Journées Équations aux dérivées partielles

Luc Robbiano

Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1991), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A7_0>

Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques

LUC ROBBIANO

UNIVERSITÉ DE PARIS-VAL DE MARNE

U.F.R. DE SCIENCES

AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE

94010 CRETEIL CEDEX

ET

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

91405 ORSAY CEDEX

CNRS ORSAY URA 760

0. Introduction.

La méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) développée par J.L. LIONS [7] permet d'étudier le contrôle des solutions d'équations aux dérivées partielles. Notre discussion se bornera au cas des équations hyperboliques. Le contrôle au sens le plus fort, c'est-à-dire l'existence de contrôle pour des données dans des espaces fonctionnels classiques (ici $L^2 \times H^{-1}$) a été résolu par BARDOS, LEBEAU et RAUCH [2]. Mais H.U.M. permet aussi de construire de façon implicite, des espaces de données pour lesquelles il existe un contrôle. Ce résultat repose sur un théorème d'unicité, (voir le théorème 3.1 de Lions). Ce théorème n'est démontré que dans deux cas, pour des opérateurs à coefficients analytiques, c'est alors une conséquence du théorème d'Holmgren et dans le cadre étudié par Bardos, Lebeau et Rauch.

Nous présentons, ici, ce théorème pour des opérateurs à coefficients peu réguliers. Notre méthode repose sur une idée de RAUCH et TAYLOR [8] reprise également par LERNER [6]. Essentiellement, ces auteurs démontrent le résultat suivant, si $u(t,x)$ est solution d'une équation hyperbolique $\left[D_t^2 - A(x,D_x)\right] u(t,x) = 0$ où A est elliptique, $A > 0$ et

$u(t,x) = 0$ pour tout $x \in B(0,r)$, $r > 0$ et tout $t \in \mathbf{R}$ alors $u = 0$ pour tout x et t.

La méthode est la suivante. Ils posent :

$$v_\lambda(s,x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t,x)\, dt \ .$$

On a :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad v_\lambda = 0$$

pour $(t,x) \in \mathbf{R} \times B(0,r)$.

On applique le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques, on obtient que $v_\lambda = 0$, ce qui implique que $u = 0$ car

$$v_\lambda(0,x) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} u(t,x) \ .$$

Notre théorème 1 est une version locale de ce résultat. On pose :

$$v_\lambda(s,x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t,x)\, dt$$

On a alors :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$$

et

$$v_\lambda = 0 \quad \text{pour} \ (t,x) \in]-T,T[\times B(0,r) \ .$$

Ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème d'unicité. Mais on reporte ceci dans une inégalité de Carleman, démontrée par HÖRMANDER [3], [4] ce qui permet de prouver que $v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$. En faisant tendre λ vers l'infini, cela implique que $u(t_0,x) = 0$.

1. Résultats.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$.

Soit $A(x,D_x)$ un opérateur elliptique

$$A(x,D_x) = \sum_{n \geq i,j \geq 1} a_{i,j}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} + a_0(x) \ .$$

$(a_{ij}(x))$ est une matrice réelle définie positive, et il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^n$,

$$C_2 \, |\xi|^2 \geq \sum_{n \geq i,j \geq 1} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_1 \, |\xi|^2 \ .$$

Les applications $a_{ij}(x)$ sont $C^1(\bar{\Omega})$, il existe donc une constante positive C_3 telle que $\left|\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x}\right| \leq C_3$ pour $x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i,j \leq n$.

Les applications a_j, $j = 0, \dots, n$ appartiennent à L^∞.

Soit $u(t,x)$ vérifiant :

$$D_t^2 u(t,x) - A(x, D_x) u(t,x) = 0$$

pour $(t,x) \in]-T,T[\times \Omega$.

On suppose que $u \in H^2_{\text{loc}}(]-T,T[\times\Omega)$ ou que $u \in C^0(]-T,T[, H^1_{\text{loc}}(\Omega)) \cap C'(]-T,T[, L^2_{\text{loc}}(\Omega))$. On suppose que :

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in]-T,T[\times B(x_0, r_0) \ ,$$

où $x_0 \in \Omega$, $r_0 > 0$ et $B(x_0, r_0) \subset \Omega$.

On note $|x - y|$ la distance euclidienne de $\mathbf{R}^n$ et $d(x,y)$ la distance géodésique dans Ω, pour la métrique euclidienne.

On note $D = \text{Sup}\,\{d(x_0, x), \text{pour } x \in \Omega\}$. On suppose que $D \neq +\infty$. (Il est facile de construire des ouverts connexes de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ vérifiant $D = +\infty$).

THÉORÈME 1. *Il existe un réel K strictement positif (K ne dépend que de C_1 et C_2) tel que si $T > KD$ alors*

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in]-T_1, T_1[\times \Omega \quad \text{ou} \quad T_1 = T - KD \ .$$

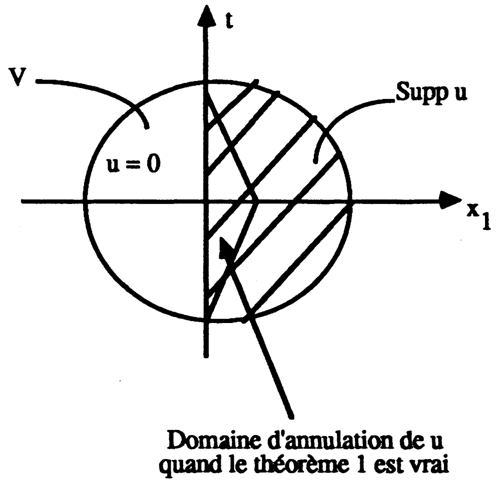
COMMENTAIRES :

i) Ce théorème peut être appliqué d'une manière purement locale. Pour T fixé on peut trouver un domaine de $]-T,T[\times \Omega$ sur lequel u s'annule. En particulier le théorème 1 est faux si A dépend de t. En effet, en prenant pour A le Laplacien positif le théorème d'ALINHAC [1] permet de trouver $u(t,x)$ et $a(t,x)$ des fonctions C^∞ vérifiant :

$$\left[D_t^2 - \Delta + a(t,x)\right] u(t,x) = 0$$

dans V un voisinage de $(t,x) = (0,0)$ et $\text{Supp}\, u = \{x_1 \geq -\delta\, |x'|^2\} \cap V$, où $x = (x, x')$, $\delta > 0$. Ce qui est contradictoire avec le théorème 1.

On résume la situation dans ce schéma.



ii) Quand A est à coefficients analytiques, (A peut alors dépendre de t), ce théorème est une conséquence du théorème d'Holmgren. Dans ce cas la constante K trouvée dans le théorème 1 est bien moins bonne que celle donnée par le théorème d'Holmgren.

iii) Ces deux remarques, et la méthode de démonstration suggèrent que l'analyticité par rapport à t est la bonne hypothèse pour obtenir le théorème 1.

iv) Ce théorème permet de résoudre un problème posé dans le livre de LAVRENTÈV, ROMANOV et SHISTATSKII [5], étudié par RAUCH et TAYLOR [8] et par LERNER [6]. La question est la suivante : si u vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + a(x,y)\,u = 0 \\ u \,\big|_{x<0} = 0 \ , \end{cases}$$

a-t-on $u = 0$?

Lerner a donné une réponse positive à cette question si les hypothèses sont globales sur $\mathbf{R}^2_{(x,y)} \times \mathbf{R}_t$. Le théorème 1 donne une réponse positive si les hypothèses sont locales en (x, y, t).

Ce type de résultat permet d'aborder le problème de détermination d'une source connaissant le signal reçu. Ainsi le cas $a \equiv 0$ a été étudié par SYMES [9].

Bibliographie

[1] S. ALINHAC : *Non unicité du problème de Cauchy,* Annals of Mathematics, 117 **(1983)**, 77-108.

[2] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : Annexe livre de J.L. LIONS [7].

[3] L. HÖRMANDER : *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin, **1963**.

[4] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators,* Springer Verlag.

[5] M.M. LAVRENTÈV, V.G. ROMANOV, S.P. SHISHATSKII : *Ill-posed problems in mathematical physics and analysis,* in "Translations of Mathematical Monograph", Vol. 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[6] N. LERNER : *Uniqueness for an ill-posed problem,* Journal of Differential Equations, 71, **(1988)**, 255-260.

[7] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués,* T. 1 : Contrôlabilité exacte, Masson.

[8] J. RAUCH, M. TAYLOR : *Penetrations in shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems,* Indiana Univ. Math. J., 22, **(1972)**, 277-285.

[9] W. SYMES : *A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources,* Math. Meth. in the Appl. Sci., 5, **(1983)**, 131-152.