D_Y(\boldsymbol{\mu})$ мы сформулируем в следующем утверждении:

Теорема 1.1. (i) *Функции $A(\boldsymbol{\mu})$, $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ выпуклы и полунепрерывны снизу.*

(ii) *Функции $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ выпуклы, полунепрерывны снизу и компактны.*

(iii) *Справедливы следующие формулы*

$$A(\boldsymbol{\mu})=D^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}),\quad A_Z(\boldsymbol{\mu})=D_Z^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}),\quad A_Y(\boldsymbol{\mu})=D_Y^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}), \tag{1.4}$$

так что пары $A(\boldsymbol{\mu}),D(\boldsymbol{\alpha})$; $A_Z(\boldsymbol{\mu}),D_Z(\boldsymbol{\alpha})$; $A_Y(\boldsymbol{\mu}),D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ являются парами взаимно сопряженных (относительно преобразования Лежандра) функций.

(iv) *Функции A_Z, A совпадают (и, следовательно, $D_Z=D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\lambda_+\geqslant D(\mathbf{0}). \tag{1.5}$$

В частности, если τ и $\boldsymbol{\zeta}$ независимы, то условие (1.5) выполнено.

(v) *Функции A_Y, A совпадают (и, следовательно, $D_Y=D$), тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\mathcal{A}^{\leqslant 0}\subset\{(\lambda,\boldsymbol{\mu}):\ \boldsymbol{\mu}\in[\mathcal{M}]\}. \tag{1.6}$$

В частности, если τ и $\boldsymbol{\zeta}$ независимы, то условие (1.6) выполнено.

(vi) *Если $A(\boldsymbol{\mu})<\infty$, то $A(-A(\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})\leqslant 0$.*

Теорема 1.1 будет доказана в разделе 2.

Нам понадобится следующие обозначения. Для $(\theta,\boldsymbol{\alpha})\in\mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}):=\inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right), \tag{1.7}$$

где

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\lambda, \boldsymbol{\mu}} \left\{ \lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \right\}, \quad (\theta, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

—*функция уклонений* для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$, которая определяется как преобразование Лежандра функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ (см., например, [3]):

$$\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = A^{\mathfrak{Le}}(\theta, \boldsymbol{\alpha}).$$

Функция $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ впервые была определена и изучена в [5] и называлась «вторая функция уклонений» для случайного вектора $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$. Легко убедиться, что эта функция выпукла и линейчата вдоль любого луча, выходящего из начала координат. Однако свойство полунепрерывности снизу для этой функции может отсутствовать.

В следующем утверждении мы приведем дополнительные свойства функций $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$:

Теорема 1.2. (i) *Для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справедливо*

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \left\{ \lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} \right\}; \tag{1.8}$$

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leqslant 0}} \left\{ \lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} \right\}; \quad D_Y(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Y^{\leqslant 0}} \left\{ \lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} \right\}; \tag{1.9}$$

(ii) *Для всех* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справедливо*

$$D_Z(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta \in [0,1]} \left\{ D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1 - \theta) \right\}, \tag{1.10}$$

$$D_Y(\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\boldsymbol{\beta}} \left\{ D(\boldsymbol{\beta}) + V^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \right\}, \tag{1.11}$$

где

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) := \sup_{(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}} \{ \lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} \}, \ V(\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{\mu} \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\mu} \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

(iii) *Для функции* $D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ *(см. (1.7) имеет место равенство*

$$\left(D_\Lambda^{\mathfrak{Le}} \right)^{\mathfrak{Le}} (\theta, \boldsymbol{\alpha}) = D(\theta, \boldsymbol{\alpha}), \tag{1.12}$$

и для всех $\theta > 0, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *выполнено*

$$D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{\boldsymbol{\alpha}' \in (\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta, \boldsymbol{\alpha}'). \tag{1.13}$$

(iv) *Если* $\lambda_+ < \infty$, *то для функции*

$$\widehat{D}_Z(\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{\theta \in (0,1)} \left\{ D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1 - \theta) \right\}$$

имеет место равенство

$$\left(\widehat{D}_Z^{\mathfrak{Le}} \right)^{\mathfrak{Le}} (\boldsymbol{\alpha}) = D_Z(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.14}$$

Теорема 1.2 будет доказана в разделе 2.

Утверждения теоремы 1.2 используются в работах [7], [8], где, в частности, устанавливаются п.б.у. для процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ (см. теоремы 1.3, 1.4 ниже, в которых цитируются результаты работ [7], [8] для однородных о.п.в.). Без сомнения, результаты теорем 1.1 и 1.2 будут востребованы и при более детальном изучении о.п.в. $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$, например, при доказательстве п.б.у. для конечномерных распределений или для установления «траекторного» п.б.у. для этих процессов.

Для цитирования для однородных о.п.в. $\mathbf{Z}(t), \mathbf{Y}(t)$ результатов работ [7], [8] нам нужны следующие два определения:

Определение 1.1. *Будем говорить, что семейство* $\left\{\frac{\mathbf{X}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ *случайных векторов в пространстве* $\mathbb{R}^d$ *удовлетворяет принципу больших уклонений (п.б.у.) с компактной функцией уклонений (к.ф.у.)* $G(\boldsymbol{\alpha}) = G_X(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, *если функция* $G(\boldsymbol{\alpha})$ *компактна и для любого измеримого множества* $B \subset \mathbb{R}^d$ *справедливы неравенства*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \leqslant -G\left([B]\right),$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{X}(t)}{t} \in B \right) \geqslant -G\left((B)\right),$$

в которых для $B \subset \mathbb{R}^d$, $B \neq \emptyset$

$$G(B) := \inf_{\boldsymbol{\alpha}\in B} G(\boldsymbol{\alpha}), \quad G\left(\emptyset\right) := \infty,$$

и через $[B]$, (B) *обозначены замыкание и внутренность множества* B, *соответственно.*

Определение 1.2. *Будем говорить, что выпуклая функция* $H(\boldsymbol{\mu}) = H_X(\boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^d \to (-\infty, \infty]$ *является базовой функцией для семейства* $\{\mathbf{X}(t)\}_{t\geqslant 0}$ *случайных векторов в пространстве* $\mathbb{R}^d$, *если для любого* $\boldsymbol{\mu} \notin \partial\mathcal{M}_X$ *выполнено*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{E} e^{\boldsymbol{\mu}\mathbf{X}(t)} = H(\boldsymbol{\mu}), \tag{1.15}$$

где $\partial\mathcal{M}_X$ — *граница замыкания* $[\mathcal{M}_X]$ *выпуклого множества* $\mathcal{M}_X := \left\{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d : H(\boldsymbol{\mu}) < \infty\right\}$ *конечности* $H(\boldsymbol{\mu})$.

Следующее утверждение (доказанное в более общем виде в [7]) показывает, что функции D_Z и A_Z являются к.ф.у. и б.ф. для процесса $\mathbf{Z}(t)$, соответственно.

Теорема 1.3 ([7]). *Пусть выполнено условие*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \mathbf{P}\left(\tau \geqslant t \right) \geqslant -\lambda_+. \tag{1.16}$$

Тогда

(i) *семейство* $\left\{\frac{\mathbf{Z}(\mathbf{t})}{t}\right\}_{t>0}$ *удовлетворяет п.б.у. в пространстве* $\mathbb{R}^d$ *с к.ф.у.* $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$;

(ii) *функция* A_Z *является базовой для процесса* $\mathbf{Z}(t)$.

Если дополнительно выполнено условие (1.5), то $A_Z = A$, $D_Z = D$, *и условие (1.16) в утверждениях* (i), (ii) *является лишним.*

Ранее в одномерном случае $d = 1$ результаты (i), (ii) теоремы 1.3 были получены в [6]. В работе [9], тоже в одномерном случае $d = 1$ результат (i) теоремы 1.3 был получен для о.п.в. $Z(t)$, построенного по случайным векторам $\{(\tau_k, F(\tau_k))\}_{k\geq 1}$, где $F\ :\ (0,\infty) \to [0,\infty)$ — ограниченная, непрерывная неслучайная функция. В [11], тоже в одномерном случае $d = 1$ асимптотика преобразования Лапласа над распределением о.п.в. $Z(t)$ изучалась при условиях: $\mathbf{E}\zeta = 0$, $\{(\lambda,\mu):\ \lambda\ <\ 0\}\ \subset\ \mathcal{A}$.

Обозначим

$$V(\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } \boldsymbol{\mu} \in [\mathcal{M}]; \\ \infty, & \text{если } \boldsymbol{\mu} \notin [\mathcal{M}]. \end{cases}$$

Используя неравенство Чебышева, легко показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\leqslant -V^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon = \left\{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^d:\ |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|<\varepsilon\right\}$—$\varepsilon$-окрестность точки $\boldsymbol{\alpha}$ в $\mathbb{R}^d$.

П.б.у. и логарифмическая асимптотика преобразования Лапласа для процесса $Y(t)$ сформулированы в следующем утверждении (доказанном в более общем виде в [8]):

Теорема 1.4 ([8]). *Пусть выполнено условие: для некоторого $c_0 > 0$ и любых $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(\tau\leqslant c_0) > 0,\quad \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\mathbf{P}\left(\tau\geqslant c_0,\quad \frac{\boldsymbol{\zeta}}{t}\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon\right)\geqslant -V^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1.17}$$

Тогда

(i) *семейство $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$;*

(ii) *функция A_Y является базовой для процесса $\mathbf{Y}(t)$.*

Если дополнительно выполнено условие (1.6), то $A_Y = A$, $D_Y = D$, и условие (1.17) в утверждениях (i), (ii) является лишним.

Из теорем 1.3, 1.4 легко вывести

Следствие 1.1. (i) *Если $A_Z = A$, то семейство однородных о.п.в. $\left\{\frac{\mathbf{Z}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D(\boldsymbol{\alpha})$.*

(ii) *Если $A_Y = A$, то семейство однородных о.п.в. $\left\{\frac{\mathbf{Y}(t)}{t}\right\}_{t>0}$ удовлетворяет п.б.у. в пространстве $\mathbb{R}^d$ с к.ф.у. $D(\boldsymbol{\alpha})$.*

2. Доказательство теорем 1.1, 1.2

2.1. **Свойства преобразования Лежандра.** В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства выпуклых полунепрерывных снизу функций $F = F(\boldsymbol{u})$, отображающих $\mathbb{R}^d$ в $(-\infty,\infty]$, и преобразований Лежандра над ними. Обозначим класс таких функций через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d$. Известны следующие свойства преобразования Лежандра (см., например, [10]):

$[\mathbf{L_1}]$ *Для любой функции $F\in\mathcal{F}$ справедливо $F^{\mathfrak{Le}}\in\mathcal{F}$, т.е. выпуклая полунепрерывная снизу функция переводится преобразованием Лежандра в выпуклую полунепрерывную снизу функцию.*

[$\mathbf{L_2}$] *Для любой функции* $F \in \mathcal{F}$ *справедливо*

$$\left(F^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}} = F,$$

т.е. повторное применение преобразование Лежандра переводит выпуклую полунепрерывную снизу функцию в себя.

Для двух функций $F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$ определим операцию свертки $*$, положив

$$F_1 * F_2(\boldsymbol{u}) := \inf_{\boldsymbol{v}}\{F_1(\boldsymbol{v}) + F_2(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\}.$$

Нам понадобится следующее свойство преобразования Лежандра.

[$\mathbf{L_3}$] *Для любых* $G_1,\ G_2,\ F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}$ *справедливо*

$$(G_1 * G_2)^{\mathfrak{Le}} = G_1^{\mathfrak{Le}} + G_2^{\mathfrak{Le}}, \qquad F_1^{\mathfrak{Le}} * F_2^{\mathfrak{Le}} = (F_1 + F_2)^{\mathfrak{Le}}.$$

В частном случае, когда функции $F_1(\boldsymbol{u})$, $F_2(\boldsymbol{u})$, являются логарифмами преобразований Лапласа распределений независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, свойство [$\mathbf{L_3}$] приведено в монографии [4] (с. 21) как очевидное свойство функций уклонений, соответствующих случайным величинам. Доказательство свойства [$\mathbf{L_3}$] можно найти в [10], теорема 16.4 с.165.

Для произвольной выпуклой функции $F = F(\boldsymbol{u})$, отображающей $\mathbb{R}^d \to (-\infty,\infty]$, через $cl\,F = cl\,F(\boldsymbol{u})$ обозначим (см. [10] с.52) наибольшую функцию из класса $\mathcal{F}$, минорирующую F. Иначе говоря: (1) функция $cl\,F$ принадлежит классу $\mathcal{F}$; (2) она во всех точках $\boldsymbol{u}$ не превышает $F(\boldsymbol{u})$; (3) для любой функции $G(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{F}$ из неравенства

$$F(\boldsymbol{u}) \geqslant G(\boldsymbol{u}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$$

следует неравенство

$$cl\,F(\boldsymbol{u}) \geqslant G(\boldsymbol{u}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d.$$

Следующее свойство хорошо известно (см., например, [10], теорема 12.2 с.104).

[$\mathbf{L_4}$] *Для любой выпуклой функции* $F = F(\boldsymbol{u})$*:* $\mathbb{R}^d \to (-\infty,\infty]$*, справедливо*

$$\left(F^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}} = cl\,F.$$

Нам понадобится еще одно свойство

[$\mathbf{L_5}$] *Для любой выпуклой функции* $F = F(\boldsymbol{u})$*:* $\mathbb{R}^d \to (-\infty,\infty]$*, справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{\boldsymbol{v}\in(\boldsymbol{u})_\varepsilon} F(\boldsymbol{v}) = \left(F^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{u}). \tag{2.1}$$

Поскольку нам не удалось отыскать доказательства этого свойства в литературе, мы приведем

Доказательство свойства [$\mathbf{L_5}$]. Обозначим левую часть тождества (2.1) через $\widetilde{F} = \widetilde{F}(\boldsymbol{u})$. В силу свойства [$\mathbf{L_4}$] нам достаточно доказать

$$\widetilde{F} = cl\,F. \tag{2.2}$$

Для этого достаточно установить, что выполнены свойства $(i)-(iv)$, где (i) функция $\widetilde{F}$ выпукла; (ii) функция $\widetilde{F}$ полунепрерывна снизу; (iii) функция $\widetilde{F}$ во всех точках $\boldsymbol{u}$ не превышает F; (iv) для любой функции $G(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{F}$ из неравенства

$$F(\boldsymbol{u}) \geqslant G(\boldsymbol{u}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d \tag{2.3}$$

следует неравенство

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) \geqslant G(\boldsymbol{u}) \quad \text{для всех} \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

Проверим свойства $(i) - (iv)$. Для множества $B \subset \mathbb{R}^d$ обозначим

$$F(B) := \inf_{\boldsymbol{v} \in B} F(\boldsymbol{v}),$$

так что

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F((\boldsymbol{u})_\varepsilon).$$

(i). Докажем выпуклость функции $\widetilde{F}(\boldsymbol{u})$. Для $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q = 1$, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ из выпуклости $F(\boldsymbol{u})$ имеем

$$p\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_1) + q\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_2) \geqslant pF((\boldsymbol{u}_1)_\varepsilon) + qF((\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon) \geqslant$$

$$F(p(\boldsymbol{u}_1)_\varepsilon + q(\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon) \geqslant F((p\boldsymbol{u}_1 + q\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon);$$

в последнем неравенстве мы воспользовались включением

$$p(\boldsymbol{u}_1)_\varepsilon + q(\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon \subset (p\boldsymbol{u}_1 + q\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon.$$

Мы получили неравенство

$$p\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_1) + q\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_2) \geqslant F((p\boldsymbol{u}_1 + q\boldsymbol{u}_2)_\varepsilon).$$

Устремляя в правой части последнего неравенства $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое

$$p\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_1) + q\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_2) \geqslant \widetilde{F}(p\boldsymbol{u}_1 + q\boldsymbol{u}_2).$$

Свойство (i) установлено.

(ii). Докажем полунепрерывность $\widetilde{F}$. Фиксируем $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$. Для произвольных $\delta > 0$ и $N < \infty$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta, N) > 0$ такое, что

$$F((\boldsymbol{u})_{2\varepsilon_0}) \geqslant \min\{\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) - \delta,\ N\}.$$

Пусть $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ при $n \to \infty$. Тогда найдется $n_0 < \infty$ такое, что при всех $n \geqslant n_0$

$$(\boldsymbol{u}_n)_{\varepsilon_0} \subset (\boldsymbol{u})_{2\varepsilon_0}.$$

Тогда для $n \geqslant n_0$ справедливо

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{u}_n) \geqslant F((\boldsymbol{u}_n)_{\varepsilon_0}) \geqslant F((\boldsymbol{u})_{2\varepsilon_0}) \geqslant \min\{\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) - \delta,\ N\},$$

откуда вытекает неравенство

$$\liminf_{n \to \infty} \widetilde{F}(\boldsymbol{u}_n) \geqslant \min\{\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) - \delta,\ N\}.$$

Поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от $\delta > 0$ и $N < \infty$, то, устремляя $\delta \to 0$ и $N \to \infty$, получаем требуемое

$$\liminf_{n \to \infty} \widetilde{F}(\boldsymbol{u}_n) \geqslant \widetilde{F}(\boldsymbol{u}).$$

Свойство (ii) доказано.

(iii). Поскольку $F(\boldsymbol{u}) \geqslant F((\boldsymbol{u})_\varepsilon)$, то очевидно, что $F(\boldsymbol{u}) \geqslant \widetilde{F}(\boldsymbol{u})$ для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$. Свойство (iii) установлено.

(iv). Докажем теперь импликацию (2.3) $\Longrightarrow$ (2.4). Из (2.3) следует, что для любых $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$

$$F((\boldsymbol{u})_\varepsilon) \geqslant G((\boldsymbol{u})_\varepsilon).$$

Поэтому для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{u}) \geqslant \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G((\boldsymbol{u})_\varepsilon) = G(\boldsymbol{u}),$$

где последнее равенство есть следствие полунепрерывности снизу функции G. Импликация (2.3) $\Longrightarrow$ (2.4) установлена, свойство (iv) доказано. Таким образом, равенство (2.2) доказано, а с ним, и свойство $[\mathbf{L_5}]$. $\square$

2.2. **Доказательство теоремы 1.1.** (i), (vi). Функция $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ при любом фиксированном $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ неограниченно возрастает с ростом λ. Поэтому, учитывая определение (1.1), получаем свойство:

$$A(\boldsymbol{\mu}) > -\infty \quad \textit{для любого} \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.5}$$

Пусть, далее, $A(\boldsymbol{\mu}) < \infty$, и последовательность λ_n такова, что

$$A(\lambda_n, \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0 \quad \text{при всех} \quad n \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = -A(\mu).$$

Тогда, в силу полунепрерывности снизу функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, получаем

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \ \leqslant \ 0.$$

Другими словами, мы установили свойство:

$$\textit{из} \quad A(\boldsymbol{\mu}) < \infty \quad \textit{следует} \quad A(-A(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \leqslant 0. \tag{2.6}$$

Утверждение (vi) теоремы 1.1 установлено.

Убедимся теперь, что функция $A(\boldsymbol{\mu})$ выпукла: *для любых* $\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathbb{R}$, $p, q \ \geqslant \ 0$, $p + q = 1$ *выполняется*

$$A(p\boldsymbol{\mu}_1 + q\boldsymbol{\mu}_2) \leqslant pA(\boldsymbol{\mu}_1) + qA(\boldsymbol{\mu}_2). \tag{2.7}$$

Если $A(\boldsymbol{\mu}_1) = \infty$, или $A(\boldsymbol{\mu}_2) = \infty$, то неравенство (2.7) выполнено. Если $A(\boldsymbol{\mu}_1) < \infty$ и $A(\boldsymbol{\mu}_2) < \infty$, то в силу (2.6) имеем

$$A(-A(\boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1) \leqslant 0, \quad A(-A(\boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2) \leqslant 0.$$

Поэтому, в силу выпуклости функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ справедливо

$$A(-pA(\boldsymbol{\mu}_1) - qA(\boldsymbol{\mu}_2), p\boldsymbol{\mu}_1 + q\boldsymbol{\mu}_2) \leqslant pA(-A(\boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_1) + qA(-A(\boldsymbol{\mu}_2), \boldsymbol{\mu}_2) \leqslant 0,$$

т.е.

$$A(-pA(\boldsymbol{\mu}_1) - qA(\boldsymbol{\mu}_2), p\boldsymbol{\mu}_1 + q\boldsymbol{\mu}_2) \leqslant 0.$$

Из последнего следует $-A(p\boldsymbol{\mu}_1 + q\boldsymbol{\mu}_2) \geqslant -pA(\boldsymbol{\mu}_1) - qA(\boldsymbol{\mu}_2)$, т.е. (2.7). Выпуклость функции $A(\boldsymbol{\mu})$ установлена.

Убедимся теперь, что функция $A(\mu)$ полунерерывна снизу: для любой последовательности $\boldsymbol{\mu}_n$, сходящейся к $\boldsymbol{\mu}$ при $n \to \infty$

$$A_- := \liminf_{n\to\infty} A(\boldsymbol{\mu}_n) \geqslant A(\boldsymbol{\mu}). \tag{2.8}$$

Рассмотрим три случая:

(1) Пусть $A_- = \infty$, и тогда неравенство (2.8) имеет место.

(2) Пусть $|A_-| < \infty$, и тогда, не ограничивая общности, можно считать, что

$$A_- = \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{\mu}_n), \quad \boldsymbol{\mu} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}_n$$

(если это не так, то последовательность $\boldsymbol{\mu}_n$ можно заменить подходящей подпоследовательностью). Из свойства (2.6) и полунепрерывности снизу функции $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ вытекает, что

$$0 \geqslant \liminf_{n\to\infty} A(-A(\boldsymbol{\mu}_n), \boldsymbol{\mu}_n) \geqslant A(-A_-, \boldsymbol{\mu}).$$

Из последнего следует $-A(\boldsymbol{\mu}) \geqslant -A_-$, т.е. (2.8).

(3) В случае $A_- = -\infty$ можно считать, не ограничивая общности, что

$$-\infty = A_- = \lim_{n\to\infty} A(\boldsymbol{\mu}_n), \quad \boldsymbol{\mu} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}_n.$$

Для произвольного $N < \infty$ найдется $n_N < \infty$ такое, что при всех $n \geqslant n_N$ выполняется $-A(\boldsymbol{\mu}_n) \geqslant N$. Поскольку при любом фиксированном $\boldsymbol{\mu}$ функция $A(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не убывает по аргументу λ, имеем в силу свойства (2.6)

$$0 \geqslant \limsup_{n\to\infty} A(-A(\boldsymbol{\mu}_n), \boldsymbol{\mu}_n) \geqslant \limsup_{n\to\infty} A(N, \boldsymbol{\mu}_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} A(N, \boldsymbol{\mu}_n) \geqslant A(N, \boldsymbol{\mu}).$$

Таким образом, для произвольного $N < \infty$ выполнено $A(N, \boldsymbol{\mu}) \leq 0$ и следовательно, $-A(\boldsymbol{\mu}) \geq N$. Последнее означает, что $A(\boldsymbol{\mu}) = -\infty$, что невозможно в силу свойства (2.5), поэтому случай $A_- = -\infty$ невозможен.

Выпуклость и полунепрерывность снизу функции $A(\boldsymbol{\mu})$ доказаны.

Выпуклость и полунепрерывность снизу функций $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ следуют непосредственно из определений этих функций (1.2) и уже установленных этих свойств для $A(\boldsymbol{\mu})$. Утверждения (i), (vi) теоремы 1.1 доказаны.

(ii). Выпуклость и полунепрерывность функций $D(\alpha)$, $D_Z(\alpha)$, $D_Y(\alpha)$ являются следствиями свойства $[\mathbf{L_1}]$ и определения (1.3).

Докажем компактность функции $D(\boldsymbol{\alpha})$. Из определения (1.1) и условия $[\mathbf{C}_0]$ следует, что функция $A(\boldsymbol{\mu})$ конечна и непрерывна в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Поэтому найдутся $\delta > 0$ и $C < \infty$ такие, что для любого вектора $\boldsymbol{\mu} \in [(\mathbf{0})_\delta]$ выполняется $A(\boldsymbol{\mu}) \leqslant C$. Следовательно, отправляясь от определения (1.3), имеем для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ неравенство

$$D(\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \delta \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha} - A\left(\delta \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right) \geqslant \delta|\boldsymbol{\alpha}| - C,$$

доказывающее компактность полунепрерывной снизу функции $D(\boldsymbol{\alpha})$.

Поскольку из определений (1.2) вытекает, что функции $A(\boldsymbol{\mu})$, $A_Z(\boldsymbol{\mu})$, $A_Y(\boldsymbol{\mu})$ совпадают в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, то компактность функций $D_Z(\boldsymbol{\alpha})$, $D_Y(\boldsymbol{\alpha})$ устанавливается аналогичным образом. Утверждение (ii) доказано.

(iii). Формулы (1.4) вытекают из утверждения (i) и свойства $[\mathbf{L_2}]$. Утверждение (iii) теоремы 1.1 доказано.

(iv). В силу определения (1.2) равенство $A_Z = A$ эквивалентно соотношению

$$-\lambda_+ \leqslant \inf_{\boldsymbol{\mu}} A(\boldsymbol{\mu}).$$

Поскольку из (1.3) следует $\inf_{\boldsymbol{\mu}} A(\boldsymbol{\mu}) = D(\mathbf{0})$, то равенство $A_Z = A$ эквивалентно неравенству $\lambda_+ \geqslant D(\mathbf{0})$.

(v). В силу определения (1.2) равенство $A_Y = A$ эквивалентно соотношению

$$\text{для всех} \quad \boldsymbol{\mu} \notin [\mathcal{M}] \text{ справедливо } A(\boldsymbol{\mu}) = \infty. \tag{2.9}$$

Но из определения (1.1) следует, что если $A(\boldsymbol{\mu}) = \infty$, то для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $A(\lambda, \boldsymbol{\mu}) > 0$. Таким образом, (2.9) эквивалентно

$$\text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\mu} \notin [\mathcal{M}] \quad \text{точка} \quad (\lambda, \boldsymbol{\mu}) \quad \text{лежит вне} \quad \mathcal{A}^{\leqslant 0}.$$

Утверждения (iv), (v) теоремы 1.1 и сама теорема 1.1 доказаны. □

2.3. **Доказательство теоремы 1.2.** (i). Равенство (1.8) следует из определений функций $D(\boldsymbol{\alpha}), A(\boldsymbol{\mu})$ и цепочки равенств

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{\boldsymbol{\mu}} \{\boldsymbol{\mu\alpha} - A(\boldsymbol{\mu})\} = \sup_{\boldsymbol{\mu}} \left\{ \boldsymbol{\mu\alpha} + \sup_{\lambda\,:\,A(\lambda,\boldsymbol{\mu})\leqslant 0} \{\lambda\} \right\} = \sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\leq 0}} \{\lambda + \boldsymbol{\mu\alpha}\}.$$

Аналогично устанавливаются оба равенства в (1.9). Пункт (i) доказан.

(ii). Обозначим $\widehat{D}(\boldsymbol{\alpha})$ правую часть равенства (1.10):

$$\widehat{D}(\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{\theta\in[0,1]} \{D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(1-\theta)\}. \tag{2.10}$$

Для установления (2.10) нам достаточно доказать тождество

$$\widehat{D}(\boldsymbol{\alpha}) = A_Z^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.11}$$

Рассмотрим функцию

$$X(\lambda,\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}^{\leqslant 0}; \\ \infty, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu}) \notin \mathcal{A}^{\leqslant 0}. \end{cases}$$

Поскольку множество $\mathcal{A}^{\leqslant 0}$ выпукло и замкнуто, то функция X выпукла и полунепрерывна снизу, т.е. принадлежит классу $\mathcal{F}$. Очевидно, что

$$D(\theta,\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)} \{\lambda\theta + \mu\alpha - X(\lambda,\mu)\} = X^{\mathfrak{Le}}(\theta,\alpha). \tag{2.12}$$

Определим далее функцию

$$V = V(\lambda,\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \leq \lambda_+; \\ \infty, & \text{если } \lambda > \lambda_+. \end{cases}$$

Легко заметить, что функция $V(\lambda,\boldsymbol{\mu})$ также выпукла и полунепрерывна снизу, а ее преобразование Лежандра имеет вид

$$V^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{\lambda,\boldsymbol{\mu}} \{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu\alpha} - V(\lambda,\boldsymbol{\mu})\} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0} \;\; \textit{или} \;\; \theta < 0; \\ \lambda_+\theta, & \text{если } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \;\; \textit{и} \;\; \theta \geqslant 0. \end{cases}$$

Определим далее функцию

$$\widehat{D}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{0\leqslant u\leqslant\theta} \{D(u,\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_+(\theta-u)\},$$

и заметим (см. определение (2.10) функции $\widehat{D}(\boldsymbol{\alpha})$), что

$$\widehat{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{D}(1,\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.13}$$

С другой стороны, учитывая вид функции $V^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha})$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) &= \inf_{0\leqslant u\leqslant\theta} \left\{D(u,\boldsymbol{\alpha}) + V^{\mathfrak{Le}}(\theta-u,\mathbf{0})\right\} \\ &= \inf_{0\leqslant u<\infty,\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^d} \left\{D(u,\boldsymbol{\beta}) + V^{\mathfrak{Le}}(\theta-u,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\right\}. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что $D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ для $\theta < 0$ получаем

$$\widehat{D}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \inf_{\theta,\boldsymbol{\beta}} \left\{D(u,\boldsymbol{\beta}) + V^{\mathfrak{Le}}(\theta-u,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\right\} = D * V^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.14}$$

Положим

$$\widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu}) := X(\lambda,\boldsymbol{\mu}) + V(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{A}_Z^{\leqslant 0}; \\ \infty, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu}) \notin \mathcal{A}_Z^{\leqslant 0}. \end{cases}$$

Тогда, используя (2.12), (2.14) и свойство [$\mathbf{L_3}$], получаем

$$\widehat{D}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = X^{\mathfrak{Le}} * V^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) =$$

$$(X+V)^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{X}^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})}\left\{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - \widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\}. \tag{2.15}$$

Убедимся, далее, что справедливо тождество

$$A_Z(\boldsymbol{\mu}) = -\sup_{\lambda}\left\{\lambda - \widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\}. \tag{2.16}$$

Действительно

$$\begin{aligned} A_Z(\boldsymbol{\mu}) &= \max\{-\lambda_+,\, A(\boldsymbol{\mu})\} = \max\left\{-\lambda_+,\, -\sup\{\lambda:\ (\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}\}\right\} \\ &= -\min\left\{\lambda_+,\, \sup\left\{\lambda\,:\,(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\leqslant 0}\right\}\right\} = -\sup\left\{\lambda\,:\,(\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}_Z^{\leqslant 0}\right\} \\ &= -\sup_{\lambda}\left\{\lambda - \widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (2.13), (2.15), (2.16), находим

$$\begin{aligned} \widehat{D}(\boldsymbol{\alpha}) =& \widehat{D}(1,\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})}\left\{\lambda + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - \widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\} \\ &= \sup_{\boldsymbol{\mu}}\left\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} + \sup_{\lambda}\left\{\lambda - \widehat{X}(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\}\right\} = \sup_{\boldsymbol{\mu}}\{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - A_Z(\boldsymbol{\mu})\}. \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали равенство (2.11), а вместе с ним и равенство (1.10).

Докажем теперь (1.11). Для этого обозначим правую часть (1.11) через $G_Y(\boldsymbol{\alpha})$ и используя операцию $*$, получим:

$$G_Y(\boldsymbol{\alpha}) := \inf_{\boldsymbol{\beta}}\{D(\boldsymbol{\beta}) + V^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\} = D * V^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Тогда из свойства [$\mathbf{L_3}$] имеем

$$G_Y^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}) = \left(D * V^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\mu}) + V(\boldsymbol{\mu}) = A(\boldsymbol{\mu}) + V(\boldsymbol{\mu}) = A_Y(\boldsymbol{\mu}).$$

Следовательно,

$$\left(G_Y^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}) = A_Y^{\mathfrak{Le}}(\boldsymbol{\alpha}) = D_Y(\boldsymbol{\alpha}).$$

Поскольку $G_Y \in \mathcal{F}$, то в силу свойства [$\mathbf{L_2}$] левая часть последнего равенства совпадает с $G_Y(\boldsymbol{\alpha})$. Равенство (1.11) установлено. Пункт (ii) доказан.

(iii). Для доказательства (1.12) докажем прежде тождество

$$D_\Lambda^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}), \tag{2.17}$$

где, напомним,

$$D^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}) := \sup_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\{\lambda\theta + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha} - D(\theta,\boldsymbol{\alpha})\}$$

— преобразование Лежандра выпуклой функции $D(\theta,\boldsymbol{\alpha})$, которая определена в пункте (ii) теоремы 1.2. Имеем

$$\begin{aligned}
D_\Lambda^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}) &= \sup_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\left\{\lambda\theta+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-\inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\right\} = \sup_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\sup_{r>0}\left\{\lambda\theta+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\right\}\\
&= \sup_{r>0}\left\{r\sup_{(\theta,\boldsymbol{\alpha})}\left\{\lambda\frac{\theta}{r}+\boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}-\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\boldsymbol{\alpha}}{r}\right)\right\}\right\} = \sup_{r>0} rA(\lambda,\boldsymbol{\mu})\\
&= X(\lambda,\boldsymbol{\mu}) := \begin{cases} 0, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu})\in\mathcal{A}^{\leqslant 0};\\ \infty, & \text{если } (\lambda,\boldsymbol{\mu})\notin\mathcal{A}^{\leqslant 0}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Очевидно, что (см. определение $D(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ в пункте (ii) теоремы 1.2)

$$D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \sup_{(\lambda,\boldsymbol{\mu})}\left\{\lambda\theta+\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\alpha}-X(\lambda,\boldsymbol{\mu})\right\},\quad X(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}),$$

поэтому тождество (2.17) доказано. Применяя к левой и правой частям (2.17) преобразование Лежандра, получаем в силу свойства $[\mathbf{L_2}]$ формулу (1.12).

Докажем теперь формулу (1.13). Обозначим правую часть (1.13) через $\widehat{D}_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha})$:

$$\widehat{D}_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}').$$

Поскольку

$$\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\varepsilon} D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}') \geqslant \inf_{(\theta',\boldsymbol{\alpha}')\in((\theta,\boldsymbol{\alpha}))_\varepsilon} D_\Lambda(\theta',\boldsymbol{\alpha}'),$$

то в силу свойства $[\mathbf{L_5}]$ имеем:

$$\widehat{D}_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}) \geqslant \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{(\theta',\boldsymbol{\alpha}')\in((\theta,\boldsymbol{\alpha}))_\varepsilon} D_\Lambda(\theta',\boldsymbol{\alpha}') = \left(D_\Lambda^{\mathfrak{Le}}\right)^{\mathfrak{Le}}(\theta,\boldsymbol{\alpha}).$$

Используя далее равенство (1.12), получаем

$$\widehat{D}_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}) \geqslant D(\theta,\boldsymbol{\alpha}). \tag{2.18}$$

Далее, из определения функции $D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha})$ для всех $\theta',\theta>0$ имеем

$$D_\Lambda(\theta',\boldsymbol{\alpha}') = \frac{\theta}{\theta'}D_\Lambda\left(\theta,\boldsymbol{\alpha}'\frac{\theta}{\theta'}\right),$$

следовательно, в силу (1.12) и $[\mathbf{L_5}]$

(2.19)

$$\begin{aligned}
D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{(\theta',\boldsymbol{\alpha}')\in((\theta,\boldsymbol{\alpha}))_\varepsilon} D_\Lambda(\theta',\boldsymbol{\alpha}') = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{(\theta',\boldsymbol{\alpha}')\in((\theta,\boldsymbol{\alpha}))_\varepsilon}\frac{\theta}{\theta'}D_\Lambda\left(\theta,\boldsymbol{\alpha}'\frac{\theta}{\theta'}\right)\\
&\geqslant \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\inf_{(\theta',\boldsymbol{\alpha}')\in((\theta,\boldsymbol{\alpha}))_\varepsilon}(1-\varepsilon)D_\Lambda\left(\theta,\boldsymbol{\alpha}'\frac{\theta}{\theta'}\right) = \lim_{\delta\downarrow 0}\inf_{\boldsymbol{\alpha}'\in(\boldsymbol{\alpha})_\delta} D_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}')\\
&= \widehat{D}_\Lambda(\theta,\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

Из (2.18), (2.19) вытекает равенство (1.13). Пункт (iii) доказан.

(iv). Для любого $c>0$ имеем

$$cD(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = D(c\theta,c\boldsymbol{\alpha}),\qquad cD^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = cX(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = X(\lambda,\boldsymbol{\mu}) = D^{\mathfrak{Le}}(\lambda,\boldsymbol{\mu}).$$

Поэтому для $\theta\in(0,1]$ справедливо

$$D(\theta,\boldsymbol{\alpha}) = \theta D(1,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}).$$

Докажем сначала, что для любого $\boldsymbol{\mu}$

$$\widehat{D}_Z^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\mu}) = A_Z(\boldsymbol{\mu}). \tag{2.20}$$

При $\lambda_+ < \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_Z^{\mathfrak{L}\mathfrak{e}}(\boldsymbol{\mu}) &= \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \left\{ \boldsymbol{\mu\alpha} - \widehat{D}_Z(\boldsymbol{\alpha}) \right\} = \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \left\{ \boldsymbol{\mu\alpha} - \inf_{\theta\in(0,1)} \left\{ \theta D\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right) + \lambda_+(1-\theta) \right\} \right\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \sup_{\theta\in(0,1)} \left\{ \boldsymbol{\mu\alpha} - \theta D\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right) - \lambda_+(1-\theta) \right\} \\
&= \sup_{\theta\in(0,1)} \left\{ \theta \sup_{\boldsymbol{\alpha}} \left\{ \boldsymbol{\mu}\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta} - D\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta}\right) \right\} - \lambda_+(1-\theta) \right\} \\
&= \sup_{\theta\in(0,1)} \left\{ \theta A(\boldsymbol{\mu}) - \lambda_+(1-\theta) \right\} = A_Z(\boldsymbol{\mu}).
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы использовали определение функции $A_Z(\boldsymbol{\mu})$ (см. (1.2)). Формула (2.20) установлена. Применяя к левой и правой частям (2.20) преобразование Лежандра, получаем формулу (1.14). Теорема 1.2 доказана. $\square$

References

[1] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. I*, Siberian Mathematical Journal, **59**:3 (2018), 491–513. MR3879625

[2] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *Integro-local limit theorems for compound renewal processes with Cramer's condition. II*, Siberian Mathematical Journal, **59**:4 (2018), 731–750. MR3879647

[3] A.A. Borovkov, *Probability Theory,* London: Springer-Verlag , 2013. MR3086572

[4] A.A. Borovkov, *Asymptotic analysis of random walks. Rapidly decreasing distributions of increments*, Moscow: Fizmatlit, 2013. Zbl 1351.60003

[5] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, *The second rate function and the asymptotic problems of renewal and hitting the boundary for multidimensional random walks*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 647—682. MR1643358

[6] A.A. Borovkov, A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Properties of the deviation rate function and the asimptotics for the Laplace transform of the distribution of a compound renewal process*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **64**:4 (2019), 625–641.

[7] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional first compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1464–1492.

[8] A.A. Mogulskii, E.I. Prokopenko, *Large deviation principle for multidimensional second compound renewal processes in the phase space*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 1478–1492.

[9] R. Lefevere, M. Mariani, L. Zambotti, *Large deviations for renewal processes*, Stochastic Processes and their Applications, **121**:10 (2011), 2243–2271. MR2822776

[10] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1970. MR0274683

[11] B. Tsirelson, *From uniform renewal theorem to uniform large and moderate deviations for renewal-reward processes*, Electron. Commun. Probab. **18**:52 (2013), 1—13. MR3078015

Anatolii Alfredovich Mogulskii
Sobolev Institute of Mathematics,
4, pr. Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: mogul@math.nsc.ru

Evgenii Igorevich Prokopenko
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: evgenii.prokopenko@gmail.com