

539.389.1

軸方向負荷とねじりの組合せによる前負荷後の降伏曲面*

白鳥英亮**, 池上皓三**, 金子堅司**,
吉田総仁***, 小池茂幸****

1. 緒 言

著者らは異方性塑性理論確立のために前負荷後の降伏曲面についての研究をすすめているが、これまでには比例前負荷後の降伏曲面の形状が π 平面や偏差応力空間では、前ひずみの大きさのみの関数で表されるような比較的単純な材料について実験を行い検討してきた⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、初期等方性を有していても単軸引張りと単純せん断負荷でのミーゼスの相当応力-相当ひずみ関係にかなりの差が認められるような材料では、比例前負荷後の降伏曲面を π 平面または偏差応力空間に表示しても、その形状変化は前ひずみの大きさだけでなくその方向にも影響される。こうした材料の塑性変形挙動を検討した研究としては、比例負荷⁽³⁾および負荷方向が変化する際⁽⁴⁾の応力ひずみ関係についてのものはあるが、前負荷後の降伏曲面に関する研究はわずかに Svensson らがアルミニウムを用いて行った⁽⁵⁾⁽⁶⁾ものがあるにすぎず、系統的な研究は行われていない。本論文は、軸方向負荷とねじりの組合せ負荷における応力ひずみ関係がミーゼスの理論では十分な精度で記述しえない場合について、それが前負荷後の降伏曲面の形状におよぼす影響について詳細な実験を行い検討したものである。

2. 実験方法

実験は多軸組合せ応力試験機⁽¹⁾により、試験片に軸方向負荷とねじりを加えて行った。試験片材料はアルミ合金 17S の丸棒を 410°C で 2 時間焼なまししたものであり、その成分を表 1 に示す。試験片は外径 23 mm, 肉厚 1.5 mm, 平行部 100 mm の薄肉円筒

表 1 試験片材料の化学成分

成 分	Al	Cu	Si	Fe	Mn	Mg	Zn	Cr
含有量%	93.76	4.26	0.50	0.47	0.63	0.36	0.01	0.01

* 昭和 48 年 11 月 10 日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和 49 年 4 月 22 日。

** 正員、東京工業大学精密工学研究所。

*** 准員、東京工業大学精密工学研究所(横浜市緑区長津田町 4259)。

**** 准員、東京都立工業技術センター。

である。試験片に生ずる応力およびひずみの測定は、すでに報告した方法によって行った⁽¹⁾。図 1 は、試験片に軸方向負荷、内圧およびねじりを加えた際の応力-ひずみ曲線をミーゼス形の相当応力-相当ひずみ関係を用いて整理したものである。単軸引張りと内圧の応力-ひずみ曲線はほぼ一致しており、試験片に初期異方性はないといえる。これに比し、ねじり試験の結果は単軸引張りおよび内圧の結果より応力値が低くなっている。この材料がミーゼス形の相当応力-相当ひ

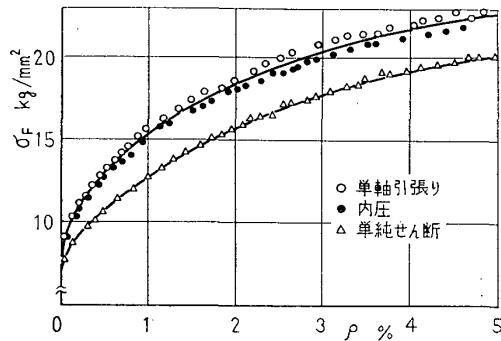


図 1 試験片の応力-ひずみ曲線

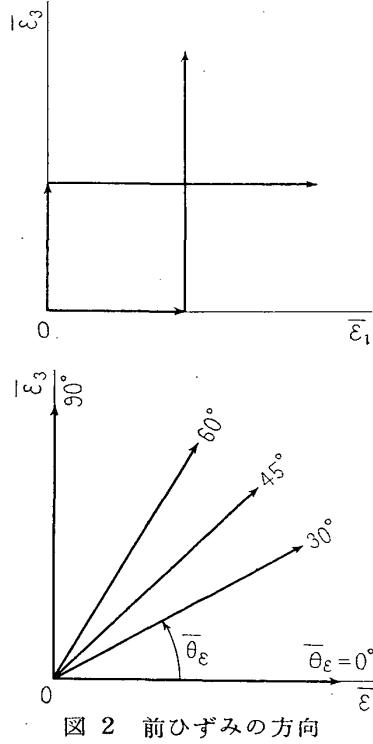


図 2 前ひずみの方向

ずみの関係ではよく表せないことを示している。

本実験では、前ひずみ経路としては種々の方向をもつ直線経路と、 90° に折れ曲がる2直線からなるものとを採用した。図2に実験に用いた前ひずみ経路の方向を示す。与えた前ひずみの大きさは、ミーゼス形の相当塑性ひずみで 0.5% , 1% , 3% , 5% の4種類である。降伏点の定義はミーゼス形の相当塑性ひずみが 0.02% に達する点に対応する応力値とした。

実験結果は次のような偏差応力平面 ($\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3$)⁽⁷⁾あるいは、偏差ひずみ平面 ($\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_3$)⁽⁷⁾に表示した。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_1 = \sigma_x, \quad \bar{\sigma}_3 = \sqrt{3} \tau_{xy} \\ \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_x^{(p)}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_{xy}^{(p)} \end{aligned} \right\}$$

ここで σ_x は試験片に生じる軸方向応力、 τ_{xy} は単純

せん断応力、 $\varepsilon_x^{(p)}$, $\gamma_{xy}^{(p)}$ はそれぞれ試験片の軸方向垂直塑性ひずみおよびテンソル定義によるせん断塑性ひずみである。

3. 実験結果

種々の方向と大きさの直線前ひずみを与えた後の降伏曲面の実験結果を図3～7に示す。これらは、偏差ひずみ平面 ($\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_3$) 上で前ひずみ方向 $\bar{\theta}_e = 0^\circ$ (単軸引張り), 30° , 45° , 60° , 90° (単純せん断) の前負荷を与えた後の降伏曲面である。また図8は、偏差ひずみ平面上で互いに鏡像関係にあるひずみ経路が、 90° 折れ曲がる前ひずみ経路に沿って前負荷を与えた後の降伏曲面を示している。ここで前ひずみの方向を $\bar{\theta}_e$ 、前ひずみの大きさをミーゼス形の相当塑性ひずみで定義し

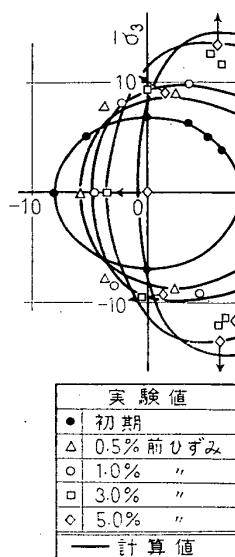


図3 単軸引張り前負荷後の降伏曲面 ($\bar{\theta}_e=0^\circ$)

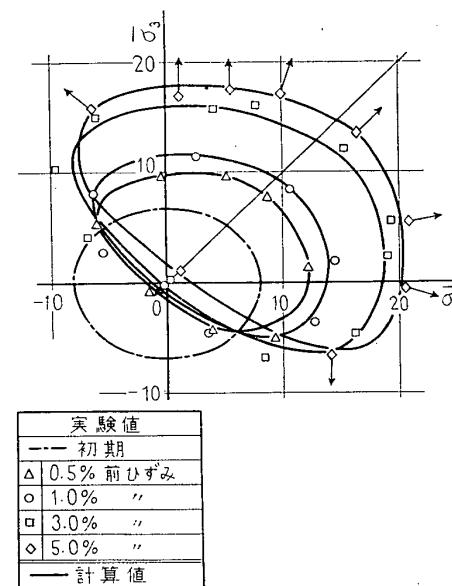


図5 組合せ前負荷後の降伏曲面 ($\bar{\theta}_e=45^\circ$)

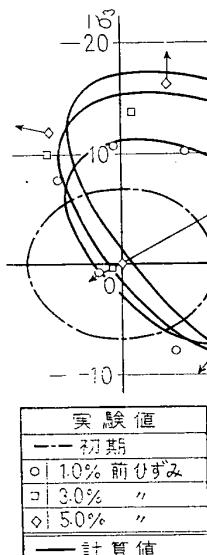


図4 組合せ前負荷後の降伏曲面 ($\bar{\theta}_e=30^\circ$)

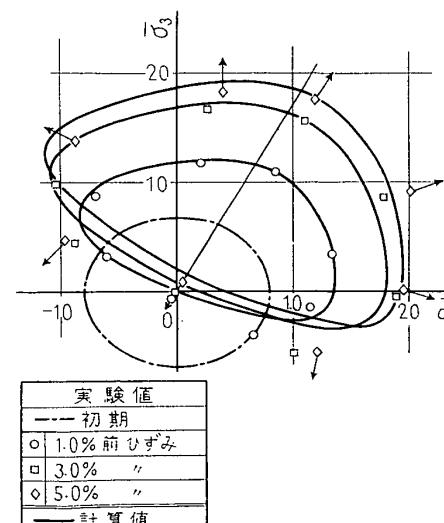


図6 組合せ前負荷後の降伏曲面 ($\bar{\theta}_e=60^\circ$)

$\int d\varepsilon = \rho$ とかくこととする。

図3～7の結果からほかの種々の金属材料による結果⁽¹⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁸⁾と同様に直線ひずみ経路に沿う前負荷後の降伏曲面は、前負荷方向に移動し、その形状は前負荷

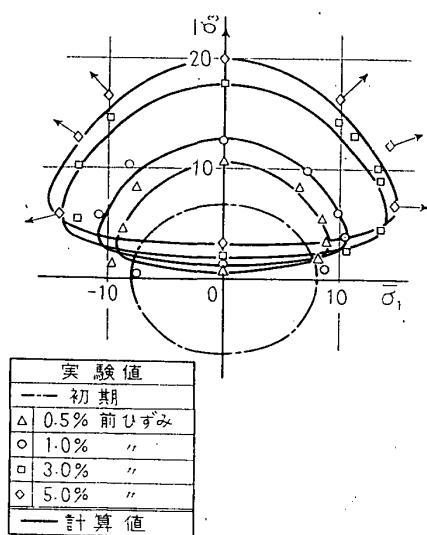


図7 単純せん断前負荷後の降伏曲面 ($\theta_e=90^\circ$)

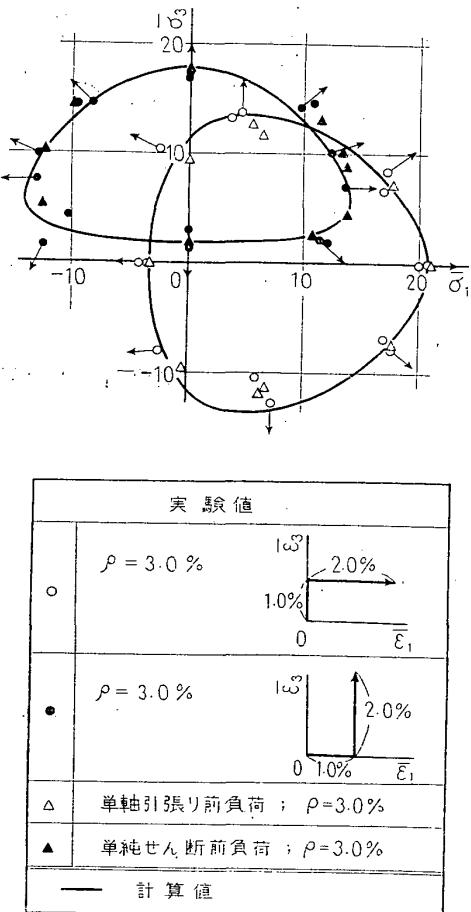


図8 前ひずみ経路が 90° 折れ曲がる前負荷後の降伏曲面

方向に出っぱり、その逆方向に偏平となることがわかる。しかし、本実験の結果では前ひずみの大きさだけではなく、その方向によっても降伏曲面の形状が変化しており、これは以前に著者らが報告した黄銅についての実験結果⁽¹⁾からは認められていなかったものである。また、図8の結果から、角点を有するひずみ経路によって前負荷を与えた場合の降伏曲面でも角点以降の直線前ひずみ量が十分大きい場合には、折れ曲り最終方向と方向が一致するような直線ひずみ経路で、それと同一の前ひずみ量を与えた後の降伏曲面とほぼ合同となっている。図3～8には実験より得られた塑性ひずみ増分ベクトルの方向をも示してあるが、降伏曲面に対する塑性ひずみ増分ベクトルの垂直性は前ひずみ経路が折れ曲がる場合も含めてほぼ成り立っているようである。

4. 前負荷後の降伏曲面の定式化

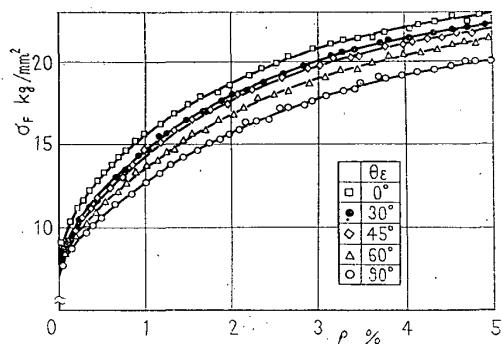
4.1 降伏曲面の形状に関する基礎的考察 種々の比例負荷に対する応力ひずみ関係が、ミーゼス形の相当応力-相当ひずみで一義的に表示でき、かつそのときの偏差応力ベクトルと塑性ひずみ増分ベクトルの方向が一致するような材料では、偏差ひずみ平面($\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_3$)上の直線ひずみ経路に対応する応力ベクトルの方向は偏差応力平面($\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3$)上でひずみ方向に一致し、その最初の降伏曲面はこの偏差応力平面上で円として表せる。このような材料に種々の比例前負荷を与えた後の降伏曲面は、前ひずみ量が同一ならば互に合同な形状となることはすでに報告した⁽¹⁾。しかし、本実験の結果では最初の降伏曲面はだ円に近く、同一の大きさの直線前ひずみ後の降伏曲面についても前ひずみ方向によってその形状が変化している。特に前ひずみ方向 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の実験結果では、その形状が前ひずみ方向に関して対称でなく、降伏曲面全体がゆがんでいる。これは本実験で使用した材料では、軸方向負荷とねじりの組合せ応力状態において、その相当応力と相当ひずみの関係あるいは偏差応力ベクトルと塑性ひずみ増分ベクトルの方向に、上述の仮定が完全には成り立っていないことに起因していると考えられる。このことを実際に示したのが図9(a), (b) と図10である。図9(a)は、ひずみ方向 $\theta_e=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直線ひずみ経路に沿って負荷した場合の応力ひずみ関係を、ミーゼスの相当応力と相当ひずみを用いて表したものである。応力値はひずみ経路の方向が 0° (単軸引張り負荷), $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ (単純せん断負荷) の順に小さくなっている。これを極座標系による等ひずみ曲線で示したのが図9(b)

である。これらの結果から、ひずみ方向 θ_e に沿って負荷した場合の応力値 $\sigma_F(\theta_e)$ を次式で近似し、これを図 9(a), (b) の実線で示す。

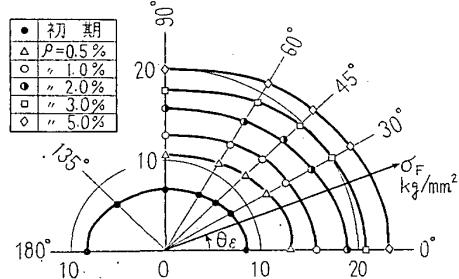
$$\begin{aligned} & \{\sigma_F(\theta_e) \cos \theta_e / \sigma_F(0^\circ)\}^2 \\ & + \{\sigma_F(\theta_e) \sin \theta_e / \sigma_F(90^\circ)\}^2 \\ & = 1 + \mu |\sin 2\theta_e| (1 - \cos 2\theta_e) \quad \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

なお、 μ は等ひずみ曲線の円からのずれの大きさを表す係数で、この場合には $\mu = 0.05$ である。図 10 は、これらの負荷におけるひずみベクトルの方向 θ_e と偏差応力ベクトルの方向 θ_a の差、 $\Delta\theta_e = \theta_e - \theta_a$ とひずみ量 ρ との関係を種々のひずみ方向 θ_e に対して示したものである。これらの関係を次式で近似し、これを図 10 に実線で示してある。

$$\Delta\theta_e(\text{deg}) = 17.8(\sin 2\theta_e)^3 \{(1 + \cos 4\theta_e) \\ \times \exp(-20.8\rho) + 0.197\} \quad \dots \dots \dots (2)$$



(a) 直線ひずみ経路に沿う負荷における相当応力-相当ひずみ関係



(b) 直線ひずみ経路に沿う負荷における等ひずみ曲線
図 9

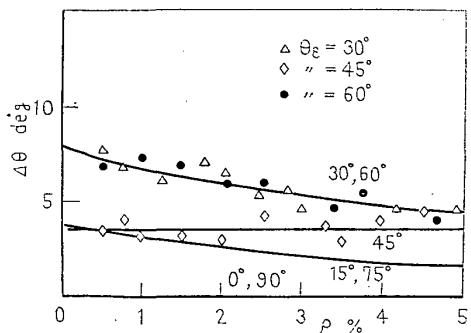


図 10 直線ひずみ経路に沿う負荷におけるひずみベクトルと応力ベクトルの方向差

次に、実際の降伏曲面の形状を、等方硬化的な考え方にもとづく降伏曲面⁽⁹⁾からのずれに着目して検討を行う。図 11 はそのモデルを示したもので、図中で $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)$ 応力平面上において原点 O から点 F , $|\vec{OF}| = \sigma_F(\theta_e)$, まで前負荷を与えた後の降伏曲面を実線で示してあり；等方硬化的な考え方にもとづく降伏曲面すなわち前負荷点 F を含むひずみ曲面を点線で示し、これを基準降伏曲面と呼ぶことにする。この材料については、先に述べたように、ひずみベクトルの方向と応力ベクトルの方向は一般には一致しない。そこで図には、座標軸 $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)$ のほかに、前負荷方向に対応する前ひずみ方向を軸 $O\xi_e$ にとった直交座標軸 (ξ_e, η_e) とこの座標軸 $O\xi_e, O\eta_e$ 方向のひずみに対応する応力の方向 $O\xi_o$ (前負荷方向) および $O\eta_o$ を座標軸とする斜交座標軸 (ξ_o, η_o) を記してある。ここで前負荷後の降伏曲面の形状特性を与える量として、前負荷方向 ($O\xi_o$ 方向) の降伏応力値 σ_Y 、その逆方向の降伏応力の基準降伏曲面からの低下量 σ_B 、前ひずみと直交するひずみ方向に対応する応力方向 ($O\eta_o$ 方向) の降伏応力の低下量 σ_C 、中心の移動量 σ_* 、の四つの値を考え、これらを以下のように定めた。 $\sigma_Y (=$

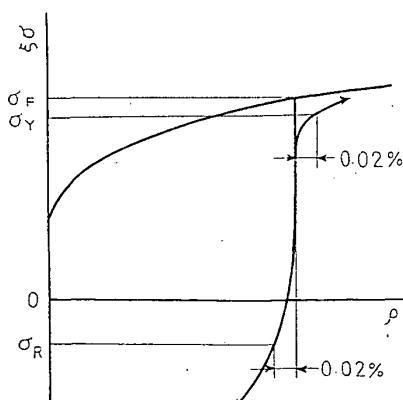
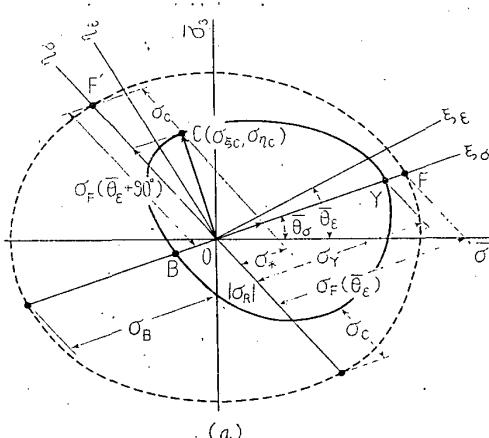


図 11 σ_X , σ_B , σ_C , σ_{π} の定義

$|\vec{OY}|$) は前負荷点 F より部分除荷し再度 \vec{OF} 方向に負荷した際の降伏応力値とする (これは、ほぼ前負荷応力値 σ_F に等しいとしてさしつかえなかった). 前負荷と逆方向の降伏応力値を $\sigma_R(|\sigma_R|=|\vec{OB}|)$ とするとき $\sigma_B = \sigma_F(\bar{\theta}_e) + \sigma_R$ と定める. 次に、前負荷後の降伏応力ベクトルの斜交座標系 $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ における η_α 成分が最大となる場合の降伏応力ベクトルを \vec{OC} とし、その ξ_α および η_α 座標軸方向の成分をそれぞれ $\sigma_{\xi C}$ および $\sigma_{\eta C}$ とする. すなわち $\vec{OC} = (\sigma_{\xi C}, \sigma_{\eta C})$. ここで、降伏曲面上の点 C は $O\xi_\alpha$ 軸と平行する直線との接点として定められる. また、 $O\eta_\alpha$ 方向の基準降伏曲面上の点を F' とすると $|\vec{OF}'| = \sigma_F(\bar{\theta}_e + 90^\circ)$ とかけるが、このとき σ_C, σ_* をそれぞれ $\sigma_C = \sigma_F(\bar{\theta}_e + 90^\circ) - \sigma_{\eta C}$, $\sigma_* = \sigma_{\xi C}$ で表す. 図 12 は σ_B と前ひずみ量 ρ の関係を前ひずみ方向 $\bar{\theta}_e$ に対して両対数平面上に示してある. この結果から σ_B を次式で近似した.

なお、式(3-a)の k, m は共に $\bar{\theta}_e$ の関数となってい
るので $\bar{\theta}_e = 90^\circ$ (単純せん断負荷) の場合のそれ
ぞれの値 (K_0 と m_0) を基準にとり

$$k(\bar{\theta}_\varepsilon) = \beta_1(\bar{\theta}_\varepsilon) k_0 \dots \quad \dots \quad (3.b)$$

とおいた。この材料についてはほぼ $\beta_1 = \beta_2$ となり、次式で近似できた。

図 13 の実線は $a_0=1.55$, $a_1=-0.845$, $a_2=0.296$ として上式を計算した結果である。次に σ_c , σ_* の値は共に σ_B に関する量と考え、これを次のようにおいた。

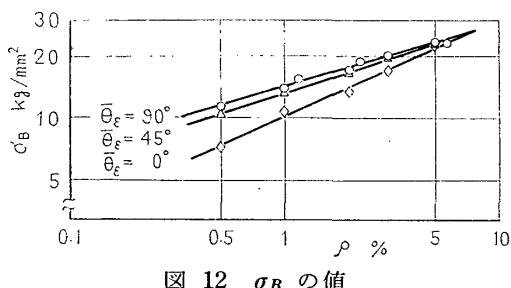


図 12 σ_B の値

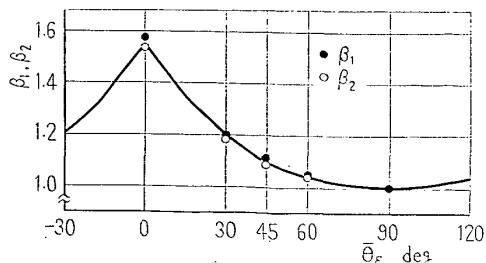


図 13 β_1, β_2 の値

図 14, 15 はそれぞれ $\bar{\theta}_e = 0^\circ, 90^\circ$ の場合の σ_B, σ_C , σ_* とひずみ量 ρ の関係を示したものである。これらは互いに等しいこう配をもつ直線で表されている。従って、この材料については γ と C は前ひずみ方向 $\bar{\theta}_e$ のみの関数となり、 γ は図 16 に示すように

$$\gamma(\bar{\theta}_\varepsilon) = b_0 + \sum_{i=1}^2 b_i |\sin(i\bar{\theta}_\varepsilon)|$$

$$b_0=0.304, \quad b_1=-0.120, \quad b_2=0.049 \quad \dots \dots \quad (4.b)$$

で近似し、また実験値より

とした。

4・2 軸方向負荷とねじりの組合せによる前負荷後の降伏条件の定式化 4・1 節での考察をもとに、軸

方向負荷とねじりの組合せによる直線ひずみ経路で前負荷を与えた後の降伏条件の定式化を行う。ここで考へている材料のように、軸方向負荷とねじりの相当

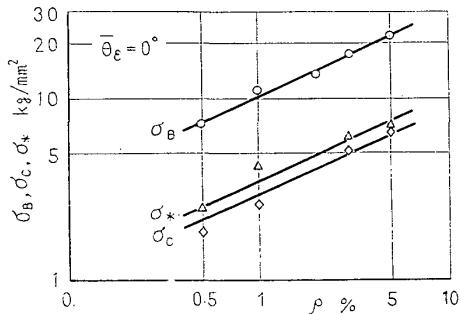


図 14 単軸引張り前負荷における σ_B , σ_C , σ_* の値

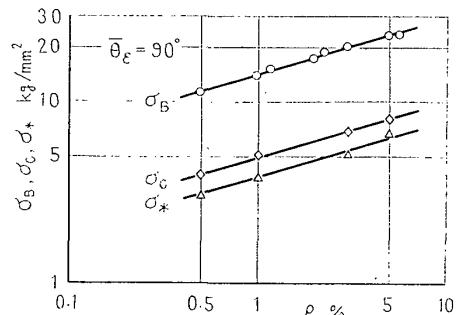


図 15 単純せん断前負荷における σ_B , σ_C , σ_* の値

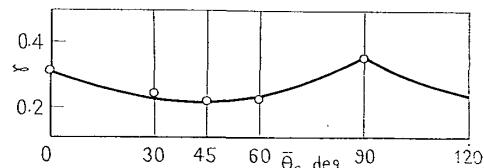


図 16 γ の値

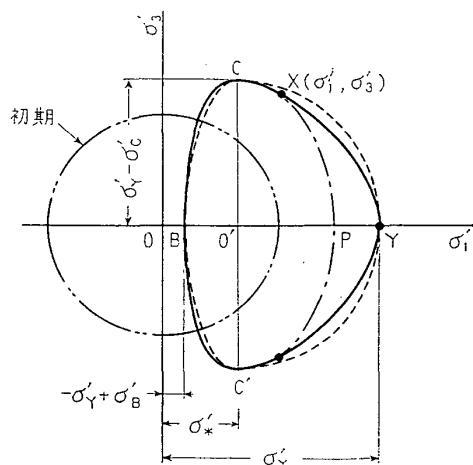
応力-相当ひずみ関係がミーゼス形の関係で一義的に整理できない場合には、前負荷による降伏曲面の変化は、ひずみ履歴だけでなく軸方向負荷とねじりの違いにも関係する。そこで、まず後者の影響が無いとした場合の降伏条件式の定式化を行い、それに軸方向負荷とねじりの違いをも表示した項を導入する。いま、軸方向負荷とねじりに違いのないとした場合の降伏曲面を (σ_1', σ_3') 平面上に表示するとすれば、この平面上で最初の降伏曲面は円で表せ、前負荷後の降伏曲面は前ひずみ量 ρ のみの関数となる。前負荷方向を常に σ_1' 軸方向に一致させ、降伏曲面上のある点をその点に対応するだ円上の1点として表し、このようなら円の形状を連続的に変化させることにより降伏曲面を次式のように表す。

$$\left(\frac{\sigma_1' - \sigma_*'}{\sigma_{Y'} - \zeta' \sigma_*'}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_{Y'} - \sigma_{C'}}\right)^2 = 1 \quad \dots \dots \dots (6 \cdot a)$$

$$\zeta' = \{(\sigma_{B'}/\sigma_*' - 2)/(2\sigma_{Y'} - \sigma_{B'})\}(\sigma_{Y'} - \sigma_1') + 1 \quad \dots \dots \dots (6 \cdot b)$$

図17の実線は式(6・a), (6・b)による前負荷後の降伏曲面である。例えば前負荷方向の降伏点Yは点O'を中心として|O'C'|および|O'Y'|を両軸とするだ円上の1点として表される。また降伏曲面上の任意の点X(σ_1', σ_3')は|O'C'|, |O'P'|を両軸とするだ円上の1点として表される(ここで|O'P'|は点Xの σ_1' の値によって決まる)。

次に、軸方向負荷とねじりの違いの影響がある $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)$ 平面上での降伏条件式は、この影響がないとした (σ_1', σ_3') 平面上で得た降伏曲面[式(6・a), (6・b)]を前ひずみ方向 $\bar{\theta}_e$ だけ剛体的に回転し、それを応力ベクトルと塑性ひずみベクトルの方向の不一致($\Delta\theta_{ed}$)および負荷方向による塑性流動応力値の違い $[\alpha(\theta_{ed})]$ を考慮して次式のように補正することによって得る。

図17 (σ_1', σ_3') 平面上の降伏曲面

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_3}\right) &= \alpha(\theta_{ed}) \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta_{ed} & \sin \Delta\theta_{ed} \\ -\sin \Delta\theta_{ed} & \cos \Delta\theta_{ed} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_e & -\sin \bar{\theta}_e \\ \sin \bar{\theta}_e & \cos \bar{\theta}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_3' \end{pmatrix} \dots \dots \dots (7 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\alpha(\theta_{ed}) = \sigma_Y(\theta_{ed})/\sigma_{Y'} \dots \dots \dots (7 \cdot b)$$

$$\Delta\theta_{ed} = \theta_{ed} - \theta_{ad} \dots \dots \dots (7 \cdot c)$$

$$\theta_{ed} = \bar{\theta}_e + \tan^{-1}(\sigma_3'/\sigma_1') \dots \dots \dots (7 \cdot d)$$

ここで θ_{ad} および θ_{ed} は $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)$ 平面上で降伏曲面を定める際の応力ベクトルの方向、および対応する塑性ひずみベクトルの方向である。

式(6)における $\sigma_{Y'}, \sigma_{B'}, \sigma_{C'}, \sigma_*'$ の値は、軸方向負荷とねじりの違いの影響がないとした場合のものであるから、軸方向負荷とねじりの違いの影響がある材料の降伏条件を式(6), (7)から導くには、この材料についてこれらの応力値を導いておく必要がある。 $\sigma_{Y'}$ には基準値として単純せん断負荷における値 $\sigma_{Yo} = \sigma_Y(90^\circ)$ を選ぶこととする。つぎに、 $\sigma_{B'}, \sigma_{C'}, \sigma_*'$ と $\sigma_B, \sigma_C, \sigma_*$ の関係は

$$\sigma_{B'} = \sigma_B / \alpha(\bar{\theta}_e) \dots \dots \dots (8 \cdot a)$$

$$\sigma_{C'} = \sigma_C / \alpha(\bar{\theta}_e + 90^\circ) \dots \dots \dots (8 \cdot b)$$

$$\sigma_*' = \sigma_* / \alpha(\bar{\theta}_e) \dots \dots \dots (8 \cdot c)$$

とする*。

図3～7の実線は、材料定数 $k_0 = 58.9 \text{ kg/mm}^2$, $m_0 = 0.311$, $C = 0.313$ と置いてこれらの式を用いて計算した結果を示す。計算した結果は、実際の比例前負荷後の降伏曲面に現れる前負荷方向における出っぱりとその逆方向における偏平さばかりでなく、軸方向負荷とねじりの違いからくる降伏曲面のゆがみもよく表している。また図8の実線は、折れ曲り直線ひずみ経路に沿って前負荷を与えた後の降伏曲面であるが、最終前ひずみ方向を式(7・a)におけるひずみ方向とし

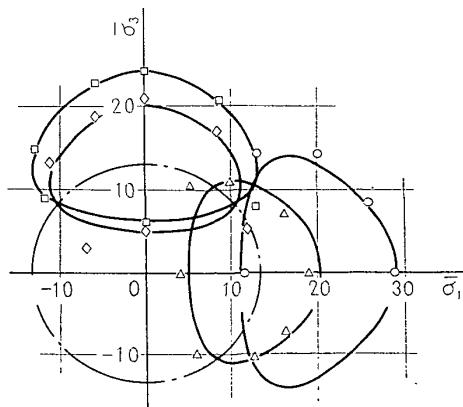


図18 黄銅材における前負荷後の降伏曲面

* 式(8・b)および(8・c)で定めた $\sigma_{C'}, \sigma_*'$ を用い式(7)で変換することにより $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3)$ 平面上でのこれらの値を求めると、これらは σ_C, σ_* と厳密には一致せず微小な差が生ずるが、これは無視している。

て計算した結果である。

軸方向負荷とねじりの塑性変形が、ミーゼス形の応力ひずみ関係で等価に表現できる場合には降伏曲面の形状は、前ひずみ量 ρ のみの関数としてもっと簡単に表すことができる。この場合には、前ひずみの方向 θ の関数として与えられていた α, β, γ はすべて定数 ($\alpha, \beta=1, \gamma$: 材料定数) となり、式(7-a)における $\Delta\theta_{ea}=0$ となり、材料定数 k, m, C, γ を定めることにより前負荷後の降伏曲面を定めることができる。こうした材料についての実験結果との比較の一例として、著者らが以前に発表した⁽¹⁾黄銅による降伏曲面との比較を図18に示してある。このときの材料定数の値は、 $k=81.5 \text{ kg/mm}^2, m=0.245, \gamma=0.375, C=0.411$ であった。

5. 結 論

本論文は、初期等方性を有していても軸方向負荷とねじりの応力ひずみ関係が、ミーゼス形の相当応力と相当ひずみでは等価に表現できないような材料としてアルミ合金の薄肉円筒を用い、種々の大きさと方向をもつ前ひずみを与え、そのときの降伏曲面の形状について実験的検討を行い、その定式化を行ったものである。

得られた主な結論は次のようである。

(1) 軸方向負荷とねじりの組合せによって直線前

ひずみを与えた後の降伏曲面の形状は、前ひずみ方向あるいは前負荷方向に対して対称とならずゆがみを生じた。

(2) 前ひずみ経路が直線的に折れ曲がるような場合には、折れ曲り以降の直線前ひずみが十分長ければ、前負荷後の降伏曲面の形状は、最終の前ひずみ方向に同一の前ひずみ量を直線ひずみ経路で与えた後の降伏曲面の形状とほぼ一致した。

(3) 塑性ひずみ増分ベクトルの降伏曲面に対する垂直性はほぼ成り立っている。

(4) 軸方向負荷とねじりの違いによる降伏曲面のゆがみをも表示しうる前負荷後の降伏条件式を導き、実験に用いた材料についてこの降伏曲面の具体形を定め、これが実験結果と比較的よく一致することを示した。

文 献

- (1) 白鳥・ほか2名, 機論, 39-318 (昭48-2), 458.
- (2) 白鳥・ほか2名, 機論, 40-331 (昭49-3), 671.
- (3) 大橋・ほか2名, 機論, 40-329 (昭49-1), 89.
- (4) 大橋・徳田, 機論, 39-317 (昭48-1), 95.
- (5) Williams, J.F. and Svensson, N.L., *J. Strain Analysis*, 5-2 (1970), 128.
- (6) Williams, J.F. and Svensson, N.L., *J. Strain Analysis*, 6-4 (1971), 263.
- (7) Ильюшин, А.А., ПММ, 18-6 (1954), 641.
- (8) Сутурин, И.Г., Исследования по упругости и пластичности, 6 (1967), 156.
- (9) Taylor, G.I. and Quinney, H., *Phil. J. Roy. Soc. Lond.*, Ser. A, 230 (1932), 323.

討 論

〔質問〕 井垣 久 (大阪府立大学工学部)

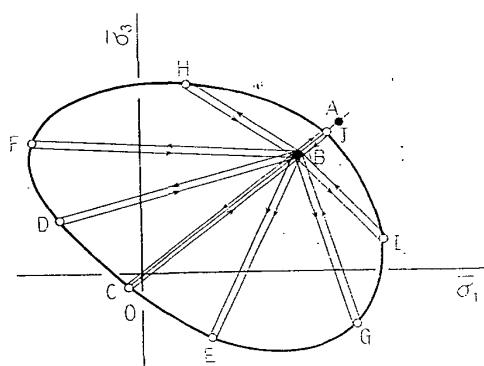
貴論文に示された実験結果の解釈および前負荷後の降伏曲面の定式化の一般性は、材料が初期等方性であるか、あるいは初期異方性を持っていたかによって変わってくるものと考える。貴論文では単軸引張りと内圧の応力-ひずみ曲線がほぼ一致していることから、実験に使用された材料は初期等方性を有していると結論されているが、試験片の軸方向(x 軸)と種々の角度(φ)をなす方向の引張りおよび圧縮の応力-ひずみ曲線を比較して、それらが一致しなければこのように結論することはできないのではないか。このような各方向の引張り(圧縮)は $\sigma_x : \sigma_y$ (円周方向応力) : $\tau_{xy} = \cos^2 \varphi : \sin^2 \varphi : \sin \varphi \cos \varphi$ となるように軸方向荷重、内圧(外圧)およびねじりを組合せることによって実現できると思う。ただし内圧(外圧)による肉厚方向の応力は無視してある。

〔回答〕 一般に材料の初期等方性を検証する場合

には、ご質問にあるとおり種々の方向の引張り(圧縮)の応力-ひずみ曲線を比較する必要がある。本実験では用いた素材が引き抜き材の丸棒なので、その予加工の方向より、焼なまし後にも材料に異方性が残っているとすれば、その主軸は試験片の軸方向(x)とその直角方向(y)になると思われる。従って応力-ひずみ曲線が最も大きく違う可能性があるこの2方向について特に調べ、それらが一致していることから初期等方性の検証とした。

〔質問〕 川島紘一郎 (名古屋大学教養部)

実際の塑性変形解析にこの論文で定式化された降伏条件を使用しようとするとき、降伏面の定義ひずみの値 0.02% は小さすぎるのではないか(例えば JIS Z 2241 では一般に 0.2% 残留ひずみに対する応力を耐力と定義している)。文献(1)の図 15~17 に示されるように、降伏ひずみの定義を 0.02% から 0.3% まで変えたとき降伏面の形状が著しく変化する場合に、



付図 1 実験による降伏曲面の定め方

この論文の式 (3-a)～(3-c), (4-a), (5-a) などは、比較的大きな定義ひずみの値（例えば 0.2%）に対しても、精度良く成立するか。

もし成立しないとすれば、定義ひずみ 0.02% について得られた結果はどのような意義を持つのか。

〔回答〕 本研究では実験による誤差を少なくできる範囲の、できる限り小さな定義ひずみとして 0.02% の相当塑性ひずみを採用した。その理由は(1)バウシンガー効果などの変形によって生ずる材料の異方性ができる限り精度よく表現する。(2)実験による降伏曲面の定め方は付図 1 に示すように、まず前負荷を点 A まで与えた後点 B まで部分除荷し($|\vec{OB}|/|\vec{OA}|=0.85$)ある方向の降伏点 C を \vec{BC} に沿って定め、次に \vec{BD} , \vec{BE} , … と連続して 1 本の試験片でひとつの降伏曲面を定めている⁽¹⁾。そのため、ある方向の降伏点（例えば点 C）を定めたときの負荷履歴が別の方向の降伏応力値（例えば $|\vec{OD}|$ ）に影響を与えないためである。また、0.02% 定義の降伏曲面を種々の負荷履歴に対して求め、これを塑性ポテンシャルと考えれば流動則を用いて塑性変形の解析を行うことができる（付1）。本研究はその第 1 段階として特に直線的なひずみ経路に沿う前負荷後の降伏曲面の定式化を行ったものである。なお、式 (3-a)～(3-d), (4-a), (5-a) などは材料定数 k_0 , m_0 の値は定義ひずみの大きさによって変化するが、基本的な関数形は同一のもので表すことができる。

(付1) 金子・ほか2名、機講論、No. 744-1 (昭49-3), 13.

る。

〔質問〕 大南正瑛（立命館大学理工学部）

(1) 本研究で指摘しておられる応力-ひずみ曲線に現れる単軸引張りと単純ねじりの違いの内容は、力学的にはどのように考えればよいか。また、応力主軸を固定した簡単なひずみ履歴（単軸引張りや単純ねじりなど）の場合、材料によって応力-ひずみ曲線間に違いがあるとすればそれはひずみ履歴（変形異方性などの）で力学的には十分説明されるようと思う。したがって、前負荷による降伏曲面の変化を広義のひずみ履歴（前負荷とそれに続く負荷時を含める）以外に軸負荷とねじりの違いを別個に降伏条件式の定式化のうえで補正されたことは、このような場合のひずみ履歴の影響を考慮されたと理解してよいか。

(2) 上記補正の影響 [式 (7-a)～(7-d)] は前負荷およびそれに続く負荷全体を通じて、一般には主軸を固定した場合、主軸を回転した場合に比べて相対的に小さくなると考えてよいか。

〔回答〕 (1) 本研究で示した応力-ひずみ曲線に現れる単軸引張りとねじりの違いは、あくまでもミーゼス形の相当応力-相当ひずみ関係を用いた場合のものである。初期等方性材料でも比例負荷の際の塑性流動条件が、応力テンソルの第 2 不变量 J_2 および第 3 不变量 J_3 によって $f(J_2, J_3)=0$ のように表される場合には、ミーゼス形の流動条件が J_2 しか表しえないため、ミーゼス形の相当応力-相当ひずみ関係ではみかけ上単軸引張りとねじりでは差がでてくる。またミーゼス形を前提とした等方平面 ($\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3$) 上では降伏曲面にゆがみが現れることになる。従って降伏条件式の定式化のうえでの補正は、ひずみ履歴に対してではなく J_3 の影響を考慮したものとなる。

(2) 降伏曲面の形状によよぼす J_3 の影響は、応力主軸の回転を伴わない場合（例えば軸方向負荷と内圧の組合せの場合）にも存在し、このときにも降伏条件式の定式化には補正が必要となる（付2）ので、補正の影響を応力主軸の回転によって一義的に評価することはできない。

(付2) 白鳥・ほか2名、機講論、No. 740-11 (昭49-11), 1.