Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

日本ファジィ学会誌 Vol.4, No.2, pp.325-333(1992)

論文

ファジィ推論における直接法と間接法に関する考察†

向殿 政男*1　野島 和行*2

Zadehの提案した“推論の合成規則”に代表されるファジィ推論は，いまでは多く分野で役立っている．一般にファジィ推論は2種類に大別される．一つはZadehによって独自に提案された直接法であり，もう一つはBaldwinが‘truth space approach’と呼んでいる間接法である．間接法にはBaldwinが提案したものを初め幾つか存在するが，本論文ではBaldwinの方法を間接法の代表として取り扱う．同様に直接法の代表としてZadehの提案した方法を取り扱う．

本論文の目的は，直接法と間接法の関係を明らかにすることにある．両者の関係については1982年にTongらによって，次の条件下では直接法と間接法は同じ推論法であるということが示されている．その条件とは，前提のファジィ集合のメンバーシップ関数が全単射関数でなければならないというものである．しかし，Tongらはこの条件が成立していない場合については何も議論していない．

本論文はTongらの与えた条件よりも緩い条件の下で，間接法と直接法は同じものであることを示す．更にその条件を考慮しない場合は，間接法は直接法に包含されている関係にあることを示す．そして最後にTongらの研究との相違を述べる．

キーワード：推論の合成規則，ファジィモダスポネンス，直接法，間接法，インプリケーション

1．はじめに

推論とは元来論理学の術語である．これにあいまいな概念を含ませた推論として，Zadehはmax-min合成を応用したファジィ推論の考え方を提案した[1)]．それは，ファジィ条件文“If x is A then y is B”をファジィ関係に変換して推論結果を得る方法で，“推論の合成規則”と呼ばれる推論規則の一つである．この方法はファジィ制御などに適用され，現在のファジィ理論の応用に広く貢献している．本論文では，max-min合成を用いた“推論の合成規則”に限定して考察する．

Zadehの提案の後，水本も述べているように[2)]，言語真理値を用いる別の方法としていくつかのファジィ推論法が提案された．そして現在ファジィ推論は一般に直接法と間接法に大別されている．本論文では直接法の代表として先のZadehの方法を，間接法の代表としてBaldwinの提案したものを取り扱う．

本論文の目的は，間接法と直接法の関係を明らかにすることである．すなわち，間接法でできる推論は全て直接法でも同じ推論結果を導くことができるが，その逆は一般に言えないという関係があることを示す．

直接法と間接法の関係は，Tongら[3)]によって前件部のファジィ集合Aのメンバーシップ関数の逆関数が全射であるという条件の下なら，言い換えればメンバーシップ関数Aが全単射関数であれば，間接法は直接法と同じ推論結果を導くという関係にあることが示されている．しかし，Tongらの研究はこの条件が成立していない場合

† The Relation between The Direct Approach and The Truth Space Approach in Approximate Reasoning Systems
Masao MUKAIDONO and Kazuyuki NOJIMA

*1 明治大学 理工学部情報科学科
Department of Computer Science, Meiji University
*2 SONY株式会社 テレビ事業本部欧州事業部
Europe Business Div. TV. Group, Sony Corporation, Osaki Technology Center

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

については何も述べていない．そこで本論文では，Tong らの条件よりも緩い条件の下で間接法は直接法と同じ推論結果を導くことを証明し，更に，一般に直接法は間接法を含んでいる関係にあることを示す．

2．ファジィ推論(直接法・間接法)

ファジィ推論には，直接法と間接法の2つの方法がある．直接法は，max-min 合成を直接応用するのに対して，間接法は真理値空間上で max-min 合成を応用するため複雑な手続きをとる．

この節では，まずファジィモダスポネンスの動機付けから，直接法，間接法の考え方を紹介する．

2.1 ファジィモダスポネンス

記号論理学にはいくつかの推論形式が存在するが，その中で最も基本的なものの一つがモダスポネンスである．モダスポネンスとは次の形式のものである．

$$\begin{array}{l} a \rightarrow b \\ a \\ \hline b \end{array}$$

Zadeh は，それをファジィに拡張することによりファジィモダスポネンスの考えを示した[4]．ファジィモダスポネンスとは次の形式のものを言う．

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A' \\ \hline B' \end{array}$$

ここで，A，A'，B，B'はそれぞれ X，X，Y，Y 上のファジィ集合である．また，A と A'は必ずしも同じ集合でなくてもよい．

$A \rightarrow B$ の A を前件部，B を後件部と言う．また，前提とは，$A \rightarrow B$ と A'との両方を指す．

モダスポネンスの場合，a，b は集合ではなく命題を表す記号であることに注意されたい．この意味でファジィモダスポネンスは，モダスポネンスと形式こそ似ているが異なるものである．なお，本論文では特に指定しない限り論理命題を小文字で，集合を大文字で表す．

2.2 直接法

ファジィモダスポネンスにおいて，$A \rightarrow B$ を $X \times Y$ 上のファジィ関係と考えることによって，B'のファジィ集合を次式の合成規則で求める方法が直接法である．

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B) \tag{2.1}$$

$\vee$を max 演算，$\wedge$を min 演算と定義するとき，$A \rightarrow B$ を R で表すと，$B'(y)$は次式で与えられる．

$$B'(y) = \bigvee_x (A'(x) \wedge R(x,y)) \tag{2.2}$$

ここで，ファジィ関係 R の定義が問題となるが，Zadeh は多値論理のインプリケーションを用いることを提案している．

例えば，Lukasiewicz のインプリケーションの定義は，

$$I(a,b) = 1 \wedge (1 - a + b) \quad a,b \in [0,1] \tag{2.3}$$

であるから，これを用いると $R(x,y)$は，

$$\begin{aligned} R(x,y) &= I(A(x), B(y)) \\ &= 1 \wedge (1 - A(x) + B(y)) \end{aligned}$$

となる．従って B'は，

$$B'(y) = \bigvee_x (A'(x) \wedge 1 \wedge (1 - A(x) + B(y))) \tag{2.4}$$

によって求められる．周知のように多値論理のインプリケーションはいくらでも定義することができる．従って，一般にインプリケーションを I で表すと，直接法は次式で表される．

$$B'(y) = \bigvee_x (A'(x) \wedge I(A(x), B(y))) \tag{2.5}$$

このように，2つの前提 A'と $A \rightarrow B$ との max-min 合成を行うことによって結論 B'を求める方法は推論の合成規則と呼ばれる．

2.3 間接法

間接法の方法は，逆真理値限定，推論の合成規則，真理値限定の3つのステップよりなる．以下

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

では，言語真理値，真理値限定，逆真理値限定，間接法と説明していく．

2.3.1 言語真理値

[0,1]上のファジィ集合にtrue，false，very true, unknownなどの言語ラベルを付与することにより，数値ではなく言語的な真理値を扱うものを言語真理値と呼ぶ．言語ラベルの付け方は人の主観によるが，現在は，後に述べる真理値限定，逆真理値限定との対応から特に，true，false，unknownは次のファジィ集合に対応させて議論するのが一般的である．また，言語真理値のメンバーシップ関数は，一般的に τ で代表される．

$$\mathrm{true}(a)=a \qquad a\in[0,1]$$
$$\mathrm{false}(a)=1-a \qquad a\in[0,1]$$
$$\mathrm{unknown}(a)=1 \qquad a\in[0,1]$$

2.3.2 真理値限定

$X=\{1,2,3,4,5,6\}$上のファジィ集合Bigを考えてみる．$\mathrm{Big}(x)=(x-1)/5$ なるメンバーシップ関数と，言語真理値*false*が与えられ，次のファジィ命題

'x is Big' is false

から新しいファジィ集合 S を求めることを考えよう．Zadehは，次の方法を提案[4]している．

$$S(x)=\mathrm{false}(\mathrm{Big}(x))=1-\mathrm{Big}(x)=(6-x)/5$$

これをSmallとおけば，即ち，

'x is Big' is false= 'x is Small'

を求めたことになる．これは，真理値限定と呼ばれる考え方で，形式的に表すと，

$$P \text{ is } \tau \ = \ Q \tag{2.6}$$

において，ファジィ集合 P と言語真理値 τ が与えられてファジィ集合 Q を求める方法である．メンバーシップ関数 $Q(x)$ は，

$$Q(x)=\tau(P(x)) \tag{2.7}$$

で求められる．

2.3.3 逆真理値限定

逆に，"P is $\tau=Q$"において，ファジィ集合 P とファジィ集合 Q が与えられて言語真理値 τ を求める問題を逆真理値限定という．この場合，言語真理値 $\tau(a)$ は次式で与えられる．

$$\tau(a)=\bigvee_{\{x|P(x)=a\}} Q(x) \qquad a\in[0,1] \tag{2.8}$$

逆真理値限定を適用するためには，上式より明らかなように，「メンバーシップ関数 $P(x)$ は，全射関数」なる条件が成り立っていないといけない．$P:X\to[0,1]$が全射であるとは，如何なる要素 $a\in[0,1]$に対しても，$P(x)=a$ となるような $x\in X$ が少なくとも一つは存在することである．

この τ の定義式より，$Q(x)=P(x)$の場合は明らかに $\tau(a)=a$ となる．また，$Q(x)=1-P(x)$の場合は同様にして $\tau(a)=1-a$，$Q(x)=X$ の時は $\tau(a)=1$ となる．このことからも，true，false，unknown について，先の対応付けが都合がよいことが分かる．

2.3.4 間接法

間接法は，つぎの3つのステップから構成されている．

ファジィモダスポネンスにおいて，

Step 1：

A と A'から逆真理値限定を用いて τ を求める．

$$\tau(a)=\bigvee_{\{x|A(x)=a\}} A'(x) \qquad a\in[0,1] \tag{2.9}$$

Step 2：

推論の合成規則を用いて τ とインプリケーション I から σ を求める．

$$\sigma(b)=\bigvee_{a}(\tau(a)\wedge I(a,b)) \quad b\in[0,1] \tag{2.10}$$

Step 3：

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

真理値限定を用いて，σ と B から B' を求める．

$$B'(y)=\sigma(B(y)) \qquad y\in Y \tag{2.11}$$

Step 1 より，間接法で推論を行うためには A について次の条件が必要である．

≪条件 A≫

メンバーシップ関数 $A(x)$ は，全射関数である．

そこで本論文では，≪条件 A≫が常に成り立っているものと仮定する．

間接法は幾つか提案されているが，ここで紹介したのは Baldwin [5] の提案したものである．塚本 [6] の提案した方法は Step 2 のアプローチが異なる．Baldwin の方法は max-min 合成からのアプローチであるのに対し，塚本は拡張原理(一般の関数をファジィ化する手法)からのアプローチで σ を求めている．従って，塚本の方法では Step 2 が次式で表現される．J を多値のインプリケーション等から導かれる適当な$[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$の関数とし，$\upsilon$ を $A\rightarrow B$ に対する言語真理値とすると，

$$\sigma(b)=\bigvee_{\{(a,c)\mid J(a,b)=c\}}(\tau(a)\wedge\upsilon(c)) \qquad b\in[0,1] \tag{2.12}$$

ところが，これは本質的に(2.10)式と同じ式であることを次の様に容易に示すことができる．

$$\begin{aligned}\sigma(b)&=\bigvee_{\{(a,c)\mid J(a,b)=c\}}(\tau(a)\wedge\upsilon(c))\\&=\bigvee_{(a,c)}(\tau(a)\wedge\upsilon(J(a,b)))\\&=\bigvee_{a}(\tau(a)\wedge I(a,b))\end{aligned}$$

$(\because \upsilon(J(a,b))=I(a,b)$ と置く$)$

従って本論文は Baldwin の方法を用いて議論する．

そのほかの方法は，基本的に Baldwin の方法と異なるが，Tong らも指摘しているように，エレガントさや単純さにおいて Baldwin の方法に引けを取る．更に本研究では，max-min 合成を用いた推論の合成規則に着目していることから，他の方法はここでは割愛する．

3．Tong らの研究

Tong らは文献 [3] の中で，間接法と直接法とは同じ推論結果を導くことを，「A^{-1}が全射関数ならば」という条件付きで以下のように示している．

【定理 3.1】

間接法の 3 つの式，(2.9)，(2.10)，(2.11)において，A^{-1}が全射関数ならば，間接法は直接法と同じである．

［証明］(文献 3))

(2.10)，(2.11)より明らかに，

$$\begin{aligned}B'(y)&=\bigvee_{a}(\tau(a)\wedge I(a,B(y))) \qquad b\in[0,1]\\&=\bigvee_{a}((\bigvee_{\{x\mid A(x)=a\}}A'(x))\wedge I(a,B(y)))\end{aligned}$$

ここで A^{-1}が全射関数であるなら，a を動かして最大値を求めることと x を動かして最大値を求めることは本質的に同じであるから，

$$B'(y)=\bigvee_{x}(A'(x)\wedge I(A(x),B(y)))$$

となる．ここで，$I(A(x),B(y))$を $R(x,y)$ と書き直せば，

$$B'(y)=\bigvee_{x}(A'(x)\wedge R(x,y))$$

で表される．これは(2.2)に他ならない．(証明終)

この証明で「A^{-1}が全射関数である」ということは，言い換えれば「A が全単射関数である」ことである． ただし，$A:X\rightarrow[0,1]$が単射であるとは，$x,x'\in X$ で $x\neq x'$ ならば常に $A(x)\neq A(x')$であること，すなわち A は 1 対 1 の写像であることである．従って，A が全単射関数とは，A が全射でありかつ単射であることをいう．

Tong らの研究は，「A が全単射関数である」という条件があるために，非常に狭い範囲での議論になってしまっている．また，A が全単射関数でない場合の両者の関係については，何も議論されていない．

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

次の章においては，≪条件A≫のみを仮定して間接法と直接法の関係を明らかにしていく．そして更に≪条件A≫を仮定しない場合の両者の関係を考察する．

4．直接法と間接法の関係

4.1 直接法

2項演算 $I(a,b)$ が，a に関して単調増加である時 I^{+}，単調減少である時 I^{-} で表す．

I が前件部 a に関して単調性を満たす時，換言すれば，ファジィ関係 $I(A(x),\ B(y))$ が $A(x)$ に関して単調性を満たす時，推論の合成規則に一つの性質を見ることができる．

その性質を見るために，まず $\nu^{+}:[0,1]\rightarrow[0,1]$ の関数を定義する．この関数を用いると I が I^{-} で表せるとき，$A'(x)$ のかわりに $\nu^{+}(A(x))$ を用いても同じ結論 $B'(y)$ を得ることが分かる．

【定義 4.1】

$A(x)$, $A'(x)$ をそれぞれ A, A' のメンバーシップ関数とする．この時，

$$\nu^{+}(a)=\bigvee_{\{x\mid A(x)\geqq a\}} A'(x) \qquad a\in[0,1] \quad (4.1)$$

定義より，明らかに ν^{+} は増加関数である．

【例 4.1】

図 4.1 a で与えられるファジィ集合 A，A' より，ν^{+} を求めると，図 4.1 b を得る．

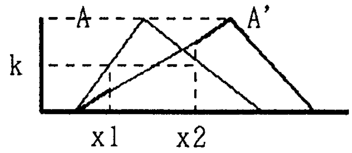


図4.1 a

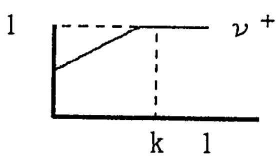


図4.1 b

この ν^{+} より，$\nu^{+}(A(x))$ を求めると，図 4.2 を得る．

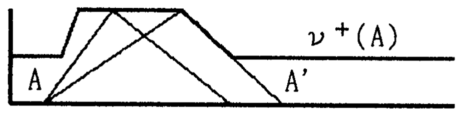


図4.2 $\nu^{+}(A)$ と A の関係

さて，この ν^{+} を用いて次の定理を導くことができる．

【定理 4.1】

ファジィ関係 $I(A(x),B(y))$ が $A(x)$ に関して単調減少であるとき (I^{-})，

$$\bigvee_{x}(A'(x)\wedge I^{-}(A(x),B(y)))$$
$$=\bigvee_{x}(\nu^{+}(A(x))\wedge I^{-}(A(x),B(y))) \qquad \forall y\in Y \quad (4.2)$$

［証明］

一般性を失うことなく，

$I^{-}(A(x),B(y))$ を $I^{-}y(A(x))$ で表す．

$$\bigvee_{x}(\nu^{+}(A(x))\wedge I^{-}y(A(x)))$$
$$=\bigvee_{x}((\bigvee_{\{u\mid A(u)\leqq A(x)\}}A'(u))\wedge I^{-}y(A(x)))$$
$$=\bigvee_{x}(\bigvee_{\{u\mid A(u)\leqq A(x)\}}(A'(u)\wedge I^{-}y(A(x))))$$
$$=\bigvee_{x}(\bigvee_{\{u\mid A(u)\leqq A(x)\}}(A'(u)\wedge I^{-}y(A(u))))$$

（$\because I^{-}y$ は減少関数）

$$=\bigvee_{A(u)}(A'(u)\wedge I^{-}y(A(u)))$$
$$=\bigvee_{u}(A'(u)\wedge I^{-}y(A(u)))$$

（証明終）

$\nu^{+}(A)$ は，A のメンバーシップの値を操作してできるファジィ集合である．ところで，A' は A とは何の関係のないファジィ集合である．この定理は，A' の代わりに $\nu^{+}(A)$ を用いても同じ結論を導くことを意味している．

次に I^{+} の場合について考えてみる．

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

【定義 4.2】

$A(x)$, $A'(x)$ をそれぞれ A, A' のメンバーシップ関数とする．この時，

$$\nu^-(a) = \bigvee_{\{x \mid A(x) \geqq a\}} A'(x) \qquad a \in [0,1] \qquad (4.3)$$

定義より，明らかに ν^- は減少関数である．

【例 4.2】

A, A' から $\nu^-(A)$ を求めると，例えば図 4.3 の様になる．

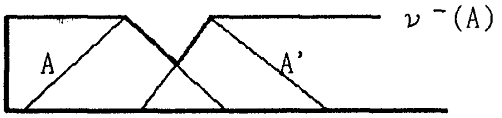


図4.3 $\nu^-(A)$ と A の関係

【定理 4.2】

ファジィ関係 $I(A(x), B(y))$ が $A(x)$ に関して単調増加であるとき (I^+)，

$$\bigvee_x (A'(x) \wedge I^+(A(x), B(y)))$$
$$= \bigvee_x (\nu^-(A(x)) \wedge I^+(A(x), B(y)))$$
$$\forall y \in Y \qquad (4.4)$$

この定理は定理 4.1 と同様にして証明できる．

4.2 間接法

A と A' から逆真理値限定を用いて得る言語真理値を τ とする．【定義 4.1】，【定義 4.2】について次の補題を示すことができる．

【補題 4.1】

ν^+, ν^- はそれぞれ τ で定義できる．

$$\nu^+(a) = \bigvee_{\{t \mid t \leqq a\}} \tau(t) \qquad a \in [0,1] \qquad (4.5)$$

$$\nu^-(a) = \bigvee_{\{t \mid t \geqq a\}} \tau(t) \qquad a \in [0,1] \qquad (4.6)$$

［証明］

$$\nu^+(a) = \bigvee_{\{t \mid t \leqq a\}} \tau(t)$$
$$= \bigvee_{\{t \mid t \leqq a\}} \left[\bigvee_{\{x \mid A(x) = t\}} A'(x) \right]$$
$$= \bigvee_{\{x \mid A(x) \leqq a\}} A'(x)$$

ν^- も同様に示せる． （証明終）

間接法の Step 2 の推論の合成規則において，τ の代わりに ν^+，もしくは ν^- をおいても，同じであることを示すことができる．

【定理 4.3】

関数 $I(a,b)$ が a に関して減少関数のとき (I^-)，

$$\bigvee_a (\tau(a) \wedge I^-(a,b)) = \bigvee_a (\nu^+(a) \wedge I^-(a,b))$$
$$\forall b \in [0,1] \qquad (4.7)$$

【定理 4.4】

関数 $I(a,b)$ が a に関して増加関数のとき (I^+)，

$$\bigvee_a (\tau(a) \wedge I^+(a,b)) = \bigvee_a (\nu^-(a) \wedge I^+(a,b))$$
$$\forall b \in [0,1] \qquad (4.8)$$

証明の形は同じなので，【定理 4.4】の証明を示す．

［証明］

一般性を失うことなく，$I^+(a,b)$ を $I^+{}_b(a)$ で表す．

$$\bigvee_a (\nu^-(a) \wedge I^+{}_b(a))$$
$$= \bigvee_a ((\bigvee_{\{t \mid t \geqq a\}} \tau(t)) \wedge I^+{}_b(a))$$
$$= \bigvee_a (\bigvee_{\{t \mid t \geqq a\}} (\tau(t) \wedge I^+{}_b(a)))$$
$$= \bigvee_a (\bigvee_{\{t \mid t \geqq a\}} (\tau(t) \wedge I^+{}_b(t)))$$

（$\because I^+{}_b$ は増加関数）

$$= \bigvee_t (\tau(t) \wedge I^+{}_b(t))$$

（証明終）

4.3 直接法と間接法の関係

ここまでの考察を更に深めると，直接法と間接法が同じ結論を導くことを示すことができる．

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

関数 I は一般に単調性を満たしていない．そこで，I の単調性に関して[0,1]区間を区分することを考え，I は単調性に関して定義域を有限個に分解可能なものと仮定する．即ち，

$$\bigvee_{a\in[0,1]}(\tau(a)\wedge I(a,b)) = \bigvee_{a\in T_1}(\tau(a)\wedge I(a,b))\vee\cdots \cdots\vee\bigvee_{a\in T_n}(\tau(a)\wedge I(a,b)) \quad (4.9)$$

ここで $T_i(i=1,2,...,n)$ は次の性質を持つ[0,1]の部分集合である．

$$i\neq j \Rightarrow T_i\cap T_j\neq\phi$$
$$T_1\cup\cdots\cup T_n=[0,1]$$

そして $I(a,b)$ は T_i 上で，a に関して増加または減少関数である．同様に，直接法の場合も考えてみよう．$X_i=\{x|A(x)\in T_i\}$，$X_i\subseteq X$ とおくと，

$$\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge I(A(x),B(y))) = \bigvee_{x\in X_1}(A'(x)\wedge I(A(x),B(y)))\vee\cdots \cdots\cdots\vee\bigvee_{x\in X_n}(A'(x)\wedge I(A(x),B(y))) \quad (4.10)$$

もちろん，I は X_i 上で，$A(x)$ に関して単調性を満たす．

さて，つぎに ν_i^+，ν_i^- なる関数を定義する．

【定義 4.3】
$A(x)$, $A'(x)$ をそれぞれ A, A' のメンバーシップ関数とする．
この時，

$$\nu_i^+(a)=\bigvee_{\{x\in X_i|A(x)\leqq a\}}A'(x) \quad a\in T_i \quad (4.11)$$
$$\nu_i^-(a)=\bigvee_{\{x\in X_i|A(x)\geqq a\}}A'(x) \quad a\in T_i \quad (4.12)$$

【補題 4.2】
ν_i^+，ν_i^- はそれぞれ次式で定義することもできる．

$$\nu_i^+(a)=\bigvee_{\{t\in T_i|t\leqq a\}}\tau(t) \quad a\in T_i \quad (4.13)$$
$$\nu_i^-(a)=\bigvee_{\{t\in T_i|t\geqq a\}}\tau(t) \quad a\in T_i \quad (4.14)$$

この補題は【補題 4.1】において[0,1]を T_i に置き換えることによって証明できる．

定理 4.1～4.4 と同様に次の定理を導く．

【定理 4.5】
I が X_i 上で $A(x)$ に関して単調減少である時，

$$\bigvee_{x\in X_i}(A'(x)\wedge I^-(A(x),B(y))) = \bigvee_{x\in X_i}(\nu_i^+(A(x))\wedge I^-(A(x),B(y))) \quad (4.15)$$

また X_i 上で $A(x)$ に関して単調増加である時，

$$\bigvee_{x\in X_i}(A'(x)\wedge I^+(A(x),B(y))) = \bigvee_{x\in X_i}(\nu_i^-(A(x))\wedge I^+(A(x),B(y))) \quad (4.16)$$

【定理 4.6】
I が T_i 上で減少関数の時，T_i 上で増加関数の時，それぞれ

$$\bigvee_{a\in T_i}(\tau(a)\wedge I^-(a,b))=\bigvee_{a\in T_i}(\nu_i^+(a)\wedge I^-(a,b)) \quad (4.17)$$

$$\bigvee_{a\in T_i}(\tau(a)\wedge I^+(a,b))=\bigvee_{a\in T_i}(\nu_i^-(a)\wedge I^+(a,b)) \quad (4.18)$$

【定理 4.5】【定理 4.6】は，それぞれ【定理 4.1】，【定理 4.2】において X を X_i に，また【定理 4.3】，【定理 4.4】において[0,1]を T_i に置き換えることによって証明できる．

以上の定理より，次の定理を証明できる．

【定理 4.7】
≪条件 A≫が成立しているとき，間接法と直接法は同じ結論を導く．

[証明]
$N=\{1,2,...,n\}$ とする．【定理 4.6】より，

$$\sigma(b)=\bigvee_{a\in[0,1]}(\tau(a)\wedge I(a,b)) = \bigvee_{i\in N}\{\bigvee_{a\in \mathrm{T}_i}(\tau(a)\wedge I^{\pm}(a,b))\} = \bigvee_{i\in N}\{\bigvee_{a\in \mathrm{T}_i}(\nu_i^{\mp}(a)\wedge I^{\pm}(a,b))\}$$

NII-Electronic Library Service

Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

ところで，$B'(y)=\sigma(B(y))$であるから，

$$B'(y)=\bigvee_{i\in N}\{\bigvee_{a\in T_i}(\nu_i^{\mp}(a)\wedge I^{\pm}(a,B(y))\}$$

また a を $A(x)$で置き換えると，≪条件 A≫より $A(x)$は全射であるから，a を動かして max-min 演算を行うことと x を動かして max-min 演算を行うことは本質的に同じである．よって，

$$B'(y)=\bigvee_{i\in N}\{\bigvee_{x\in X_i}(\nu_i^{\mp}(A(x))\wedge I^{\pm}(A(x),B(y))\}$$

そして，【定理 4.5】より，

$$B'(y)=\bigvee_{i\in N}\{\bigvee_{x\in X_i}(\nu_i^{\mp}(A(x))\wedge I^{\pm}(A(x),B(y))\}$$
$$=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge I(A(x),B(y)))$$

ここで，$I(A(x),B(y))$を $R(x,y)$とおけば，

$$B'(y)=\bigvee_{x\in X}(A'(x)\wedge R(x,y))$$

となる．これは直接法に他ならない．
但し，複号同順である．　(証明終)

4.4 直接法と間接法の関係

≪条件 A≫を仮定すると，間接法と直接法は全く同じ推論結果を導くことを【定理 4.7】で示した．

ところで，≪条件 A≫は逆真理値限定に必要な条件，即ち間接法では必要な条件であるが，直接法ではこれを特に必要としない．即ち，≪条件 A≫が成立しないときは間接法では推論できないが，直接法は特別な条件を仮定することなく推論できるということが言える．

換言すれば，間接法にできることは全て直接法でできるが，この逆は一般に言えない．これは，直接法が間接法を含んでいることを意味している．

5．結論

Tong らの研究においては，「A は全単射関数である」という条件の下で間接法は直接法と同じであることを示している．

本研究は，「A は全射関数である」という≪条件 A≫の下で議論を進めた．そしてこの条件の下で間接法は直接法と同じであることを示した．従って，本研究の結果は Tong らの研究を含んだものになっている．更に，≪条件 A≫を仮定しない場合も考慮してより一般的な結論「直接法は間接法を含んでいること」を導いた．

本論文において，関数 I に定義域が分解可能という条件をつけた．より一般的な関数として考察した場合，より厳密な議論が必要となると思われるが，工学的な見地から特に興味を引かないためここでは取りあげなかった．

最後に以上の結果から見たファジィ推論の応用について考察してみる．現在多くのファジィ推論の応用がなされている．その中には直接法の応用によるものもあり，間接法の応用のものもある．しかし，直接法の方が計算が簡単であること，間接法は直接法に含まれていることの，2つの直接法の利点を考えれば，ファジィ推論の応用は全て直接法を基に構成されるべきである．

参考文献

1) L.A.Zadeh：Calculus of Fuzzy Restriction；in L.A.Zadeh, et al.(ed.), Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, pp.1-39(1975)
2) 水本：ファジィ推論法；システムと制御，Vol. 28，No.7，pp.436-441（1984）
3) R.M.Tong and J.Festathiou：A Critical Assessment of Truth Function Modification and Its Use in Approximate Reasoning；Fuzzy Sets and Systems, Vol.7，pp.103-108(1982)
4) L.A.Zadeh：Fuzzy Logic and Approximate Reasonig；Synthese, Vol.30，pp.407-428(1975)
5) J.F.Baldwin：A New Approach to Approximate Reasoning Using a Fuzzy logic； Fuzzy Sets and Systems, Vol.2，pp.309-325(1979)
6) Y.Tsukamoto：An Approach to Fuzzy Reasoning Method；in Advances in Fuzzy Set Theory

NII-Electronic Library Service

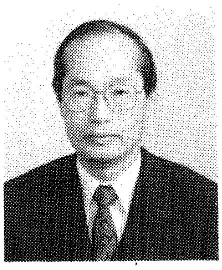
Japan Society for Fuzzy Theory and Systems

and Appllications, edited by M.M.Gupta et al, North Holland, Amsterdam (1979)

(1991年 6月11日　受付)
(1991年10月15日　再受付)

[問い合わせ先]
〒141 東京都品川区大崎2-10-14
SONY株式会社 大崎テクノロジーセンター
テレビ事業本部欧州事業部
野島　和行
TEL：03-3495-3361
FAX：03-3495-3763
e-mail：nojima@eg.tv.sony.co.jp

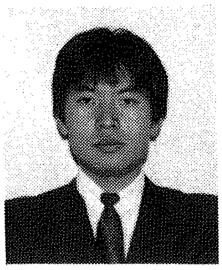
著者紹介



向殿 政男 (むかいどの まさお)

明治大学 理工学部情報科学科

1965年 明治大学・工・電気卒. 1970年 同大学博士課程修了. 同年, 同大学・工・電気専任講師. 1978年 電子通信教授. 現在, 同大学・理工・情報科学教授. その間, 多値論理, フォールト・トレラントシステム, ファジィ論理, 論理装置の自動設計, 工業用ロボット, グラフ理論等の研究に従事. 工博. 著書「フォールト・トレラント・コンピューティング」(丸善, 編), ファジィ「あいまいの科学」(岩波書店) 等. IEEE, 情報処理学会, 電子情報通信学会, 日本ファジィ学会, 人工知能学会各会員



野島 和行 (のじま かずゆき)

SONY株式会社　テレビ事業本部欧州事業部

1989年 明治大学・工・電子通信工学科卒. 1991年 同大学大学院博士前期課程修了. 現在 SONY株式会社テレビ事業本部欧州事業部在籍. ファジィ推論, ファジィ論理, 多値論理, 及び論理学に興味を持つ. 日本ファジィ学会会員

NII-Electronic Library Service