PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

EMILE LE PAGE

Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , exp. n° 4, p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___1_A4_0>

THEOREMES LIMITES POUR

LES PRODUITS DE MATRICES ALEATOIRES

Emile LE PAGE

§1- Introduction

Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes de même loi p à valeurs dans le groupe $G = SL(d,\mathbb{R})$ des matrices $d\times d$ de déterminant un. Désignant par $\|\ \|$ une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ nous nous intéressons pour $x \in \mathbb{R}^d-\{0\}$ au comportement asymptotique de la suite de variables aléatoires $(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\|)_{n\geq 1}$

Divers auteurs ont étudié ce problème sous l'hypothèse où p est étalée et ont établi des théorèmes, de la limite centrale [17], [18], [19], locaux [20] et des théorèmes de grands écarts [21].

Le but de cet article est de retrouver des résultats analogues en se passant de cette hypothèse d'étalement. De plus nous démontrons un théorème de la limite centrale fonctionnel, et une loi du logarithme itéré.

§2- Hypothèses sur la probabilité p et résultats préliminaires

2.1 Nous notons T_p (resp G_p) le semi-groupe (resp le groupe) fermé engendré par le support de p et nous supposons que la probabilité p satisfait au groupe d'hypothèses (P) suivant [10] :

(P_1) p est à support compact S_p

(P_2) Il n'existe pas de sous-groupe d'indice fini de G_p et de puissance extérieure $\overset{k}{\wedge}\mathbb{R}^d$ $(0<k<d)$ dans laquelle ce sous-groupe est réductible.

(P_3) T_p et T_p^{-1} sont contractants au sens suivant : il existe une suite $(t_n)\in T_p$ (resp $(t'_n)\in T_p^{-1}$) telle que les suites d'applications projectives associées à (t_n) (resp (t'_n)) dans les espaces projectifs $P(\overset{i}{\wedge}\mathbb{R}^d)$ $1\leq i\leq d$ convergent vers un point.

Les conditions (P_2) et (P_3) sont vérifiées par exemple si $T_p = SL(d, \mathbb{R})$ ou si, plus généralement, T_p contient un réseau de $SL(d, \mathbb{R})$ [10] .

2.2 Sur l'espace projectif $P(\mathbb{R}^d)$ on considère la distance d, définie par $d(\bar{x},\bar{y}) = \| x \wedge y \|$ $\bar{x},\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$ où x,y sont deux vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^d$ d'image $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $P(\mathbb{R}^d)$ et où $\| \ \|$ est la norme associée à la structure euclidienne de $\overset{2}{\wedge} \mathbb{R}^d$ induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

On a alors le

théorème 1 *Si la probabilité* p *satisfait aux hypothèses* (P) *il existe un réel* $0<\lambda_0<1$ *tel que*

$$\lim_n \left\{ \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d) \\ \bar{x} \neq \bar{y}}} E \left[\frac{d(g_n g_{n-1} \cdots g_1 \bar{x},\ g_n g_{n-1} \cdots g_1 \bar{y})}{d(\bar{x},\bar{y})} \right]^{\lambda_0} \right\}^{1/n} = \rho$$

avec $0<\rho<1$

Avant de prouver le théorème 1, précisons quelques notations et donnons quelques résultats préliminaires.

Considérons le G-espace $(P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D)$ où $D = \{(\bar{x},\bar{x})\ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)\}$. Ce G-espace peut être compactifié en lui adjoignant l'espace $B_{1,2}$ des drapeaux de dimension 2 de $\mathbb{R}^d$, c'est à dire l'espace des couples (V_1,V_2) de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ tels que $V_1 \subset V_2$ avec $\dim V_i = i$ $i = 1,2$, et en munissant $M_{1,2} = P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D \cup B_{1,2}$ de la topologie suivante : $(P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D)$ est un ouvert de $M_{1,2}$ et une suite $(\bar{x}_n,\bar{y}_n)_{n \geq 1} \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D$ converge vers $(V_1,V_2) \in B_{1,2}$ si $\lim_n d(\bar{x}_n,\bar{y}_n) = 0$ et si $\lim_n (V_1^{(n)}, V_2^{(n)}) = (V_1, V_2)$ où $V_1^{(n)}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 1 défini par $\bar{x}_n$ et $V_2^{(n)}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ de dimension 2 défini par $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$ [6] .

L'application définie par :

$$(1) \qquad \sigma_1(g,(\bar{x},\bar{y})) = \frac{d(g\bar{x},g\bar{y})}{d(\bar{x},\bar{y})} = \frac{\| gx \wedge gy \|}{\| gx \| \ \| gy \| \ \| x \wedge y \|}$$

de $G \times (P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D$ dans $\mathbb{R}^+$ est un M-cocycle c'est à dire vérifie pour $g,h \in G$

$(\bar{x},\bar{y}) \in (P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D)$

$$\sigma_1(gh,(\bar{x},\bar{y})) = \sigma_1(g,h(\bar{x},\bar{y}))\ \sigma_1(h,(\bar{x},\bar{y}))$$

Ce M cocycle se prolonge par continuité en un M-cocycle $\tilde{\sigma}_1$ sur $G \times M_{1,2}$ et pour $g \in G$ $(V_1,V_2) \in B_{1,2}$ on a

$$\tilde{\sigma}_1(g,(V_1,V_2)) = \frac{\|gV_2\|}{\|gV_1\|^2}$$

où v_1 est un vecteur quelconque de norme 1 définissant V_1 et v_2 est un bivecteur quelconque de norme 1 définissant V_2.

Nous pouvons alors énoncer la

proposition 1 *Si la probabilité* p *satisfait aux hypothèses* (P)

a) *il existe sur* $M_{1,2}$ *une unique probabilité invariante* $\nu_{1,2}$ *et son support est dans* $B_{1,2}$

b) $\iint_{G\times M_{1,2}} \operatorname{Log} \sigma_1(g,x)p(dg)\nu_{1,2}(dx) = \iint_{G\times B_{1,2}} \operatorname{Log} \tilde{\sigma}_1(g,x)p(dg)\nu_{1,2}(dx) < 0$

Démonstration de la proposition 1

a) L'existence d'une probabilité p invariante sur $M_{1,2}$ résulte de la compacité de $M_{1,2}$.

Soit $\pi_{1,2}$ une probabilité p invariante sur $M_{1,2}$; notons de plus p_i $1\le i\le 2$ les applications continues de $M_{1,2}$ dans $P(\mathbb{R}^d)$ définies par

$$p_i(m) = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{si } m = (\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D \\ \bar{x} & \text{si } m = (V_1,V_2) \in B_{1,2} \text{ et où } \bar{x} \text{ est l'image dans } P(\mathbb{R}^d) \\ & \text{d'un vecteur définissant } V_1. \end{cases}$$

Si ϕ et ψ désignent deux fonctions positives, continues à support compact sur $P(\mathbb{R}^d)$, dont les supports sont disjoints on a pour tout $n\ge 1$

(2) $g_1g_2\cdots g_n\, \pi_{1,2}(\phi \otimes \psi) \le [g_1g_2\cdots g_n p_1(\pi_{1,2})(\phi)]^{1/2}\, [g_1\cdots g_n p_2(\pi_{1,2})(\psi)]^{1/2}$

Or d'après [9] on peut affirmer que sous les hypothèses (P) $P(\mathbb{R}^d)$ porte une unique probabilité p invariante égale à $p_1(\pi_{1,2})$ et $p_2(\pi_{1,2})$ et que

$$\text{p.s.} \quad \lim_n \; g_1 g_2 \ldots g_n p_i(\pi_{1,2}) = \delta_Z \quad \text{pour } i = 1,2$$

Il en résulte que le second membre de (2) converge presque sûrement vers zéro et donc que

$$\text{p.s.} \quad \lim_n \; g_1 g_2 \ldots g_n \; \pi_{1,2}(\phi \otimes \psi) = 0$$

Comme pour tout $n \geq 1$ on a

$$\pi_{1,2}(\phi \otimes \psi) = E(g_1 g_2 \ldots g_n \; \pi_{1,2}(\phi \otimes \psi))$$

on en déduit que

$$\pi_{1,2}(\phi \otimes \psi) = 0$$

Ceci établit que le support de $\pi_{1,2}$ est dans $B_{1,2}$.

Or d'après [10] on sait que sous les hypothèses (P), $B_{1,2}$ porte une unique probabilité p-invariante, le a) est ainsi démontré.

b) Ce résultat est une conséquence du a) et de la μ-négativité du cocycle $\tilde{\sigma}_1$ sur $G \otimes B_{1,2}$ [10].

Nous utiliserons également la

<u>proposition 2</u> *Soit* M *un* G *espace compact portant une unique probabilité invariante* π *et* σ *un* M-*cocycle de* $G \times M$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *alors*

a) la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n} E \log \sigma(g_n g_{n-1} \ldots g_1, x)$ *converge uniformément sur* M *vers* $\iint_{G \times M} \log \sigma(g,x) \, dp(g) \, d\pi(x)$

b) si de plus $\iint_{G \times M} \log \sigma(g,x) \, dp(g) \, d\pi(x) < 0$ *il existe un réel* $0 < \lambda_0 < 1$ *tel que*

$$\lim_n \left\{ \sup_{x \in M} E \; \sigma^{\lambda_0}(g_n g_{n-1} \ldots g_1, x) \right\}^{1/n} = \rho < 1$$

<u>Démonstration de la proposition 2</u>

a) On considère la chaine de Markov $(M_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans le compact $S_p \times M$ définie par $M_0 = (g_1, x)$, $M_n = (g_{n+1}, g_n \ldots g_1 x)_{n \geq 1}$.
Elle a pour probabilité de transition $\tilde{Q}((g,x), A \times B) = p(A) \, Q(x,B)$ $g \in S_p$, $x \in M$ où $Q(x,B) = \int 1_B(gx) \, p(dg)$, et admet une unique probabilité invariante $p \otimes \pi$. Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1} \in M$ la suite de probabilités

$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{Q}^k((e,x_n),.)$ converge vaguement vers $p \otimes \pi$; en effet de la relation

$$\nu_n \tilde{Q} = \nu_n + \frac{1}{n} \tilde{Q}^{(n+1)}((e,x_n),.) - \frac{1}{n} \tilde{Q}((e,x_n),.) \qquad n \geq 1$$

il résulte que toute valeur d'adhérence de la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ pour la topologie vague est une probabilité $\tilde{Q}$ invariante et donc égale à $p \otimes \pi$, ce qui justifie l'assertion précédente car l'ensemble des probabilités sur $S_p \times M$ est compact pour la topologie vague. Or si on pose

$$f(g,x) = \log \sigma(g,x) \qquad g \in S_p, \quad x \in M$$

on a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{n} E \log \sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{Q}^k f(e,x_n) = \nu_n(f).$$

On peut en conclure que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in M$

$$\lim_n \frac{1}{n} E \log \sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x_n) = \iint_{S_p \times M} \log \sigma(g,x)\, p(dg)\, \pi(dx)$$

ce qui établit la première partie de la proposition 2.

b) D'après le a) il existe un entier N_o tel que

$$\beta = \sup_{x \in M} E \log \sigma(g_{N_o} g_{N_o-1} \cdots g_1, x) < 0$$

Posons $f_{N_o}(x,\lambda) = E \, \sigma^\lambda(g_{N_o} g_{N_o-1} \cdots g_1, x)$ $\lambda \geq 0$, $x \in M$ et étudions la dérivation partielle de cette fonction par rapport à λ au point $\lambda = 0$.

D'après le théorème des accroissements finis pour $\lambda > 0$ et $x \in M$ on a

$$\left| \frac{f_{N_o}(x,\lambda) - 1}{\lambda} - E \log \sigma(g_{N_o} g_{N_o-1} \cdots g_1, x) \right| \leq C(e^{\lambda C} - 1)$$

où $C = \sup_{(g,x) \in S_p^{N_o} \times M} |\log \sigma(g,x)|$

Il en résulte que pour $\lambda > 0$

$$\sup_{x \in M} f_{N_o}(x,\lambda) \leq 1 + \lambda\beta + \lambda C(e^{\lambda C} - 1)$$

et donc puisque $\beta < 0$ il existe un réel λ_o $o < \lambda_o < 1$ tel que

$$(3) \quad \sup_{x \in M} f_{N_o}(x,\lambda_o) < 1$$

Considérons la suite $f_n(\lambda_o) = \sup_{x \in M} (E\, \sigma^{\lambda o}(g_n g_{n-1} \dots, x)$ $n \geq 1$

Du fait que σ est un M-cocycle cette suite est sous multiplicative et par conséquent la suite $(f_n(\lambda_o))^{1/n}{}_{n\geq 1}$ a une limite égale à $\inf_{n\geq 1} [f_n(\lambda_o)]^{1/n} \leq [f_{N_o}(\lambda_o)]^{1/N_o}$ ce qui en tenant compte de l'inégalité (3) établit la deuxième partie de la proposition 2.

<u>Démonstration du théorème 1</u> Le théorème 1 est une conséquence immédiate de (1) et des propositions 1 et 2.

<u>§3- Etude d'une famille d'opérateurs</u>

3.1 Commençons par préciser quelques notations :

Soit $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ l'espace des fonctions continues sur $P(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$|f| = \sup_{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{x})| \qquad f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$$

D'autre part pour $0 < \lambda \leq 1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ on définit

$$m_\lambda(f) = \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d) \\ x \neq y}} \frac{|f(\bar{x}) - f(\bar{y})|}{d^\lambda(\bar{x},\bar{y})}$$

et $\mathcal{L}_\lambda = \{f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d)) \,/\, \|f\|_\lambda = |f| + m_\lambda(f) < +\infty\}$

$\mathcal{L}_\lambda$ est une algèbre de Banach unitaire munie de la norme $\| \quad \|_\lambda$.

De plus appelons α le M-cocycle de $G \times P(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^+$ défini par

$\alpha(g,\bar{x}) = \|gx\|$ où $g \in G$ et x est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, de norme 1, d'image $\bar{x}$ dans $P(\mathbb{R}^d)$. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de mettre en évidence quelques propriétés de la famille d'opérateurs $P(\lambda)$ définie par

$$P(\lambda)f(\bar{x}) = \int_G \alpha^\lambda(g,\bar{x})\ f(g\bar{x})\ p(dg)$$

$$\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) \qquad f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d)) \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

et plus particulièrement celles de sa restriction à $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \| \|_{\lambda_0})$ où λ_0 est le réel intervenant dans l'énoncé du théorème 1.

3.2 Nous avons tout d'abord la

Proposition 3 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(\lambda)$ est un opérateur continu de $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ et l'application $\lambda \to P(\lambda)$ de $\mathbb{C}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{L}_{\lambda_0})$ des applications linéaires continues de $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ est analytique.*

Avant de démontrer cette proposition énonçons un lemme

LEMME 1

a) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \geq 1$ il existe une constante $C_1(k,\lambda) < +\infty$ telle que*

$$\sup_{\substack{(\bar{x},\bar{y}) \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D \\ g \in S_p^k}} \frac{|\alpha^\lambda(g,\bar{x}) - \alpha^\lambda(g,\bar{y})|}{d^\lambda(\bar{x},\bar{y})} = C_1(k,\lambda)$$

b) *Il existe une constante $C_2 < +\infty$ telle que*

$$\sup_{\substack{(\bar{x},\bar{y}) \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D \\ g \in S_p}} \frac{|\mathrm{Log}\,\alpha(g,\bar{x}) - \mathrm{Log}\,\alpha(g,\bar{y})|}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} = C_2$$

Démonstration du lemme 1 : le lemme 1 est une conséquence immédiate du fait que l'application $(g,\bar{x}) \to \mathrm{Log}\,\alpha(g,\bar{x})$ est continument différentiable sur $G \times P(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration de la proposition 3 :

Pour tout $n \geq 0$, considérons l'opérateur P_n défini par

$$P_n f(\bar{x}) = \int [\mathrm{Log}\ \alpha(g,\bar{x})]^n\ f(g\bar{x})\ p(dg)$$

$$\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) \qquad f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$$

Soit $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ on a

(4) $\quad |P_n f| \leq (C_3)^n |f|$ où $C_3 = \sup_{(g,\bar{x})\ S_p \times P(\mathbb{R}^d)} |\mathrm{Log}\,\alpha(g,\bar{x})| < +\infty$

De plus pour $\bar{x},\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$ $\quad \bar{x} \neq \bar{y}$ on a

$$\frac{|P_nf(\bar{x})-P_nf(\bar{y})|}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} = \left|\int \mathrm{Log}\alpha(g,\bar{x}))^n \frac{f(g\bar{x})-f(g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})}\, p(dg)\right.$$

$$\left. + \int f(g\bar{y}) \frac{(\mathrm{Log}\alpha(g,\bar{x}))^n-(\mathrm{Log}\alpha(g,\bar{y}))^n}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})}\, p(dg)\right|$$

d'où il résulte en tenant compte du lemme 1 que

$$(5) \quad m_{\lambda_0}(P_nf) \leq m_{\lambda_0}(f)\, C_3^n\, C_4 + |f|\, C_2\, n\, C_3^{n-1}$$

avec $C_4 = \sup\limits_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \displaystyle\int \frac{d^{\lambda_0}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})}\, p(dg) < +\infty$

D'après (3) et (5) on a

$$(6) \quad \|P_nf\|_{\lambda_0} \leq \{(C_4+1)\, C_3^n + n\, C_2\, C_3^{n-1}\}\, \|f\|_{\lambda_0}$$

On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} P_n$ converge normalement dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{\lambda_0},\mathcal{L}_{\lambda_0})$ de plus cette série a pour somme $P(\lambda)$ ce qui établit la proposition 3.

3.3 Désormais, nous notons ν l'unique probabilité p invariante portée par $P(\mathbb{R}^d)$ [9] et nous appelons e la fonction définie par $e(\bar{x}) = 1$, $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$. Nous pouvons alors énoncer la

Proposition 4 *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ *et pour tout* $n\geq 1$ *on a*

$$P^n(0)f = \nu(f)e + Q^nf$$

où Q *est un opérateur sur* $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ *de rayon spectral* $r(Q)$ *strictement inférieur à* 1. *et tel que* $Qe=0$.

Enonçons et prouvons deux lemmes utiles à la démonstration de la proposition 4.

LEMME 2

Il existe un entier $n_0\geq 1$ *et une constante* $r_0<1$ *tels que*

$$\forall f \in \mathcal{L}_{\lambda_0} \quad \|P^{n_0}(0)\, f\|_{\lambda_0} \leq r_0\, \|f\|_{\lambda_0} + |f|$$

Preuve du lemme 2

Pour $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ on a

(7) $|P^n(0)f| \leq |f|$

et de plus pour $(\bar{x},\bar{y}) \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d)-D$

$$\frac{|P^n(0)f(\bar{x}) - P^n(0)f(\bar{y})|}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} = \left|\int \frac{f(g\bar{x}) - f(g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} p^n(dg)\right| \leq$$

$$\leq m_{\lambda_0}(f) \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \frac{d^{\lambda_0}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} p^n(dg)$$

d'où (8) $$m_{\lambda_0}(P^n(0)f) \leq \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \frac{d^{\lambda_0}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} p^n(dy) \times m_{\lambda_0}(f) .$$

Les inégalités (7) et (8) et le théorème 1 permettent alors de conclure.

LEMME 3

a) $\forall f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ $\lim_n \sup_{\bar{x}\in P(\mathbb{R}^d)} |P^n(0)\, f(\bar{x}) - \nu(f)| = 0$

b) 1 *est l'unique valeur propre de module 1 de* $P(0)$ *et le sous espace propre correspondant est formé des multiples de* e.

Preuve du lemme 3

On a $\forall n, m\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathcal{L}_{\lambda_0}$

$$\sup_{\bar{x}\in P(\mathbb{R}^d)} |P^{n+m}(0)f(\bar{x})-P^n(0)f(\bar{x})| \leq m_{\lambda_0}(f) \sup_{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)} d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y}) \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \frac{d^{\lambda_0}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} p^n(dg)$$

A l'aide du théorème 1, on en déduit que pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ la suite $(P^n(0)f)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $P(\mathbb{R}^d)$ et sa limite est $\nu(f)$ car la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(0)f\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\nu(f)$ puisque ν est l'unique probabilité p invariante portée par $P(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration de la proposition 4

Si L est une partie bornée de $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \| \|_{\lambda_0})$, $P^n(0)$ L est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ et donc d'après le théorème d'Ascoli une partie compacte de $(\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d)), | |)$.

En tenant du fait que P(0) est une contraction de $(\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d)), | |)$, du lemme 2, et de la remarque précédente on en conclut à l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [16] que l'on peut écrire

$$\forall n \geq 0 \qquad P^n(0) = \sum_{\mu \in S} \mu^n U_\mu + Q^n$$

où S est l'ensemble fini des valeurs propres de module 1 de P(0) et où U_μ $\mu \in S$ et Q sont des opérateurs bornés sur $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \| \|_{\lambda_0})$ tels que $U_\mu^2 = U_\mu$ $U_\mu U_{\mu'} = 0$ si $\mu \neq \mu'$ $U_\mu Q = QU_\mu = 0$ $P_\mu \mathcal{L}_{\lambda_0} = D_\mu$ où $D_\mu = \{f \in \mathcal{L}_{\lambda_0} / P(0)f = \mu f\}$ et où Q est de norme spectrale strictement inférieure à 1.

La proposition 4 se déduit alors immédiatement du lemme 4.

Donnons un corollaire de la proposition 4.

Corollaire 1

Pour toute $f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ on a

$$\lim_n \sup_{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)} |P^n(0)f(\bar{x}) - \nu(f)| = 0$$

Démonstration du corollaire 1 : La propriété précédente est vraie si $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$; elle s'obtient aussi pour toute fonction de $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ car P(0) est une contraction de $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ et car $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ est dense dans $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ muni de la norme $| \ |$.

3.4 Les résultats qui précèdent permettent alors d'obtenir la

Proposition 5 : *Il existe un réel* $a > 0$ *tel que pour* $\lambda \in \mathbb{C}$ $|\lambda| < a$ *on ait*

a) $\forall f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ *et* $n \geq 1$

$$P^n(\lambda)f = k(\lambda)^n N_1(\lambda)f + Q^n(\lambda) f$$

où $k(\lambda)$ *est l'unique valeur propre de plus grand module de* $P(\lambda)$ *et* $|k(\lambda)| > \frac{2+r(Q)}{3}$

$N_1(\lambda)$ *est la projection sur le sous espace propre* E_λ *de dimension 1, correspondant à* $k(\lambda)$.

$Q(\lambda)$ *est un opérateur de* $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ *de rayon spectral*

$r(Q(\lambda)) \leq \frac{1+2r(Q)}{3}$ *et tel que* $Q(\lambda) E_\lambda = 0$

b) Les applications $\lambda \to k(\lambda)$, $\lambda \to N_1(\lambda)$, *et* $\lambda \to Q(\lambda)$ *sont analytiques*

c) (9) $\forall n \geq 1$ $\|Q^n(\lambda)e\|_{\lambda_0} \leq C_5 |\lambda| \rho_1^n$

où C_5 *est une constante et* $0 < \rho_1 < 1$.

Démonstration de la proposition 5

a) les deux premières affirmations résultent des propositions 3 et 4 et de la théorie générale des perturbations analytiques d'opérateurs [4], [13].

Résumons simplement ici la façon de construire $P_1(\lambda)$ et $Q(\lambda)$. Nous notons $\|T\|_{\lambda_0}$ la norme de tout opérateur T de $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ et nous désignons par N_1 l'opérateur $N_1(f) = \nu(f)e \quad f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$.

Pour $|z| > r(Q)$ et $z \neq 1$ la résolvante de $P(0)$ est

$$R(z) = \frac{1}{z-1} N_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P(0)-N_1)^{n+1}}{z^{n+1}}$$

Si $\|P(\lambda) - P(0)\|_{\lambda_0} < \frac{1}{\|R(z)\|_{\lambda_0}}$ la série

$$(10) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} R(z) \{(P(\lambda) - P(0) R(z)\}^k$$

converge et détermine la résolvante $R(\lambda,z)$ de $P(\lambda)$.

Considérons alors les cercles I_1 et I_2 de centres 1 et 0 respectivement et de rayon $\rho_1 = \frac{1-r(Q)}{3}$ et $\rho_2 = \frac{1+2r(Q)}{3}$; de plus soit $\delta>0$ tel que $\delta<\rho_1$ et $r(Q)+\delta<\rho_2$

et $M_\delta = \sup\limits_{z\in\{z/|z|>r(Q)+\delta,\,|z-1|<\delta\}} \|R(z)\|_{\lambda_0}$

Si $\|P(\lambda) - P(0)\|_{\lambda_0} < \frac{1}{M_\delta}$ les cercles I_1 et I_2 appartiennent à l'ensemble résolvant de $P(\lambda)$. Considérons alors les projections

$$N_1(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_1} R(z,\lambda)\, dz$$

$$N_2(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} R(z,\lambda)\, dz$$

Pour $\|N_1(\lambda) - N\|_{\lambda_0} < 1$ l'image E_λ de $N_1(\lambda)$ est de dimension 1 et on a

$$P(\lambda)\, N_1(\lambda)\, e_\lambda = N_1(\lambda)\, P(\lambda)\, e_\lambda = k(\lambda)\, e_\lambda$$

où $e_\lambda \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ engendre E_λ.

En outre $\forall n\geq 1$ on a

$$P^n(\lambda) = P^n(\lambda)\, N_1(\lambda) + P^n(\lambda)\, N_2(\lambda) = [k(\lambda)]^n\, N_1(\lambda) + Q^n(\lambda)$$

où (11) $\quad Q^n(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n R(z,\lambda) dz$

b) Pour $|\lambda| < a$, on a $R(\lambda,z) = R(z) + \lambda R_1(z,\lambda)$ (cf(10)) et donc d'après (11)

$$Q^n(\lambda)\, e = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n R(z) e\, dz + \lambda \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n\, R_1(z,\lambda) e\, dz$$

c'est-à-dire

$$Q^n(\lambda) e = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n\, R_1(z,\lambda) e \, dz$$

d'où $\|Q^n(\lambda)e\|_{\lambda_0} \leq C_5\ |\lambda|\ \rho_2^n$

où $C_5 = \frac{1}{2\pi} \sup\limits_{\substack{|z|=\rho_2 \\ |\lambda|<a}} \|R_1(z,\lambda)\|_{\lambda_0} < +\infty$

ce qui établit l'affirmation c)

3.5 Dans les sections précédentes nous avons mis en évidence des propriétés des opérateurs $P(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{C}$ sur un voisinage de $\lambda=0$. Complétons cette étude par la

Proposition 6 : *Il existe un réel* $0<b<a$ *tel que pour tout* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| < b$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *l'opérateur* $P(\lambda_1+i\lambda_2)$ *a un ensemble fini* $G(\lambda_1+i\lambda_2)$ *de valeurs propres de module* $|k(\lambda_1)|$. *De plus pour chaque* $\mu \in G(\lambda_1+i\lambda_2)$ *le sous espace propre correspondant* $V_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)$ *est de dimension finie et, il existe des opérateurs linéaires* $U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)$ $\mu \in G(\lambda_1+i\lambda_2)$ $Q(\lambda_1+i\lambda_2)$ *sur* $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ *tels que l'on ait :*

$$\forall n \geq 1 \quad P^n(\lambda_1+i\lambda_2) = \sum_{\mu \in G(\lambda_1+i\lambda_2)} \mu^n\ U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2) + Q^n(\lambda_1+i\lambda_2)$$

$$U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)\ U_{\mu'}(\lambda_1+i\lambda_2) = 0 \quad \text{si } \mu \neq \mu' \in G(\lambda_1+i\lambda_2)\ ,\ U_\mu^2(\lambda_1+i\lambda_2) = U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)$$

$$U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)\ Q(\lambda_1+i\lambda_2) = Q(\lambda_1+i\lambda_2)\ U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)$$

$$U_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)\mathcal{L}_{\lambda_0} = V_\mu(\lambda_1+i\lambda_2)$$

En outre, l'opérateur $Q(\lambda_1+i\lambda_2)$ *est de norme spectrale* $r(Q(\lambda_1+i\lambda_2))$ *strictement inférieure à* $|k(\lambda_1)|$.

Démonstration de la proposition 6 :

Elle est analogue à celle de la proposition 4 et repose sur deux lemmes : Notant pour tout opérateur U de $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ $|U|_{\lambda_0} = \sup\limits_{f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}} \frac{|Uf|}{|f|}$ on a tout d'abord le

a) LEMME 4

Pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $|\lambda_1| < a$ $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\sup_{n \geq 0} \frac{|P^n(\lambda_1+i\lambda_2)|_{\lambda_0}}{|k(\lambda_1)|^n} < +\infty$$

Démonstration du lemme 4

Soient $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda_1| < a$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$; on a

$$n \geq 1 \qquad |P^n(\lambda_1 + i\lambda_2)f| \leq P^n(\lambda_1)\, |f| \leq |f|\, |P^n(\lambda_1)e|$$

Or d'après la proposition 5 on a

$$\sup_{n\geq 0} \frac{|P^n(\lambda_1)e|}{|k(\lambda_1)|^n} \leq |N_1(\lambda_1)e| + \sup_{n\geq 0} \frac{\|Q^n(\lambda_1)\|_{\lambda_0}}{|k(\lambda_1)|^n} < +\infty$$

d'où le lemme 4.

b) LEMME 5

Il existe un réel $0 < b < a$ *, un réel* $0 < t_0 < 1$ *et un entier* $n_0 \geq 1$ *tels que si* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $|\lambda_1| < b$ $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *on ait pour toute* $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$

$$\frac{\|P^{n_0}(\lambda_1+i\lambda_2)f\|_{\lambda_0}}{|k(\lambda_1)|^{n_0}} \leq t_0 \,\|f\|_{\lambda_0} + R(n_1,\lambda_1,\lambda_2)|f|$$

où $R(n_1,\lambda_1,\lambda_2) < +\infty$

Démonstration du lemme 5

Pour $(\bar{x},\bar{y}) \in P(\mathbb{R}^d) \times P(\mathbb{R}^d) - D$, $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$, $n \geq 1$, on a

$$\frac{|P^n(\lambda_1+i\lambda_2)f(\bar{x}) - P^n(\lambda_1+i\lambda_2)f(\bar{y})|}{|k(\lambda_1)|^n\, d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})} \leq \frac{1}{|k(\lambda_1)|^n} \int \|g\bar{x}\|^{\lambda_1} \frac{|f(g\bar{x}) - f(g\bar{y})|}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})}\, p^n(dg)$$

$$+ \frac{|f|}{|k(\lambda_1)|^n} \int \frac{|\,\|g\bar{x}\|^{\lambda_1+i\lambda_2} - \|g\bar{y}\|^{\lambda_1+i\lambda_2}|}{d^{\lambda_0}(\bar{x},\bar{y})}\, p^n(dg)$$

d'où l'on déduit que

$$(12)\quad m_{\lambda_o}\left(\frac{P^n(\lambda_1+i\lambda_2)}{k(\lambda_1)}f\right) \leq \frac{m_{\lambda_o}(f)}{|k(\lambda_1)|^n} \sup_{\substack{(\bar{x},\bar{y})\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \|g x\|^{\lambda_1} \frac{d^{\lambda_o}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_o}(\bar{x},\bar{y})}\, p^n(dg)$$

$$+ \frac{|f|}{|k(\lambda_1)|^n}\, C_1(n,\ \lambda_1+i\lambda_2)$$

D'après le théorème 1, il existe un réel $0<t_o<1$ et un entier n_o tels que

$$\sup_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \frac{d^{\lambda_o}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_o}(\bar{x},\bar{y})}\, p^{n_o}(dg) < t_o < 1$$

Par continuité, on en déduit qu'il existe un réel $0<b<a$ tel que pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ $|\lambda_1|<b$ on ait également

$$(13)\quad \frac{1}{|k(\lambda_1)|^{n_o}} \sup_{\substack{\bar{x},\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)\\ \bar{x}\neq\bar{y}}} \int \|g\bar{x}\|^{\lambda_1} \frac{d^{\lambda_o}(g\bar{x},g\bar{y})}{d^{\lambda_o}(\bar{x},\bar{y})}\, p^{n_o}(dg) < t_o < 1$$

Le lemme 5 est alors une conséquence immédiate de (12) et (13).

Si L est une partie bornée de $(\mathcal{L}_{\lambda_o}, \|\ \|_{\lambda_o})$ $P^{n_o}(\lambda_1+i\lambda_2)(L)$ est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$ et donc d'après le théorème d'Ascoli une partie compacte de $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d))$. Les lemmes 4 et 5 et la remarque précédente permettent alors d'obtenir immédiatement la proposition 5 grâce au théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [16] .

§ 4- Théorèmes de la limite centrale

4.1 Etablissons tout d'abord le

Théorème 2 : *Si les hypothèses* (P) *sont vérifiées et si de plus il existe deux entiers* $n_0 \geq 1$ *et* $k_0 \geq 1$ *tels que les supports de* p^{n_0} *et* $p^{n_0+k_0}$ *se rencontrent*

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d-\{0\}$ *la suite*

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{n} E \log \|g_n g_{n-1} \cdots x\|$$

converge vers la constante $\gamma = \iint_{G \times P(\mathbb{R}^d)} \operatorname{Log} \alpha(g,\bar{x})\, p(dg)\, \nu(d\bar{x})$

et la convergence est uniforme sur $S_{d-1} = \{x/\|x\| = 1\}$

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}^d-\{0\}$ *la suite*

$$\sigma_n^2(x) = \frac{1}{n} E(\log\|g_n g_{n-1} \cdots g_1 x\| - n\gamma)^2$$

converge vers une constante $\sigma^2 > 0$ *indépendante de* x *et la convergence est uniforme sur* S_{d-1}

3) $\forall x \in \mathbb{R}^d-\{0\}$ *la suite de variables aléatoires*

$$Z_n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (\operatorname{Log}\|g_n g_{n-1} \cdots g_1 x\| - n\gamma)$$

converge en loi vers une loi normale $N(0,1)$.

4) *Il existe une constante* $C>0$

$$(14) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \sup_{\|x\|=1} \left| P(Z_n(x) \leq t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Démonstration du théorème 2

a) Il est immédiat que l'on peut supposer $\|x\|=1$, ce que nous ferons par la suite

b) Le 1) est un corollaire de la proposition 2.

c) $\forall x \in S_{d-1}$ on a pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $|\lambda| < a$

$$(15) \quad E(e^{i\lambda \operatorname{Log}\|g_n g_{n-1} \cdots g_1 x\|}) = P^n(i\lambda)\, e(\bar{x}) = [k(i\lambda)]^n N_1(i\lambda) e(\bar{x}) + (Q(i\lambda))^n e(\bar{x})$$

De plus comme $k(.)$, $N_1(.)$, $Q(.)$ sont analytiques on a pour $|\lambda| < a$

$$(16) \quad k(i\lambda) = 1 + i\lambda k'(0) - \frac{\lambda^2}{2} k''(0) - i\frac{\lambda^3}{6} k^{(3)}(0) + \lambda^3 \varepsilon_1(\lambda)$$

où $\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon_1(\lambda) = 0$

et

(17) $\quad N_1(i\lambda) = \nu + i\lambda N_1^{(1)} - \frac{\lambda^2}{2} N_1^{(2)} - \lambda^2 N_1^{(3)}(i\lambda)$

où $N_1^{(1)}, N_1^{(2)}, N_1^{(3)}(i\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{L}_{\lambda_0})$ et où $\lim_{\lambda\to 0} \|N_1^{(3)}(i\lambda)\|_{\lambda_0} = 0$.

En tenant compte de (12),(13),(14) et (8) on voit que pour $|\lambda|<b$ $\overline{\lim_n} E(e^{i\frac{\lambda}{n} \mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}) = e^{i\, k'(0)}$

Or on sait [6] que p.s. $\lim_n \frac{1}{n} \mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| = \gamma$ par conséquent (18) $k'(0) = \gamma$

On a alors le

LEMME 6

Il existe un réel $b>0$ *tel que pour* $|\lambda| < b$ *on ait*

$$E(e^{i\lambda(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma)}) = e^{n[-\frac{\lambda^2}{2}(h''(0)-\gamma^2)+i\lambda^3 A+\lambda^3\varepsilon_2(\lambda)]}$$

$$\times\ (1+i\lambda N_1^{(1)}e(\bar{x}) - \frac{\lambda^2}{2} N_1^{(2)}e(\bar{x}) - \lambda^2 N_1^{(3)}(i\lambda)\, e(\bar{x})) + e^{-i\lambda n\gamma}[Q(i\lambda)]^n\, e(\bar{x})$$

où $A\in\mathbb{R}$, $\lim_{\lambda\to 0} \varepsilon_2(\lambda) = 0$ *et* $\lim_{\lambda\to 0} N_1^{(3)}(i\lambda) = 0$

Démonstration du lemme 6 : le lemme 6 est une conséquence immédiate de (15), (16) (17) et (18) et du calcul des développements limités.

d) Calculons $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} E(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma)}) /_{\lambda=0}$

Remarquons tout d'abord que pour $|\lambda| < a$ $\quad |z| = \rho_2$ nous pouvons développer $R(i\lambda,z)$ sous la forme

$$R(i\lambda,z) = R(z) + i\lambda R^{(1)}(z) - \frac{\lambda^2}{2} R^{(2)}(z) + \lambda^2 R^{(3)}(z,i\lambda)$$

où $R^{(1)}(z)$, $R^{(2)}(z)$, $R^{(3)}(z,i\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{L}_{\lambda_0})$

On en déduit que

(19) $$Q^n(\tfrac{i\lambda}{\sqrt{n}})\, e(\bar{x}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{I_2} z^n R(\tfrac{i\lambda}{\sqrt{n}},z)\, e(\bar{x})\, dz = \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\int_{I_2} z^n R^{(1)}(z)\, e(\bar{x})\, dz$$

$$- \frac{\lambda^2}{2n}\frac{1}{2i\pi}\int_{I_2} z^n R^{(2)}(z) e(\bar{x}) dz - \frac{\lambda^2}{n}\frac{1}{2i\pi}\int_{I_2} z^n R^{(3)}(z,i\ )\, e(\bar{x})\, dz$$

Du lemme 3 et de (19) il résulte que

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} E(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\|-n\gamma)})_{\lambda=0} = -\frac{1}{n} E(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\|-n\gamma)^2 =$$

$$= -(k''(0)-\gamma^2) - \frac{1}{n} N_1^{(2)} e(\bar{x}) - \frac{1}{2i\pi n}\int_{I_2} z^n R^{(2)}(z)\, e(\bar{x})\, dz$$

$$- \frac{2i}{2\pi}\gamma\int_{I_2} z^n R^{(1)}(z)\, e(\bar{x})\, dz$$

Cette expression montre puisque $\rho_2<1$ qu'il existe une constante $C_6 < +\infty$ telle que

$$(20) \qquad \sup_{\|x\|=1} \left|\frac{1}{n} E(\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\|-n\gamma)^2 - (k''(0)-\gamma^2)\right| \leq \frac{C_6}{n}$$

Ceci montre la convergence uniforme sur S_{d-1} de la suite $(\sigma_n^2(x))_{n\geq 1}$, vers $\sigma^2 = k''(0) - \gamma^2$.

e) Il reste à prouver que $\sigma^2 > 0$. Cette démonstration se fera par l'absurde en plusieurs étapes ; commençons par préciser quelques notations : pour tout $k\geq 1$ on définit la probabilité de transition $Q_p k$ sur $G_p \times P(\mathbb{R}^d)$ par

$$Q_{p^k} f(g,\bar{x}) = \int f(g',g\bar{x})\, p^k(dg')$$

Q_p est la probabilité de transition de la chaine de Markov $(M'_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $G_p \times P(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$M'_0 = (g,\bar{x}) \quad M'_n = (g_n \quad , g_{n-1} \dots g_1 g\bar{x}) \qquad n\geq 1$$

De plus, notons

$$\rho(g,\bar{x}) = \mathrm{Log}\ \alpha(g,\bar{x}) \qquad g \in G_p,\ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$$

et soit

$$h(g,\bar{x}) = \sum_{k\geq 0} Q_p^k(\rho-\gamma)(g,\bar{x})$$

La convergence uniforme de cette série sur $G_p \times P(\mathbb{R}^d)$ résulte de l'égalité

$$k\geq 1 \quad Q_p^k(\rho-\gamma)(g,\bar{x}) = Q^{k-1}\,\bar{\rho}(g\bar{x})$$

$$\text{où} \quad \bar{\rho}(\bar{x}) = \int \rho(g,\bar{x})\, p(dg)$$

et du fait que Q est de norme spectrale strictement inférieure à 1 dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$

On a alors le

LEMME 7

a) $\sigma^2 = \iint_{G_p \times P(\mathbb{R}^d)} \{h^2(g,\bar{x}) - (Q_p h)^2(g,\bar{x})\} p(dg)\nu(d\bar{x})$

b) si $\sigma^2 = 0$, *pour tout* g *du support de* p *et tout* $\bar{x}$ *du support de* ν *on a*

$h(g,\bar{x}) = \int h(g',\bar{x})\ p(dg')$

Démonstration du lemme7 :

La chaine de Markov $(M'_n)_{n \geq 0}$ admet $p \otimes \nu$ pour unique probabilité invariante et on a

$$\sigma^2 = \lim_n \frac{1}{n} E_{p\otimes\nu}((\rho-\gamma)(M'_1) + (\rho-\gamma)(M'_2)+\ldots+(\rho-\gamma)(M'_n))^2$$

Comme $\rho - \gamma = (I-Q_p)h$ on obtient facilement que

$$E_{p\otimes\nu}((\rho-\gamma)(M'_1)+(\rho-\gamma)(M'_2)+\ldots+(\rho-\gamma)(M'_n))^2$$

$$= n\ p\otimes\nu(h^2) + n\ p\otimes\nu((Q_p h)^2) - 2n\ p\otimes\nu(h\ Q_p\ h)$$

$$+ 2n\ p\otimes\nu\{(h-Q_p h)(Q_p h)\} - 2\ p\otimes\nu(h-Q_p h)(\sum_{k=1}^{n} Q_p^k\ h)$$

et l'assertion a) du lemme en découle immédiatement.

σ^2 peut encore s'écrire sous la forme

$$\sigma^2 = \iint_{G_p \times P(\mathbb{R}^d)} \{Q_p h^2(g,\bar{x}) - (Q_p h)^2(g,\bar{x})\}\ p(dg)\ \nu(d\bar{x})$$

si $\sigma^2 = 0$ ilen résulte que pour $p\otimes\nu$ presque tout $(g,\bar{x}) \in G_p \times P(\mathbb{R}^d)$ on a

$$Q_p(g,\bar{x})\ \{(g',\bar{y})\ /\ h(g',\bar{y}) = Q_p h(g,\bar{x})\} = 1$$

c'est-à-dire que

$$p\ \{\gamma \in G_p\ /\ h(\gamma,g.\bar{x}) = \int h(g',g\bar{x})\ p(dg')\} = 1$$

On en déduit que pour ν-presque tout $\bar{y} \in P(\mathbb{R}^d)$ on a

$$p\{\gamma \in G_p\ /\ h(\gamma,\bar{y}) = \int h(g',\bar{y})\ p(dg')\} = 1$$

et ceci en tenant compte du fait que h est continue établit le b) du lemme.

L'assertion b) du lemme précédent peut être précisée en le

LEMME 8. *Si* $\sigma^2 = 0$ *on a pour tout* $k\geq 1$, *tout* g *du support de* p^k *et tout* $\bar{x}$ *du support de* ν

$$h(g,\bar{x}) = \int h(g',\bar{x})\, p^k(dg')$$

Démonstration du lemme 8.

Pour tout $k\geq 1$ et tout $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$

$$\sigma^2 = \lim_n \frac{1}{kn} E(\rho(g_{kn}\, g_{kn-1}\cdots g_1,\bar{x}) - kn\gamma)^2$$

$$= \lim_n \frac{1}{kn} E\{\sum_{j=0}^{n-1} (\rho(g_{jk+k}\, g_{jk+k-1}\cdots g_{jk+1}, g_{jk}\cdots g_1\, \bar{x}) - k\gamma)\}^2$$

En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 7,il en résulte que

$$\sigma^2 = \frac{1}{k} \iint_{G_p \times P(\mathbb{R}^d)} h_k^2(g,\bar{x}) - (Q_{p^k}\, h_k\, (g,\bar{x}))^2\, p^k(dg)\, \nu(d\bar{x})$$

où $h_k(g,\bar{x}) = \sum_{j\geq 0} Q^j_{p^k}(\rho-k\gamma)(g,\bar{x})$

et également si $\sigma^2 = 0$ que pour tout g du support de p^k et $\bar{x}$ du support de ν on a

(21) $h_k(g,\bar{x}) = \int h_k(g',\bar{x})\, p^k(dg')$

Exprimons h_k à l'aide de h ; pour cela remarquons tout d'abord que puisque ρ est un cocycle additif sur $G \times P(\mathbb{R}^d)$ on a

$$Q_{p^k}\, \rho(g,\bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} (Q_p)^i\, \rho(g,\bar{x}) \qquad g \in G_p \quad \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$$

De plus pour toute fonction F telle que $F(g,\bar{x}) = f(g.\bar{x})$ on a

$$Q_{p^k}\, F(g,\bar{x}) = (Q_p)^k\, F(g,\bar{x})$$

Par conséquent pour tout $j\geq 1$ on a

$$Q^j_{p^k}\, \rho(g,\bar{x}) = (Q_p^{kj-k})\, [\sum_{i=1}^{k} (Q_p)^i]\, (\rho)(g,\bar{x})$$

Il en résulte que

$$h_k(g,\bar{x}) = \rho(g,\bar{x}) - k\gamma + \sum_{j\geq 1} (Q_p^{kj-k})\, [\sum_{i=1}^{k} (Q_p)^i]\, (\rho-\gamma)(g,\bar{x})$$

ce qui prouve que

$$h_k(g,\bar{x}) = h(g,\bar{x}) - (k-1)\gamma \qquad g \in G_p \qquad \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$$

De l'égalité (21) on déduit alors que pour tout g du support de p^k et tout $\bar{x}$ du support de ν on a

$$h(g,\bar{x}) = \int h(g',\bar{x})\ p^k(dg')$$

A l'aide du lemme 8, on peut alors établir la

PROPRIETE 1. *Si* $\sigma^2=0$ *il existe une constante* $c'>0$ *telle que pour tout* $k\geq 1$ *on ait pour tout* g *dans le support de* p^k *et tout* $\bar{x}$ *dans le support de* ν

$$|\rho(g,\bar{x}) - k\gamma| \leq c'$$

Démonstration de la propriété 1

On peut écrire h sous la forme

$h(g,\bar{x}) = \rho(g,\bar{x}) + f(g\bar{x})$ où f est continue sur $P(\mathbb{R}^d)$.

Il résulte alors du lemme 8 que pour tout g dans le support de p^k $k\geq 1$ et tout $\bar{x}$ dans le support de ν on a

$$(22)\quad |\rho(g,\bar{x}) - \int\rho(g',\bar{x})\ p^k(dg')| \leq 2|f|$$

De plus on a pour $n\geq 1$

$$\frac{1}{n}\int\rho(g',\bar{x})\ p^n(dg') = \frac{1}{n}\ E\ \mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\| = \frac{\partial}{\partial\lambda}\ E(e^{\frac{\lambda}{n}\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\dots g_1 x\|})_{\lambda=0} =$$

$$= k'(0)+\frac{1}{n}\ N_1^{(1)}(0)e(\bar{x})+\frac{1}{2i\pi}\int_{I_2} z^n\ R^{(1)}(z)\dot{e}(\bar{x})\ dz$$

pour $x \in S_{d-1}$

On en déduit qu'il existe une constante K' telle que pour tout $k\geq 1$ on ait

$$(23)\quad |\int\rho(g',x)\ p^k(dg') - k\gamma| \leq K'$$

La propriété 1 est alors une conséquence de (22) et (23).

Cette propriété permet d'établir facilement que $\sigma^2 > 0$. En effet supposons que $\sigma^2 = 0$ et soit alors g un élément commun au support de $p^{n_0+k_0}$ et au support de p^{n_0}. Pour tout $k\geq 1$ et tout $\bar{x}$ du support de ν on a alors

$$|\rho(g^k,\bar{x}) - k(n_0+k_0)\gamma| \leq c'$$

et $\quad |\rho(g^k,\bar{x}) - k\ n_0\ \gamma| \leq c'$

d'où il résulte que pour tout $k\geq 1$

$$|k\ k_0\ \gamma| \leq 2c'$$

ce qui est impossible puisque $\gamma \neq 0$ et par conséquent $\sigma^2>0$.

f) Du lemme 6 et de (8) on déduit immédiatement que pour $|\lambda| < b$

$$\lim_n E\left(e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}(\log\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma)}\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(k''(o)-\gamma^2)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2}$$

ce qui prouve l'affirmation 3).

g) Pour prouver le 4) précisons la convergence obtenue dans f)

<u>LEMME 9</u>

Il existe un réel $c>0$ *tel que pour* $|\lambda| \leq c\sqrt{n}$ $x \in S_{d-1}$ *et* $n \geq 1$ *on ait*

$$\left|E(e^{i\lambda Z_n(x)}) - e^{\frac{-\lambda^2}{2}}\right| \leq e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\left(\frac{2|A||\lambda|^3}{\sigma^3\sqrt{n}} + c_7\frac{|\lambda|}{\sigma\sqrt{n}}\right) + c_5\frac{|\lambda|}{\sigma\sqrt{n}}\rho_1^n$$

<u>Démonstration du lemme 9</u>

D'après le lemme 6 on a pour $|\lambda| < \sigma b$

$$e^{-i\frac{\lambda\sqrt{n}\gamma}{\sigma}}\left(k\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n N_1\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)e(\bar{x}) - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = A_n(\lambda) + B_n(\lambda) \tag{24}$$

où

$$A_n(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\left[e^{i\frac{\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}A + \frac{\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}\varepsilon_2\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)} - 1\right]$$

et

$$B_n(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{i\frac{\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}A + \frac{\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}\varepsilon_2\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left(i N_1^{(1)}e(\bar{x}) - \frac{\lambda}{2\sigma\sqrt{n}}N_1^{(2)}e(\bar{x}) - \frac{\lambda}{2\sigma\sqrt{n}}N_1^{(3)}\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)e(\bar{x})\right)$$

Il existe un réel $c > 0$ tel que $c < \sigma b$, $\frac{2|A|c}{\sigma^3} < \frac{1}{4}$ et tel que pour $|\lambda| \leq c\sqrt{n}$ on ait

$$\left|\frac{i\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}A + \frac{\lambda^3}{\sigma^3\sqrt{n}}\varepsilon_2\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{|\lambda|}{\sqrt{n}}\frac{2|A|\lambda^2}{\sigma^3} \leq \frac{1}{4}\lambda^2 \qquad n \geq 1$$

et aussi

$$\sup_{\bar{x}\in P(\mathbb{R}^d)}\left|i N_1^{(1)}e(\bar{x}) - \frac{\lambda}{2\sigma\sqrt{n}}N_1^{(2)}e(\bar{x}) - \frac{\lambda}{2\sigma\sqrt{n}}N_1^{(3)}\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)e(\bar{x})\right| \leq c_7 < +\infty$$

On en déduit en utilisant l'inégalité $|e^z - 1| \leq |z|\, e^{|z|}$ que pour $|\lambda| \leq c\sqrt{n}$ $n \geq 1$ on a

$$(25) \quad |A_n(\lambda)| \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \frac{|\lambda|}{\sqrt{n}} \frac{2|A|\lambda^2}{\sigma^3} \cdot e^{\frac{|\lambda|}{\sqrt{n}} \frac{2|A|\lambda^2}{\sigma^3}} \leq \frac{|\lambda|}{\sqrt{n}} \frac{2|A|\lambda^2}{\sigma^3} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

et aussi

$$(26) \quad |B_n(\lambda)| \leq c_7 \frac{|\lambda|}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{\frac{\lambda^2}{4}} \leq c_7 \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

Le lemme 9 se déduit immédiatement de (24), (25), (26) et de (9)

Grâce à l'inégalité de Esseen [5] on a

$\forall\ T > 0 \qquad \forall\ n \geq 1$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P(Z_n(x) \leq t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{K}{T} + \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1}{|\lambda|} \left| e^{i\lambda Z_n(x)} - e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \right| d\lambda$$

où $\quad K = \dfrac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}$

En posant $T = c\sqrt{n}$ et en tenant compte du lemme 9 il vient

$$\sup_{\substack{x \in S_{d-1} \\ t \in \mathbb{R}}} \left| P(Z_n(x) \leq t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq \frac{K}{c\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-c\sqrt{n}}^{c\sqrt{n}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} (2A\lambda^2 + \frac{c_7}{\sigma})\, d\lambda + \frac{c_5}{\sqrt{n}} \frac{\rho_1^n}{\sigma} \int_{-c\sqrt{n}}^{c\sqrt{n}} d\lambda$$

ce qui compte tenu du fait que $\rho_1 < 1$ et de la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} (2A\lambda^2 + \frac{c_7}{\sigma})\, d\lambda$ établit l'assertion 4)

4.2 Précisons les résultats précédents en établissant un théorème de la limite centrale fonctionnel.

Soit $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[0,1]$. Pour $x \in S_{d-1}$ posons

$$S_n^x = \frac{1}{\sigma} (\log \| g_n g_{n-1} \cdots g_1 x \| - n\gamma) \qquad n \geq 1$$

et considérons la fonction aléatoire $X_n^x \in \mathcal{C}[0,1]$ $n \geq 1$ définie par

$$X_n^x(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}^x + \frac{nt - [nt]}{\sqrt{n}} \log \frac{\| g_{[nt]+1} g_{[nt]} g_{[nt]-1} \cdots g_1 x \|}{\| g_{[nt]} g_{[nt]-1} \cdots g_1 x \|}$$

$x \in S_{d-1}$, $n \geq 1$, $t \in [0,1]$

Notant W la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}[0,1]$ [1] on a le

théorème 3

Sous les hypothèses du théorème 2 , pour tout $x \in S_{d-1}$ *la suite de fonctions aléatoires* $(X_n^x)_{n \geq 1}$ *converge en loi vers* W .

Démonstration du théorème 3

Commençons par énoncer et prouver des lemmes utiles à cette démonstration.

a) LEMME 10

Pour tout $x \in S_{d-1}$ *les distributions de dimension finie de* $(X_n^x)_{n \geq 1}$ *convergent vers celles de* W.

Démonstration du lemme 10

Considérons tout d'abord le cas d'un seul instant s. On a

$$(27)\quad \forall n \geq 1 \quad \left| X_n^x(s) - \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[ns]}^x \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \log \| g_{[ns]+1} \frac{g_{[ns]} g_{[ns]-1} \cdots g_1 x}{\| g_{[ns]} g_{[ns]-1} \cdots g_1 x \|} \|$$

Lorsque n tend vers l'infini le second membre de cette inégalité converge presque sûrement vers 0, de plus d'après le théorème 2 la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{[ns]}^x\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers B_s, par conséquent la suite $(X_n^x(s))_{n \geq 1}$ converge en loi vers W_s.

Considérons maintenant deux instants s et t avec $s < t$. Nous allons prouver que

$$(X_n^x(s),\ X_n^x(t))_{n \geq 1} \text{ converge en loi vers } (W_s,\ W_t).$$

Pour cela, il suffit [1] de montrer que

$$(X_n^x(s),\ X_n^x(t) - X_n^x(s))_{n \geq 1} \quad \text{converge en loi vers } (W_s,\ W_t - W_s)$$ ou encore en tenant compte de (27) appliquée aux instants t et s que

(28) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S^x_{[ns]}, \frac{1}{\sqrt{n}}(S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]})\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $(W_s, W_t - W_s)$

Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\forall x \in S_{d-1}$, $n \geq 1$

$$P\left[\frac{S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \alpha ; \frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta\right] = \int E\left(\frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta \,\Big|\, \mathcal{F}_{[ns]}\right)^1 \left[\frac{S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \alpha\right] dp$$

Comme

$$E\left(\frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta \,\Big|\, \mathcal{F}_{[ns]}\right) = \int 1_{\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \log\| g \frac{g_{[ns]} g_{[ns]-1} \cdots g_1 x\|}{\|g_{[ns]} \cdots g_1 x\|} - ([nt]-[ns])\gamma \leq \beta\right\}} p^{[ns]-[nt]}(dg)$$

il résulte du théorème 2 4) que $\forall$ $n \geq 1$, $\forall x \in S_{d-1}$

$$\left|E\left(\frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta \,\Big|\, \mathcal{F}_{[ns]}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{[nt]-[ns]}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right| \leq \frac{c}{\sqrt{[nt]-[ns]}}$$

Par conséquent on a $\forall n \geq 1$ $\forall x \in S_{d-1}$

$$\left|P\left(\frac{S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \alpha, \frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta\right) - P\left(\frac{S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \alpha\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\beta\sqrt{n}}{\sqrt{[nt]-[ns]}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right|$$

$$\leq \frac{c}{\sqrt{[nt]-[ns]}}$$

d'où l'on déduit facilement que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \alpha ; \frac{S^x_{[nt]} - S^x_{[ns]}}{\sqrt{n}} \leq \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{u^2}{2s}} du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du$$

ce qui établit (28).

Le cas de plus de deux instants se traite de manière analogue, d'où le lemme

b) LEMME 11

il existe un réel $d_1 > 0$ *tel que* $\forall n \geq 1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in S_{d-1}$ *on ait*

$$P\left(\sup_{1 \leq i \leq n} |S_i^x| \geq \varepsilon \right) \leq 4\, P\left(|S_n^x| \geq \varepsilon - d_1 \sqrt{n} \right)$$

Démonstration du lemme 11

Notons $(S_n^x)^* = \sup_{1 \leq j \leq n} |S_j^x|$

La démonstration du lemme 11 sera obtenue à l'aide des deux lemmes suivants :

α) LEMME 12

$\forall y, a > 0, \forall x \in S_{d-1}$ *et* $\forall n \geq 1$ *on a*

$$P((S_n^x)^* \geq y + a) \leq \frac{P(|S_n^x| \geq y)}{\displaystyle\inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n-1}} P(|S_k^z| < a)}$$

Démonstration du lemme 12

Notons

$$A_1(x) = \{ |S_1^x| \geq y + a \}$$

$$A_k(x) = \{ |S_k^x| \geq y + a \; ; \; |S_l^x| < y + a \quad \text{pour } 1 \leq l \leq k-1 \}$$

pour $k \geq 2$

$$B_k^n(x) = \left\{ \left| \frac{1}{\sigma} \sum_{j=k+1}^{n} \left(\log \left\| g_j \frac{g_{j-1} g_{j-2} \cdots g_1 x}{\| g_{j-1} g_{j-2} \cdots g_1 x \|} \right\| - \gamma \right) \right| < a \right\}$$

pour $0 \leq k \leq n-1$

$$C_n(x) = \{ |S_n^x| \geq y \}$$

On a

$$C_n(x) \supset \bigcup_{k=1}^{n} [A_k(x) \cap B_k^n(x)]$$

et par conséquent $\forall n \geq 1$

$$(29) \quad P(C_n(x)) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k(x) \cap B_k^n(x))$$

Or on a $\forall n \geq 1 \quad 1 \leq k \leq n$

$$(30) \quad P(B_k^n(x) \cap A_k(x)) = \int 1_{A_k(x)} P(B_k^n(x)/\mathcal{F}_k)dP$$

et

$$(31) \quad \text{p.s.} \quad P(B_k^{(n)}(x)/\mathcal{F}_k) = \int 1_{\{g/\frac{1}{\sigma}|\operatorname{Log}\|g\frac{g_k g_{k-1}\cdots g_1 x}{\|g_k g_{k-1}\cdots g_1 x\|}\| - (n-k)\gamma| < a\}} \, p^{n-k}(dg)$$

$$\geq \inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n-1}} P\{\frac{1}{\sigma}|\operatorname{Log}\|g_{n-k}\cdots g_1 z\| - (n-k)\gamma| < a\}$$

soit

$$(32) \quad \text{p.s.} \quad P(B_k^{(n)}(x)/\mathcal{F}_k) \geq \inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n-1}} P(|S_k^z| < a)$$

et par conséquent

$$(33) \quad P(C_n(x)) \geq [\sum_{k=1}^{n} P(A_k(x))] \inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n-1}} P(|S_k^z| < a)$$

c'est-à-dire

$$(34) \quad P(C_n(x)) \geq P((S_n^x)^* \geq y+a) \inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n}} P(|S_k^z| < a)$$

d'où le lemme 12 .

β) <u>LEMME 13</u> *Il existe une constante* $d_1 > 0$ *telle que* $\forall n \geq 1$

$$\inf_{\substack{z \in S_{d-1} \\ 1 \leq k \leq n-1}} P(|S_k^z| < d_1 \sqrt{n}) \geq \frac{1}{4}$$

Démonstration du lemme 13

$\forall z \in S_{d-1}$, $\forall d_1 > 0$, $\forall n \geq 0$ et $1 \leq k \leq n-1$ on a d'après le théorème 2 4)

$$(35) \quad P(|S_k^z| < d_1 \sqrt{n}) = P\left(\frac{|S_k^z|}{\sqrt{k}} < d_1 \sqrt{\frac{n}{k}}\right) \geq P\left(\frac{|S_k^z|}{\sqrt{k}} < d_1\right) \geq \int_{-d_1}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du - \frac{2c}{\sqrt{k}}$$

Soit n_0 un entier tel que pour $k \geq n_0$ on ait $\frac{2c}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{4}$; on choisit alors d_1 de sorte que

$$\int_{-d_1}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du > \frac{1}{2}$$

Dans ces conditions d'après (35) on a

$\forall z \in S_{d-1}$ $\quad \forall n \geq n_0+1$ et $n_0 \leq k \leq n-1$

$$(36) \quad P(|S_k^z| < d_1 \sqrt{n}) \geq \frac{1}{4}$$

on peut de plus choisir d_1 suffisamment grand pour que pour tout $1 \leq k \leq n_0$ on ait

$$(37) \quad \inf_{z \in S_{d-1}} P(|S_k^z| < d_1) \geq \frac{1}{4}$$

d'où le lemme 12.

Le lemme 11 est une conséquence immédiate des lemmes 12 et 13, où l'on a posé $y = \varepsilon - d_1 \sqrt{n}$ et $a = d_1 \sqrt{n}$

d) LEMME 14 *Pour tout* $x \in S_{d-1}$ *la suite des distributions des fonctions aléatoires* $(X_n^x)_{n \geq 1}$ *est équitendue*

Démonstration du lemmme 14

Pour établir ce lemme il suffit d'après [1] de montrer que

$\forall \varepsilon > 0$ il existe un réel $\lambda > 1$ et un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$(38) \quad P\left(\sup_{1 \leq i \leq n} |S_{k+i}^x - S_k^x| \geq \lambda \sqrt{n}\right) \leq \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$$

pour tout k.

Pour $\lambda > 0$ on a d'après le lemme 11

$$(39) \quad P\left(\sup_{1 \leq i \leq n} |S_{k+i}^x - S_k^x| \geq \lambda \sqrt{n}\right) \leq 4P(|S_{k+n}^x - S_k^x| \geq \lambda \sqrt{n} - d_1 \sqrt{n})$$

d'où puisque d'après le théorème 2 4)

$$P\left(|S^x_{k+n} - S^x_k| \geq \lambda\sqrt{n} - d\sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u|\ |u|\geq \lambda - d_1\}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \frac{2c}{\sqrt{n}}$$

il résulte que

$$(40)\quad P\left(\sup_{1\leq i\leq n} |S^x_{k+i} - S^x_k| \geq \lambda\sqrt{n}\right) \leq 4\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u|\ |u|\geq \lambda - d_1\}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \frac{2c}{\sqrt{n}}\right)$$

Par conséquent si $\lambda > 2\,d_1$ on a $\forall\, x \in S_{d-1}$, $\forall\, n\geq 1$ $\forall\, k\geq 1$

$$(41)\quad P\left(\sup_{1\leq i\leq n} |S^x_{k+i} - S^x_k| \geq \lambda\sqrt{n}\right) \leq 4\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u|\ |u|\geq \frac{1}{2}\lambda\}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \frac{2c}{\sqrt{n}}\right)$$

De (41) et de l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u|\ |u| > \frac{\lambda}{2}\}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \leq \frac{8}{\lambda^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |u|^3 e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \frac{c_7}{\lambda^3}$$

on déduit que $\varepsilon > 0$ étant donné on obtient (38) en choisissant par exemple

$$\lambda = \sup\left(\frac{2c_7}{\varepsilon}, 4d_1, 2\right) \text{ et } n_o = \left[\frac{4\lambda^4 c^2}{\varepsilon^2}\right] + 1$$

Le lemme 14 est ainsi prouvé.

e) le théorème 3 est une conséquence immédiate [1] du lemme 10 et du lemme 14.

4.3 Désignons par $\mathcal{N}$ la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$, on peut alors énoncer le

<u>théorème 4</u>

Sous les hypothèses du théorème 2 , pour tout $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ *les variables aléatoire* $Z_n(x)$ *, et* $g_n \ldots g_1\bar{x}$ $n\geq 1$ *à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}$ *et* $P(\mathbb{R}^d)$ *sont asymptotiquement indépendantes et la suite de variables aléatoires* $(Z_n(x), g_n \ldots g_1\bar{x})_{n\geq 1}$ *converge en loi vers la loi produit* $\mathcal{N} \otimes \nu$ *sur* $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$

Démonstration du théorème 4

$\forall\, x \in S_{d-1}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < a$ et $\forall\, f \in \mathcal{L}_{\lambda_o}$ on a facilement à l'aide de (13), (14) et du lemme 6

$$E(e^{i\lambda Z_n(x)}\, f(g_n g_{n-1} \cdots g_1 \bar{x})) = P\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right) f(\bar{x}) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} + \frac{i\lambda^3 A}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\lambda^3}{\sigma\sqrt{n}}\, \varepsilon_2\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)}$$

$$\times \left[\nu(f) + \frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}} N_1^{(1)} f(\bar{x}) - \frac{\lambda^2}{2\sigma^2 n} N_1^{(2)} f(\bar{x}) - \frac{\lambda^2}{\sigma^2 n} N_1^{(3)}\left(i\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right) f(\bar{x})\right]$$

$$+ e^{\frac{-i\lambda\sqrt{n}\gamma}{\sigma}}\, Q^n\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right) f(\bar{x})$$

on en déduit immédiatement que

$$\lim_n E\left(e^{i Z_n(x)} f(g_n g_{n-1} \cdots g_1 \bar{x})\right) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, \nu(f)$$

ce qui suffit à établir le théorème 4.

§5 - Une loi du logarithme itéré

THEOREME 5

Sous les hypothèses du théorème 2, pour tout $x \in S_{d-1}$ *l'ensemble des points d'accumulation de la suite* $\left(\frac{\text{Log}\|g_n g_{n-1} \cdots g_1 x\| - n\gamma}{\sigma \sqrt{2n \text{ Log Log } n}}\right)_{n \geq 1}$ *est presque sûrement non aléatoire et égal au segment* $[-1,1]$

Démonstration du théorème 5

Elle se fait en deux étapes

a) LEMME 15 $\forall x \in S_{d-1}$, $\forall \varepsilon > 0$ *on a*

$$P(\overline{\lim_n}\{|S_n^x| \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n \text{ Log Log } n}\}) = 0$$

Démonstration du lemme 15

Soit $d > 1$, posons $n_k = [d^{2k}]$ $k \geq 1$

on a

$$P(\overline{\lim_n}\{|S_n^x| \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n \text{ Log Log } n}\}) \leq P(\lim_k\{(S_{n_k}^x)^* \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n_{k-1} \text{ Log Log } n_{k-1}})$$

Montrons que pour un choix convenable de d

$$(43) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P((S_{n_k}^x)^* \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n_{k-1} \text{ Log Log } n_{k-1}}) < +\infty$$

D'après le lemme 11 on a

$$(44) \qquad P((S_{n_k}^x)^* \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n_{k-1} \text{ Log Log } n_{k-1}}) \leq 4 \; P\left(\frac{|S_{n_k}^x|}{\sqrt{n_k}} \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k} \text{ Log Log} n_{k-1}} - d_1\right)$$

d'où l'on déduit en utilisant le théorème 2 4)

$$(45) \quad P((S_{n_k}^x)^* \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2n_{k-1} \text{ Log Log } n_{k-1}}) \leq 4\left(2\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{LogLog}n_{k-1}} - d_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{2c}{\sqrt{n_k}}\right)$$

Pour tout $t > 0$ on a [11]

$$\int_t^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{t} e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{\theta}{t^2}\right) \qquad 0 < \theta < 1$$

Pour k assez grand on a donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}}-d_1}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du + \frac{c}{\sqrt{n_k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1)}$$

$$\exp-\frac{1}{2}[(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1]^2 \times \{1 - \frac{\theta}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1)^2}$$

$$+ \frac{2\pi\, c}{\sqrt{n_k}}((1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1)\exp\frac{1}{2}(1+\varepsilon)(\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1)^2\}$$

Il en résulte que lorsque k tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}}-d_1}^{\infty} e^{-u^2/2}\,du + \frac{c}{\sqrt{n_k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{d}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\text{ Log } k}}\exp-\frac{1}{2}[(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}}-d_1]^2$$

(46)
Posons $a_k = (1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}}$; on a

$$\exp-\frac{1}{2}[(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1]^2 = \exp-\frac{1}{2}d_1^2\,\exp-(1+\varepsilon)^2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}(1-\frac{2d_1}{a_k})$$

Comme pour k assez grand on a $\frac{n_{k-1}}{n_k}(1-\frac{2d_1}{a_k}) \geq \frac{1}{d^2}\,\frac{(1+\frac{\varepsilon}{2})^2}{(1+\varepsilon)^2}$

on en déduit que pour k assez grand

(47) $$\exp-\frac{1}{2}[(1+\varepsilon)\sqrt{2\frac{n_{k-1}}{n_k}\text{Log Log } n_{k-1}} - d_1]^2 \leq \exp-\frac{1}{2}d_1^2\,\exp-\frac{1}{d^2}(1+\frac{\varepsilon}{2})^2\text{ Log Log } n_{k-1}$$

Lorsque k tend vers $+\infty$

(48) $$\exp-\frac{1}{d^2}(1+\frac{\varepsilon}{2})^2\text{ Log Log } n_{k-1} \sim (2\text{ Log } d)^{-(\frac{1+\varepsilon/2}{d})^2}\, k^{-(\frac{1+\varepsilon/2}{d})^2}$$

En choisissant $1<d<1+\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient (43) à l'aide de (45), (46),(47),(48).

Le lemme de Borel Cantelli[15] et (42) permettent alors d'obtenir le lemme 15.

b) LEMME 16 $\forall x \in S_{d-1}$, *tout réel* $\alpha \in [-1,1]$ *est presque surement point d'accumulation de la suite*

$$\frac{\operatorname{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma}{\sigma\sqrt{2\, n \operatorname{Log}\operatorname{Log} n}} \qquad n \geq 1$$

Démonstration du lemme 16

Soient $\alpha \in [-1,1]$, $\varepsilon > 0$, $d > 1$. Posons $n_k = [d^{2k}]$ et considérons les ensembles

$$A_k(x) = \{\left|\frac{S^x_{n_k}}{\sqrt{2n_k \operatorname{Log}\operatorname{Log} n_k}} - \alpha\right| < \varepsilon\} \qquad k \geq 1$$

et

$$A'_k(x) = \{\left|\frac{S^x_{n_k} - S^x_{n_{k-1}}}{\sqrt{2n_k \operatorname{Log}\operatorname{Log} n_k}} - \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}\} \qquad k \geq 1$$

Commençons par prouver que $P(\overline{\lim_k}\, A'_k(x)) = 1$ pour un choix convenable de d ; pour cela il suffit d'après le lemme de Borel Cantelli [15] de montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} P(A'_k(x) / \bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x))$ est divergente

On a pour $k \geq 1$

$$P(A'_k(x) / \bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)) = \int \frac{P(A'_k(x)/\mathcal{F}_{n_{k-1}})}{P(\bigcap_{j=1}^{k-1} CA'_j(x))}\, 1_{\bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)}\, dP$$

et

$$P\text{p.s.} \quad P(A'_k(x)/\mathcal{F}_{n_{k-1}}) \geq \operatorname*{Inf}_{z \in S_{d-1}} P\left(\frac{|S^z_{n_k - n_{k-1}} - \alpha|}{\sqrt{2n_k \operatorname{Log}\operatorname{Log} n_k}} < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

En tenant compte du théorème 2 4) on en deduit alors que

$$(49) \quad P(A'_k(x) | \bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(|\alpha|+\frac{\varepsilon}{2})\sqrt{\frac{2n_k \operatorname{Log}\operatorname{Log} n_k}{n_k - n_{k-1}}}}^{(|\alpha|+\frac{\varepsilon}{2})\sqrt{\frac{2n_k \operatorname{Log}\operatorname{Log} n_k}{n_k - n_{k-1}}}} e^{-u^2/2}\, du - \frac{2c}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}} = f_k(\alpha,\varepsilon)$$

Si $|\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ on déduit de (49) que

$$\underline{\lim_k} P(A'_k(x)/\bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)) \geq \frac{1}{2}$$

et donc $\sum_{k=1}^{\infty} P(A'_k(x)/\bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)) = +\infty$

Si $|\alpha| > \frac{\varepsilon}{2}$ on voit en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 15 que lorsque k tend vers $+\infty$ on a

$$f_k(\alpha,\varepsilon) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(|\alpha|-\frac{\varepsilon}{2})\sqrt{(1-\frac{1}{d^2})(2\text{Log } k)}} \exp-\frac{1}{2} \frac{(|\alpha|-\frac{\varepsilon}{2})^2 \; 2n_k \text{Log Log } n_k}{n_k - n_{k-1}}$$

Le second membre de cette équivalence est le terme général d'une série divergente dès que $\frac{(\alpha-\varepsilon/2)^2}{1-\frac{1}{d}} < 1$; donc en choisissant d assez grand pour que cette condition soit réalisée, ce qui est possible car $0<|\alpha|-\frac{\varepsilon}{2}<1$ on a également

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A'_k(x)/\bigcap_{j=1}^{k-1} C A'_j(x)) = +\infty$$

Par conséquent pour tout $\alpha \in [-1,1]$, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un $d_0 > 1$ tel que pour $d > d_0$ on ait

$$(50) \qquad P(\overline{\lim_k} A'_k(x)) = 1$$

Considérons maintenant les ensembles

$$E_k(x) = \left\{\frac{|S^x_{n_{k-1}}|}{\sqrt{2n_k \text{ Log Log } n_k}} < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \qquad k\geq 1$$

D'après le lemme 15 il est clair que dès que $\frac{d\varepsilon}{2} > 1$ c'est-à-dire $d > \frac{2}{\varepsilon}$ on a

$P(\overline{\lim_k} \complement E_k(x)) = 0$ soit encore (51) $P(\underline{\lim_k} E_k(x)) = 1$

supposant d assez grand pour que (50) et (51) soient vérifiées on en déduit que

$$(52) \qquad P(\overline{\lim_k} (A'_k(x) \cap E_k(x))) = 1 .$$

d'où puisque pour tout $k\geq 1$

$$A'_k(x) \cap E_k(x) \subset A_k(x)$$

Il résulte que

$$(53) \qquad P(\overline{\lim_k} \; A_k(x)) = 1$$

ce qui établit le lemme 16.

Le théorème 5 est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents.

§6 - Un théorème limite local

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'établir un théorème limite local associé au théorème de la limite centrale prouvé au paragraphe 4.

Pour établir ce théorème il nous faudra outre les hypothèses (P) que la condition (C) suivante soit réalisée

(C) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \neq 0$ l'opérateur $P(i\lambda)$ de $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ dans $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ est de norme spectrale strictement inférieure à 1.

6-1 Nous envisagerons deux groupes d'hypothèses (P_1') et (P_2') sur le support de p qui assurent la validité de (C)

Avant de donner ces hypothèses précisons quelques notations. Nous noterons S_{p^k} le support de la probabilité p^k $k \geq 1$. De plus nous dirons qu'une matrice $\pi \in SL(d,\mathbb{R})$ est "réalisable" [13] s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\pi \in (S_p)^n$ et si de plus π a une valeur propre simple $q(\pi) > 0$ qui en module excède strictement toutes les autres valeurs propres de π.

Nous considérons alors les hypothèses suivantes :

Hypothèses (P_1')

1) p satisfait aux hypothèses (P)
2) il existe deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$ tels que
   $S_{p^{n+k}} \cap S_{p^n} \neq \phi$
3) le groupe engendré par $\Lambda = \{\mathrm{Log}\, q(\pi)/\pi$ "réalisable"$\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Hypothèses (P_2')

1) p est à support compact
2) il existe deux entiers $n \geq 1$ et $k \geq 1$ tels $S_{p^{n+k}} \cap S_{p^n} \neq \phi$
3) T_p contient un réseau de $SL(d,\mathbb{R})$

Nous pouvons alors énoncer la

Proposition 7 : *Sous l'une ou l'autre des hypothèses* (P_1') *ou* (P_2') *la condition* (C) *est vérifiée.*

Démonstration de la proposition 7 :

Pour établir la proposition 7, il suffit d'après la proposition 6, puisque (P) est réalisée sous chacune des hypothèses (P_1') ou (P_2'), de montrer que $P(i\lambda)$ $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$ n'admet pas de valeur propre de module égal à 1.

Raisonnons par l'absurde : supposons que pour un réel $\lambda \neq 0$ $P(i\lambda)$ possède une valeur propre μ de module 1 ; Soit $f\neq 0$ $f\in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ une fonction propre associée ; on a alors : $\forall n\geq 1$ $\forall \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$

$$(54) \qquad P^n(i\lambda)\, f(\bar{x}) = \int \alpha^{i\lambda}(g,\bar{x})\, f(g\bar{x})\, p^n(dg) = \mu^n f(\bar{x})$$

Notant S_ν le support de ν on en déduit alors le

LEMME 17

Pour tout $\bar{x} \in S_\nu$ *on a* $|f(\bar{x})| = \sup_{\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{y})|$

Démonstration du lemme 17

Soit $\bar{x}_0 \in P(\mathbb{R}^d)$ tel que $|f(\bar{x}_0)| = \sup_{\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{y})|$

de (54) il résulte que

$\forall n\geq 1$ $\quad |f(\bar{x}_0)| \leq P^n(0)\ |f|\ (\bar{x}_0)$

d'où puisque d'après le corollaire 1 $\lim P^n(0)\ |f|\ (x_0) = \nu|f|$

On a

$$\sup_{\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{y})| = f(\bar{x}_0) \leq \nu|f|$$

De cette inégalité et de la continuité de f on déduit alors immédiatement puisque ν est une probabilité que

$$\forall \bar{x} \in S_\nu \qquad |f(\bar{x})| = \sup_{\bar{y}\in P(\mathbb{R}^d)} |f(\bar{y})|$$

Le lemme et (54) permettent d'affirmer que

$\forall n\geq 1$ $\quad \forall g \in S_{p^n}$ $\quad , \quad \forall \bar{x} \in S_\nu$

$$(55) \qquad \alpha^{i\lambda}(g,\bar{\lambda})\, f(g\bar{x}) = \|g\bar{x}\|^{i\lambda}\, f(g\bar{x}) = \mu^n f(\bar{x})$$

et $f(\bar{x}) \neq 0$.

Il résulte alors du 2) de (P_i') i=1,2 et de (55) que $\mu^k = 1$ c'est-à-dire que sous l'une ou l'autre des hypothèses (P_1') ou (P_2') la suite $(\mu^n)_{n\geq 1}$ est finie.

Nous allons montrer que ceci est contradictoire avec le 3) de (P_i') i=1,2.

a) Envisageons tout d'abord le cas où les hypothèses (P_1') sont satisfaites.

Soit π une matrice "réalisable" de $SL(d,\mathbb{R})$ et soit $v\neq 0$ un vecteur propre associé à $q(\pi)$. Comme ν ne charge aucune sous variété projective de $P(\mathbb{R}^d)$ [9] il existe un élément $\bar{x}_1$ de S_ν tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \pi^n \bar{x}_1 = \bar{v}$$

ce qui, puisque $S_\nu \supset \overline{T_p \bar{x}_1}$ établit que $\tilde{v}$ appartient à S_ν .

Supposant que π appartienne à $S_p{}^{n_0}$, on obtient alors en appliquant (55) pour $g = \pi$ et $\bar{x} = \bar{v}$

$$(k(\pi))^{i\lambda} f(\bar{v}) = \mu^{n_0} f(\bar{v})$$

et

$$f(\bar{v}) \neq 0$$

Soit $\quad e^{i\lambda \operatorname{Log} k(\pi)} = \mu^{n_0}$

Ceci établit que $\forall \xi \in \Lambda \quad e^{i\lambda\xi} \in \{\mu^n \ n \geq 1\}$ et donc aussi puisque le groupe engendré par Λ est dense dans $\mathbb{R}$ que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{i\lambda t} \in \{\mu^n \ n \geq 1\}$$

ce qui est impossible puisque $\{\mu^n \ n \geq 1\}$ est fini.

La démonstration de la proposition 7 sous l'hypothèse (P_1') est ainsi achevée.

b) Supposons désormais que les hypothèses (P_2') sont satisfaites. Sous ces hypothèses pour tout $x \in P(\mathbb{R}^d)$ on a [8] .

$$\overline{T_p \bar{x}} = P(\mathbb{R}^d)$$

D'autre part [8] il existe un vecteur $W \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tel que $T_p W$ soit dense dans $\mathbb{R}^d - \{0\}$. D'après la remarque précédents $\overline{W}$ appartient à S_ν et il résulte de (56) que

$$(56) \qquad \overline{\{\|g\overline{W}\|^{i\lambda} \frac{f(g\overline{W})}{f(\overline{W})} \mid g \in \bigcup_{n\geq 1} S_p{}^n\}} = \{\mu^n \ n \geq 1\}$$

Comme $T_p W$ est dense dans $\mathbb{R}^d - \{0\}$ on a aussi l'inclusion.

$$(57) \qquad \overline{\{\|g\overline{W}\|^{i\lambda} \frac{f(g\overline{W})}{f(\overline{W})} \mid g \in \bigcup_{n\geq 1} S_p{}^n\}} \supset \{t^{i\lambda} / \ t>0\}$$

Comme la suite $\{\mu^n \ n \geq 1\}$ est finie (56) et (57) sont contradictoires et la proposition 7 est ainsi établie sous l'hypothèse (P_2').

6-2

Notons $p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \qquad u \in \mathbb{R}$

On a alors le

THEOREME 6

Si les hypothèses (P_1') ou (P_2') sont satisfaites pour toute fonction f *continue à support compact dans* $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |\sqrt{n}\ \sigma E[f(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| -n\gamma, g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x})] - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}})\int_{\mathbb{R}\times P(\mathbb{R}^d)} f(t,\bar{y})\, dt\, \nu(d\bar{y})| = 0 \qquad (58)$$

on en déduit le

Corollaire 2 : *Sous les hypothèses du théorème 6 pour toute fonction* f *continue à support compact dans* $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$ *et pour tout compact* C *de* $\mathbb{R}$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{(u,x)\in C\times S_{d-1}} |\sqrt{2\pi n}\ \sigma\ E[f(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma, g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x})] - \int_{\mathbb{R}\times P(\mathbb{R}^d)} f(t,\bar{y})\, dt\, \nu(d\bar{y})| = 0 \ .$$

Démonstration du théorème 6

Elle se fait en plusieurs étapes

a) Soit $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|\, dx < +\infty$ et telles que $h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\hat{h}(u)du$ où $\hat{h}$ est continu à support compact.

On commence par établir que (58) est vérifié pour les fonctions f de la forme $f = h \otimes \phi \qquad h \in \mathcal{H}\ , \qquad \phi \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$.

On a

$$2\pi\sqrt{n}\ \sigma\ E\ h(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma)\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1\ \bar{x})$$
$$= \sqrt{n}\ \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda u}\ \hat{h}(\lambda)\ E(e^{i\lambda\sigma Z_n(x)}\ f(g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x}))\, d\lambda$$

et

$$E(e^{i\lambda\sigma\sqrt{n}Z_n(x)}\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1 x)) = e^{-i\lambda n\gamma}\ P^n(i\lambda)\ \phi(\bar{x}) = e^{-i\lambda n\gamma}$$
$$[k(i\lambda)]^n\ N_1(i\lambda)\ \phi(\bar{x}) + e^{-i\lambda n\gamma}[Q(i\lambda)]^n\ \phi(\bar{x})$$

D'autre part, on a

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt\; p\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \hat{h}(0) \int e^{-i\frac{\lambda u}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, d\lambda$$

Supposons que le support de $\hat{h}$ soit inclus dans $[-\alpha,\alpha]$. Soit $\varepsilon>0$; il existe un réel $d(\varepsilon) > 0$ tel que $d(\varepsilon) < a \frac{d(\varepsilon)}{\sigma} < a\ \ d(\varepsilon) < \alpha$ et tel que pour $|\lambda| < d(\varepsilon)\, \sigma \sqrt{n}$, on ait

$$(59)\quad \left| e^{-i\frac{\lambda\sqrt{n}\gamma}{\sigma}} \left(k\left(\frac{i\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n \right| \le e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

et

$$(60)\quad \left\| N_1\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \nu \right\|_{\lambda_0} < \varepsilon$$

Or

$$(61)\; 2\pi\sqrt{n}\,\sigma\, E[\, h(u+\operatorname{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\| - n\gamma)\, \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1 \bar{x})] - p\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt\; \nu(\phi)$$

$$= [\sqrt{n}\,\sigma \int_{\{|\lambda|<d(\varepsilon)\}} e^{-i\lambda u}\, \hat{h}(\lambda)\, e^{-in\lambda\gamma} [k(i\lambda)]^n \nu(\phi)\, d\lambda - \hat{h}(0) \int_{\{|\lambda|<d(\varepsilon)\sqrt{n}\sigma\}} e^{-i\frac{\lambda u}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, d\lambda\, \nu(\phi)]$$

$$+ \sqrt{n}\,\sigma \int_{\{|\lambda|<d(\varepsilon)\}} e^{-i\lambda u}\, \hat{h}(\lambda)\, e^{-i\lambda n\gamma} [k(i\lambda)]^n\, [N_1(i\lambda)\phi(x) - \nu(\phi)]\, d\lambda$$

$$+ \sqrt{n}\,\sigma \int_{\{|\lambda|<d(\varepsilon)\}} e^{-i\lambda u}\, \hat{h}(\lambda)\, e^{-i\lambda n\gamma}\, Q^n(i\lambda)\, \phi(\bar{x})\, d\lambda$$

$$+ \sqrt{n}\,\sigma \int_{\{d(\varepsilon)\le|\lambda|\le\alpha\}} e^{-i\lambda u}\, \hat{h}(\lambda)\, e^{-i\lambda n\gamma}\, P^n(i\lambda)\, \phi(\bar{x})\, d\lambda$$

$$- \hat{h}(0) \int_{\{|\lambda|\ge d(\varepsilon)\sqrt{n}\sigma\}} e^{-i\frac{\lambda u}{\sigma\sqrt{n}}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, d\lambda\; \nu(\phi)$$

$$= T_n^{(1)}(u) + T_n^{(2)}(u,x) + T_n^{(3)}(u,x) + T_n^{(4)}(u,x) + T_n^{(5)}(u)$$

Par changement de variable dans la première intégrale de $T_n^{(1)}(u)$ on obtient

$$T_n^{(1)}(u) = \int_{\{|t|<\sigma\sqrt{n}d(\varepsilon)\}} e^{-i\frac{\lambda u}{\sigma\sqrt{n}}} [\hat{h}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-i\frac{t\sqrt{n}\gamma}{\sigma}} k^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \hat{h}(0)\, e^{-\frac{t^2}{2}}]\, dt \times \nu(\phi)$$

Compte tenu de (59) on en déduit à l'aide du théorème de Lebesgue que

(62) $\lim_{n} \sup_{u\in\mathbb{R}} |T_n^{(1)}(u)| = 0$

De même par changement de variable on a

$$T_n^{(2)}(u,x) = \int_{\{|t|<\sigma\sqrt{n}d(\varepsilon)\}} e^{-i\frac{ut}{\sigma\sqrt{n}}} \hat{h}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-i\frac{t\sqrt{n}\gamma}{\sigma}} k^n\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right)\left[N_1\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\right) \phi(x) - \nu(\phi)\right] dt$$

Compte tenu de (59) et (60) il en résulte que

(63) $$\overline{\lim_{n}} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |T_n^{2}(u,x)| \leq \varepsilon \sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| \; \|\phi\|_{\lambda_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
$$= \sqrt{2\pi}\; \varepsilon \sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{h}(t)| \; \|\phi\|_{\lambda_0}$$

De (9), on déduit que

$$\sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |T_n^{(3)}(u,x)| \leq c_5\; d(\varepsilon)\; \rho_1^n \sqrt{n}\; \sigma \|\phi\|_{\lambda_0} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{h}(t)|$$

d'où

(64) $\lim_{n} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |T_n^{(3)}(u,x)| = 0$

Pour $d(\varepsilon)<|\lambda|<\alpha$ on a $\forall n\geq 1$ $\|P^n(i\lambda)\|_{\lambda_0} \leq C_8\beta^n$ avec $0<\beta<1$ et C_8 une constante, du fait de la condition (C), et de la continuité de $\lambda \to P(i\lambda)$.

Par conséquent :

$$\sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |T_n^{(4)}(u,x)| \leq \sqrt{n}\; \sigma \sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{h}(t)|\; C_8\; \beta^n \|\phi\|_{\lambda_0}$$

et donc (65) $\lim_{n} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |T_n^{(4)}(u,x)| = 0$

On a

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} |T_n^{(5)}(u)| \leq |\hat{h}(0)|\; |\nu(\phi)| \times \int_{\{|\lambda|>d(\varepsilon)\sqrt{n}\sigma\}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

et par conséquent

(66) $\lim_{n} \sup_{u\in\mathbb{R}} |T_n^{(5)}(u)| = 0$

De (61),(62),(63),(64),(65),(66) il résulte que

$$\overline{\lim_n} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} 2\pi|\sqrt{n}\,\sigma\, E(h(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x}\|-n\gamma)\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x})$$

$$- p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt \times \nu(\phi)| \leq \sqrt{2\pi}\ \varepsilon \sup_t|\hat{h}(t)|\ \|\phi\|_{\lambda_0}$$

ce qui suffit à établir, ε étant quelconque, que (58) est vérifiée pour $f = h \otimes \phi$ $h \in \mathcal{H}$, $\phi \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$

b) Montrons que (58) est également vérifiée pour $f = g \otimes \phi$, où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue à support compact et $\phi \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$. Il suffit d'ailleurs de considérer le cas où $\phi \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$; par un résultat d'approximation connu il existe des fonctions g_ε^- et g_ε^+ de $\mathcal{H}$ telles que

$$g_\varepsilon^- \leq g \leq g_\varepsilon^+$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon^+(t) - g_\varepsilon^-(t)\ dt < \varepsilon$$

De plus, on a

$$|\sigma\sqrt{n}\ E\ [g(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x})] - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt\ \nu(\phi)|$$

$$\leq \sigma\sqrt{n}\ E\ [g_\varepsilon^+(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x})] - \sigma\sqrt{n}\ E(g(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\phi(g_n\cdots g_1\bar{x}))$$

$$+|\sigma\sqrt{n}\ E[g_\varepsilon^+(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x})] - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon^+(t)\ dt\ \nu(\phi)|$$

$$+|p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty}(g(t)-g_\varepsilon^+(t))\ dt\ \nu(\phi)|$$

Comme

$$\sigma\sqrt{n}\ \{E[g_\varepsilon^+(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1\|-n\gamma)\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x})] - E[g(u+\mathrm{Log}\|g_1\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x})]\}$$

$$\leq \sigma\sqrt{n}\{E[g_\varepsilon^+(u+\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x})] - E[g^-(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x})]\}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}[g_\varepsilon^+(t)-g_\varepsilon^-(t)]\,dt\ \nu(\phi) + \delta_n(g_\varepsilon^+,\phi,u,x) + \delta_n(g_\varepsilon^-,\phi,u,x)$$

où l'on note

$$\delta_n(\theta,\phi,u,x) = |\alpha\sqrt{n}\ E(\theta(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)\ \phi(g_n g_{n-1}\cdots g_1\bar{x}) - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\ dt\ \nu(\phi)|.$$

et comme

$$|p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t)-g_\varepsilon^+(t))dt \ \nu(\phi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \ \nu(\phi)$$

on en déduit que

$$\overline{\lim_n} \sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |\sigma\sqrt{n} \ E \ g(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma) \ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x}) - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \ dt \ \nu(\phi)|$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \ \nu(\phi)$$

ce qui, puisque ε est quelconque, établit le résultat cherché.

c) (58) est également vérifiée pour toute fonction f de la forme $f = g \otimes \psi$ où g est continue à support compact sur $\mathbb{R}$, et $\psi \in \mathscr{C}(P(\mathbb{R}^d))$.

Ceci est une conséquence immédiate de b) ; du fait que $\mathscr{L}_{\lambda_0}$ est dense dans $(\mathscr{C}(P(\mathbb{R}^d)), |\ |)$ et de l'inégalité

$$\sup_{(u,x)\in\mathbb{R}\times S_{d-1}} |\sigma\sqrt{n} \ E[g(u+\mathrm{Log}\|g_ng_{n-1}\cdots g_1x\|-n\gamma) \ \phi(g_n\cdots g_1\bar{x}) \ - p(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}})\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt \ \nu(\phi)|$$

$$\leq |\phi| \quad C(g)$$

où $C(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)| \ dt + \sup_{\substack{(u,x)\in S_{d-1} \\ n\geq 1}} \sigma\sqrt{n} \ E[\ |g|(u+\mathrm{Log}\|g_n\cdots g_1x\|-n\gamma)] \ < +\infty$

d'après b)

d) Soit E l'espace vectoriel engendré par les fonctions considérées au c)

Pour toute fonction continue à support compact, et tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions f_ε^+ et f_ε^- de E telles que

$$f_\varepsilon^- \leq f \leq f_\varepsilon^+$$

et

$$\int_{\mathbb{R}\times P(\mathbb{R}^d)} [f_\varepsilon^+(u,b) - f_\varepsilon^-(u)t)] \ du \ \nu(dt) < \varepsilon$$

Les résultats de c) et un raisonnement analogue à celui utilisé en b) établissent alors le théorème 6.

<u>Démonstration du corollaire 6</u> : Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 6.

§7 - Théorèmes des grands écarts

7-1 Dans l'énoncé de la proposition 5, on peut supposer $0<a$ assez petit pour que dès que $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda|<a$ on ait $k(\lambda)>0$. Considérons alors la fonction $\psi(\lambda) = \text{Log } k(\lambda) - \gamma\lambda \quad |\lambda|<a$.

Cette fonction est analytique d'après la proposition 5 et on a

$$\psi'(0) = \frac{k'(0)}{k(0)} - \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi''(0) = \frac{k''(0)\, k(0) - k'(0)^{2}}{k^{2}(0)} = \sigma^{2}>0$$

Il existe alors un intervalle $[-A,A]$ $A>0$ sur lequel ψ soit strictement convexe. Nous supposerons de plus A assez petit pour que si $|\lambda|\leq A$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et si $e_\lambda \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ $e_\lambda \neq 0$ est une fonction propre vérifiant $P(\lambda)\, e_\lambda = k(\lambda)\, e_\lambda$ alors e_λ est strictement positive sur $P(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'établir les deux théorèmes suivants :

THEOREME 7 :
Sous les hypothèses du théorème 2, pour tout ε *tel que* $0<\varepsilon<\frac{\psi(A)}{A}$

$$\lim_n \{ \sup_{x\in S_{d-1}} P(\frac{\text{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma>\varepsilon)\}^{1/n} = e^{-c(\varepsilon)}$$

où $0<c(\varepsilon) = \sup_{0<t\leq A} [t\varepsilon-\psi(t)] = \lambda(\varepsilon)\, \psi'(\lambda(\varepsilon)) - \psi(\lambda(\varepsilon))$

$\lambda(\varepsilon)$ *désignant l'unique solution de l'équation* $\psi(\lambda) = \varepsilon$

THEOREME 8 :

Sous l'une ou l'autre des hypothèses (P'_1) *ou* (P'_2) *pour tout* ε *tel que* $0<\varepsilon<\frac{\psi(A)}{A}$, *et* $x \in S_{d-1}$ *lorsque* $n\to+\infty$

$$P(\frac{\text{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma>\varepsilon) \sim \frac{e^{-nc(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n}\; a(\varepsilon)} N_1(\lambda(\varepsilon))\, e(\bar{x})$$

où $0<c(\varepsilon) = \sup_{0<t<A} [t\varepsilon-\psi(t)] = \lambda(\varepsilon)\, \psi'(\lambda(\varepsilon)) - \psi(\lambda(\varepsilon))$

$\lambda(\varepsilon)$ *désignant l'unique solution de l'équation* $\psi'(\lambda) = \varepsilon$

et $a(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\, \sqrt{\psi''(\lambda(\varepsilon))}$

7-2 Avant de démontrer ces théorèmes précisons quelques notations et énonçons plusieurs lemmes.

On appelle Q le noyau de transition défini sur $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$ par

$$Qf(u,\bar{x}) = \int f(u+\text{Log}\,\alpha(g,\bar{x}),g\bar{x})\, p(dg) \qquad u \in \mathbb{R}\ ,\ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$$

Pour $|\lambda| \leq A$ soit $h_\lambda(u,\bar{x}) = e^{\lambda u}\, e_\lambda(\bar{x}) \qquad u \in \mathbb{R}\ ,\ \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$

On a

$$Qh_\lambda = k(\lambda)\, h_\lambda$$

Ce qui permet de définir le noyau markovien relativisé ${}^\lambda Q$ sur $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$ par

$${}^\lambda Q(f) = \frac{Q(h_\lambda f)}{h_\lambda\, k(\lambda)}$$

On note $({}^\lambda S_n, {}^\lambda X_n)_{n \geq 0}$ la chaine de Markov à valeurs dans $\mathbb{R} \times P(\mathbb{R}^d)$ associée au noyau ${}^\lambda Q$.

On a alors le

<u>LEMME 18</u> :

Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq A$, $x \in S_{d-1}$, $\varepsilon > 0$ *on a*

$$(67) \qquad P\left(\frac{\text{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma > \varepsilon\right) = h_\lambda(0,\bar{x})\, e^{-n[\lambda\varepsilon - \psi(\lambda)]}$$

$$E_{(0,\bar{x})}\left(\frac{e^{-\lambda[{}^\lambda S_n - n(\gamma+\varepsilon)]}}{e_\lambda({}^\lambda X_n)}\, 1_{\{{}^\lambda S_n - n\gamma > n\varepsilon\}}\right)$$

<u>Démonstration du lemme 18</u> :

On a

$$P\left(\frac{\text{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma > \varepsilon\right) = Q^n(1_{\{u/u>n(\gamma+\varepsilon)\}} \otimes 1_{P(\mathbb{R}^d)})\,(0,\bar{x})$$

$$= h_\lambda(0,\bar{x})\,[k(\lambda)]^n\, ({}^\lambda Q)^n\, \left(\frac{1}{h_\lambda}\, 1_{\{u/u>n(\gamma+\varepsilon)\}} \otimes 1_{P(\mathbb{R}^d)}\right)\,(0,\bar{x})$$

$$= h_\lambda(0,\bar{x})\, e^{n[\psi(\lambda)+\gamma\lambda]}\, E_{(0,\bar{x})}\left(\frac{e^{-\lambda\, {}^\lambda S_n}}{e_\lambda({}^\lambda X_n)}\, 1_{\{{}^\lambda S_n > n(\gamma+\varepsilon)\}}\right)\,(0,\bar{x})$$

L'égalité (67) s'en déduit immédiatement.

Soit $0<\varepsilon<\frac{\psi(A)}{A}$; notons $\lambda(\varepsilon)$ l'unique valeur de λ pour laquelle $0<\lambda(\varepsilon)<A$ et $\varepsilon\,\lambda(\varepsilon) - \psi(\lambda(\varepsilon)) = \sup\limits_{0<t\leq A}\,(t\varepsilon - \psi(t))$

Remarquons que (68) $\psi'(\lambda(\varepsilon)) = \frac{k'(\lambda(\varepsilon))}{k(\lambda(\varepsilon))} - \gamma = \varepsilon$

Les lemmes qui suivent sont consacrés à l'étude des propriétés asymptotiques de la chaine de Markov $({}^{\lambda(\varepsilon)}S_n, {}^{\lambda(\varepsilon)}X_n)_{n\geq 0}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ $|\lambda| < a$ il est clair que l'opérateur $N_1(\lambda)$ apparaissant dans la proposition 5 peut s'écrire sous la forme

$$N_1(\lambda)\ f = \nu_\lambda[\frac{f}{e_\lambda}]\, e_\lambda \qquad f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$$

où ν_λ est une probabilité sur $P(\mathbb{R}^d)$.

On a alors le

LEMME 19 :

Sous les hypothèses du théorème 2, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $|\lambda| < a$, *il existe un réel* $r>0$ *tel que pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ $|\alpha| < r$, $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$, $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$ $n \geq 1$ *on ait*

$$E_{(0,\bar{x})}\,[e^{i\alpha\,{}^\lambda S_n} f({}^\lambda X_n)] = \frac{P(\lambda+i\alpha)(e_\lambda f)\ (\bar{x})}{[k(\lambda)]^n\ e_\lambda(\bar{x})} = \{1+i\alpha\frac{k'(\lambda)}{k(\lambda)}$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\frac{k''(\lambda)}{k(\lambda)} + \alpha^2\ \varepsilon(\alpha)\}^n\ \{\nu_\lambda(f) + \alpha\frac{N_1^{(1)}(\lambda)[fe_\lambda](\bar{x})}{e_\lambda(\bar{x})}$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\frac{N_1^{(2)}(\lambda)[fe_\lambda](\bar{x})}{e_\lambda(\bar{x})} + \alpha^2\frac{N_1^{(3)}(\lambda+i\alpha)[fe_\lambda](\bar{x})}{e_\lambda(\bar{x})}\}$$

$$+\frac{Q^n(\lambda+i\alpha)[e_\lambda f](\bar{x})}{k^n(\lambda)\ e_\lambda(\bar{x})}$$

où $\lim_{\alpha\to 0} \varepsilon(\alpha) = 0$, $N_1^{(1)}(\lambda)$, $N_1^{(2)}(\lambda)$, $N_1^{(3)}(\lambda+i\alpha)$ $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \mathcal{L}_{\lambda_0})$

Démonstration du lemme 19 :

Ce lemme est une conséquence immédiate de la proposition 5.

On en déduit le

LEMME 20 :

Sous les hypothèses du théorème 2, pour tout réel α , *toute* $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ *et tout* $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^d)$ *on a*

1) $\lim_n E_{(0,\bar{x})}\left(e^{i\alpha \frac{^{\lambda(\varepsilon)}S_n}{n}}\right) = e^{i(\gamma+\varepsilon)\alpha}$

2) $\lim_n E_{0,\bar{x})}\left(e^{i\alpha \frac{\frac{^{\lambda(\varepsilon)}S_n}{n}-(\gamma+\varepsilon)}{\sqrt{n}}} f({}^{\lambda(\varepsilon)}X_n)\right) = e^{-\frac{1}{2}\psi''(\lambda(\varepsilon))\alpha^2} \nu_{\lambda(\varepsilon)}(f)$

Démonstration du lemme 20 :

Ce lemme est une conséquence facile du lemme 19, de la proposition 5 et de l'égalité (68).

On peut préciser les résultats du 2) du lemme précédent en établissant un théorème limite local dans le cas où l'une ou l'autre des hypothèses (P_1') ou (P_2') est satisfaite. Pour cela, nous avons tout d'abord besoin du

LEMME 21 :

Sous l'une ou l'autre des hypothèses (P_1') *ou* (P_2') *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ $|\lambda|<a$ *et* $\alpha \neq 0$ $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'opérateur défini par*

$$f \to \frac{P(\lambda+i\alpha)(fe_\lambda)}{k(\lambda)\ e_\lambda} \qquad f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$$

est de norme spectrale strictement inférieure à 1.

Démonstration du lemme 21 :

Elle se fait de façon analogue à celle de la proposition 7.

Tout d'abord si $f \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ $f \neq 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$ sont tels que $|\mu| = 1$

et

$$P(\lambda+i\alpha)(fe_\lambda) = \mu k(\lambda)\ e_\lambda f$$

On en déduit que

$$\forall \bar{x}\ P(\mathbb{R}^d) \quad \forall n \geq 1 \quad \frac{P^n(\lambda)(|f|e_\lambda)(\bar{x})}{k^n(\lambda)\ e_\lambda(\bar{x})} \geq |f|(\bar{x})$$

d'où puisque $\lim_n \frac{P^n(\lambda)(|f|e_\lambda)(x)}{(k(\lambda))^n\ e_\lambda(\bar{x})} = \nu_\lambda |f|$

on a

$$\forall \bar{x} \in P(\mathbb{R}^d) \qquad \nu_\lambda |f| \geq |f|(\bar{x})$$

(69) $\quad \|g\bar{x}\|^{\alpha+i\lambda} f(g\bar{x})\ e_\lambda(gx) = k(\lambda)\ \mu^n\ f(\bar{x})\ e_\lambda(\bar{x})$

Remarquons que S_{ν_λ} est stable par T_p et donc aussi qu'en raison de l'irréductibilité de l'action de G_p sur $P(\mathbb{R})^d$, ν_λ n'est portée par aucune sous variété projective de $P(\mathbb{R})^d$. Ceci permet de conclure par des considérations analogues à celles faites dans la démonstration de la proposition 7 que (69) est impossible sous l'une ou l'autre des hypothèses (P_1') ou (P_2'), ce qui établit le lemme 21.

En utilisant le lemme 20, et le lemme 21 et en raisonnant comme dans le paragraphe 6.2 nous pouvons conclure que

LEMME 22 :

Sous les hypothèses (P_1') ou (P_2') pour toute fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}\times P(\mathbb{R}^d)$, pour tout $0<\varepsilon<\frac{\psi(A)}{A}$

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{(u,\bar{x})\in\mathbb{R}\times P(\mathbb{R}^d)} \Big|\sqrt{2\pi n}\ \sqrt{\psi''(\lambda(\varepsilon))}\ E_{(0,\bar{x})}\ f(u_+^{\lambda(\varepsilon)}\ S_n - n(\gamma+\varepsilon)^{\lambda(\varepsilon)}X_n) - p\Big(\frac{u}{\sqrt{n}\sqrt{\psi''(\lambda(\varepsilon))}}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\bar{x})\ dt\ \nu_{\lambda(\varepsilon)}(d\bar{x})\Big| = 0$$

Démonstration du théorème 7 :

a) Du lemme 18 on déduit que pour $0<\varepsilon<\frac{\psi(A)}{A}$ et $n\geq 1$ on a

(70) $$\Big[\sup_{x\in S_{d-1}} P\Big(\frac{\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma>\varepsilon\Big)\Big]^{1/n} \leq |e_{\lambda(\varepsilon)}|^{1/n}\ \Big|\frac{1}{e_{\lambda(\varepsilon)}}\Big|^{1/n}\ e^{-[\varepsilon\lambda(\varepsilon)-\psi(\lambda(\varepsilon))]}$$

et par conséquent on a :

(71) $$\overline{\lim_n}\Big[\sup_{x\in S_{d-1}} P\Big(\frac{\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma>\varepsilon\Big)\Big]^{1/n} \leq e^{\sup_{0<t\leq A}(t\varepsilon-\psi(t))}$$

b) Pour $\bar{x}\in P(\mathbb{R}^d)$ et $n\geq 1$ on a

$$\Big[E_{(0,\bar{x})}\Big(\frac{e^{-\lambda(\varepsilon)[^{\lambda(\varepsilon)}S_n - n(\gamma+\varepsilon)]}}{e_{\lambda(\varepsilon)}(^{\lambda(\varepsilon)}X_n)}\ 1_{\{^{\lambda(\varepsilon)}S_n - n(\gamma+\varepsilon)>0\}}\Big)\Big]^{1/n}$$

$$\geq E_{(0,\bar{x})}\Big(\frac{e^{-\lambda(\varepsilon)(^{\lambda(\varepsilon)}\frac{S_n}{n}-(\gamma+\varepsilon))}}{[e_{\lambda(\varepsilon)}(^{\lambda(\varepsilon)}X_n)]^{1/n}}\ 1_{\{^{\lambda(\varepsilon)}S_n - n(\gamma+\varepsilon)\}}\Big)$$

D'après le lemme 20 la suite $\frac{{}^{\lambda(\varepsilon)}S_n}{n} - (\gamma+\varepsilon)$ $n\geq 1$ converge vers zéro en probabilité $P_{(0,\bar{x})}$. Le théorème de Lebesgue et l'inégalité précédente permettent de conclure que

$$(72)\quad \underline{\lim}_n\, E_{(0,\bar{x})}\left(\frac{e^{-\lambda(\varepsilon)({}^{\lambda(\varepsilon)}S_n-n(\gamma+\varepsilon))}}{e_{\lambda(\varepsilon)}({}^{\lambda(\varepsilon)}X_n)}\, 1_{\{{}^{\lambda(\varepsilon)}S_n-n(\gamma+\varepsilon)>0\}}\right)^{1/n} \geq 1$$

ce qui d'après le lemme 18 établit que

$$(73)\quad \forall x\in S_{d-1}\quad \underline{\lim}_n\, P\left(\frac{\mathrm{Log}\|g_n g_{n-1}\cdots g_1 x\|}{n} - \gamma>\varepsilon\right) \geq e^{-n(\varepsilon\lambda(\varepsilon)-\psi(\lambda(\varepsilon))},$$

(71) et (73) prouvent le théorème 7.

7-4 Démonstration du théorème 8

La fonction $x \to e^{-\lambda(\varepsilon)x}\, 1_{]0+\infty[}(x)$ est directement Riemann intégrable sur $\mathbb{R}$. Du lemme 22 on déduit alors facilement que

$$\lim_n \left[\sqrt{2\pi n}\sqrt{\psi''(\lambda(\varepsilon))}\; E_{(0,\bar{x})}\left(\frac{e^{-\lambda(\varepsilon)\;{}^{\lambda(\varepsilon)}S_n-n(\gamma+\varepsilon)}}{e_{\lambda(\varepsilon)}({}^{\lambda(\varepsilon)}X_n)}\, 1_{\{{}^{\lambda(\varepsilon)}S_n-n\gamma>n\varepsilon\}}\right)\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(\varepsilon)x}\, dx \times \int_{P(\mathbb{R}^d)} \frac{\nu_{\lambda(\varepsilon)}(d\bar{x})}{e_{\lambda(\varepsilon)}(\bar{x})}$$

$$= \frac{1}{\lambda(\varepsilon)}\, \frac{N_1(\lambda(\varepsilon))\; e(\bar{x})}{e_{\lambda(\varepsilon)}(\bar{x})}$$

Le théorème 8 résulte alors de l'application du lemme 18 pour $\lambda = \lambda(\varepsilon)$.

REFERENCES

[1] BILLINGSLEY : Convergence of Probability measures - John Wiley and Sons New York (1968).

[2] BREIMAN : Probability - Addison Wesley (1968).

[3] CREPEL : Loi des grands écarts pour les marches aléatoires sur $\mathbb{R}$. Séminaire de probabilités de Rennes (1978).

[4] DUNFORD et SCHWARTZ : Linear operators part I - Interscience, New York (1953).

[5] ESSEEN : Fourier analysis of distribution functions ; a mathematical study of the Laplace Gaussian. Law. Acta Math. 77, p.1-25.

[6] FURSTENBERG : Non commuting random products - TAMS vol. 108 (1963), p.377-428.

[7] FURSTENBERG et KESTEN : Products of random matrices - Ann. Math. Stat. vol. 31 (1960), p.457-469.

[8] GREENBERG : Discrete groups with dense orbits - Flows on Homogeneous spaces - Annals of mathematics studies, number 53 ; Princeton univ. press (1963)

[9] GUIVARC'H : Etude des produits de matrices aléatoires - Lecture Notes in math. 774 (1980) p.176-250.

[10] GUIVARC'H : Sur les exposants de Lyapounoff des marches aléatoires à pas markovien - (à paraître).

[11] IOSIFESCU et THEODORESCU : Random processes and Learning - Springer Verlag Band 150, Berlin (1969).

[12] KAIJSER : Some limit theorems for Markov chains with applications to learning models and products of random matrices - Report Institut Mittag Leffler (1972).

[13] KESTEN : Random difference equations and renewal theory for products of random matrices - Acta Math 131, 207-248.

[14] NAGAEV : Some limit theorems for stationary Markov chains - Theory of Proba and its applications 2 (1957), p.378-406.

[15] NEVEU : Bases mathématiques du calcul des probabilités - Masson et Cie (1964).

[16] NORMAN : Markov process and learning models - Academic Press vol. 84 (1972).

[17] O'CONNOR : A central limit theorem for the disordered harmonic chain
Communications - Math Physics 45 (1975), p.63-77.

[18] RAUGI : Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes - Bulletin SMF, mémoire 54 (1977).

[19] TUTUBALIN : On limit theorems for the products of random matrices -
Theory of Proba and its applications, vol. 10 number 1 (1965) p.15-27.

[20] TUTUBALIN : A variant of the local limit theorem for products of random matrices -
Theory of Proba and its applications, vol. XXII (1977), number 2, p.203-214.

[21] VERHEGGEN : Transmission coefficient and heat conduction of a harmonic chain with random masses ; a symptotic estimates on products of random matrices -
Communications in Math Physics 68 (1979), p.69-82.