ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Integrale di Volterra e funzioni olomorfe di matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 3-4 (1938), p. 313-328

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_313_0>

INTEGRALE DI VOLTERRA
E FUNZIONI OLOMORFE DI MATRICI

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa).

In queste pagine mi propongo di far rilevare quanto segue:

1°). Che i due teoremi di CAUCHY, con le loro conseguenze, stabiliti in una mia recente Memoria ([1]) per funzioni olomorfe di matrici definite in un'algebra commutativa, valgono anche per algebre complesse qualunque, purchè la variabile indipendente vari in un insieme opportuno. Questo può scegliersi a piacere nella sotto-algebra *centrale* $\mathfrak{C}$ di quella considerata $\mathfrak{A}$, cioè nella sotto algebra contenente tutte le matrici permutabili con ogni altra di $\mathfrak{A}$. Poichè in questa supponiamo che esista la matrice identica I, la $\mathfrak{C}$ conterrà *almeno* tutte le matrici scalari, cioè del tipo ϱI con ϱ variabile complessa scalare.

Si include così il caso posto a base delle importanti ricerche del VOLTERRA ([2]), nelle quali la variabile indipendente è ϱI, cioè le matrici considerate hanno gli elementi funzioni di ϱ.

Si può anzi fare un'ipotesi ancora più larga, supponendo che la variabile indipendente sia del tipo $ax+b$, con x variabile in $\mathfrak{C}$ ed a, b matrici costanti, la prima non degenere. Si includerebbe così anche il caso studiato dallo SPAMPINATO, pel quale, però, x è ancora scalare ([3]). Ma è facile persuadersi, confrontando la trattazione di questo A. con quanto qui si osserva, che un tal ampliamento, per gli scopi di questa ricerca, è di natura inessenziale, cioè condurrebbe solo a

---

([1]) *Funzioni olomorfe di matrici.* [Annali Sc. Norm. di Pisa (1937-XV)]. Vedi anche una Nota nei *Comptes Rendus* del giugno 1936. Nella premessa alla Memoria avevo esplicitamente avvertito che non solo le condizioni di monogeneità (di cui qui non è questione) ma anche gli altri risultati potevano estendersi ad algebre non commutative, mercè opportuni accorgimenti. Con l'occasione, avverto che a pag. 9 di questa Memoria va soppresso il periodo di quattro righe che comincia: In altri termini,.... e che include la formola (6).

([2]) Vedi il recentissimo libro di V. VOLTERRA ed O. HOSTINSKY: *Opérations infinitésimales linéaires.* [Paris, Gauthier-Villars, 1938]. In esso si trovan riprodotte le due Memorie originali del VOLTERRA (1887 e 1902).

([3]) SPAMPINATO N.: *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra dotata di modulo....* [Rend. Pal., tomi 57-58-59-(1934-1935)] Memoria II, p. 23 e segg. e Memoria III, p. 11 e segg. Se la variabile è del tipo $a\varrho+b$, si dice, con questo A., che essa varia in un *piano caratteristico*: ma, come osserva lo stesso SPAMPINATO, ci si può sempre riportare ad un *piano principale*, cioè ad $x=a\varrho$.

qualche complicazione formale [4]; perciò mi limito qui a mentovarne la sola possibilità, omettendo di occuparmene in quel che segue.

Con l'occasione, estendo anche lo sviluppo di LAURENT, accenno alle singolarità isolate di $f(x)$ ed ai *residui.*

2°). Che la nozione di integrale di VOLTERRA può senz'altro portarsi nell'ambiente più ampio che qui si studia. Le proprietà fondamentali si stabiliscono rapidamente e si trova che tal nozione conduce alla integrazione delle equazioni differenziali in matrici

$$y' = f(x) \cdot y, \qquad y' = y \cdot f(x)$$

ove $f(x)$ è una funzione olomorfa definita in $\mathfrak{A}$, al variar di x in un insieme di $\mathfrak{C}$.

In tal modo l'integrale di VOLTERRA, con le sue proprietà, viene ad essere strettamente connesso alla nozione di funzione olomorfa di matrice, secondo il punto di vista generale dal quale mi son messo.

3°). Che le proprietà dell'integrale di VOLTERRA (o integrale logaritmico, o prodotto integrale) permettono di definire la matrice esponenziale destra o sinistra di una funzione olomorfa di matrice.

Mediante questa definizione, e ricorrendo ad opportune convenzioni, le più notevoli proprietà degli integrali di VOLTERRA, pel caso di punti singolari isolati, si riconducono a quelle degli ordinari integrali di funzioni di matrici.

Non manco di accennare a qualche possibile applicazione, fermandomi brevemente, a titolo di esempio, su qualche caso particolarmente semplice.

Le osservazioni fatte valgono, com'è ovvio, anche per algebre non di matrici.

§ 1. - I teoremi di Cauchy.

1. - Un sistema di unità dell'algebra $\mathfrak{A}$ indichiamolo con $u_1, u_2, \ldots, u_m$: una di queste, ad esempio u_1, può supporsi coincida colla matrice identica I.

Detto $\mathfrak{J}$ un insieme della sotto algebra centrale $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{A}$, eventualmente coincidente con $\mathfrak{C}$, consideriamo una matrice $f(x)$ funzione olomorfa [5] definita (cioè contenuta) in $\mathfrak{A}$ per x variabile in $\mathfrak{J}$.

Supporremo, benchè ciò non sia sempre indispensabile, che $\mathfrak{J}$ sia privo di matrici degeneri [6].

---

[4] Con ciò non si vuol dire che la considerazione di questo tipo di variabile sia anche inessenziale ai fini che si propone lo SPAMPINATO. Basta por mente alle interessanti conseguenze che questo *A.* ne deduce, ad esempio, per gli sviluppi in serie di una $f(x)$ olomorfa nell'intorno di un punto dello spazio rappresentativo di $\mathfrak{A}$.

[5] Cioè di modulo finito e totalmente derivabile (SPAMPINATO). Qui non facciamo uso delle condizioni di monogeneità.

[6] Poichè $\mathfrak{A}$ contiene I, essa possiede quante si vogliano matrici non degeneri. Ad esempio, se a è degenere, $a + \varrho I$, con ϱ di modulo abbastanza piccolo, sarà non degenere. Si osservi

Poichè x è permutabile con ogni elemento di $\mathfrak{A}$, quindi con $f(x)$, le derivate e gl'integrali a destra ed a sinistra di $f(x)$ coincidono, quindi può porsi

$$f'(x) = {}'f(x) = \frac{df(x)}{dx}, \qquad \int_l f(x)dx = \int_l dxf(x),$$

ove con l s'indica una linea di JORDAN (semplice, continua e rettificabile [7]), immersa in $\mathfrak{J}$, cioè nell'insieme che rappresenta $\mathfrak{J}$ nello spazio euclideo reale, S_{2m}, rappresentativo di $\mathfrak{A}$.

Ponendo

$$x = \xi_1 u_1 + ... + \xi_m u_m, \qquad f(x) = \eta_1 u_1 + ... + \eta_m u_m,$$

le coordinate $\eta_1, ..., \eta_m$ di $f(x)$ son funzioni scalari di quelle $\xi_1, ..., \xi_m$ di x. Considerando un elemento assegnato di $\mathfrak{J}$,

$$x_0 = \xi_1^0 u_1 + ... + \xi_m^0 u_m,$$

porremo, con significato evidente,

$$\Delta x = x - x_0 = \Delta\xi_1 u_1 + ... + \Delta\xi_m u_m.$$

Questo Δx sarà in $\mathfrak{C}$, insieme a $(\Delta x)^{-1}$, se Δx non è degenere [8]; perciò, posto

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \Delta y_1 \cdot u_1 + ... + \Delta y_m u_m,$$

anche $\Delta f \cdot (\Delta x)^{-1} = (\Delta x)^{-1} \cdot \Delta f$ sarà in $\mathfrak{A}$. Ed al tendere di Δx alla matrice nulla, questo prodotto resterà in $\mathfrak{A}$, nella quale algebra sarà contenuta anche $f'(x)$.

Detto t un parametro reale variabile in un intervallo opportuno e separando nelle coordinate di x la parte reale dall'imaginaria, lungo la linea l si avrà

$$\xi_r = \xi_r'(t) + i\xi_r''(t), \qquad (r = 1, 2, ..., m;\ i = \sqrt{-1}).$$

Mercè ordinarie integrazioni di funzioni scalari complesse del parametro reale t, si otterranno le quantità $\zeta_1, ..., \zeta_m$ che danno

$$\int_l f(x)dx = \zeta_1 u_1 + ... + \zeta_m u_m.$$

---

ancora che, variando con continuità gli elementi di una matrice, variano pure con continuità le sue radici caratteristiche: perciò, se a è non degenere, lo sono anche tutte quelle sufficientemente vicine ad a. Ne segue che l'esclusione da un $\mathfrak{J}$ fissato delle matrici degeneri non provocherà necessariamente la sconnessione di $\mathfrak{J}$.

(7) Da ora in poi, tutte le curve (o linee) che consideriamo le supporremo linee di JORDAN semplici, continue e rettificabili.

(8) Quindi non divisore dello zero, il che per le matrici è la stessa cosa. Si ricordi che nelle algebre dotate di modulo, ogni elemento non divisore dello zero possiede l'inverso, e questo è nell'algebra. Cfr. G. SCORZA: *Corpi numerici ed algebre.* [Messina, Principato, 1921], p. 209, n.° 104 e p. 213, n.° 109.

Perciò, anche quest'integrale è in $\mathcal{A}$.

Ne segue che la variabile indipendente x è permutabile con la derivata e l'integrale di $f(x)$.

2. - Esempi di funzioni olomorfe di matrici sono dati dalle serie di potenze

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_p(x-a)^p + ... \tag{1}$$

ove a_0, a_1,.... son matrici di $\mathcal{A}$, a è un elemento assegnato di $\mathcal{C}$, ed x varia in un opportuno insieme $\mathcal{J}$ di $\mathcal{C}$, atto a soddisfare le note condizioni ([9]) di convergenza della serie (1).

La derivazione e l'integrazione della serie (1) si fa termine a termine, con le solite regole che valgono quando coefficienti e variabili sono quantità scalari: derivata ed integrale convergono nello stesso campo in cui converge la (1).

3. - Dopo di ciò, la dimostrazione del teorema integrale di CAUCHY data per algebre commutative al § 7 della Mem. cit. in ([1]), può ripetersi senza alcuna variante, poichè può constatarsene la validità nelle nuove condizioni in cui ci siam posti. Basta invero osservare che detta dimostrazione abbisogna soltanto della permutabilità delle matrici dello insieme $\mathcal{J}$ in cui varia x e della permutabilità di esse con $f(x)$ ([10]).

Si potrà dunque porre

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

essendo a una matrice assegnata di $\mathcal{J}$. Si constata, sempre come nel caso di $\mathcal{A}$ commutativa, che $F(x)$ è olomorfa in $\mathcal{J}$ e vi ha per derivata $f(x)$.

Seguono la formola di CAUCHY, lo sviluppo in serie di TAYLOR ed il teorema di MORERA, con dimostrazioni identiche a quelle già fatte pel caso $\mathcal{A} = \mathcal{C}$.

4. - Vale anche lo *sviluppo di Laurent* cui ora accenneremo. Sia a un punto di un insieme $\mathcal{J}$ di $\mathcal{C}$, pel quale passa una superficie Ω tutta immersa in $\mathcal{J}$, compreso il contorno Γ (curva chiusa di JORDAN, etc.). Sia Ω_1 una porzione di Ω, di

---

([9]) Vedi la mia Nota: *Sulle serie di potenze di una variabile in un'algebra.* [Rend. Lincei, vol. XXII (1935-XIII)].

([10]) La commutabilità degli elementi di $\mathcal{J}$ necessità per poter porre (§ 6, n.º 20)

$$\int_{\text{arc } ab} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

mentre quella di x con $f(x)$ interviene nel passare dalla formola (3) alle (4), di p. 25 della Mem. cit. ([1]). Nel lemma di GOURSAT la permutabilità non interviene.

contorno Γ_1 (ancora curva chiusa di JORDAN, etc.) contenente a nell'interno. Per questo punto passi, inoltre, un piano caratteristico ([11]) sul quale esiste una circonferenza γ, di centro a, che con Γ_1 costituisce il contorno completo di una superficie Ω', pur essa immersa in $\mathfrak{J}$. Supponiamo infine che le due curve Γ_1 e γ possano deformarsi con continuità, la prima restando su Ω e senza attraversar Γ, e ridursi ad a insieme ad Ω'.

Ciò posto, sia $f(x)$ una funzione olomorfa in $\mathfrak{J}$ ad eccezione di a, la quale, escluso ancora questo punto, soddisfi al lemma di GOURSAT che precede il teorema di CAUCHY, sì da verificar questo su Ω' e sulla porzione di Ω che si ha togliendone Ω_1.

Se per ogni punto y di $\Omega+\Omega'-\Omega_1$ (comunque varino Γ_1 ed Ω' tendendo ad a nel modo sopra indicato) valgono condizioni topologiche analoghe a quelle descritte per a, si potrà porre

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x-y}\,dx-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)}{x-y}\,dx, \tag{2}$$

i due contorni Γ e Γ_1 essendo percorsi nel verso positivo. Dopo di che, se la matrice $(y-a)\,(x-a)^{-1}$ ha radici caratteristiche tutte di modulo inferiore all'unità, il primo integrale sarà sviluppabile in serie di potenze ad esponenti interi positivi di $y-a$, con coefficienti calcolati su Γ. In pari tempo, $(x-a)\cdot(y-a)^{-1}$ avrà radici caratteristiche tutte di modulo superiore all'unità, quindi potrà porsi ([12])

$$-\frac{I}{x-y}=-\frac{I}{(x-a)-(y-a)}=\frac{I}{y-a}\cdot\frac{I}{I-\dfrac{x-a}{y-a}}=\frac{I}{y-a}+\frac{x-a}{(y-a)^2}+\frac{(x-a)^2}{(y-a)^3}+\dots \tag{3}$$

Perciò si ha

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(x)}{x-y}\,dx=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_s}{(y-a)^s},\qquad b_s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(x)\cdot(x-a)^{s-1}dx, \tag{4}$$

e la funzione $f(y)$, nell'interno della porzione di Ω di contorno completo Γ e Γ_1 vien sviluppata nella serie di potenze

$$f(y)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\cdot(y-a)^r+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{b_s}{(y-a)^s},\qquad a_s=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)dx}{(x-a)^{s+1}}. \tag{5}$$

5. - Nello sviluppo precedente non abbiamo utilizzate le ipotesi, necessarie per y, che avevamo fatte su a e cioè:

1°) che esiste un piano caratteristico per a contenente una circonferenza γ di centro a la quale, con Γ_1, dà il contorno completo di una superficie Ω' di $\mathfrak{J}$ riducibile per continuità ad a insieme a Γ_1 e γ;

2°) che su Ω' vale il teorema di CAUCHY.

([11]) Non occorre che si tratti di piano principale [nè qui nè al § 9 della mia Mem. cit. ([1])].

([12]) Mem. cit. ([1]), n.° 18, p. 21, formola (8).

Se queste ipotesi si utilizzano, la integrazione dei termini di (5) lungo Γ_1 si riduce a quella lungo γ. Quindi, ragionando come si è ragionato per ottener la formola di CAUCHY ([13]), tutti i termini danno un integrale nullo, meno quello in $(y-a)^{-1}$ e risulta:

$$\int_{\Gamma_1} f(y)dy = \int_{\gamma} f(y)dy = \int_{\gamma} \frac{b_1 dy}{y-a} = 2\pi i \cdot b_1, \qquad i=\sqrt{-1}. \tag{6}$$

Si ottien così, ancora nella forma classica, il teorema del residuo di $f(x)$, in un suo punto singolare isolato.

Com'è naturale, si potrebbe proseguire l'analogia con la teoria delle funzioni di variabile complessa, introducendo i concetti di prolungamento analitico, di singolarità, etc. Ma di ciò non possiamo qui occuparci con la necessaria ampiezza ([14]) e perciò, pel momento, ci contentiamo di quanto esposto in questo e nel precedente art.

§ 3. - L'integrale di Volterra.

6. - Sia l un arco (di JORDAN, semplice, etc.) immerso in $\mathfrak{J}$ e diciamo a, b le matrici che ne segnano gli estremi. Consideriamo su l la successione di punti

$$x_0=a, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{n+1}=b$$

susseguentisi su l nel verso da a a b e poniamo

$$\Delta x_r = x_{r+1} - x_r, \qquad (r=0,\ 1, \ldots,\ n)$$

indicando con x_r' un punto arbitrario scelto sull'arco di estremi x_r ed x_{r+1}.

Detta, al solito, $f(x)$ una funzione olomorfa di x variabile in $\mathfrak{J}$ e appartenente ad $\mathfrak{A}$, formiamo i due prodotti

$$(\mathfrak{D})_a^b = [I+f(x_0')\Delta x_0] \cdot [I+f(x_1')\Delta x_1] \cdot \ldots \cdot [I+f(x_n')\Delta x_n], \tag{7}$$

$$(\mathfrak{S})_a^b = [I+\Delta x_n \cdot f(x_n')] \cdot [I+\Delta x_{n-1} \cdot f(x'_{n-1})] \cdot \ldots \cdot [I+\Delta x_0 \cdot f(x_0')]. \tag{8}$$

Facendo tendere n all'infinito e ciascun incremento Δx_r alla matrice nulla, si constata facilmente ([15]) che i due prodotti sopra indicati tendono, rispettivamente, ai limiti assegnati dalle somme delle due serie:

$$I + (\mathfrak{D}_1)_a^b + (\mathfrak{D}_2)_a^b + (\mathfrak{D}_3)_a^b + \ldots = \lim\ (\mathfrak{D})_a^b \tag{9}$$

$$I + (\mathfrak{S}_1)_a^b + (\mathfrak{S}_2)_a^b + (\mathfrak{S}_3)_a^b + \ldots = \lim\ (\mathfrak{S})_a^b, \tag{10}$$

([13]) Vedi § 9 della Mem. cit. ([1]), segnatamente l'inizio del n.° 26 e la fine del n.° 27.

([14]) Per la nozione di prolungamento analitico, sarebbe opportuno dare, come si può, una conveniente rappresentazione dell'insieme $\mathfrak{J}$, che lo porti tutto al finito. Per lo studio delle singolarità, occorrebbe inoltre indagar sulla connessione di $\mathfrak{J}$ in rapporto alle ipotesi fatte nel n.° 4.

([15]) Cfr., benchè per noi x non sia più necessariamente scalare, SPAMPINATO, Memoria II cit. ([3]), pp. 34-35.

dove abbiam posto:

$$\text{(11)}\quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{S}_1 = \int_a^x f(x)dx, & \mathfrak{D}_2 = \int_a^x \mathfrak{D}_1 f(x)dx, & \mathfrak{D}_3 = \int_a^x \mathfrak{D}_2 \cdot f(x)dx, \ldots; \\ & \mathfrak{S}_2 = \int_a^x dx \cdot f(x) \cdot \mathfrak{S}_1, & \mathfrak{S}_3 = \int_a^x dx \cdot f(x) \cdot \mathfrak{S}_2, \ldots, \end{array} \right.$$

quindi

$$\text{(12)}\qquad (\mathfrak{D}_{r+1})_a^b = \int_a^b \mathfrak{D}_r \cdot f(x)dx, \qquad (\mathfrak{S}_{r+1})_a^b = \int_a^b dx \cdot f(x) \cdot \mathfrak{S}_r.$$

Se l'estremo b è variabile in $\mathfrak{J}$, e si indica con x, dall'olomorfismo di $f(x)$ segue che le (9)-(10) son due serie (di serie) di potenze, quindi son anch'esse due funzioni olomorfe di x. Le indicheremo, ordinatamente, con

$$V_*[f(x)]_a^x, \qquad {}_*V[f(x)]_a^x$$

e le chiameremo integrali logaritmici, o prodotti integrali, o integrali di VOLTERRA, destro e sinistro, di $f(x)$. Abbiamo adoperato un asterisco in basso, a destra o a sinistra di V, per distinguere l'integrale destro da quello sinistro.

Osserviamo subito che la definizione data, espressa dalle (7)-(8) ci assicura senz'altro che può porsi, qualunque sia c sopra un arco di estremi a e b:

$$\text{(13)}\qquad V_*[f(x)]_a^b = V_*[f(x)]_a^c \cdot V_*[f(x)]_c^b, \qquad {}_*V[f(x)]_a^b = {}_*V[f(x)]_c^b \cdot {}_*V[f(x)]_a^c.$$

7. - Le serie che definiscono i due integrali logaritmici, per $b=x$, son derivabili termine a termine e si ha, come subito si vede:

$$\text{(14)}\qquad \left\{ \begin{array}{l} V_*'[f(x)]_a^x = {}'V_*[f(x)]_a^x = V_*[f(x)]_a^x \cdot f(x), \\ {}_*V'[f(x)]_a^x = {}'_*V[f(x)]_a^x = f(x) \cdot {}_*V[f(x)]_a^x. \end{array} \right.$$

Inoltre, poichè per $x=a$ questi due integrali si riducono alla identità I, essi non coincidon mai, identicamente, con la matrice nulla, e per x sufficientemente vicino ad a son matrici non degeneri.

Perciò, se con $[\varphi(x)]^{-1} \cdot \varphi'(x)$, rispettivamente $\varphi'(x) \cdot [\varphi(x)]^{-1}$ si indicano le derivate logaritmiche di $\varphi(x)$, non degenere, si ha che:

a) la derivata logaritmica destra (sinistra) dell'integrale logaritmico destro (sinistro) di una funzione olomorfa $f(x)$ è questa stessa $f(x)$.

Se l'arco $a\,b$ lungo il quale s'integra un integrale logaritmico è una curva chiusa, pel teorema di CAUCHY già dimostrato per $f(x)$, tutti i termini, dopo il primo, delle serie (9)-(10) si annullano, quindi:

b) estendendo l'integrazione logaritmica (destra o sinistra) di una funzione olomorfa ad una curva chiusa, si ottiene la matrice identica.

Se ne deduce che anche l'integrale logaritmico non dipende dal cammino di integrazione.

Segue subito, tenendo presente la (13), che:

c) l'inversa di una matrice integrale logaritmico (destro o sinistro) si ottiene invertendo i limiti di integrazione (cioè il verso sul cammino d'integrazione).

Perchè due cammini, uno da a ad x, l'altro da x ad a, danno un cammino chiuso, lungo il quale l'integrale si riduce all'identità.

8. - Interessa rilevare anche un'importante proprietà che lega i due integrali logaritmici destro e sinistro. Essa si esprime con le relazioni:

$$V_*[f(x)]_a^x \cdot {}_*V[-f(x)]_a^x = {}_*V[f(x)]_a^x \cdot V_*[-f(x)]_a^x = I. \tag{15}$$

Cioè a dire:

d) la matrice inversa dell'integrale logaritmico destro (sinistro) è quella integrale logaritmico sinistro (destro) dell'opposta della funzione integranda.

Proprietà che convien confrontare con la c) del numero precedente [16].

Essa si stabilisce come conseguenza della formola di integrazione per parti delle matrici:

$$(UV)_a^x = \int_a^x dU \cdot V + \int_a^x U \cdot dV, \tag{16}$$

dalla quale si deducon le identità:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{D}_3 - \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_2, \\ \mathfrak{D}_4 + \mathfrak{S}_4 = \mathfrak{D}_3\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3, \\ \mathfrak{D}_5 - \mathfrak{S}_5 = \mathfrak{D}_4\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{D}_3\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_3 - \mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{17}$$

La prima di queste (17) si ottiene dalla (16) ponendo $U = \mathfrak{D}_1$, $V = \mathfrak{S}_1$; la seconda ponendo $U = \mathfrak{D}_2$, $V = \mathfrak{S}_2$ e viceversa, indi sottraendo. Così di seguito.

Dopo di che basta osservare che si ha:

$$\begin{aligned} &[I + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3 + \dots] \cdot [I - \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_3 + \dots] = \\ &\qquad = I + (\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{D}_2 + \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_1) + (\mathfrak{D}_3 - \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{D}_2\mathfrak{S}_1) + \dots \\ &\qquad = I. \end{aligned}$$

---

[16] VOLTERRA, loc. cit. [2], p. 57. Questa proprietà, insieme ad altre, è stata riottenuta da G. ZWIRNER: *La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali.* [Rend. Sem. Padova (1936-XIV), p. 22] partendo dalle proprietà di questi sistemi.

Con ciò è dimostrata la prima delle (15). La seconda si dimostra allo stesso modo. Si osservi che qui non si è invocata la *b*).

9. - Facciamo ora un'applicazione importante dei teoremi *b*) e *c*). Supponiamo che $f(x)$ possegga il punto singolare isolato a, su una superficie Ω tutta immersa in $\mathfrak{I}$, e che sian verificate tutte le ipotesi di cui ai n.^{i} 4 e 5.

Allora l'integrale logaritmico destro o sinistro di $f(x)$ esteso al contorno Γ_1 che circonda a su Ω non dà necessariamente luogo alla matrice identica. Descrivendo attorno ad a, sempre su Ω, un altro contorno, sia Γ_2, non intersecante Γ_1 (nè Γ) l'integrale logaritmico, ad esempio destro, di $f(x)$ su Γ_2 non è, in generale, eguale a quello su Γ_1, ma sarà legato ad esso dalla notevole relazione che andiamo a trovare.

Si dicano b e c due punti, il primo su Γ_1, il secondo su Γ_2, e si congiungano con una linea l, tutta su Ω, che non intersechi Γ_1, né Γ_2.

Si percorra Γ_1 lasciando a sinistra a a partire dal punto b sino a tornare in b, indi percorrendo l si passi su Γ_2, che si descriverà lasciando a alla destra, sino a tornare in c da cui, percorrendo l in senso inverso al precedente, si tornerà in b. Il cammino così percorso non include alcun punto singolare di $f(x)$, quindi gli integrali logaritmici di $f(x)$ son entrambi eguali ad I. Possiamo perciò scrivere:

$$V_*[f(x)]_{+\Gamma_1} \cdot V_*[f(x)]_{+l} \cdot V_*[f(x)]_{-\Gamma_2} \cdot V_*[f(x)]_{-l} = I, \tag{18}$$

e analogamente per l'integrale logaritmico sinistro.

Ponendo, per la *c*),

$$V_*[f(x)]_{+l} = P, \quad \text{quindi} \quad V_*[f(x)]_{-l} = P^{-1}$$

si ha, sempre tenendo presente la *c*):

$$V_*[f(x)]_{+\Gamma_1} = P \cdot V_*[f(x)]_{+\Gamma_2} \cdot P^{-1}. \tag{18$_1$}$$

Così per l'integrale sinistro. Scrivendo $+\Gamma_1$, $+\Gamma_2$ intendiamo che queste curve chiuse son percorse lasciando a alla sinistra ([17]).

Se si parte da un punto m di Γ_1 distinto da b, si ha:

$$V_*[f(x)]_{\mathrm{arc}\, mb} \cdot V_*[f(x)]_{+l} \cdot V_*[f(x)]_{-\Gamma_2} \cdot V_*[f(x)]_{-l} \cdot V_*[f(x)]_{\mathrm{arc}\, bm} = I. \tag{19}$$

Tenendo presente la *d*), l'osservazione con la quale si chiude il n.° 8 e le posizioni precedenti, questa (19) si scrive

$$V_*[f(x)]_{\mathrm{arc}\, mb} = {}_*V[-f(x)]_{\mathrm{arc}\, bm} \cdot P \cdot V_*[f(x)]_{+\Gamma_2} \cdot P^{-1}, \tag{19$_1$}$$

([17]) Per x scalare, vedi VOLTERRA e HOSTINSKY, loc. cit ([2]). Chap. XII, n.° 4, p. 114.

nella quale occorre ricordare che è:

$$\text{arc } mb + \text{arc } bm = +\Gamma_1 .$$

La matrice P che figura nelle (18_1) e (19_1) dipende dai due punti b e c scelti su Γ_1 e Γ_2. Perciò, in queste relazioni P può avere infinite determinazioni, in corrispondenza coi punti dai quali si iniziano le integrazioni su Γ_1 e su Γ_2. Precisamente, nella (18_1) le determinazioni di P sono ∞^2, mentre quelle della (19_1), essendo fisso l'estremo b, son ∞^1.

In ogni caso, se $c=b$, si avrà $P=I$.

Rimandiamo il lettore alle citate ricerche del VOLTERRA per ulteriori analoghe considerazioni.

10. - Sulla considerata superficie Ω, sia Γ una curva chiusa arbitraria. Lungh'essa, i due integrali logaritmici di $f(x)$ non sono *sempre* eguali ad I se non quando $f(x)$ sia priva, su Ω, di punti singolari. Fissiamo un verso su Γ e due suoi punti b e c, succedentisi, nel verso fissato, in quest'ordine. Se indichiamo con $V_*[f(x)]_{+\Gamma(b)}$, ${}_*V[f(x)]_{+\Gamma(b)}$ i valori dei due integrali logaritmici estesi a Γ in detto verso, a cominciar da b, si ha subito

$$V_*[f(x)]_{+\Gamma(b)} \cdot V_*[f(x)]_{+\text{arc } bc} = V_*[f(x)]_{+\text{arc } bc} \cdot V_*[f(x)]_{+\Gamma(c)} . \tag{20}$$

Analogamente

$${}_*V[f(x)]_{+\text{arc } bc} \cdot {}_*V[f(x)]_{+\Gamma(b)} = {}_*V[f(x)]_{+\Gamma(c)} \cdot {}_*V[f(x)]_{+\text{arc } bc} . \tag{20'}$$

Si tenga conto che in queste due relazioni con $+\text{arc } bc$ abbiamo indicato l'arco di Γ che ha gli estremi b e c percorso nel senso fissato su Γ. Se $f(x)$ presenta soltanto punti singolari isolati e nessuno di essi è su Γ, la matrice ottenuta integrando lungo ogni arco di Γ è ancora non degenere; perciò le (20)-(20′) ci dicono che:

e) integrando logaritmicamente $f(x)$ lungo una curva chiusa di Ω, la matrice ottenuta o è identica o è determinata a meno di un fattore di trasformazione (che dipende dalle origini delle integrazioni) secondo che la curva su cui s'integra può oppur no ridursi con continuità a un punto, restando su Ω, senza passare per punti singolari di $f(x)$.

Nel secondo caso, cioè se l'integrale lungo Γ non è identico, di questa matrice restano invariate le radici caratteristiche e la segnatura (ossia, se si vuole, i divisori elementari) quindi la forma canonica. Questa può chiamarsi *residuo caratteristico* dell'integrale logaritmico destro o sinistro di $f(x)$, oppure semplicemente *residuo* di $f(x)$, nel punto singolare isolato considerato ([18]).

([18]) Cfr. VOLTERRA e HOSTINSKY, loc. cit., Chap. XII, n.° 6, p. 116 e Chap. XI, n.° 5, p. 107. Abbiamo aggiunto l'aggettivo « *caratteristico* » per distinguerlo dal residuo relativo all'integrale ordinario.

§ 3. - Un' applicazione immediata.

11. - Come si sa, l'integrale di VOLTERRA, per x scalare, dà la immediata integrazione di un sistema lineare di equazioni alle derivate ordinarie del tipo

$$(21) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

nel quale i coefficienti a_{rs} son quantità scalari funzioni analitiche della variabile complessa ϱ. Se con y si indica la matrice di ordine n le cui colonne son n sistemi di soluzioni linearmente indipendenti di (21) (cioè danno, come si dice, un *sistema* o una *matrice fondamentale* di soluzioni) e se con $f(x)$, $x = \varrho I$, si indica la matrice $\|a_{rs}\|$ che ha per righe i coefficienti delle n equazioni (21), queste si traducono nella relazione in matrici:

$$(22) \qquad y' = f(x) \cdot y,$$

ove y' indica la derivata ordinaria di y rispetto alla matrice scalare $x = \varrho I$.

Poichè y è non degenere, questa può scriversi

$$(22_1) \qquad y' \cdot y^{-1} = f(x),$$

quindi, ricordando la proprietà a) del n.° 7, si ha che

$$(23) \qquad y = {}_*V[f(x)]_a^x$$

è una soluzione della (22), cioè del sistema (21). In questa (23) l'origine a dell'integrazione è arbitraria, il che equivale a dire che la matrice integrale della (22) è assegnata dalla (23) a meno di un fattore (matrice) costante arbitrario, che si utilizzerà per soddisfare le condizioni iniziali.

Se invece della (22) si considera la

$$(22') \qquad y' = y \cdot f(x),$$

la sua matrice integrale viene data da

$$(23') \qquad y = V_*[f(x)]_a^x,$$

con la stessa avvertenza di cui sopra ([19]).

([19]) Si osservi che se in y le n soluzioni di un sistema fondamentale di (21) si scrivon per righe anzichè per colonne, le (21) si traducon nella (22') anzichè nella (22). Il che esprime la proprietà generale dell'integrale logaritmico (anche quello generalizzato) espresso dalla relazione

$$V_* \cdot [f(x)]_{-1} = {}_*V[f(x)_{-1}]$$

ove l'indice -1 sta ad indicare il passaggio alla matrice trasposta.

12. - Com'è ovvio da quel che precede, l'integrale di VOLTERRA da noi generalizzato permette di integrare con le stesse (23)-(23′) le equazioni (22)-(22′) anche quando in esse $f(x)$ è una matrice funzione olomorfa di una x non scalare, variabile in $\mathcal{C}$.

Se, ad esempio nel caso dell'equazione (22), come condizione iniziale si impone che per $x=a$ risulti $y=C$, si ha la soluzione

$$y={}_*V[f(x)]_a^x \cdot C \tag{24}$$

perchè, causa la *b*) del n.° 7, per $x=a$ il primo fattore del secondo membro diventa l'identità.

Analogamente, la (22′) si risolve con

$$y=C \cdot V_*[f(x)]_a^x. \tag{24′}$$

Il cammino di integrazione da a ad x è arbitrario su ogni superficie Ω che non passi per punti singolari di $f(x)$. Se $f(x)$ presenta su Ω un punto singolare isolato, dicendo Q la determinazione di $V_*[f(x)]$ lungo una curva chiusa di Ω che avvolga quel punto lasciandolo a sinistra, la matrice integrale di (22) si scrive

$$y={}_*V[f(x)]_{\mathrm{arc}\; ax} \cdot Q,$$

dove la matrice Q è determinata a meno di un fattore di trasformazione [si tenga presente, al n.° 9, il ragionamento che conduce alla (18_1)]. E se, per $x=a$, *una* delle determinazioni di y si vuole sia $y=C$, si porrà

$$y={}_*V[f(x)]_{\mathrm{arc}\; ax} \cdot Q \cdot C. \tag{24}$$

Analogamente per l'equazione (22′).

Per x scalare ed $f(x)$ con un punto singolare, le osservazioni ora fatte danno luogo ad un notevole risultato di FUCHS sulla teoria delle equazioni differenziali lineari ([20]). Esso potrebbe anche enunciarsi per le equazioni (22)-(22′) con x non scalare.

§ 4. - Funzioni esponenziali.

13. - Se l'algebra $\mathfrak{A}$ è commutativa, ponendo

$$X=(\mathfrak{D}_1)_a^x=(\mathfrak{S}_1)_a^x=\int_a^x f(x)\,dx,$$

i due integrali di VOLTERRA destro e sinistro coincidono nella serie esponenziale

$$I+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\ldots=e^X, \tag{25}$$

([20]) Per questa rimandiamo il lettore al citato libro di VOLTERRA e HOSTINSKY, Chap. XII, n.° 14, p. 125, oppure alla Nota dello ZWIRNER cit. ([16]) § 3, n.° 6, p. 44.

e questa viene a godere precisamente le stesse proprietà di cui godrebbe se X fosse una quantità (o una matrice) scalare.

Altrettanto accade, anche senza che $\mathfrak{A}$ sia commutativa, quando $f(x)=A$ sia una matrice costante. In tal caso si ha

$$X=\int_a^x A\,dx=A(x-a)=(x-a)\cdot A$$

ed i due integrali destro e sinistro coincidono ancora in una serie esponenziale

$$I+\frac{A}{1!}(x-a)+\frac{A^2}{2!}(x-a)^2+\ldots=e^{A(x-a)}=e^{(x-a)A} \tag{26}$$

che definirà una matrice di $\mathfrak{A}$ permutabile con A.

14. - Queste osservazioni suggeriscono la seguente definizione di *matrice esponenziale destra o sinistra* di argomento una matrice X (funzione olomorfa, definita in $\mathfrak{A}$, della matrice indipendente x, variabile in $\mathfrak{C}$ o in un suo insieme $\mathfrak{J}$) calcolata fra gli estremi a ed x. Si porrà

$$X_a^x=\int_a^x f(x)dx, \quad \text{quindi} \quad dX=f(x)dx,$$

ed

$$\left\{\begin{aligned} e^{X_a^x *}&=I+\int_a^x dX+\int_a^x\Big(\int_a^x dX\Big)dX+\int_a^x\Big[\int_a^x\Big(\int_a^x dX\Big)dX\Big]dX+\ldots=V_*\Big[\frac{dX}{dx}\Big]_a^x, \\ e^{*X_a^x}&=I+\int_a^x dX+\int_a^x dX\Big(\int_a^x dX\Big)+\int_a^x dX\Big[dX\Big(\int_a^x dX\Big)\Big]+\ldots={}_*V\Big[\frac{dX}{dx}\Big]_a^x. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Un asterisco in basso, a destra o a sinistra dell'esponente distingue la funzione esponenziale destra da quella sinistra.

Le proprietà degli integrali di VOLTERRA indicate nel § 2 si traducono in altrettante proprietà delle funzioni esponenziali, che qui riassumiamo nelle relazioni che seguono.

In primo luogo si ha:

$$\frac{d}{dx}e^{X_a^x *}=e^{X_a^x *}\cdot\frac{dX}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}e^{*X_a^x}=\frac{dX}{dx}\cdot e^{*X_a^x}, \tag{28}$$

le quali ci dicon che le (27), per $dX=f(x)dx$, permetton di integrar le due equazioni differenziali in matrici (22′) e (22), ordinatamente.

In secondo luogo si ha:

$$e^{X_a^x *}\cdot e^{*(-X_a^x)}=e^{-X_a^x *}\cdot e^{*X_a^x}=I, \tag{29}$$

le quali assicurano che per invertire una matrice esponenziale non basta cambiar segno all'esponente, ma occorre anche passare dalla matrice destra a quella sinistra. Per la c) del n.° 7 si ha anche:

$$e^{X_{a}^{x}*} \cdot e^{X_{x}^{a}*} = e^{*X_{x}^{a}} \cdot e^{*X_{a}^{x}} = I, \tag{29$_1$}$$

quindi, per la (29),

$$e^{-X_{x}^{a}*} = e^{*X_{a}^{x}}. \tag{30}$$

16. - Poichè $\mathfrak{A}$ non è commutativa, per le funzioni esponenziali che abbiamo definite, la proprietà associativa vale soltanto in casi particolari. Ed anche in questi casi, vale con speciali avvertenze. Ad esempio, se A e B son due matrici costanti, non permutabili, si può scrivere

$$e^{A} \cdot e^{B} = e^{A+B}, \qquad e^{B} \cdot e^{A} = e^{B+A}, \tag{31}$$

ma di qui non potrà dedursi che i due secondi membri son eguali. Infatti, si ha

$$e^{A} \cdot e^{B} = I + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \ldots$$

$$e^{B} \cdot e^{A} = I + \frac{B+A}{1!} + \frac{(B+A)^2}{2!} + \ldots$$

ove deve intendersi

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (B+A)^2 = B^2 + 2BA + A^2, \tag{32}$$

ma con $AB \neq BA$: così le successive potenze ([21]).

Quanto ora si è osservato esprimeremo enunciando che:

per matrici esponenziali ad esponenti costanti non permutabili, la proprietà associativa del prodotto vale soltanto a patto di rinunziare a quella commutativa della somma ([22]).

Con questa convenzione, ed osservando che, per A costante, si ha

$$e^{A} \cdot e^{-A} = e^{0} = I,$$

si constata facilmente che: *le proprietà degli integrali di Volterra, trovate* (nei n.i 9 e 10) *pel caso in cui $f(x)$ possegga un punto singolare isolato, diventano immediate conseguenze di quelle degli integrali ordinari.*

([21]) Pei cubi si intenderà

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3, \qquad (B+A)^3 = B^3 + 3B^2A + 3BA^2 + A^3, \tag{32$_1$}$$

con $A^2B \neq BA^2$, $AB^2 \neq B^2A$. E via di seguito.

([22]) Anche per esponenti variabili si potrebbero introdurre opportune convenzioni e simbolismi (però meno semplici di questi) che potrebbero render valevole la proprietà associativa del prodotto.

§ 5. - Cenno ad altre applicazioni.

17\. - Oltre che alla risoluzione di un'equazione differenziale lineare di primo ordine, in matrici, come le (22)-(22′), gli integrali logaritmici, quindi le funzioni esponenziali, possono servire alla integrazione di sistemi lineari pei quali i coefficienti e le incognite sian matrici di $\mathfrak{A}$ funzioni di una variabile indipendente x scelta in $\mathfrak{C}$.

Qui non intendiamo occuparci di tal problema, che avrebbe bisogno di qualche sviluppo ([23]); accenneremo invece a un caso in cui la nozione di matrice esponenziale è particolarmente adatta.

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria, lineare omogenea e di ordine n:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{33}$$

i cui coefficienti $a_1, \dots, a_n$ son matrici assegnate, mentre y è una matrice incognita.

Questa equazione può, al modo solito, trasformarsi in un sistema, quindi sarà risolubile con le considerazioni cui alludevamo poco fa.

18\. - Supponiamo che le matrici $a_1, \dots, a_n$ siano costanti e che l'equazione algebrica di grado n nella matrice z

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{34}$$

ammetta la soluzione $z = A$. Sia allora $\mathfrak{A}$ un'algebra, dotata di modulo, contenente questa matrice A, ma non necessariamente le a_s, x una matrice variabile in un insieme $\mathfrak{J}$ della sua sottoalgebra centrale $\mathfrak{C}$.

Si constata immediatamente che

$$y = e^{\int_a^x A dx} = e^{A(x-a)}, \tag{35}$$

con a matrice costante arbitraria di $\mathfrak{J}$, è soluzione della (33).

Con la stessa funzione esponenziale (35) s'integra anche l'equazione

$$y^{(n)} + y^{(n-1)} \cdot a_1 + \dots + y' \cdot a_{n-1} + y \cdot a_n = 0 \tag{33′}$$

purchè A sia radice dell'equazione algebrica

$$z^n + z^{n-1} \cdot a_1 + \dots + z \cdot a_{n-1} + a_n = 0. \tag{34′}$$

Basta osservare che, essendo x permutabile con A, questa è anche permutabile con $e^{A(x-a)}$, quindi che dalla (35) si ha:

$$\frac{d^s y}{dx^s} = A^s \cdot e^{A(x-a)} = e^{A(x-a)} \cdot A^s.$$

([23]) Il dott. G. Zwirner, in lavori di prossima pubblicazione, si interesserà di questo problema.

È poi ovvio che, se l'integrale (35) è una soluzione della (33) o della (33'), A è radice di (34) o di (34').

19. - Si osservi infine che se P è una qualsiasi matrice costante permutabile con tutti i coefficienti a_s, la (34) ammette, insieme alla radice $z=A$, anche l'altra $z=PAP^{-1}$. Quindi la (33) acquista la soluzione

$$y=e^{\int_a^x PAP^{-1}dx}=e^{PAP^{-1}(x-a)} \tag{36}$$

la quale, in generale, è distinta dalla (35), a meno che P non sia permutabile anche con A.

Quest'ultimo fatto accade, ad esempio, quando le a_s definiscono uu'algebra di matrici ([24]) cui appartiene A, poichè allora ogni P permutabile con tutte le a_s appartiene alla sottoalgebra centrale $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{A}$.

Analogamente per la (34').

([24]) Cioè un'algebra le cui unità son quelle fra le a_s che son linearmente indipendenti.