Théorème de Hoffmann-Jorgensen et application aux amarts multivoques (*).

C. Castaing - A. Touzani - M. Valadier

Résumé – *On présente ici des versions univoques et multivoques d'un résultat de Hoffmann-Jorgensen* ([10]). *Ces résultats permettent d'étendre les résultats obtenus antérieurement par Uhl* ([23]), *Musial* ([17]), *Luu* ([16]) *aux amarts multivoques à valeurs convexes compactes d'un espace localement convexe séparé complet.*

0. – Introduction.

Ce travail comporte deux parties. Dans le paragraphe 1, on présente d'abord le théorème de Hoffmann-Jorgensen ([10]) dans le cas des espaces localement convexes (cf. Theor. 1). On en déduit une version multivoque de ce résultat (cf. coroll. 4). Enfin on donne une caractérisation des ensembles précompacts de bornés d'un espace localement convexe séparé X par une condition exprimée dans X.

La deuxième partie donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un amart multivoque à valeurs convexes compactes d'un espace localement convexe séparé X soit de Cauchy pour la structure uniforme de Pettis définie à partir des semi-normes sur X (cf. Theor. 10).

PREMIÈRE PARTIE

1. – Théorème de Hoffmann-Jorgensen, cas univoque et multivoque.

Notations préliminaires. – *a*) Soit Ω un ensemble, Σ une algèbre de parties de Ω. On note ba (Ω, Σ) l'espace vectoriel des mesures réelles bornées finiment additives sur Σ et $\text{ba}_+(\Omega, \Sigma)$ son cône positif. Si $\mu \in \text{ba}_+(\Omega, \Sigma)$ et si ν est réelle finiment additive (pas forcément bornée), on dit que ν est μ-continue (on précise par-

(*) Entrata in Redazione il 3 gennaio 1985.
Indirizzo degli AA.: Univ. des Sciences et Techniques du Languedoc - Mathématiques, Place E. Bataillon, 34060 Montpellier, Cedex, France.

fois dans la littérature au sens $\varepsilon - \delta$) si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \Sigma, \quad \mu(A) \leqslant \delta \Rightarrow |\nu(A)| \leqslant \varepsilon .$$

b) On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des partitions finies de Ω en éléments de Σ.

c) Pour $\mu \in \mathrm{ba}\,(\Omega, \Sigma)$ et φ fonction réelle Σ-étagée sur Ω, on définie sans ambiguité $\int \varphi\, d\mu$: si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{A_i}$, $\int \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i \mu(A_i)$. Cela reste valable lorsque, soit φ, soit μ, est à valeurs vectorielles.

d) Soit $\mathfrak{X}$ un espace localement convexe séparé et $\mathfrak{Q}$ un ensemble de seminormes définissant la topologie de $\mathfrak{X}$.

THÉORÈME 1. – *Soit $\mu \in \mathrm{ba}_+ (\Omega, \Sigma)$, $m\colon \Sigma \to \mathfrak{X}$ une mesure finiment additive. On suppose que $\forall p \in \mathfrak{Q}$, il existe une partie Z_p de $\mathfrak{X}'$ telle que $\forall x' \in Z_p$, $x' \circ m$ soit μ-continue et que*

$$\forall x \in \mathfrak{X}, \quad p(x) = \sup \{\langle x', x\rangle : x' \in Z_p\} .$$

Alors on a équivalence de:

(i) $\{m(A) : A \in \Sigma\}$ *est précompact.*

(ii) $\forall p \in \mathfrak{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, *il existe $\pi \in \mathcal{F}$ telle que la fonction étagée $f = \sum_{E \in \pi} \big(m(E)/\mu(E)\big)\chi_E$ (avec la convention $0/0 = 0$) vérifie*

$$\forall A \in \Sigma, \quad p\Big(\int_A f\, d\mu - m(A)\Big) \leqslant \varepsilon .$$

REMARQUE. – Si $\mathfrak{X}$ est un espace vectoriel normé on peut remplacer (ii) par

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists \pi \in \mathcal{F} \quad \text{telle que} \quad f = \sum_{E \in \pi} \frac{m(E)}{\mu(E)} \chi_E$$

vérifie $\forall A \in \Sigma$, $\|\int_A f\, d\mu - m(A)\| \leqslant \varepsilon$.

En prenant f_n associée à $\varepsilon = 1/n$, on obtient une suite de « densités approximatives » de m par rapport à μ. Pour $\mathfrak{X}$ localement convexe on a seulement une suite généralisée de densités approximatives.

COMMENTAIRE. – Ce théorème est à quelques détails près l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iv) du théorème 9 de HOFFMANN-JORGENSEN ([10], pp. 21-22). Voici les différences:

1) On suppose $m(\Sigma)$ précompact au lieu de relativement compact et on ne suppose pas $\mathfrak{X}$ quasi-complet.

2) On se donne μ. Dans [10] (i) équivaut à $\forall p \in \mathfrak{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \pi \in \mathfrak{I}$ et il existe une mesure $\mu \in \mathrm{ba}_+(\Omega, \Sigma)$ (notée a) telle que

$$f = \sum_{E \in \pi} \frac{m(E)}{\mu(E)} \chi_E \quad \text{vérifie} \quad \forall A,\ p\left(\int_A f\, d\mu - m(A)\right) \leqslant \varepsilon .$$

3) On introduit des Z_p, qui sont forcément contenus dans les polaires $\{p \leqslant 1\}^0$ mais qui peuvent être plus petits, pour que le cas multivoque soit un corollaire du th. 1 (coroll. 4 ci-après).

RAPPELS NÉCESSAIRES À LA DÉMONSTRATION. – 1) On désigne par $\mathcal{S}(\Omega, \Sigma)$ l'espace vectoriel normé des fonctions réelles Σ-étagées sur Ω muni de la norme de la convergence uniforme. Son dual s'identifie à ba (Ω, Σ) (DUNFORD-SCHWARTZ [8], th. IV.5.1, p. 258) muni de la norme $v(\cdot, \Omega)$ (variation sur Ω). Cette norme est équivalente à la norme

$$\lambda \mapsto |\lambda| = \sup_{A \in \Sigma} |\lambda(A)| \qquad (\text{ibid. III.1.5, p. 97}) .$$

2) Pour $\mu \in \mathrm{ba}_+(\Omega, \Sigma)$ on note ba (Ω, Σ, μ) l'ensemble des $\lambda \in \mathrm{ba}(\Omega, \Sigma)$ qui sont μ-continues. Pour $\pi \in \mathfrak{I}$ on définit U_π: ba $(\Omega, \Sigma, \mu) \to$ ba (Ω, Σ, μ) par

$$(U_\pi \lambda)(A) = \sum_{E \in \pi} \frac{\lambda(E)}{\mu(E)} \mu(A \cap E) \qquad \left(\text{avec la convention } \frac{0}{0} = 0\right)$$

$$= \int_A \left(\sum_{E \in \pi} \frac{\lambda(E)}{\mu(E)} \chi_E\right) d\mu .$$

Soit π et π' appartenant à $\mathfrak{I}$. On dit que π est plus fine que π' si $\forall A \in \pi$, $\exists A' \in \pi'$ tel que $A \subset A'$. Pour cette relation d'ordre $\mathfrak{I}$ est filtrant croissant. Dans le lemme suivant la limite est prise pour cet ordre sur $\mathfrak{I}$.

LEMME 2. – *Soit K une partie de* ba (Ω, Σ, μ); *K est relativement compact si et seulement si K est borné et*

$$\lim U_\pi \lambda = \lambda \quad \textit{uniformément en} \quad \lambda \in K .$$

Ce lemme est une variante de l'exercice IV.13.19 de DUNFORD-SCHWARTZ [8], p. 340 (dans l'exercice μ n'est pas donnée). Dans [3] BROOKS (th. 1, p. 992) démontre l'extension de ce résultat à des mesures vectorielles.

3) On a besoin d'un résultat plus général que le théorème de Schauder sur le transposé d'un opérateur compact d'un Banach dans un autre.

LEMME 3. – *Soit E un espace vectoriel normé, $\mathfrak{X}$ un localement convexe séparé et $T: E \to \mathfrak{X}$ linéaire ayant un transposé $T^*: \mathfrak{X}' \to E'$. Soit B la boule unité de E. Si $T(B)$ est précompact dans $\mathfrak{X}$, alors $\forall H$ partie équicontinue de $\mathfrak{X}'$, $T^*(H)$ est relativement compact dans E' muni de la norme.*

Cet énoncé est un cas particulier de GROTHENDIECK [9], th. 12, p. 121 ou de ROBERTSON-ROBERTSON [19], lemme 6, p. 152.

4) Soit $m: \Sigma \to \mathfrak{X}$ finiment additive scalairement bornée et

$$I \left| \begin{array}{l} \mathcal{S}(\Omega, \Sigma) \to \mathfrak{X} \\ \varphi \mapsto \int \varphi \, dm \, . \end{array} \right.$$

Alors I possède le transposé

$$I^* \left| \begin{array}{l} \mathfrak{X}' \to \mathrm{ba}\,(\Omega, \Sigma) \\ x' \mapsto x' \circ m \, . \end{array} \right.$$

5) Avec les notations du 4), si $B_+ = \{\varphi \in \mathcal{S}(\Omega, \Sigma): \|\varphi\| \leqslant 1 \text{ et } \varphi \geqslant 0\}$ on a $I(B_+) = \mathrm{co}\,\{m(A): A \in \Sigma\}$: c'est le lemme 7, p. 19 de Hoffmann-Jorgensen.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. – (i) $\Rightarrow$ (ii).

1) On va appliquer le lemme 3 avec $E = \mathcal{S}(\Omega, \Sigma)$, $T = I$. Montrons que I transforme la boule unité B de $\mathcal{S}(\Omega, \Sigma)$ en partie précompacte de $\mathfrak{X}$. Par hypothèse $\{m(A): A \in \Sigma\}$ est précompact. Son enveloppe convexe égale à $I(B_+)$ (rappel 5)) est encore précompacte (BOURBAKI [2], ch. II, § 4, prop. 3, p. 69 de l'édition de 1966 ou p. II.27 de l'édition de 1981). Enfin $I(B) = I(B_+) - I(B_+)$ est précompact.

2) Remarquons que m est bornée, ce qui assure $\forall x'$, $x' \circ m$ est bornée donc $x' \circ m \in \mathrm{ba}\,(\Omega, \Sigma)$. On a déjà remarqué que $Z_p \subset \{p \leqslant 1\}^0$, donc Z_p est équicontinue. D'après le lemme 3, pour $p \in \mathcal{Q}$,

$$K = I^*(Z_p) = \{x' \circ m: x' \in Z_p\}$$

est relativement compact dans ba (Ω, Σ, μ). D'après le lemme 2, $U_\pi \lambda \to \lambda$ uniformément sur K. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\pi \in \mathcal{T}$ telle que $\forall x' \in Z_p$,

$$|U_\pi(x' \circ m) - x' \circ m| \leqslant \varepsilon \, .$$

Posons

$$f = \sum_{E \in \pi} \frac{m(E)}{\mu(E)} \chi_E \, .$$

On a

$$|U_\pi(x'\circ m) - x'\circ m| = \sup_{A\in\Sigma} |U_\pi(x'\circ m)(A) - x'\circ m(A)| =$$
$$= \sup_{A\in\Sigma}\left|\sum_{E\in\pi}\frac{x'\circ m(E)}{\mu(E)}\,\mu(A\cap E) - x'\circ m(A)\right| = \sup_{A\in\Sigma}\left|\langle x', \int_A f\,d\mu - m(A)\rangle\right| .$$

Comme cela est $\leqslant\varepsilon$ pour tout $x'\in Z_p$, on a

$$\sup_{A\in\Sigma} p\left(\int_A f\,d\mu - m(A)\right)\leqslant\varepsilon .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fixons $p\in\mathcal{Q}$, $\varepsilon>0$ et soit f donnée par (ii). Comme f est Σ-étagée, la mesure vectorielle $A\mapsto\int_A f\,d\mu$ prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie et est bornée (on a

$$\left|\langle x', \int_A f\,d\mu\rangle\right|\leqslant \sup |\langle x', f(\omega)\rangle|\mu(\Omega)) .$$

Par conséquent il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathfrak{X}$ tels que les p-semi-boules (ouvertes) de centres x_i de rayon ε recouvrent $\{\int_A f\,d\mu\colon A\in\Sigma\}$. D'après (ii) les p-semi-boules de centres x_i de rayon 2ε recouvrent $\{m(A)\colon A\in\Sigma\}$.

Avant de formuler le cas multivoque, il faut encore quelques

NOTATIONS ET RAPPELS. – 1) Notons $cfb(\mathfrak{X})$ l'ensemble des convexes fermés bornés non vides de $\mathfrak{X}$. C'est un cône pour les lois:

$$(B_1, B_2)\mapsto B_1 \dotplus B_2 = \overline{B_1 + B_2}$$
$$(\lambda, B)\mapsto \lambda B(\lambda\in[0, \infty[) .$$

2) Pour $p\in\mathcal{Q}$ l'écart de Hausdorff sur $cfb(\mathfrak{X})$ correspondant à p, noté h_p, est défini par

$$h_p(B_1, B_2) = \max\left(e_p(B_1, B_2), e_p(B_2, B_1)\right) ,$$

où $e_p(B_1, B_2)$ est l'excès de B_1 sur B_2 et égal à

$$\sup_{x_1\in B_1}\ \inf_{x_2\in B_2} p(x_1 - x_2) .$$

3) L'espace de Hörmander $\mathcal{H}$ est l'espace localement convexe séparé, complet des fonctions réelles sur $\mathfrak{X}'$ positivement homogènes dont les restrictions aux parties équicontinues sont bornées et fortement continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues (CASTAING-VALADIER [6], p. 50).

4) Notons $\delta^*(\cdot|C)$ la fonction d'appui d'une partie C de $\mathfrak{X}$. Le cône $cfb(\mathfrak{X})$ s'injecte dans $\mathcal{H}$ en posant $i(B) = \delta^*(\cdot|B)$.

L'injection i établit un isomorphisme algébrique et d'espace uniforme entre $cfb(\mathfrak{X})$ et son image: on a

$$i(B_1 \dotplus B_2) = i(B_1) + i(B_2)$$

$$i(\lambda B) = \lambda i(B)$$

$$h_p(B_1, B_2) = \sup_{x' \in \{p \leq 1\}^0} |\delta^*(x'|B_1) - \delta^*(x'|B_2)|$$

(pour la dernière formule cf. CASTAING-VALADIER [6], th. II.18, p. 49).

COROLLAIRE 4. – *Soit $\mu \in \mathrm{ba}_+(\Omega, \Sigma)$, $M: \Sigma \to cfb(\mathfrak{X})$ une multimesure finiment additive telle que $\forall x' \in \mathfrak{X}'$, $\delta^*(x'|M(\cdot))$ soit μ-continue. On a équivalence de*

(i) $\{M(A): A \in \Sigma\}$ *est précompact dans* $cfb(\mathfrak{X})$.

(ii) $\forall p \in \mathfrak{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, *il existe $\pi \in \mathcal{F}$ telle que la multifonction étagée* $F = \sum_{E \in \pi} (M(E)/\mu(E))\chi_E$ *vérifie*

$$\forall A \in \Sigma, \quad h_p\Big(\int_A F\, d\mu,\ M(A)\Big) \leq \varepsilon\,.$$

HISTORIQUE. – ALO, DE KORVIN, ROBERTS [1] donnent une condition suffisante sur $\mathfrak{X}$ pour que toute multimesure M ait des densités approximatives. Dans la démonstration de son th. 3.6 LUU [13] applique rapidement le théorème univoque de HOFFMANN-JORGENSEN au cas multivoque (dans le cas d'un Banach). TOUZANI [21], [22] détaille les démonstrations du cas multivoque y compris l'exercice de DUNFORD-SCHWARTZ (lemme 2).

PREUVE. – *a*) Posons $m = i \circ M$, ainsi m est une mesure univoque à valeurs dans $\mathcal{H}$. On va appliquer le théorème 1. Posons pour $p \in \mathfrak{Q}$, $N_p(s) = \sup_{x' \in p \leq \{1\}^0} s(x')$. Les $N_p(p \in \mathfrak{Q})$ sont des semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{H}$. Pour $x' \in \mathfrak{X}'$ soit $l_{x'} \in \mathcal{H}'$ définie par $l_{x'}(s) = s(x')$. Posons $Z_{N_p} = \{l_{x'}: x' \in \{p \leq 1\}^0\}$.

On a $\forall p$, $\forall l_{x'} \in Z_{N_p}$,

$$l_{x'} \circ m = (i \circ M)(x') = \delta^*(x'|M(\cdot))$$

donc $l_{x'} \circ m$ est μ-continue.

On a aussi

$$\forall s \in \mathcal{H}, \quad N_p(s) = \sup_{x' \in \{p \leq 1\}^0} s(x') = \sup_{l \in Z_{N_p}} \langle l, s \rangle\,.$$

b) La relation (i) équivaut à $\{m(A): A \in \Sigma\}$ est précompact dans $\mathcal{H}$. D'après le th. 1, cela équivaut à $\forall p \in \mathcal{Q}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \pi \in \mathcal{T}$ telle que

$$f = \sum_{E \in \pi} \frac{m(E)}{\mu(E)} \chi_E$$

vérifie

$$\forall A \in \Sigma, \quad N_p\Big(\int_A f \, d\mu - m(A)\Big) \leqslant \varepsilon .$$

Posons

$$F = \sum_{E \in \pi} \frac{M(E)}{\mu(E)} \chi_E ,$$

on a

$$f(\omega) = i(F(\omega)) \qquad \text{et} \qquad \int_A f \, d\mu = i\Big(\int_A F \, d\mu\Big) .$$

Enfin

$$N_p\Big(\int_A f \, d\mu - m(A)\Big) \leqslant \varepsilon$$

équivaut à

$$h_p\Big(\int_A F \, d\mu, \; M(A)\Big) \leqslant \varepsilon .$$

On a montré (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

REMARQUE. – On a introduit les Z_p dans le th. 1 pour ce corollaire. En effet si $\forall x' \in \mathcal{X}'$, $\delta^*(x'|M(\cdot))$ est μ-continue, on ne sait pas si $\forall l \in \mathcal{K}'$, $l \circ m$ est μ-continue (avec $m = i \circ M$). Cette dernière condition serait vérifiée si on supposait

$$\forall p, \; \forall \varepsilon, \; \exists \delta > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \mu(A) \leqslant \delta \Rightarrow h_p(M(A), \{0\}) \leqslant \varepsilon .$$

Il reste maintenant à caractériser les parties $\mathcal{A}$ de $cfb(\mathcal{X})$ qui sont précompactes. On a un résultat positif et un « négatif ».

PROPOSITION 5. – *Si $\mathcal{A}$ est une partie de $cfb(\mathcal{X})$ formée de parties précompactes de $\mathcal{X}$ on a*

$$\mathcal{A} \text{ précompact} \Leftrightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \text{ est précompact dans } \mathcal{X} .$$

PREUVE. – *a*) Dans le sens $\Rightarrow$. Soit $p \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon > 0$. Il existe $B_1, \dots, B_n$ dans $\mathcal{A}$ tels que les h_p-semi-boules de centres B_i de rayon $\varepsilon/2$ recouvrent $\mathcal{A}$. Pour chaque i, il existe $x_i^1, \dots, x_i^{k_i}$ tels que p-semi-boules de centres x_i^j de rayon $\varepsilon/2$ recouvrent B_i. Alors les p-semi-boules de centres les x_i^j (en prenant tous les i et tous les j) de rayon ε recouvrent $\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$.

b) Dans le sens $\Leftarrow$. Soit $p \in \mathcal{Q}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $x_1, \dots, x_n$ appartenant à $K = \bigcup\{B \colon B \in \mathcal{A}\}$ tels que les p-semi-boules de centres x_i de rayon ε recouvrent K. Si $B \in \mathcal{A}$ soit $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \colon B \cap B_p(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ où $B_p(x_i, \varepsilon)$ désigne la p-semi-boule de centre x_i de rayon ε. Soit $C = \{x_i \colon i \in I\}$. On a $e_p(C, B) \leqslant \varepsilon$ et aussi

$e_p(B, C) \leqslant \varepsilon$, car si $x \in B$ l'un des x_i vérifie $p(x_i - x) \leqslant \varepsilon$, donc $i \in I$ et $x_i \in C$. Par conséquent K est recouvert par les semi-boules $B_{N_p}(C, \varepsilon)$, C parcourant l'ensemble des parties finies de $\{x_1, \dots, x_n\}$.

REMARQUE. – On ne peut pas dire que cette proposition soit très nouvelle. Dans CASTAING VALADIER ([6] remark après le th. II.4, p. 41) l'implication $\Leftarrow$ est traitée pour un espace métrique. Le cas de compacts d'un espace topologique (sans structure uniforme) est traité dans CHRISTENSEN ([7], th. 3.1, p. 51) et dans KLEIN et THOMPSON ([12], prop. 2.3.2, p. 16 et th. 2.3.4, p. 17).

Venons en au résultat « négatif ».

Exemple montrant *qu'il est faux que si $B_0 \in cfb(\mathfrak{X})$ et $K \in cfb(\mathfrak{X})$ avec K compact, et $\mathcal{A} \subset cfb(\mathfrak{X})$ vérifie $\forall B \in \mathcal{A}$, $B \subset B_0 + K$ et $B_0 \subset B + K$ alors $\mathcal{A}$ est précompact.*

Soit $\mathfrak{X} = l^2(\boldsymbol{N})$, (e_n) la base canonique,

$$B_0 = \{x \colon x_0 = 0,\ \|x\| \leqslant 1\}, \qquad K = [-e_0, e_0] = \{\lambda e_0 \colon \lambda \in [-1, 1]\}.$$

Alors $\mathcal{A} = \{B \in cfb(l^2) \colon B \subset B_0 + K \text{ et } B_0 \subset B + K\}$ n'est pas précompact. En effet $\mathcal{A}$ contient les C_k $(k \geqslant 1)$ définie par $C_k = \left\{x \colon x_0 = x_k,\ \sum_{l=1}^{\infty} x_l^2 \leqslant 1\right\}$. Vérifions $C_k \subset B_0 + K$: si $x \in C_k$

$$x = (0, x_1, x_2, \dots) + (x_k, 0, 0, \dots) \in B_0 + K$$

et vérifions $B_0 \subset C_k + K$ si:

$$y \in B_0, \qquad y = (y_k, y_1, y_2, \dots) + (-y_k, 0, 0, \dots) \in C_k + K.$$

Or pour $k \neq j$, $h(C_k, C_j)$ est une constante > 0, ce qui prouve que $\mathcal{A}$ n'est pas précompact.

Il semble difficile de caractériser les ensembles précompacts de bornés de X par une condition exprimée dans X.

DEUXIÈME PARTIE

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE UHL AUX AMARTS MULTIVOQUES

2. – Notations. Définitions.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $\mathfrak{X}$ un e.l.c. séparé complet (quasi-complet suffirait) tel qu'existent une suite dans $\mathfrak{X}'$ séparant les points de $\mathfrak{X}$ et une suite dans $\mathfrak{X}$ séparant les points de $\mathfrak{X}'$.

On note $\mathfrak{Q}$ un ensemble de semi-normes définissant la topologie de $\mathfrak{X}$.

On note $\mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$ l'ensemble des convexes non vides faiblement compacts de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$ formé des compacts pour la topologie donnée sur $\mathfrak{X}$.

Soit $X\colon \Omega \to \mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$ scalairement intégrable. Posons pour $A \in \mathcal{F}$:

$$I_A(X) = \left\{\xi \in \mathfrak{X}'^* \middle| \forall x' \in \mathfrak{X}',\ \langle x', \xi\rangle \leqslant \int_A \delta^*\big(x' | X(\omega)\big) P(d\omega)\right\},$$

en abrégé, s'il n'y a pas ambiguité, I_A. On note $\mathcal{S}(X)$ l'ensemble des sections scalairement mesurables de X. Il résulte de Valadier ([24], th. 3, et dans le même sens Castaing Valadier [5], 1) du th. 3) que, si $\forall A \in \mathcal{F}$, $I_A \subset \mathfrak{X}$, alors I_A est égal à $\left\{\int_A f\, dP \colon f \in \mathcal{S}(X)\right\}$ et appartient à $\mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$. On notera alors $\int_A X\, dP$ au lieu de I_A. On dit alors que X est *Pettis-intégrable*.

Commentaire. – On peut donner des conditions suffisantes, en particulier l'hypothèse $\mathfrak{X}$ semi-réflexif, assurant $I_A \subset \mathfrak{X}$ (Valadier [24]). Cela paraît excessif. Pour le présent papier, il est préférable de faire porter les hypothèses sur X.

On dit que X est *intégralement bornée* si $\forall p \in \mathcal{Q}$, $\sup_{x \in X(\omega)} p(x)$ est majoré par une fonction intégrable (remarquer que $\sup_{x \in X(\omega)} p(x) = \sup_{x \in B_p^0} |\delta^*(x'|X(\omega))|$).

On dit que X est *fortement intégrable* si elle est Pettis-intégrable, intégralement bornée, à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et si Y définie par $Y(\omega) = \operatorname{co}\big(X(\omega) \cup \{0\}\big)$ vérifie $\forall A \in \mathcal{F}$, $I_A(Y) \subset \mathfrak{X}$. (Remarquer que Y est scalairement intégrable à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et intégralement bornée, donc l'hypothèse $I_A(Y) \subset \mathfrak{X}$ implique que Y est fortement intégrable.)

Commentaire. – *Cas où $\mathfrak{X}$ est un Banach séparable.*

Dès que $X\colon \Omega \to \mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$ est scalairement intégrable et intégralement bornée, $\mathcal{S}(X)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1_{\mathfrak{X}}$ et est (du moins l'ensemble des classes d'équivalence pour l'égalité p.p.) $\sigma(L^1_{\mathfrak{X}}, L^\infty_{\mathfrak{X}'_s})$ compact (Klei [11], th. 2.6, p. 38. Repose sur le théorème de James-Pryce). Par suite $\left\{\int_A f\, dP \colon f \in \mathcal{S}(X)\right\}$ appartient à $\mathcal{K}^w(\mathfrak{X})$. Si de plus X est à valeurs dans $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$, Castaing [4] a montré en utilisant Banach-Dieudonné que

$$\left\{\int_A f\, dP \colon f \in \mathcal{S}(X)\right\} \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}).$$

Remarquer que si on pose $Y(\omega) = \operatorname{co}\big(X(\omega) \cup \{0\}\big)$, Y vérifie toutes les hypothèses ci-dessus.

Il résulte des théorèmes 1, 2, 3 de Valadier [24] que I_A est ici égal à $\left\{\int_A f\, dP\colon f \in \mathcal{S}(X)\right\}$, mais il est bien évident qu'un exposé limité au cas $\mathfrak{X}$ Banach séparable ne nécessiterait pas du tout l'introduction de I_A.

3. – Résultats préliminaires.

LEMME 6. – *Si X est fortement intégrable, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\int_A X\, dP \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et $\bigcup\left\{\int_A X\, dP\colon A \in \mathcal{F}\right\}$ est relativement compact.*

PREUVE. – CASTAING ([4] repris dans CASTAING-VALADIER [6], th. V.15) a montré, en utilisant un lemme du type Banach-Dieudonné (CASTAING-VALADIER [6], lemme V.8, cf. aussi PALLU DE LA BARRIÈRE [18]) que $\int_A X\, dP$ est compact (remarquer que l'existence d'une suite dans $\mathfrak{X}$ séparant les points de $\mathfrak{X}'$ assure la $\sigma(\mathfrak{X}', \mathfrak{X})$ métrisabilité des parties équicontinues). On a $\int_A X\, dP \subset \int_A Y\, dP \subset \int_\Omega Y\, dP$ (car $0 \in Y(\omega)$). Comme $\int_\Omega Y\, dP$ est lui aussi compact

$$\bigcup\left\{\int_A X\, dP\colon A \in \mathcal{F}\right\} \quad \text{est relativement compact}.$$

REMARQUE. – Pour $\mathfrak{X}$ Banach et X univoque, on sait que $\left\{\int_A X\, dP\colon A \in \mathcal{F}\right\}$ est relativement compact car X est Bochner-intégrable. MUSIAL [17] qui travaille avec la Pettis-intégrabilité est obligé de supposer ses mesures ν_n à images compactes (prop. 2, p. 328).

DÉFINITION. – Soit X et Y fortement intégrables, $p \in \mathfrak{Q}$, on appelle *écart de Pettis* (*associé à* p) *entre X et Y* le nombre fini

$$H_p^w(X, Y) = \sup_{x' \in B_p^0} \int_\Omega |\delta^*(x'|X(\omega)) - \delta^*(x'|Y(\omega))| P(d\omega)\,.$$

(Remarquer que la fonction à intégrer est mesurable car B_p^0 est compact métrisable pour le topologie de la convergence compacte, donc admet une suite dense sur laquelle il suffit de prendre le sup).

LEMME 7. – *Avec les hypothèses ci-dessus on a*

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} h_p\left(\int_A X\, dP, \int_A Y\, dP\right) \leqslant H_p^w(X, Y) \leqslant 2 \sup_{\mathcal{F} \in A} h_p\left(\int_A X\, dP, \int_A Y\, dP\right).$$

(On travaille ici avec le corps des réels, c'est pour cela que la constante est 2 et pas 4.)

RÉFÉRENCES. – LUU [13], prop. 1.1, p. 103 et [15], property 1.2, p. 3 (cf. démonstration dans ce dernier papier).

LEMME 8. – *Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et $p \in \mathcal{Q}$. Si X et Y sont fortement intégrables et scalairement $\mathcal{G}$-mesurables on a*

$$\sup_{B \in \mathcal{G}} h_p\Big(\int_B X\,dP, \int_B Y\,dP\Big) = \sup_{A \in \mathcal{F}} h_p\Big(\int_A X\,dP, \int_A Y\,dP\Big)\,.$$

REMARQUE. – Ce lemme n'est pas indispensable: MUSIAL [17] s'en passe. Mais UHL [23] l'utilise sans le démontrer. Nous ne résistons pas au plaisir de donner notre démonstration.

PREUVE. – L'inégalité $\leqslant$ est triviale.
Pour $A \in \mathcal{F}$ on a

$$e_p\Big(\int_A X\,dP, \int_A Y\,dP\Big) = \sup_{x' \in B_p^0}\Big[\delta^*\Big(x'\Big|\int_A X\,dP\Big) - \delta^*\Big(x'\Big|\int_A Y\,dP\Big)\Big]\,.$$

Le sup est atteint en x_0' (car B_p^0 est compact pour la topologie de la convergence compacte). Donc

$$e_p\Big(\int_A X\,dP, \int_A Y\,dP\Big) = \delta^*\Big(x_0'\Big|\int_A X\,dP\Big) - \delta^*\Big(x_0'\Big|\int_A Y\,dP\Big) =$$

$$= \int_A [\delta^*(x_0'|X(\omega) - \delta^*(x_0'|Y(\omega))]P(d\omega) = \int_\Omega E^{\mathcal{G}}(\chi_A)[\delta^*(x_0'|X(\cdot)) - \delta^*(x|Y(\cdot))]\,dP$$

(car le crochet est $\mathcal{G}$-mesurable)

$$\leqslant \int_B [\delta^*(x_0'|X(\cdot)) - \delta^*(x_0'|Y(\cdot))]\,dP$$

avec $B = \{\omega|\delta^*(x_0'|X(\omega)) \geqslant \delta^*(x_0'|Y(\omega))\}$

$$\leqslant h_p\Big(\int_B X\,dP, \int_B Y\,dP\Big)\,.$$

4. – Résultats sur les amarts.

On se donne une suite croissante $(\mathcal{F}_{n_n})_{n\in N}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On note T l'ensemble des temps d'arrêt bornés; c'est un ensemble ordonné.

DÉFINITION. – Un *amart multivoque* est une suite $(X_n)_{n \in N}$ d'applications $X_n\colon \Omega \to \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ fortement intégrables, X_n étant scalairement $\mathcal{F}_n$ mesurable, telle que la suite généralisée $\big(\int_\Omega X_\tau\,dP\big)\big)_{\tau \in T}$ converge dans $cfb(\mathfrak{X})$ (remarquer que

$$\int_\Omega X_\tau\,dP = \sum_{k=0}^{\max \tau} \int_{\{\tau = k\}} X_k\,dP \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$$

et la limite appartient aussi à $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$: elle est a priori précompacte, mais $\mathfrak{X}$ a été supposé complet).

DÉFINITION. – Une suite $(X_n)_{n\in N}$ de multifonctions fortement intégrables est dite *Pettis-de Cauchy* si

$$\forall p \in \mathcal{Q}\,, \quad \lim_{n,m\to\infty} H_p^w(X_n, X_m) = 0\,.$$

Il est équivalent de dire:

$$\forall p \in \mathcal{Q}\,, \quad \lim_{n,m\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{F}} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A X_m\, dP\Big) = 0\,.$$

LEMME 9. – *Soit (X_n) un amart multivoque et $p \in \mathcal{Q}$.*

1) *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $\forall \tau, \sigma \in T$ avec $\sigma \geqslant \tau \geqslant n$*

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_\tau} h_p\Big(\int_B X_\sigma, \int_B X_\tau\Big) \leqslant \varepsilon\,.$$

2) *Pour tout $A \in \bigcup \mathcal{F}_n$ la suite $\big(\int_A X_k\big)_{k\in N}$ est de Cauchy dans $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Sa limite (notée $M(A)$) appartient à $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$, $\forall \tau \in T$, $\tau \geqslant n$,*

$$\sup_{B\in\mathcal{F}_\tau} h_p\Big(\int_B X_\tau\, dP, M(B)\Big) \leqslant \varepsilon\,.$$

RÉFÉRENCES. – UHL [23], lemme 1, p. 291-292, LUU [14], prop. 2.3, p. 7. Remarquons que l'appartenance de la limite des $\int_A X_k\, dP$ à $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ est bien connue si $\mathfrak{X}$ est un Banach, ici on peut citer SAINT RAYMOND [20] (et aussi PALLU DE LA BARRIÈRE [18], coroll. 3, p. 15: appliquer ce corollaire à la fonction limite des fonctions d'appui).

THÉORÈME 10. – *Soit (X_n) un amart multivoque. On a équivalence de*

(i) *(X_n) est Pettis-de Cauchy.*

(ii) *M est scalairement P-continue au sens $\varepsilon - \delta$ (c'est-à-dire $\forall x' \in \mathfrak{X}$, $\delta^*(x'|M(\cdot))$ est P-continue) et*

$$\bigcup \{M(A) : A \in \bigcup \mathcal{F}_n\} \quad \textit{est relativement compact}\,.$$

PREUVE. – (i) $\Rightarrow$ (ii). Notons $\Sigma = \bigcup \mathcal{F}_n$. Soit $p \in \mathcal{Q}$. Comme (X_n) est Pettis-de Cauchy

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{F}} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A X_m\, dP\Big) = 0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\Sigma} h_p\Big(\int_A X_n\, dP,\ M(A)\Big) = 0$$

et, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe n tel que

$$\forall A \in \Sigma, \quad h_p\Big(\int_A X_n\, dP,\ M(A)\Big) \leqslant \varepsilon .$$

Par conséquent

$$e_p\Big(M(A),\ \int_A X_n\, dP\Big) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad e_p\Big(\bigcup_{A\in\Sigma} M(A),\ \bigcup_{A\in\Sigma} \int_A X_n\, dP\Big) \leqslant \varepsilon .$$

D'après le lemme 6, $\bigcup_{A\in\Sigma} \int_A X_n\, dP$ est relativement compact, donc $\bigcup_{A\in\Sigma} M(A)$ est pré-compact donc relativement compact. Pour la P-continuité soit $\varepsilon > 0$ et $x' \in \mathfrak{X}'$. Soit $p \in \mathfrak{Q}$ tel que $x' \in B_p^0$. Soit n tel que

$$\forall A \in \Sigma, \quad h_p\Big(\int_A X_n\, dP,\ M(A)\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Il existe $\delta > 0$ tel que

$$P(A) \leqslant \delta \Rightarrow \Big|\delta^*\Big(x' \Big| \int_A X_n\, dP\Big)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors, comme $|\delta^*(x'|M(A)) - \delta^*(x'|\int_A X_n\, dP) \leqslant |h_p\big(\int_A X_n\, dP,\ M(A)\big)$ on a

$$P(A) \leqslant \delta \Rightarrow |\delta^*(x'|M(A))| \leqslant \varepsilon .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $p \in \mathfrak{Q}$, $\varepsilon > 0$. D'après l'extension du théorème d'Hoffmann-Jorgensen, il existe une Σ-partition finie π de Ω telle que

$$Y = \sum_{E\in\pi} \frac{M(E)}{P(E)} \chi_E \quad \text{vérifie} \quad \forall A \in \Sigma,\ h_p\Big(\int_A Y\, dP,\ M(A)\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} .$$

a) Montrons

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\Sigma} h_p\Big(\int_A X_n\, dP,\ M(A)\Big) = 0 .$$

Soit n_1 tel que les éléments de π appartiennent tous à $\mathcal{F}_{n_1}$.

Pour $n \geqslant n_1$ on a (cf. le lemme 8)

$$\sup_{A\in\Sigma} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A Y\, dP\Big) = \sup_{A\in\mathcal{F}_n}\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A Y\, dP\Big)$$

Or

$$\sup_{A\in\mathcal{F}_n} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A Y\, dP\Big) \leqslant \sup_{A\in\mathcal{F}_n} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, M(A)\Big) + \sup_{A\in\mathcal{F}_n} h_p\Big(M(A), \int_A Y\, dP\Big).$$

Le dernier terme est $\leqslant \varepsilon/3$, le premier est $\leqslant \varepsilon/3$ pour n assez grand (lemme 9, 2)).

Finalement, pour n assez grand,

$$\sup_{A\in\Sigma} h_p\left(\int_A X_n\, dP, M(A)\right) \leqslant \sup_{A\in\Sigma}\left(\int_A X_n\, dP, \int_A Y\, dP\right) + \sup_{A\in\Sigma}\left(\int_A Y\, dP, M(A)\right) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

b) Il résulte de *a*) que

$$\lim_{n,m\to\infty} \sup_{A\in\Sigma} h_p\Big(\int_A X_n\, dP, \int_A X_m\, dP\Big) = 0\,.$$

D'après le lemme 8 il revient au même de prendre $\sup_{A\in\mathcal{F}}$ et d'après le lemme 7 (X_n) est Pettis-de Cauchy.

REFERENCES

[1] R. ALO - A. DE KORVIN - C. E. ROBERTS, *On some properties of continuous multimesures*, J. Math. Anal. App., **75** (1980), pp. 402-410.

[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chapitre II, Edition 1966 ou 1981.

[3] J. K. BROOKS, *On compactness of measures*, Bulletin Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys., **20** (1972), pp. 991-994.

[4] C. CASTAING, *Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'Intégration*, Université de Montpellier, Secrétariat de Math. no. 67 (1969-70).

[5] C. CASTAING - M. VALADIER, *Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes*, Revue Inf. Rech. Op., **16** (1969), pp. 3-16.

[6] C. CASTAING - M. VALADIER, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math., no. 580, Springer, 1977.

[7] J. P. R. CHRISTENSEN, *Topology and Borel Structure*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[8] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part I, Interscience (1958).

[9] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo, 1954.

[10] J. HOFFMANN-JORGENSEN, *Vector measures*, Math. Scand., **28** (1971), pp. 5-32.

[11] H. A. KLEI, *Faible compacité des sélections Bochner-intégrables de multiapplications*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1985.

[12] E. KLEIN - A. C. THOMPSON, *Theory of correspondences*, Wiley-Interscience publication (1984).

[13] D. Q. LUU, *Applications of set-valued Radon-Nikodym theorems to convergence of multi-valued L^1-amarts,* Math. Scand., **54** (1984), pp. 101-113.
[14] D. Q. LUU, *On convergence of multivalued asymptotic martingales,* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1984, Exposé no. 5.
[15] D. Q. LUU, *Stability and convergence of multivalued amarts and dimension of Banach spaces,* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1984, Exposé no. 11.
[16] D. Q. LUU, *Some Pettis mean convergence theorems for multivalued amarts of finite order in Banach spaces,* Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier 1985, Exposé no. 3.
[17] K. MUSIAL, *Martingales of Pettis integrable functions,* in « Measure theory Oberwolfach 1979 », Lecture Notes in Math. no. 794, Springer (éditée par Kölzow).
[18] R. PALLU DE LA BARRIERE, *Une alternative au théorème de Banach-Dieudonné,* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1981, Exposé no. 1.
[19] A. P. et W. J. ROBERTSON, *Topological vector spaces,* Cambridge University Press (1966).
[20] J. SAINT-RAYMOND, *Topologie sur l'ensemble des compacts non vides d'un espace topologiques séparé,* Séminaire Choquet, 1969-70, no. 21.
[21] A. TOUZANI, *Version multivoque d'un théorème de J. Hoffmann-Jorgensen,* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1984, Exposé no. 7.
[22] A. TOUZANI, *Deuxième version multivoque d'un théorème de Hoffmann-Jorgensen,* Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1984, Exposé no. 8.
[23] J. J. UHL, *Pettis mean convergence of vector valued asymptotic martingales,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **37** (1977), pp. 291-295.
[24] M. VALADIER, *On the Strassen theorem,* in « Analyse Convexe et ses applications », Lecture Notes in Economics, no. 102, Springer, 1974 (éditée par Aubin).