THÉORIE D'IWASAWA DES REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM D'UN CORPS LOCAL

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous étendons la construction de l'application exponentielle de Perrin-Riou aux représentations de de Rham et nous démontrons une loi de réciprocité explicite qui, dans le cas des représentations absolument cristallines, redonne la loi de réciprocité explicite conjecturée par Perrin-Riou.

Table des matières

Une grande partie des résultats exposés dans cet article a été obtenue lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Studies de Princeton que je voudrais remercier pour son hospitalité. Je remercie aussi K. Kato de m'avoir signalé sa construction de l'application exponentielle duale et B. Perrin-Riou pour ses explications concernant sa vision des fonctions-L p-adiques et pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques sur une version antérieure de cet article .

Introduction

1. La fonction zêta de Kubota-Leopoldt et l'isomorphisme de Coleman.— Grâce aux travaux de nombreux mathématiciens, on a une description conjecturale à peu près complète du comportement aux entiers des fonctions L des motifs. Il est dès lors tentant d'essayer de voir ce que donnent ces conjectures d'un point de vue p-adique ; en particulier, peut-on construire des fonctions-L p-adiques interpolant p-adiquement les valeurs aux entiers des fonctions-L complexes ? Une réponse (conjecturale) à ces questions a été apportée par Perrin-Riou **[24]** dans le cas de bonne réduction (i.e. dans le cas où la représentation p-adique associée au motif est cristalline).

L'idée de Perrin-Riou est une généralisation d'une des nombreuses constructions de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt. On choisit un système compatible $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ de racines de l'unité d'ordre une puissance de p avec $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$. Ceci fait de $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive p^n-ème de l'unité et on note F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\varepsilon^{(n)})$. Soient $F_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} F_n$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$, ce qui fait que le caractère cyclotomique χ induit un isomorphisme de Γ sur $\mathbf{Z}_p^*$. Soit $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa des mesures sur Γ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. La construction de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt que nous avons en vue repose sur le théorème suivant (cf. [**7**] et [**8**]).

Théorème 1. — *Si $u = (u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est un élément de la limite projective $\varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$ des $\mathscr{O}_{F_n}^*$ relativement aux applications normes, il existe une unique série $\mathrm{Col}_u(T)$ élément de $(\mathbf{Z}_p[[T]])^*$ telle que l'on ait $\mathrm{Col}_u(\varepsilon^{(n)} - 1) = u^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

De plus, si on pose $G_u(T) = \log(\mathrm{Col}_u(T))$, il existe une unique mesure $\lambda_u \in \Lambda$ sur Γ telle que l'on ait

$$\int_\Gamma (1+T)^{\chi(x)} \lambda_u(x) = G_u(T) - \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} G_u(\zeta(1+T) - 1).$$

L'application qui à u associe λ_u est presque un isomorphisme de Λ-modules (son noyau est le $\mathbf{Z}_p$-module de rang 1 engendré par ε et le conoyau est aussi un $\mathbf{Z}_p$-module de rang 1) et est appelé l'isomorphisme de Coleman. D'autre part, la fonction zêta de Kubota-Leopoldt est l'image des unités cyclotomiques par l'isomorphisme de Coleman. Plus précisément, si $\gamma \in \Gamma$, soit $u_\gamma = (u_\gamma^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ l'élément de $\varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$ défini par $u_\gamma^{(n)} = \frac{\gamma(\varepsilon^{(n)})-1}{\varepsilon^{(n)}-1}$ si $n \geqslant 1$. Alors si $k \in \mathbf{N} - \{0\}$,

$$\int_\Gamma \chi(x)^k \lambda_{u_\gamma}(x) = (\chi(\gamma)^k - 1)(1 - p^{k-1})\zeta(1-k),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann, ce qui montre que la fonction zêta de Kubota-Leopoldt est donnée par la pseudo-mesure $(1-\gamma)^{-1}\lambda_{u_\gamma}$ pour n'importe quel choix de γ d'ordre infini. Cette idée avait déjà été utilisée par Coates et Wiles [**7**] pour construire la fonction-L p-adique d'une courbe elliptique à multiplication complexe à partir des unités elliptiques.

De manière imagée, on peut voir l'isomorphisme de Coleman comme une machine à produire des fonctions-L p-adiques (fonction zêta de Kubota-Leopoldt ou fonctions-L p-adiques des courbes elliptiques à multiplication complexe) à partir d'un système compatible d'unités globales. La réponse de Perrin-Riou (dans le cas de bonne réduction) repose en grande partie sur la construction [**23**] d'une application exponentielle, généralisation de l'isomorphisme de Coleman mentionné ci-dessus (plus exactement de son inverse), interpolant p-adiquement les applications exponentielles de Bloch et Kato [**4**]. L'idée est que ces applications exponentielles donnent des informations sur la norme p-adique des valeurs aux entiers des fonctions-L (débarassées de certains facteurs transcendants) et que pour pouvoir interpoler ces valeurs, il faut commencer par interpoler les exponentielles.

Le but de cet article est d'étendre la construction de l'application exponentielle de Perrin-Riou au cas de mauvaise réduction (i.e. au cas où on suppose seulement que la représentation p-adique est de de Rham et pas forcément cristalline). Chemin faisant, on donne une construction complètement explicite de cette application exponentielle et de son inverse, ce qui permet de répondre à quelques questions laissées en suspens dans **[23]** ; on donne en particulier une démonstration de la loi de réciprocité explicite conjecturée par Perrin-Riou (conjecture Réc(V) de **[23]**). Les lois de réciprocités explicites et les fonctions-L p-adiques sont étroitement liées ; par exemple, un des points de départ de **[7]** est la loi explicite de réciprocité de Wiles **[33]** généralisant celle d'Iwasawa **[17]**. Celle de Perrin-Riou a un rapport étroit avec l'équation fonctionnelle de la fontion-L p-adique et est une généralisation de la loi de réciprocité explicite que l'on peut trouver dans **[4]**, **[23]** et **[16]** dans le cas de $\mathbf{Q}_p(r)$, elle-même généralisant celle d'Iwasawa **[17]** et Coleman **[9]** dans le cas de $\mathbf{Q}_p(1)$. Signalons qu'une autre démonstration de cette conjecture a été obtenue par Kato, Kurihara et Tsuji **[20]** par des méthodes complètement différentes utilisant la cohomologie syntomique. Le lien avec les fonctions-L p-adiques n'est pas exploré dans cet article, mais nous espérons pouvoir y revenir dans un article ultérieur.

2. Notations et définitions.— Le reste de l'introduction va être consacré à décrire un peu plus en détail le contenu de cet article. Soient $\mathscr{R}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \supset \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \supset W(\mathscr{R})$ les anneaux construits par Fontaine **[12]** et **[15]**. Notre système compatible $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ de racines de l'unité peut être vu comme un élément de $\mathscr{R}$ et on pose $t = \log[\varepsilon] \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, où $[\varepsilon]$ est le représentant de Teichmüller de ε dans $W(\mathscr{R})$, ce qui fait de t l'analogue p-adique de $2i\pi$.

Si L est une extension de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$, on note $\mathscr{G}_L$ le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/L)$. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une représentation continue de $\mathscr{G}_K$, on pose $D_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$; c'est un $K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel muni d'une action semi-linéaire du Frobenius absolu φ qui est de dimension inférieure ou égal à $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on dit que V est cristalline si on a égalité. De même, on pose $D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$; c'est un K-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ muni d'une filtration par des sous-K-espace vectoriels $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)$ et on dit que V est de de Rham si $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

Si $k \in \mathbf{Z}$ et V est une représentation de $\mathscr{G}_K$, on note $V(k)$ la tordue (à la Tate) de V par la puissance k-ième du caractère cyclotomique. Cette notation est un peu abusive ; il vaudrait mieux écrire $V(\chi^k)$ pour souligner le fait que l'on a un isomorphisme canonique entre V et $V(k)$. D'un autre coté, le choix de ε permet de trivialiser le module de Tate et nous fournit un tel isomorphisme.

Tensorisant la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

par V et passant à la suite de cohomologie associée permet de définir une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $\exp_V : D_{\mathrm{dR}}(V) \to H^1(K, V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato et par dualité, une application $\exp_V^* : H^1(K, V^*(1)) \to D_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$.

Si A est un espace de Banach p-adique (la plupart du temps, A sera un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie) et si X est soit $\mathbf{Q}_p$ soit un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathscr{D}_r(X, A)$ l'espace des distributions d'ordre r à support dans X et $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(X, A) = \cup_{r \in \mathbf{R}} \mathscr{D}_r(X, A)$ l'espace des distributions d'ordre fini. En particulier, $\mathscr{D}_0(X, A)$ est l'espace des mesures sur X à valeurs dans A.

Si K est non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et V est une représentation cristalline, on munit $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D_{\mathrm{cris}}(V))$ d'un Frobenius $\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi$ défini par la formule

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi(\mu) = \varphi\Big(\int_{\mathbf{Q}_p} f(px)\mu\Big),$$

si f est une fonction localement analytique à support compact.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on pose $K_0 = K$, $K_n = K(\mu_{p^n})$, où, si $n \geqslant 1$, μ_{p^n} est le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité et $K_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} K_n$. Soient $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_{K_n} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $\Lambda_K = \mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ l'algèbre d'Iwasawa.

Le caractère cyclotomique induit un isomorphisme de Γ_K sur un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$, ce qui permet de parler de distributions à support dans Γ_K. Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on munit $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)$ d'une action de Galois en définissant $\sigma(\mu)$ par la formule $\int_{\Gamma_K} f(x)\sigma(\mu) = \sigma\big(\int_{\Gamma_K} f(\sigma x)\mu\big)$. On peut aussi voir cette action en utilisant le fait que $\mathscr{D}_0(\Gamma_K, V) \cong \Lambda_K \otimes V$ est dense dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)$ et en remarquant que l'action induite sur $\Lambda_K \otimes V$ est l'action naturelle (diagonale), $\mathscr{G}_K$ agissant sur chacun des facteurs. Si $\mu \in H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))$ et si $\tau \to \mu_\tau$ est un 1-cocycle continu représentant μ, alors $\tau \to \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^i \mu_\tau$ est un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{K_n}$ à valeurs dans $V(i)$ dont la classe $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^i \mu$ dans $H^1(K_n, V(i))$ ne dépend que de μ et pas du choix du cocycle représentant μ.

Proposition 2. — *Si T est un réseau de V stable par $\mathscr{G}_K$, alors l'application de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) = H^1(K, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))$ dans $\mathbf{Q}_p \otimes \Big(\varprojlim H^1(K_n, T)\Big)$ qui à μ associe la collection $(\dots, \int_{\Gamma_{K_n}} \mu, \dots)$, est un isomorphisme de Λ_K-modules.*

(ii) $H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)) \cong \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K) \otimes_{\Lambda_K} H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$.

L'intérêt de cette proposition qui, assez étrangement, ne semble pas être utilisée en théorie d'Iwasawa, est de remplacer une limite projective de groupes de cohomologie (relativement aux applications de corestriction) par un seul groupe de cohomologie. Elle permet d'autre part de mieux comprendre les isomorphismes $\varprojlim H^1(K_n, T) \cong \varprojlim H^1(K_n, T(i))$ utilisés par Soulé **[29, 30]** ; ils correspondent à la multiplication par $\chi(x)^i$ au niveau des mesures.

3. L'exponentielle de Perrin-Riou.— Le théorème suivant est une réécriture du théorème principal de **[23]** (voir l'introduction de **[23]**) utilisant la proposition précédente.

Théorème 3. — *Soient K une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, V une représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$ et $h \in \mathbf{Z}$ un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h} D_{\mathrm{cris}}(V) = D_{\mathrm{cris}}(V)$; alors il existe une (unique) application*

$$\mathrm{Exp}_{h,V} : \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D_{\mathrm{cris}}(V)) \longrightarrow H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$$

telle que si k est un entier supérieur ou égal à $1-h$, alors

$$(4) \qquad \int_{\Gamma_K} \chi(x)^k \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu) = \exp_{V(k)}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big((k+h-1)! \int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)\Big).$$

Remarque 5. — (i) $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{\mu}{(-tx)^k}$ appartient à $t^{-k} D_{\mathrm{cris}}(V) = D_{\mathrm{cris}}(V(k))$ et prendre son image par $\exp_{V(k)}$ a donc bien un sens. Par contre, si p^k est valeur propre de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$, alors $1-\varphi$ n'est pas inversible sur $D_{\mathrm{cris}}(V(k))$ et il faut prendre quelques précautions pour donner un sens à la formule (4), ce qui fait que $\mathrm{Exp}_{h,V}$ n'est défini que sur un sous-espace de codimension finie de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D_{\mathrm{cris}}(V))$ s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que p^k soit valeur propre de φ.

(ii) On préfèrerait avoir $H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))$ au lieu de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ et le cas où $V = \mathbf{Q}_p(1)$ montre qu'il n'est pas totalement déraisonnable d'espérer y arriver ; le problème est que restreindre à $\mathscr{G}_{K_\infty}$ tue le Λ_K-module de torsion et que pour le retrouver, il faudrait refaire toutes les constructions de l'article en travaillant avec une $\mathbf{Z}_p$-représentation au lieu d'une $\mathbf{Q}_p$-représentation. Il est possible que la théorie des (φ, Γ)-modules [**14**] fournisse une voie d'approche raisonnable ([**6**], chap. II).

(iii) La formule (4) permet de voir $\mathrm{Exp}_{h,V}$ comme une interpolation p-adique des exponentielles de Bloch-Kato pour les différents twists de V par les puissances du caractère cyclotomique ; le facteur $\frac{(k+h-1)!}{(-t)^k}$ jouant le rôle du facteur local à l'infini (ne pas oublier que t est un analogue p-adique de $2i\pi$) et l'opérateur $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$ correspondant au facteur d'Euler habituel que l'on doit introduire pour rendre ce que l'on veut interpoler p-adiquement continu. Le déterminant de $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$ agissant sur $D_{\mathrm{cris}}(V(k))$ est d'ailleurs égal au quotient du facteur d'Euler en p pour la représentation $V(k)$ par celui pour la représentation $V^*(1-k)$.

(iv) Les espaces de départ et d'arrivée de $\mathrm{Exp}_{h,V}$ sont des $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K)$-modules de même rang et l'application $\mathrm{Exp}_{h,V}$ devient, après tensorisation par l'anneau total des fractions de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K)$, un isomorphisme, ce qui permet en utilisant l'isomorphisme inverse, d'associer à tout élément de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ une distribution tempérée sur $\mathbf{Z}_p^*$. Dans le cas particulier où $V = \mathbf{Q}_p(1)$, la théorie de Kummer fournit une application naturelle de $\varprojlim \mathscr{O}_{K_n}^*$ dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{Q}_p(1))$ et si on compose cette application avec l'inverse de $\mathrm{Exp}_{\mathbf{Q}_p(1),1}$, on retombe (à normalisation près) sur l'isomorphisme de Coleman. On peut donc espérer pouvoir utiliser cette application dans le cas général pour construire des fonctions-L p-adiques à partir de systèmes compatibles d'éléments de cohomologie motivique (généralisation des unités cyclotomiques) ; c'est le point de vue développé dans [**24**]

(v) L'application $\mathrm{Exp}_{h,V}$ n'est définie que pour h assez grand mais $\mathrm{Exp}_{h+1,V}$ est reliée à $\mathrm{Exp}_{h,V}$ de manière simple, ce qui permet, quitte à introduire des dénominateurs, de définir une application $\mathrm{Exp}_{h,V}$ pour tout $h \in \mathbf{Z}$.

(vi) La démonstration du théorème fait intervenir une distribution $\tilde{\mu}$ sur $\mathbf{Q}_p$ invariante par $\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi$ et dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est μ et elle fait jouer un rôle très particulier aux intégrales du type $\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} [\varepsilon^x]\tilde{\mu}$. L'intégrale $\int_{\mathbf{Q}_p} [\varepsilon^x]\tilde{\mu}$ ne converge pas forcément, mais si elle le fait, elle peut être considérée comme la transformée de Fourier continue de $\tilde{\mu}$ et l'invariance de $\tilde{\mu}$ par $\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi$ se traduit par l'appartenance de la transformée de Fourier de $\tilde{\mu}$ à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V$. De même, comme $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est fixe par $\mathscr{G}_K$ et ε est fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$, cette transformée de Fourier est fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$, ce qui laisse penser que l'objet naturel à considérer dans le cas général est $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$. Cela semble effectivement être le cas et permet en tout cas de construire une seconde application exponentielle en supposant seulement que V est de de Rham.

Nous noterons $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ le $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ en raison de son lien avec la théorie d'Iwasawa de V.

4. Une deuxième application exponentielle.— Si $x \in K_\infty$ et $n \in \mathbf{N}$, alors la suite $\frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$ est stationnaire pour $m \geqslant n$ assez grand. On note $\mathrm{T}_{K,n}$ l'application $\mathbf{Q}_p$-linéaire de K_∞ dans K_n ainsi définie. On note encore $\mathrm{T}_{K,n}$ l'application de $K_\infty((t))$ dans $K_n((t))$ définie par

$$\mathrm{T}_{K,n}\Big(\sum_{k\gg-\infty} a_k t^k\Big) = \sum_{k\gg-\infty} \mathrm{T}_{K,n}(a_k) t^k.$$

Proposition 6. — *(i) $K_\infty((t))$ est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ et $\mathrm{T}_{K,n}$ s'étend par continuité en une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ dans $K_n((t))$.*

(ii) Si $z \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, alors $\lim_{n\to+\infty} p^n \mathrm{T}_{K,n}(z) = z$.

Soit V une représentation de de Rham. L'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un isomorphisme et on étend les applications $\mathrm{T}_{K,n}$ pour $n \in \mathbf{N}$ par linéarité à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$. D'autre part, si $z \in K_\infty((t)) \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$, alors z s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k\gg-\infty} t^k d_k$ avec $d_k \in K_\infty \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ et on note $\delta_{V(-k)}(z)$ l'élément $t^k d_k$ de $K_\infty \otimes D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$. Finalement, on note $\mathrm{F}_V^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ le sous-espace $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et, si W est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$, on pose $\mathrm{F}_V^0(W) = W \cap \mathrm{F}_V^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$.

Théorème 7. — *Soient V une représentation de de Rham et $h \geqslant 1$ un entier tel que l'on ait $\mathrm{Fil}^{-h}(D_{\mathrm{dR}}(V)) = D_{\mathrm{dR}}(V)$. Alors il existe une (unique) application $\mathbf{Q}_p$-linéaire*

$$\mathrm{Exp}_V^{(h)} : \mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V)) \longrightarrow H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$$

telle que si $z \in \mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))$, $k \in [0, h-1]$ et $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k} \mathrm{Exp}_V^{(h)}(z) = (-1)^k (h-1-k)!k! \exp_{V(-k)}\Big(\delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,n}(z)\Big).$$

Remarque 8. — (i) Utilisant la transformée de Fourier continue (ou plutôt son inverse), on peut donner, dans le cas où V est cristalline et K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, une description de $\mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))$ en termes de distributions à valeurs dans $D_{\mathrm{cris}}(V)$. On montre alors que les deux applications exponentielles coïncident à normalisation près, ce qui permet d'utiliser le théorème 2 pour calculer $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$ pour $k \geqslant 0$.

(ii) Dans le cas général, on ne dispose pas d'une description aussi agréable de $\mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))$, ce qui fait que l'application aux fonctions-L p-adiques nécessitera sans doute un travail supplémentaire pour lequel la théorie des (φ, Γ)-modules devrait être un ingrédient utile. D'autre part, utilisant des techniques développées par Sen **[26]** pour montrer que si V est une représentation quelconque, alors $(\mathbf{C}_p \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un $\widehat{K}_\infty$-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$, on peut montrer que $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ est un $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-module de "rang" $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$, la raison d'être des guillemets étant que ce module n'est pas un module libre. En d'autres termes, $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ a le "bon" rang.

5. L'application logarithme et la loi de réciprocité de Perrin-Riou.— La formule $\lim_{n\to+\infty} p^n \mathrm{T}_{K,n}(z) = z$ permet de reconstruire z à partir de $\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$. Si on regarde d'un peu plus près ce que donne cette construction en général, on obtient le théorème 9 ci-dessous.

Si V est une représentation de $\mathscr{G}_K$, on note $H_e^1(K, V)$ le noyau de l'application naturelle de $H^1(K, V)$ dans $H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)$. Si V est de de Rham, $H_e^1(K, V)$ est aussi l'image de l'application exponentielle de Bloch-Kato.

Théorème 9. — *Soit $h \geqslant 1$. Soit V une représentation de de Rham. Si $i \in \mathbf{Z}$, soit W_i le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V(i))^{\mathscr{G}_{K_n}}$ et soit $W_{[0,h-1]} = \bigoplus_{0\leqslant i\leqslant h-1} W_i$. Soit $\mu \in H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, V))$ tel que $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu \in H^1_e(K_n, V(-i))$ quels que soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant h-1$. Finalement, soit $\tau \to \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ et, si $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant h-1$, soit $c_{n,i}$ l'unique élément de $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)/W_i$ tel que l'on ait $(1 - \chi(\tau)^{-i}\tau)c_{n,i} = \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_n}$. Alors*

(i) La suite de terme général $\frac{1}{(h-1)!}p^n\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}c_{n,i}\Big)$ converge dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)/W_{[0,h-1]}$ vers un élément de $D_{\mathrm{Iw}}(V)/W_{[0,h-1]}$ noté $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu)$.

(ii) $\mathrm{Log}_V^{(h)} \circ \mathrm{Exp}_V^{(h)}$ est l'identité (modulo $\ker \mathrm{Exp}_V^{(h)}$ qui est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie) de $\mathrm{F}_V^0(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ si $\mathrm{Fil}^{-h} D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$.

(iii) Si $m \in \mathbf{N}$, alors

$$t^h\Big(\frac{d}{dt}\Big)^h\Big(\mathrm{T}_{K,m}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu))\Big) = (-1)^h \sum_{k\in\mathbf{Z}} \exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu\Big).$$

Remarque 10. — (i) La condition $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu \in H^1_e(K_n, V(-i))$ quels que soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant h-1$ est automatique si on remplace V par $V(k)$ pour $k \gg 0$, mais ce cas n'est pas forcément le plus intéressant.

(ii) Le cas $K = \mathbf{Q}_p$, $V = \mathbf{Q}_p(1)$ et $h = 1$ permet de retrouver l'isomorphisme de Coleman [**8**]. Plus précisément, la théorie de Kummer nous fournit une application naturelle δ de $\varprojlim \mathscr{O}^*_{K_n}$ dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{Q}_p(1)) \subset H^1(K, \mathscr{D}_{1^-}(\Gamma, \mathbf{Q}_p(1)))$ et on a

$$\mathrm{T}_{K,n}\big(\mathrm{Log}^{(1)}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))\big) = t^{-1}\log\big(\mathrm{Col}_u([\varepsilon^{\frac{1}{p^n}}] - 1)\big) = p^{-n}\varphi^{-n}\big(t^{-1}\log\big(\mathrm{Col}_u([\varepsilon] - 1)\big)\big),$$

quel que soit $n \geqslant 1$. On trouvera la démonstration de ce fait ainsi qu'une généralisation au cas où $\mathbf{Q}_p$ est remplacé par une extension quelconque (pas nécessairement non ramifiée) dans le chapitre V de [**6**].

(iii) Plus généralement, si V est cristalline, K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et $k \in \mathbf{N}$ est assez grand, il existe une unique série $F_\mu^{(h)}(T) \in K[[T]] \otimes D_{\mathrm{cris}}(V(k))$ de rayon de convergence 1, telle que l'on ait

$$\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu)) = p^{-n}\varphi^{-n}(F_\mu^{(h)}([\varepsilon] - 1)),$$

quel que soit $n \geqslant 1$. Comme $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu) = \lim_{n\to+\infty} p^n\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu))$, on voit que dans le cas V cristalline et K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, la connaissance de $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu)$ est équivalente à celle de la série $F_\mu^{(h)}(T)$ qui est une généralisation directe de la série $\log(\mathrm{Col}_u(T))$. D'autre part, si on remplace V par $V(i)$ pour i assez grand, on peut prendre $k = 0$. Dans le cas général, le lien entre les $\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu))$ pour n variable, est nettement plus mystérieux même dans le cas $V = \mathbf{Q}_p(1)$, mais la théorie des (φ, Γ)-modules [**14**] permet de donner une réponse assez satisfaisante ([**6**], chap. IV).

(iv) Dans la formule du (iii) du théorème, le membre de gauche appartient à $K_m((t)) \otimes D_{\mathrm{dR}}(V)$; on peut donc le développer en puissance de t et si on regarde le coefficient de t^k, on obtient, pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{N}$, un morphisme de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) \subset H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, V))$ dans $K_n \otimes_K$

$D_{\mathrm{dR}}(V)$. Ces morphismes sont des généralisations des morphismes de Coates et Wiles **[7]** et le théorème 9 montrent qu'ils sont liés de très près à l'application exponentielle de Bloch-Kato.

(v) Si on suppose K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et V cristalline, on peut retraduire le (iii) en termes de l'exponentielle de Perrin-Riou et on obtient la proposition suivante qui est une des formes équivalentes (cf. **[25]**) de la loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou (conjecture Réc(V) de **[23]**).

Proposition 11. — *Soient $h \in \mathbf{Z}$ et $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))$. Alors*

$$\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-k} \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu) = (-1)^h (\exp^*_{V^*(1+k)})^{-1}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^k}{(k-h)!}\mu\Big)$$

si $k \gg 0$.

6. Remarques sur l'organisation de l'article.— J'ai essayé dans l'introduction de présenter les choses dans l'ordre où je les ai trouvées. Le texte principal est quant à lui organisé complètement à l'envers par rapport au schéma de l'introduction et par rapport à la version qui a circulé sous forme de prépublication **[10]**. La raison principale pour laquelle j'ai bouleversé le plan de **[10]** est que j'ai trouvé depuis, une démonstration plus directe de l'existence de l'application logarithme reposant sur une étude directe des anneaux de Fontaine. L'article comporte neuf chapitres. Les cinq premiers sont des préliminaires pour la construction de l'application logarithme (chapitre VI) et les lois de réciprocité explicites (chapitre VII), mais le lecteur qui ne se sent pas à l'aise avec les distributions peut ignorer le premier, ne lire que le premier paragraphe du second et aller directement à la construction de l'application logarithme après les chapitres III, IV et V en supposant que toutes les distributions considérées dans les chapitres VI et VII sont des mesures. Le chapitre VIII est un chapitre de préliminaires pour la situation considérée par Perrin-Riou. De manière plus précise, la proposition 2 de l'introduction est une combinaison des propositions II.1.1 et II.3.1 et de la remarque II.1.2. Le théorème 3 est une combinaison du théorème IX.2.1, des formules IX.1.2 et d'une bonne partie de la remarque IX.2.6. Le théorème 7 est le théorème VI.1.3, le théorème 9 est la combinaison des théorèmes VI.3.1 et VII.1.1 et la proposition 11 est la proposition IX.4.1.

I. Intégration sur $\mathbf{Z}_p$

1. Espaces de Banach p-adiques.

Définition I.1.1. — Un espace de Banach p-adique est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel E muni d'une norme ultramétrique $\| \ \|$ pour laquelle il est complet.

Hypothèse (N) : On dit que E vérifie l'hypothèse (N) si quel que soit $x \in E$, il existe $\lambda \in \mathbf{Q}_p$ tel que $\|x\| = |\lambda|$.

Si $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach p-adique quelconque, on peut remplacer $\| \ \|$ par une norme équivalente de telle sorte que E vérifie l'hypothèse (N).

Exemple I.1.2. — (i) $\mathbf{C}_p$ muni de la norme p-adique est un espace de Banach p-adique ne vérifiant pas l'hypothèse (N).

(ii) Si I est un ensemble, soit $l_\infty(I)$ l'ensemble des suites bornées $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbf{Q}_p$. On munit $l_\infty(I)$ de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\|(a_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} |a_i|$, ce qui en fait un espace de Banach p-adique.

(iii) Si I est un ensemble, soit $l_\infty^0(I)$ le sous-espace fermé de $l_\infty(I)$ des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 suivant le filtre complémentaire des parties finies. C'est un espace de Banach p-adique qui, comme $l_\infty(I)$, vérifie l'hypothèse (N).

Les espaces de Banach p-adiques étant des cas particuliers d'espaces de Banach, ils vérifient le théorème de l'image ouverte, à savoir

Proposition I.1.3. — *Si $f : B_1 \to B_2$ est une application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach p-adiques, alors f^{-1} est continue*

La théorie des espaces de Banach p-adiques présente de grandes similarités avec celle des espaces de Hilbert réels. En particulier, la notion suivante remplace celle de base hilbertienne dans un espace de Hilbert.

Définition I.1.4. — Soit E un espace de Banach p-adique. On dit qu'une famille bornée $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Banach de E si l'application de $l_\infty^0(I)$ dans E qui à $(a_i)_{i\in I}$ associe $\sum_{i\in I} a_ie_i$ est une isométrie. Autrement dit, une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Banach de E si et seulement si

(i) tout élément x de E peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente $x = \sum_{i\in I} a_ie_i$, où les a_i sont des éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 suivant le filtre complémentaire des parties finies,

(ii) $\|x\| = \sup_{i\in I} |a_i|$.

Proposition I.1.5. — *(i) Un espace de Banach p-adique possède des bases de Banach si et seulement si il vérifie l'hypothèse (N).*

(ii) Si B est un espace de Banach p-adique et F est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel fermé de B, alors F admet un supplémentaire fermé

(iii) Si $f : B_1 \to B_2$ est une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach p-adiques, alors f admet un scindage continu, c'est-à-dire qu'il existe $s : B_2 \to B_1$ linéaire continue telle que l'on ait $f \circ s = \mathrm{id}_{B_2}$.

Démonstration. — Les points (i) et (ii) sont par exemple démontrés dans **[27]** et pour démontrer le (iii), il suffit de prendre un supplémentaire fermé de $\ker f$ dans B_1 et d'utiliser le théorème de l'image ouverte.

2. Distributions algébriques sur $\mathbf{Z}_p$. — Si I est une partie de $\mathbf{Z}$, notons LP^I le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel des fonctions sur $\mathbf{Z}_p$ qui s'écrivent localement sous la forme $\sum_{i\in I} a_ix^i$, où les a_i sont des éléments de $\mathbf{Q}_p$ presque tous nuls. On notera LP^+ [resp. LP^-] l'espace des fonctions localement polynomiales [resp. localement polynomiales en x^{-1}] correspondant à $I = \mathbf{N}$ [resp. $I = -\mathbf{N}$] et $LP = LP^+ + LP^-$ l'espace correspondant à $I = \mathbf{Z}$. Finalement, si $i \in \mathbf{Z}$, l'espace $LP^{\{i\}}$ sera noté plutôt LP^i. Si X est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}_p$, on note $\mathbf{1}_X$ sa fonction caractéristique. Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$ et $? \in \{\ ,+,-,I,i\}$, on note $LP^?(X)$ l'ensemble des éléments de $LP^?$ à support dans X. Plus généralement, si B est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre, X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$ et $? \in \{\ ,+,-,I,i\}$, on note $LP^?(X,B)$ l'espace $B\otimes_{\mathbf{Q}_p} LP^?(X)$ des fonctions localement polynomiales de degrés convenables à support dans X et à valeurs dans B.

Si A est un $\mathbf{Q}_p$ espace vectoriel et $I\subset\mathbf{Z}$, notons $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ l'espace des homomorphismes $\mathbf{Q}_p$-linéaires de LP^I dans A. Un élément de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ est appelé une distribution algébrique sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A. Si $\mu\in\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ et $f\in LP^I$, on écrira $\mu(f)$ sous la forme plus parlante $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\mu$ ou $\int_{\mathbf{Z}_p} f\mu$ ou encore $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\mu(x)$. Un élément μ de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,\mathbf{Q}_p)$ est donc équivalent à la donnée des valeurs $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$ pour $i\in I$, $a\in\mathbf{Z}_p$ et $n\in\mathbf{N}$ avec les relations de compatibilité évidentes

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a+kp^n+p^{n+1}\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x).$$

Si F est un fermé de $\mathbf{Z}_p$, on dit que μ est à support dans F si l'on a $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\mu=0$ dès que la restriction de f à un ouvert contenant F est identiquement nulle et on notera $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(F,A)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ à support dans F. Si $I\in\{\mathbf{N},-\mathbf{N},\mathbf{Z},\{i\}\}$, les espaces $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(F,A)$ seront notés respectivement $\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(F,A)$ $\mathscr{D}^-_{\mathrm{alg}}(F,A)$, $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(F,A)$ et $\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(F,A)$. Si $F=\{0\}$ ou si F est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, on a $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(F,A)=\prod_{i\in I}\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(F,A)$, ce qui permet de considérer $\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(F,A)$ comme un sous-espace de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(F,A)$ si I contient i. Si B est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre et A a une structure de B-module, on étend par linéarité les éléments de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ à $LP^I(\mathbf{Z}_p,B)$.

Si $g\in LP^i$ et $\mu\in\mathscr{D}^j_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$, on note $g\mu$ l'élément de $\mathscr{D}^{j-i}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} f\, g\mu=\int_{\mathbf{Z}_p} fg\,\mu$. Si F est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, l'application qui à μ associe $\mathbf{1}_F\mu$ induit une application de $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p,A)$ dans $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(F,A)$ notée Res_F. On utilisera souvent la notation $\int_F f\,\mu$ au lieu de $\int_{\mathbf{Z}_p} f\,\mathrm{Res}_F(\mu)$.

3. Mesures et distributions continues sur $\mathbf{Z}_p$.— Soit E un espace de Banach p-adique et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,E)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans E. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ est bornée. Ceci permet de munir $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,E)$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbf{Z}_p}|f(x)|_p$ qui en fait un espace de Banach p-adique.

Si $h\in\mathbf{N}$, soit LA_h l'espace des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$ analytiques sur $a+p^h\mathbf{Z}_p$ quel que soit $a\in\mathbf{Z}_p$. Si $f\in\mathrm{LA}_h$, alors, quel que soit $x_0\in\mathbf{Z}_p$, on peut développer f sous la forme

$$f(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}a_{h,i}(x_0)\big(\frac{x-x_0}{p^h}\big)^i,$$

où $a_{h,i}(x_0)$ est une suite d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Si $f\in\mathrm{LA}_h$ et $x_0\in\mathbf{Z}_p$, on pose $\|f\|_{h,x_0}=\max_i(|a_{h,i}(x_0)|)$ et $\|f\|_{\mathrm{LA}_h}=\sup_{x_0\in\mathbf{Z}_p}\|f\|_{h,x_0}$. On note LA l'ensemble des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$; c'est aussi la limite inductive des LA_h pour $h\in\mathbf{N}$.

Proposition I.3.1. — *(i) Les $\binom{x}{n}$ pour $n\in\mathbf{N}$ forment une base de Banach de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p,\mathbf{Q}_p)$.*

(ii) Si $h\in\mathbf{N}$, les $[\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$ pour $n\in\mathbf{N}$ forment une base de Banach de LA_h.

Démonstration. — Le (i) est dû à Malher et le (ii) à Amice [**1**].

Définition I.3.2. — Soit A un espace de Banach p-adique.

(i) On appelle mesure sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A tout homomorphisme continu de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ dans A. On munit l'espace des mesures d'une structure d'espace de Banach en le munissant de la norme $\| \ \|_{\mathscr{C}^0}$ définie par $\|\mu\|_{\mathscr{C}^0} = \sup_{f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p) - \{0\}} \frac{\| \int_{\mathbf{Z}_p} f\mu \|}{\|f\|_\infty}$.

(ii) On appelle distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A tout homomorphisme continu de LA dans A, c'est-à-dire un homomorphisme de LA dans A dont la restriction à chaque LA_h est continue. On note $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ l'ensemble des distributions continues sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A. On définit, si $h \in \mathbf{N}$, une norme $\| \ \|_{\mathrm{LA}_h}$ sur $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ par la formule $\|\mu\|_{\mathrm{LA}_h} = \sup_{f \in \mathrm{LA}_h - \{0\}} \frac{\| \int_{\mathbf{Z}_p} f\mu \|}{\|f\|_{\mathrm{LA}_h}}$.

Une fonction localement analytique étant continue, une mesure est un cas particulier de distribution continue. De même, une fonction localement polynomiale étant localement analytique, on a une application naturelle de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ dans $\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, A)$.

A une distribution continue μ, on associe sa transformée d'Amice $\mathscr{A}_\mu$ définie comme série formelle par la formule

$$\mathscr{A}_\mu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu(x) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu(x).$$

Si $F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in A[[T]]$ est de rayon de convergence 1 et $0 \leqslant \rho < 1$, on pose $\|F\|_\rho = \sup_{z \in \mathbf{C}_p,\ |z| \leqslant \rho} \|F(z)\|$ et on munit l'espace des séries de rayon de convergence 1 à coefficients dans A de la topologie définie par cette famille de normes.

Si $h \in \mathbf{N}$, on pose $\rho_h = p^{-\frac{1}{(p-1)p^h}}$. On a aussi $\rho_h = |\eta - 1|$ si η est une racine primitive p^{h+1}-ième de l'unité.

Proposition I.3.3. — *(i) L'application qui à une mesure μ associe sa transformée d'Amice est une isométrie de l'espace des mesures muni de la norme ci-dessus sur l'espace des séries formelles à coefficients bornés muni de la norme du sup. des normes des coefficients.*

(ii) L'application qui à une distribution continue associe sa transformée d'Amice est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ sur l'espace des séries formelles de rayon de convergence 1 à coefficients dans A. De plus, on a

$$\|\mathscr{A}_\mu\|_{\rho_h} \leqslant \|\mu\|_{\mathrm{LA}_h} \leqslant p \|\mathscr{A}_\mu\|_{\rho_{h+1}}.$$

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du théorème de Malher ((i) de la proposition I.3.1) et le (ii) est un théorème d'Amice **[2]** dont l'ingrédient principal est le (ii) de la proposition I.3.1. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons appelé $\mathscr{A}_\mu$ la transformée d'Amice de μ.

4. Distributions tempérées. — Soit $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{r^- \mid r \in \mathbf{R}\}$. On munit $\overline{\mathbf{R}}$ d'une relation d'ordre total coïncidant avec l'ordre naturel sur $\mathbf{R}$ et tel que si $r_1 < r_2$ sont deux éléments de $\mathbf{R}$, alors $r_1 < r_2^- < r_2$. On note $\overline{\mathbf{R}}_+$ l'ensemble des éléments r de $\overline{\mathbf{R}}$ vérifiant $r \geqslant 0$ et, si $x \in \overline{\mathbf{R}}$, on note $E(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à x. En particulier, si $k \in \mathbf{Z}$, on a $E(k) = k$ et $E(k^-) = k - 1$. Si $r \in \mathbf{R}$ et f est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on posera par définition

$f(r^-) = f(r)$ et si on est en train de travailler dans $\mathbf{Q}_p$, l'expression p^r désignera l'élément $p^{E(r)}$ de $\mathbf{Q}$.

Pour ne pas avoir à distinguer systématiquement les cas $r \in \mathbf{R}$ et $r \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ dans les énoncés, nous allons définir une application $\eta : \overline{\mathbf{R}} \to \{\pm 1\}$ par $\eta(r) = 1$ si $r \in \mathbf{R}$ et $\eta(r) = -1$ si $r \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ et utiliser la convention suivante :

Convention I.4.1. — Soit $\eta \in \{\pm 1\}$. Une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel topologique (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$) sera dite η-bornée si $\eta = 1$ et cette suite est bornée ou bien si $\eta = -1$ et cette suite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Définition I.4.2. — Soit $r \in \overline{\mathbf{R}}$. Une distribution continue μ sur $\mathbf{Z}_p$ est dite d'ordre r si la suite (réelle) de terme général $p^{-nr}\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n}$ est $\eta(r)$-bornée. On note $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ l'ensemble des distributions d'ordre r que l'on munit de la norme $\| \ \|_r$ définie par $\|\mu\|_r = \sup_{n\in\mathbf{N}} p^{-nr}\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n}$. Une distribution est dite tempérée s'il existe $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ telle qu'elle soit d'ordre r. On note $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque I.4.3. — (i) Comme on a $\|f\|_{\mathrm{LA}_{n+1}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{LA}_n}$ si $f \in \mathrm{LA}_n$, la suite $\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n}$ est une suite croissante de n ; il en résulte le fait qu'une distribution d'ordre < 0 est nulle.

(ii) Si f est constante modulo $p^n\mathbf{Z}_p$, alors $\|f\|_{\mathrm{LA}_n} = \|f\|_\infty$. On en déduit le fait qu'une distribution d'ordre 0 est continue sur l'espace des fonctions localement constantes muni de la norme du sup et donc est une mesure.

(iii) Si r et r' sont deux éléments de $\overline{\mathbf{R}}$ vérifiant $r \leqslant r'$, toute distribution d'ordre r est aussi d'ordre r'.

(iv) si μ est d'ordre r, alors la suite de terme général

$$p^{-rn}\|\mathscr{A}_\mu\|_{\rho_n} \leqslant p^{-nr}\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n} = p^{-nr} \sup_{a\in X} \sup_{j\in\mathbf{N}} \| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (\frac{x-a}{p^n})^j \mu \|$$

est $\eta(r)$-bornée.

Proposition I.4.4. — *Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, les trois conditions suivantes sont équivalentes pour une distribution continue μ :*

(i) μ est d'ordre r,

(ii) la suite de terme général $p^{-nr}\|\mathscr{A}_\mu\|_{\rho_n}$ est $\eta(r)$-bornée,

(iii) la suite de terme général $(1+n)^{-r}\| \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n}\mu\|$ est $\eta(r)$-bornée.

Démonstration. — **[2]** et **[3]**

La proposition I.4.4 permet de caractériser les distributions tempérées en termes de leurs transformées d'Amice ce qui permet de construire une distribution tempérée à partir d'une série entière de rayon de convergence 1 vérifiant des conditions de croissance. La connaissance de la transformée d'Amice d'une distribution est équivalente à la connaissance des $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$ pour $i \in \mathbf{N}$. La proposition I.4.5 ci-dessous permet de construire une distribution d'ordre fini en ne connaissant que les intégrales du type $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu(x)$ pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant N$. Cette construction est très importante pour les applications arithmétiques.

Si $r \in \overline{\mathbf{R}}$ et $N \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ le sous-espace des $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ tels que la suite de terme général $p^{-nr} \sup\limits_{a\in\mathbf{Z}_p} \sup\limits_{0\leqslant i\leqslant N} \| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu\|$ est $\eta(r)$-bornée et on munit

$\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ de la norme $\| \ \|_{r,[0,N]}$ définie par

$$\|\mu\|_{r,[0,N]} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \Big(p^{-nr} \sup_{a\in\mathbf{Z}_p} \sup_{0\leqslant i\leqslant N} \| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu \| \Big).$$

Proposition I.4.5. — *Si $r \in \overline{\mathbf{R}}$ et $N \geqslant E(r)$, l'application naturelle de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach p-adiques de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Au langage près, cette proposition est énoncée ou démontrée dans [**2**], [**3**], [**21**], [**23**] ou [**32**]. La démonstration de la surjectivité fournit un moyen de calculer $\int_{\mathbf{Z}_p} f\mu$ si $f \in \mathrm{LA}$ et $\mu \in \mathscr{D}_r^{[0,N]}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ en remplaçant f par sa série de Taylor tronquée à l'ordre N au voisinage d'un système de représentants modulo $p^n\mathbf{Z}_p$ et en faisant tendre n vers $+\infty$. De manière précise, si $f \in \mathrm{LA}_h$ et $a \in \mathbf{Z}_p$, il existe une suite $c_k(a)$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$ tel que l'on ait $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(a)(\frac{x-a}{p^h})^k$ si $x \in a + p^h\mathbf{Z}_p$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit R_n un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^h\mathbf{Z}_p$ et soit $f_n \in \mathrm{LP}^{[0,N]}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \sum_{a\in R_n} \mathbf{1}_{a+p^h\mathbf{Z}_p}(x) \Big(\sum_{k=0}^{N} c_k(a) \big(\frac{x-a}{p^h}\big)^k \Big).$$

Alors on a $\int_{\mathbf{Z}_p} f\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{Z}_p} f_n\mu$.

5. Opérations sur les distributions continues.— On peut multiplier une distribution continue par une fonction localement analytique et cette opération respecte l'ordre de la distribution. On peut en particulier, si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, multiplier une distribution continue par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_X$ de X et donc définir l'application Res_X. Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$ et $? \in \overline{\mathbf{R}}_+ \cup \{\mathrm{temp}, \mathrm{cont}\}$, on note $\mathscr{D}_?(X, A)$ l'ensemble des distributions d'ordre ? à valeurs dans A et à support dans X, c'est-à-dire l'image de $\mathscr{D}_?(\mathbf{Z}_p, A)$ par Res_X.

On a $\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(x) = \sum_{\zeta^p=1} \zeta^x$; on en déduit la formule

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\mu)}(T) = \sum_{\zeta^p=1} \mathscr{A}_\mu((1+T)\zeta - 1)$$

et le fait qu'une série entière de rayon de convergence 1 est la transformée d'Amice d'une distribution à support $\mathbf{Z}_p^*$ si et seulement si on a $\sum_{\zeta^p=1} G((1+T)\zeta-1) = 0$. D'autre part, on a

$$\mathscr{A}_{x\mu}(T) = (1+T)\frac{d}{dT}\mathscr{A}_\mu(T)$$

et comme la multiplication par x est un isomorphisme de l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p^*$, on en déduit le fait que l'opérateur $D = (1+T)\frac{d}{dT}$ est inversible sur l'espace des séries entières G de rayon de convergence 1 vérifiant l'identité $\sum_{\zeta^p=1} G((1+T)\zeta-1) = 0$. On déduit de tout ceci que si G est une telle série entière et μ est la distribution dont G est la transformée d'Amice, alors on a

$$D^k G\big(\varepsilon(\frac{1}{p^n}) - 1\big) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \varepsilon(\frac{x}{p^n}) x^k \mu, \qquad \text{(I.5.1)}$$

quels que soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Cette formule nous permettra de traduire le théorème 3 de l'introduction dans le langage de Perrin-Riou (cf. (iii) de la remarque IX.2.6).

Si $f \in \mathrm{LA}_h$ et $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$, alors la fonction $\mu * f$ définie par

$$(\mu * f)(y) = \int_{\mathbf{Z}_p} f(x+y)\mu(x)$$

appartient à LA_h et on a $\|\mu * f\|_{\mathrm{LA}_h} \leqslant \|\mu\|_{\mathrm{LA}_h} \|f\|_{\mathrm{LA}_h}$. Ceci permet, si $\lambda \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ de définir la convolution $\lambda * \mu$ de λ et μ par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x) \lambda * \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (\mu * f)\lambda$ et on a

$$\mathscr{A}_{\lambda * \mu}(T) = \mathscr{A}_\lambda(T) \mathscr{A}_\mu(T).$$

En particulier, l'application de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ dans l'ensemble des séries entières en T de rayon de convergence 1 à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$, qui à une distribution associe sa transformée d'Amice, est un isomorphisme d'algèbres topologiques et, si A est un espace de Banach p-adique, $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)$ est muni d'une structure de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$-module. Comme l'image inverse de T par cet isomorphisme est $\delta_1 - \delta_0$, si on revient à la définition de la transformée d'Amice, on obtient les résultats suivants.

Proposition I.5.2. — *(i) Si $n \in \mathbf{N}$, l'application de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)/(\delta_1 - \delta_0)^{*^n}$ dans A^n qui à μ associe $(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{k}\mu)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est un isomorphisme. De plus, si on munit $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)/(\delta_1 - \delta_0)^{*^n}$ de la norme définie par $\|\mu\|_n \leqslant 1$ si et seulement si $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\delta_1 - \delta_0)^{*^i}$ modulo $(\delta_1 - \delta_0)^{*^n}$ où les a_i sont des éléments de A vérifiant $\|a_i\| \leqslant 1$ et si on munit A^n de la norme du sup., cet isomorphisme devient une isométrie.*

(ii) Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ l'image de $\mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, A)$ dans $\varprojlim \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, A)/(\delta_1 - \delta_0)^{*^n}$ est constituée des familles $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que la suite de terme général $(1+n)^{-r} \|\lambda_n\|_n$ soit $\eta(r)$-bornée.

Soit U un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$. Si $\lambda \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(U, A)$ et $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(U, \mathbf{Q}_p)$, on définit la convolution multiplicative $\lambda \star \mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(U, A)$ de λ et μ par la formule

$$\int_U f(x) \ \lambda \star \mu = \int_U \Big(\int_U f(xy)\mu(x) \Big) \lambda(y).$$

Si Δ désigne le sous-groupe (fini) de torsion de U, on peut décomposer U sous la forme $\Delta \times U'$, où U' est un groupe topologiquement isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Soit u un générateur topologique de U'. Si $\alpha \in \Delta$, l'application qui à x associe $\frac{\log x}{\log u}$ est un isomorphisme analytique de $\alpha U'$ sur $\mathbf{Z}_p$ qui induit par transport de structure une isométrie de $\mathrm{LA}_{h + v_p(\log u)}(\alpha U')$ sur LA_h. On en déduit le fait que si A est un espace de Banach p-adique, l'application qui à $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(U, A)$ associe $\ell(\mu) = \sum_{\alpha \in \Delta} \ell_\alpha(\mu)$, où $\ell_\alpha(\mu)$ est la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par $\int_{\alpha U} f(x)\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} f(\frac{\log x}{\log u}) \ell_\alpha(\mu)$, est, dans le cas $A = \mathbf{Q}_p$, un isomorphisme d'algèbres topologiques de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(U, \mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Q}_p[\Delta] \otimes \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$. En revenant à la définition d'une distribution d'ordre r, on montre aussi que la restriction de cet isomorphisme à $\mathscr{D}_r(U, A)$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach p-adiques de $\mathscr{D}_r(U, A)$ sur $\mathbf{Q}_p[\Delta] \otimes \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, A)$.

II. Compléments de théorie d'Iwasawa

1. Modules d'Iwasawa associés à une représentation p-adique.— Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $K_n = K(\mu_{p^n})$ et soit $K_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} K_n$. Soit $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty / K)$ et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $\Gamma_{K_n} = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$. Soit $\Lambda_K = \varprojlim_n \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)]$ l'algèbre des mesures sur Γ_K à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. On note $\star$ la multiplication dans Λ_K et si $\gamma \in \Gamma_K$, on note $\delta_\gamma \in \Lambda_K$ la masse de Dirac en γ. De manière générale, si G est un groupe, $g \in G$, M est un $\mathbf{Z}_p$-module muni d'une action continue de G et $x \in M$, on note indifféremment $g(x)$ ou $\delta_g \star x$ l'image de x par g suivant que l'on veut insister sur l'action de G ou de $\mathbf{Z}_p[[G]]$. De même, l'élément neutre de $\mathbf{Z}_p[[G]]$ sera noté indifféremment 1 ou δ_1. Si $n \geqslant 1$ (resp. $n \geqslant 2$ si $p = 2$), le groupe Γ_{K_n} est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$; soit γ_n un de ses générateurs topologiques $\omega_n = \delta_{\gamma_n} - 1 \in \Lambda_K$ de telle sorte que $\Lambda_K/\omega_n = \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)]$. On munit Λ_K d'une action de $\mathscr{G}_K$ par la formule $\delta_\sigma \star \lambda = \delta_{\overline{\sigma}} \star \lambda$, où, si $\sigma \in \mathscr{G}_K$, on a noté $\overline{\sigma}$ son image dans Γ_K.

Proposition II.1.1. — *Si M est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$ et $i \in \mathbf{N}$, alors $H^i(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)$ est canoniquement isomorphe à la limite projective $\varprojlim_n H^i(K_n, M)$ relativement aux applications de corestriction.*

Démonstration. — Si M est un $\mathscr{G}_{K_n}$-module, on note $\mathrm{Ind}_{K_n}^K M$ l'ensemble des applications continues a de $\mathscr{G}_K$ dans M vérifiant $a(hx) = ha(x)$ si $h \in \mathscr{G}_{K_n}$. Le module $\mathrm{Ind}_{K_n}^K M$ est muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$, l'image ga de a par $g \in \mathscr{G}_K$ étant l'application donnée par la formule $(ga)(x) = a(xg)$. Si M est lui-même un $\mathscr{G}_K$-module, et $a \in \mathrm{Ind}_{K_n}^K M$, l'application qui à $x \in \mathscr{G}_K$ associe $x^{-1}(a(x))$ est constante modulo $\mathscr{G}_{K_n}$ et l'application de $\mathrm{Ind}_{K_n}^K M$ dans $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)] \otimes M$ qui à a associe $\sum_{x \in \mathrm{Gal}(K_n/K)} x^{-1}(a(x))\delta_{x^{-1}}$ est un isomorphisme de $\mathscr{G}_K$-modules. Ceci nous fournit, via le lemme de Shapiro (**[28]**, Ch. I prop. 10) un isomorphisme canonique de $H^i(K, \mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)] \otimes M)$ sur $H^i(K_n, M)$. D'autre part, l'application de corestriction de $H^i(K_{n+1}, M)$ dans $H^i(K_n, M)$ est celle déduite, via l'isomorphisme précédent, de l'application naturelle de $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_{n+1}/K)]$ sur $\mathbf{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n/K)]$. On en déduit une application naturelle de $H^i(K, \Lambda_K \otimes M)$ dans

$$\varprojlim_n H^i(K, (\Lambda_K/\omega_n) \otimes M) = \varprojlim_n H^i(K_n, M).$$

Il reste à vérifier que cette application est un isomorphisme.

La surjectivité est un fait général **[18]** et pour vérifier l'injectivité, il suffit de vérifier que l'application de $H^i(K, \Lambda_K \otimes M)$ dans $\varprojlim H^i(K, (\Lambda_K/(\omega_n, p^n)) \otimes M)$ est injective. Comme $\Lambda_K = \varprojlim \Lambda_K/(\omega_n, p^n)$, il suffit, toujours d'après **[18]**, de vérifier que les $H^{i-1}(K, (\Lambda_K/(\omega_n, p^n)) \otimes M)$ vérifient la condition de Mittag-Leffler, ce qui est évident car ces groupes sont finis.

Remarque II.1.2. — L'isomorphisme entre $H^1(K, M \otimes (\Lambda_K/\omega_n))$ et $H^1(K_n, M)$ fourni par le lemme de Shapiro envoie le cocycle $\tau \to \sum_{g \in \mathrm{Gal}(K_n/K)} c_g(\tau)\delta_g$ sur le cocycle $\tau \to c_{\mathrm{id}}(\tau)$. Si on utilise l'interprétation de Λ_K comme l'algèbre des mesures sur Γ_K, on en déduit le fait que l'application naturelle de $H^1(K, M \otimes \Lambda_K)$ dans $\varprojlim H^1(K_n, M)$ est celle qui au cocycle $\tau \to \mu_\tau$ associe la famille de cocycles $(\dots, \tau \to \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau, \dots)$.

Définition II.1.3. — (i) Si M est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$ et $i \in \mathbf{N}$, on pose $H^i_{\mathrm{Iw}}(K, M) = H^i(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M) = \varprojlim H^i(K_n, M)$.

(ii) Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, le module $\mathbf{Q}_p \otimes H^i(K, M)$ ne dépend pas du choix du réseau M de V stable par $\mathscr{G}_K$; il sera noté $H^i_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ et on a $H^i_{\mathrm{Iw}}(K, V) = H^i(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$, comme on le voit en tensorisant le lemme II.1.1 par $\mathbf{Q}_p$.

Les Λ_K-modules $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ ont été étudiés en détail par Perrin-Riou (cf. **[22]** et **[23]** entre autres) qui a en particulier démontré le résultat suivant.

Proposition II.1.4. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors*
(i) les modules $H^i_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ sont nuls si $i\notin\{1,2\}$.
(ii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ est isomorphe à $V(-1)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ en tant que Λ_K-module.
(iii) La suite d'inflation-restriction

$$0\to H^1(\Gamma_K,\Lambda_K\otimes V^{\mathscr{G}_{K_\infty}})\to H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)\to H^1(K_\infty,\Lambda_K\otimes V)^{\Gamma_K}\to 0 \tag{II.1.5}$$

est une suite exacte de Λ_K-modules. De plus, $H^1(\Gamma_K,\Lambda_K\otimes V^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ est le sous-Λ_K-module de torsion de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ et est isomorphe à $V^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ en tant que Λ_K-module et $H^1(K_\infty,\Lambda_K\otimes V)^{\Gamma_K}$ est un $\mathbf{Q}_p\otimes\Lambda_K$-module libre de rang $[K:\mathbf{Q}_p]\dim_{\mathbf{Q}_p}V$.

D'autre part, le (ii) de la proposition précédente est une conséquence du résultat plus fin suivant dont nous aurons besoin dans la suite.

Lemme II.1.6. — *Si M est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini, alors $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,M)$ est isomorphe en tant que Λ_K-module au dual de Pontryagin de $(M^\wedge(1))^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, où $M^\wedge$ désigne le dual de Pontryagin de M.*

Démonstration. — **[23]**

Le caractère cyclotomique induit un isomorphisme de Γ_K sur un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$, ce qui permet, si $I\subset\mathbf{Z}$, de définir par transport de structure l'espace $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,A)$ des distributions algébriques sur Γ_K à valeurs dans A et, si $?\in\overline{\mathbf{R}}\cup\{\mathrm{cont},\mathrm{temp}\}$, l'espace $\mathscr{D}_?(\Gamma_K,A)$ des distributions continues d'ordre ? sur Γ_K. Si $A=\mathbf{Q}_p$, l'espace $\mathscr{D}_?(\Gamma_K,A)$ sera noté simplement $\mathscr{D}_?(\Gamma_K)$ pour alléger un peu les notations.

Si A est muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$, on munit ces différents espaces d'une action de $\mathscr{G}_K$ en définissant $\delta_\sigma\star\mu$ par la formule

$$\int_{\Gamma_K}f(x)\,\delta_\sigma\star\mu=\delta_\sigma\star\Big(\int_{\Gamma_K}f(\overline{\sigma}x)\mu\Big),$$

où, si $\sigma\in\mathscr{G}_K$, on a noté $\overline{\sigma}$ son image dans Γ_K. En particulier, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, les modules $\mathscr{D}_0(\Gamma_K,V)$ et $\Lambda_K\otimes V$ sont isomorphes puisqu'une distribution d'ordre 0 n'est rien d'autre qu'une mesure et les deux actions de $\mathscr{G}_K$ que l'on a définies coïncident.

Lemme II.1.7. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ et $i\in\mathbf{Z}$, l'application $\mu\to\chi(x)^i\mu$ est un isomorphisme $\mathscr{G}_K$-équivariant de $\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,V)$ sur $\mathscr{D}^0_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,V(i))$ et, si $r\in\overline{\mathbf{R}}_+$, de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K,V)$ sur $\mathscr{D}_r(\Gamma_K,V(i))$.*

Démonstration. — Pour la démonstration de ce lemme, nous distinguerons les espaces V et $V(i)$ et noterons $x\to x(i)$ l'isomorphisme canonique de V sur $V(i)$. On a donc $\delta_\sigma\star(x(i))=\chi(\sigma)^i(\delta_\sigma\star x)(i)$, si $\sigma\in\mathscr{G}_K$ et $x\in V$ et notre problème est de montrer que $\delta_\sigma\star\big((\chi(x)^i\mu)(i)\big)=$

$\big(\chi(x)^i\delta_\sigma \star \mu\big)(i)$. Si f est une fonction sur Γ_K appartenant à l'espace approprié, alors

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_K} f(x)\,\delta_\sigma \star \big((\chi(x)^i\mu)(i)\big)\big) &= \delta_\sigma \star \Big(\Big(\int_{\Gamma_K} f(\overline{\sigma}x)\chi(x)^i\mu\Big)(i)\Big)\\ &= \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_K} f(\overline{\sigma}x)\chi(\overline{\sigma}x)^i\mu\Big)(i)\\ &= \Big(\int_{\Gamma_K} f(x)\chi(x)^i\,\delta_\sigma \star \mu\Big)(i),\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Proposition II.1.8. — *Soient V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ et T un réseau de V stable par V.*

(i) L'application qui à $\mu \in H^1(K, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))$ associe $(\dots, \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^i\mu, \dots)$ est un isomorphisme de $H^1(K, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))$ sur $\mathbf{Q}_p \otimes \big(\varprojlim H^1(K_n, T(i))\big) = H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V(i))$.

(ii) Si $I \subset \mathbf{Z}$, l'application qui à μ associe la collection des $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^i\mu \in H^1(K_n, V(i))$, pour $i \in I$ et $n \in \mathbf{N}$, induit un isomorphisme de $H^1(K, \mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V))$ sur $\prod_{i\in I}\big(\varprojlim H^1(K_n, V(i))\big)$.

Démonstration. — Modulo le lemme précédent, la remarque II.1.2 et l'isomorphisme $\mathscr{D}_0(\Gamma_K, V(i)) \cong \Lambda_K \otimes V(i)$, le (i) est une réécriture du lemme II.1.1. Le (ii) quant à lui se démontre en utilisant l'isomorphisme $\varprojlim \mathbf{Q}_p \otimes (\Lambda_K/\omega_n) = \mathscr{D}^0_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p)$.

Pour les applications aux fonctions-L p-adiques, on est forcé d'introduire des dénominateurs, ce qui nous amène naturellement à considérer les groupes de cohomologie $H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ pour $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et pas seulement pour $r = 0$. D'autre part, si $I \subset \mathbf{Z}$, on a une application naturelle $\mathscr{G}_K$-équivariante de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K, V)$ dans $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V)$ et donc de $H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ dans $H^1(K, \mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V))$ et d'après le (ii) de la proposition II.1.8, un élément de $H^1(K, \mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V))$ n'est rien d'autre qu'une collection d'éléments de $H^1(K_n, V(i))$ pour $i \in I$ et $n \in \mathbf{N}$ vérifiant certaines relations de corestriction et notre but dans ce qui suit est de déterminer quelles conditions doit satisfaire cette collection d'éléments pour qu'elle soit interpolable, c'est-à-dire provienne d'un élément de $H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$. Les démonstrations sont assez pénibles et le lecteur est invité à ignorer la suite de ce chapitre. Au langage près, beaucoup des résultats qui suivent se trouvent déjà dans **[23]** (attention quand même au fait que l'énoncé de la proposition 3.1.4 de **[23]** comporte une erreur : on ne peut pas appliquer l'opérateur $Tw_{N(k),-k+j_1}$ après avoir appliqué $f_{n,k}$).

2. Compléments sur les distributions d'ordre fini. — Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, un élément de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K, V)$ est déterminé par son image dans $\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V)$ comme on le voit en utilisant la proposition I.4.4 ou la proposition I.4.5. Le but de ce paragraphe parfaitement ennuyeux est de donner une caractérisation analogue de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$.

Soit B un espace de Banach p-adique muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{K_\infty}$. L'espace $Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ des 1-cocycles de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans B muni de la norme du sup. est un espace de Banach p-adique. Nous noterons $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B) \subset Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ l'espace des cobords.

Comme il est plus agréable de travailler avec un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$ qu'avec Γ_K, on munit les espaces $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}_p, B)$ si $I \subset \mathbf{Z}$ et $\mathscr{D}_?(\mathbf{Z}_p, B)$ si $? \in \overline{\mathbf{R}}_+ \cup \{\mathrm{temp}, \mathrm{cont}\}$, d'une action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$

par la formule $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\,\delta_\sigma \star \mu = \delta_\sigma \star \left(\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)\mu\right)$ et comme l'image de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans Γ_K est triviale par définition, l'action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ sur les espaces $\mathscr{D}^I_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, B)$ et $\mathscr{D}_?(\Gamma_K, B)$ que l'on obtient par transfert de structure est celle définie précédemment. D'autre part, si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$ les espaces de distributions à support dans X sont stables par $\mathscr{G}_{K_\infty}$.

Soit donc X un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$. Rappelons que si $x \in \overline{\mathbf{R}}_+$, $E(x)$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x. Si $n \geqslant 1$, $k \in \mathbf{N}$ et $r \in \overline{\mathbf{R}}$, on pose

$$\beta^r_{a,n,k}(\mu) = p^{E(n(r-k))} \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (x-a)^k \mu \quad \text{si } \mu \in \mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(X, B) \text{ et } a \in X$$
$$\beta^r_{\gamma,n,k}(\mu) = p^{E(n(r-k))} \int_{\gamma\Gamma_{K_n}} (\chi(x) - \chi(a))^k \mu \quad \text{si } \mu \in \mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, B) \text{ et } \gamma \in \Gamma_K$$

Proposition II.2.1. — *Si $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ est fermé dans $Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$, alors*

(i) l'application naturelle de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(X, B))$ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(X, B))$ est injective quels que soient $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et $N \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant $N \geqslant E(r)$.

(ii) Si $\mu \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(X, B))$ est tel que $\int_X x^k \mu = 0$ dans $H^1(K_\infty, B)$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, alors $\mu = 0$.

Démonstration. — L'hypothèse selon laquelle $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ est fermé dans $Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ implique que $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ est un Banach. L'application qui à $c \in B$ associe le cocycle $\tau \to (1 - \delta_\tau) \star c$ élément de $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ est continue et surjective par définition de $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$. Elle admet donc une section continue s d'après la proposition I.1.3.

Soit $\mu \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(X, B))$ et $\tau \to \mu_\tau$ un cocycle représentant μ. Dire que l'image de μ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(X, B))$ est nulle équivaut à ce que le cocycle $\tau \to \int_X f(x)\mu_\tau$ appartient à $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ quel que soit $f \in LP^{[0,N]}(X)$. La $\mathbf{Q}_p$-linéarité de s implique que l'application qui à $f \in LP^{[0,N]}(X)$ associe $s(\tau \to \int_X f(x)\mu_\tau)$ nous définit un élément de λ de $\mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(X, B))$ et la continuité de s implique l'existence d'une constante $C > 0$ telle que l'on ait $\|s(\tau \to c_\tau)\| \leqslant C \sup_{\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}} \|c_\tau\|$. En particulier, on a

$$\sup_{a \in X} \|\beta^r_{a,n,k}(\lambda)\| \leqslant C \sup_{\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}} \sup_{a \in X} \|\beta^r_{a,n,k}(\mu_\tau)\|$$

quels que soient $k \in [0, N]$ et $n \geqslant 1$. Comme $\tau \to c_\tau$ est un cocycle continu à valeurs dans $\mathscr{D}_r(X, B)$ et comme $\mathscr{G}_{K_\infty}$ est compact, le membre de droite de cette inégalité est une suite $\eta(r)$-bornée de $\mathbf{R}$ quel que soit $k \in [0, N]$; il en est donc de même du membre de gauche, ce qui prouve que λ peut se prolonger en une distribution d'ordre r. Si $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$, $\mu_\tau - (1 - \delta_\tau) \star \lambda$ est alors une distribution d'ordre r vérifiant $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k(\mu_\tau - (1 - \delta_\tau) \star \lambda) = 0$ quels que soient $a \in X$, $n \geqslant 1$ et $k \in [0, N]$ et comme on a supposé $N \geqslant E(r)$, ceci implique $\mu_\tau = (1 - \delta_\tau) \star \lambda$ et permet de démontrer le (i).

Passons à la démonstration du (ii). Soit $\tau \to \mu_\tau$ un cocycle représentant μ. Par hypothèse, $\tau \to c_{n,\tau} = \int_X \binom{x}{n} \mu_\tau$ est un cobord. Soit $w_n = s(\tau \to c_{n,\tau})$. Le même raisonnement que précédemment montre que la suite $(1 + n)^{-r}\|w_n\|$ est $\eta(r)$-bornée dans $\mathbf{R}$. On en déduit le fait qu'il existe une (unique) distribution λ d'ordre r telle que l'on ait $\int_X \binom{x}{n} \lambda = w_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On a alors

$\int_X \binom{x}{n}(\delta_\tau - 1) \star \lambda = \int_X \binom{x}{n}\mu_\tau$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, d'où l'on déduit l'égalité $(\delta_\tau - 1) \star \lambda = \mu_\tau$ puis le fait que $\mu = 0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire II.2.2. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, alors*

(i) l'application naturelle de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}(\Gamma_K, V))$ est injective quels que soient $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et $N \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ vérifiant $N \geqslant E(r)$.

(ii) Si $\mu \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ est tel qu'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \chi(x)^k \mu = 0$ dans $H^1(K_\infty, V)$ quel que soit $k \geqslant k_0$, alors $\mu = 0$.

Démonstration. — $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, V)$ étant l'image de V par une application linéaire, c'est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie ; il est donc fermé dans $Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, V)$, ce qui permet d'utiliser le (i) de la proposition II.2.1 en prenant pour X l'image de Γ_K par χ, pour démontrer le (i). Le (ii) se déduit de la même manière du (ii) de la proposition II.2.1 en remplaçant μ par $\chi(x)^{k_0}\mu$.

Proposition II.2.3. — *Soient V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, M un réseau de V stable par $\mathscr{G}_{K_\infty}$, $\| \ \|_M$ la norme sur $H^1(K_\infty, V)$ définie par $\|x\|_M \leqslant 1$ si et seulement si $x \in H^1(K_\infty, M)$. Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et N est un élément de $\mathbf{N}$ supérieur ou égal à $E(r)$, les conditions suivantes sont équivalentes pour un élément μ de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,N]}(\Gamma_K, V))$*

(i) μ est dans l'image de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$,

(ii) la suite de terme général $\sup_{\gamma \in \Gamma_K} \|\beta^r_{\gamma,n,N}(\mu)\|_M$ est $\eta(r)$-bornée,

(iii) quel que soit $k \in [0, N]$, la suite de terme général $\sup_{\gamma \in \Gamma_K} \|\beta^r_{\gamma,n,k}(\mu)\|_M$ est $\eta(r)$-bornée

L'équivalence entre le (i) et le (iii) impliquent, grâce au (i) du corollaire II.2.2, le résultat suivant.

Corollaire II.2.4. — *Sous les mêmes hypothèses, si $\mu \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K, V))$, alors μ appartient à $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ si et seulement si, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, la suite de terme général $\sup_{\gamma \in \Gamma_K} \|\beta^r_{\gamma,n,k}(\mu)\|_M$ est $\eta(r)$-bornée.*

Les implications (i)$\Rightarrow$(iii) et (iii)$\Rightarrow$(ii) de la proposition II.2.3 sont immédiates. Nous allons démontrer l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) dans le cas plus général où Γ_K est remplacé par un ouvert compact X quelconque de $\mathbf{Z}_p$. Pour cela, nous allons avoir besoin de caractérisations plus commodes des distributions d'ordre r. Les propriétés (iii) et (v) du lemme suivant en donnent deux en termes de bases de $LP^{[0,N]}(X)$.

Lemme II.2.5. — *Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ et N est un élément de $\mathbf{N}$ supérieur ou égal à $E(r)$, un élément μ de $\mathscr{D}^{[0,N]}(X, V)$ est dans l'image de $\mathscr{D}_r(X, V)$ si et seulement si il satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i) La suite de terme général $\left(\sup_{a \in X} \sup_{0 \leqslant k \leqslant r} \|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|\right)$ est $\eta(r)$-bornée.

(ii) La suite de terme général $\left(\sup_{a \in X} \|\beta^r_{a,n,N}(\mu)\|\right)$ est $\eta(r)$-bornée.

(iii) La suite de terme général $\left(\sup_{a \in X \cap [0, p^n - 1]} \sup_{0 \leqslant k \leqslant r} \|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|\right)$ est $\eta(r)$-bornée.

(iv) La suite de terme général $\Big(\sup_{a\in X\cap[p^{n-1},p^n-1]}\sup_{0\leqslant k\leqslant r}\|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|\Big)$ *est* $\eta(r)$*-bornée.*

(v) La suite de terme général $\Big(\sup_{a\in X\cap\left(\cup_{i=0}^N[p^{n-1}+ip^n,(i+1)p^n-1]\right)}\|\beta^r_{a,n,N}(\mu)\|\Big)$ *est* $\eta(r)$*-bornée.*

Démonstration. — L'appartenance de μ à $\mathscr{D}_r(X,V)$ est équivalente à (i) d'après la proposition I.4.5. D'autre part, (i) implique le reste de manière évidente et les implications (ii)⇒(v) et (iii)⇒(iv) sont immédiates. Pour démontrer les autres, introduisons les quantités

$$C^0_{n,k}=\sup_{a\in X}\|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|\qquad C^1_{n,k}=\sup_{a\in X\cap[0,p^n-1]}\|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|$$
$$C^2_{n,k}=\sup_{a\in X\cap[p^{n-1},p^n-1]}\|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|\qquad C^3_{n,k}=\sup_{a\in X\cap(\cup_{i=0}^N[p^{n-1}+ip^n,(i+1)p^n-1])}\|\beta^r_{a,n,k}(\mu)\|.$$

Si $a\in X$, il existe $a_0\in[0,p^n-1]\cap X$ et $b\in p^n\mathbf{Z}_p$ tels que l'on ait $a=a_0+p^nb$. De l'identité $\beta^r_{a,n,k}(\mu)=\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}b^{k-i}\beta^r_{a_0,n,i}(\mu)$ on tire l'inégalité $C^0_{n,k}\leqslant\sup_{0\leqslant i\leqslant k}C^1_{n,k}$ et l'implication (iii)⇒(i).

Si $c_{i,k}$ est la famille d'éléments de $\mathbf{Q}$ définie par $X^k=\sum_{i=0}^N c_{i,k}(X-i)^N$, on a $\beta^r_{a,n,k}(\mu)=\sum_{i=0}^N c_{i,k}\beta^r_{a+ip^n,n,N}(\mu)$, d'où l'on tire les inégalités

$$C^0_{n,k}\leqslant(\sup_{0\leqslant i\leqslant N}|c_{k,i}|)C^0_{n,N}\ \text{et}\ C^2_{n,k}\leqslant(\sup_{0\leqslant i\leqslant N}|c_{k,i}|)C^3_{n,N}$$

ainsi que les implications (ii)⇒(i) et (v)⇒(iv).

Finalement, de l'identité

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x-a)^k=\int_{a+p^{n-1}\mathbf{Z}_p}(x-a)^k-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{a+ip^{n-1}+p^n\mathbf{Z}_p}(x-a)^k,$$

on déduit la formule

$$\beta^r_{a,n,k}(\mu)=p^{r-k}\beta^r_{a,n-1,k}(\mu)-\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\sum_{i=1}^{p-1}p^{j-k}i^{k-j}\beta^r_{a+ip^{n-1},n,j}(\mu)$$

puis l'inégalité $C^1_{n,k}\leqslant\sup(p^{k-r}C^1_{n,k},\sup_{0\leqslant j\leqslant k}p^{k-j}C^2_{n,j})$ et l'implication (iv)⇒(iii), ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition II.2.3. Soient $r\in\overline{\mathbf{R}}_+$, N un entier supérieur ou égal $E(r)$ et $\mu\in H^1(K_\infty,\mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(X,V))$ tel que la suite de terme général $\sup_{a\in X}\|\beta^r_{a,n,N}(\mu)\|_M$ soit $\eta(r)$-bornée. Soit $\tau\to\mu_\tau$ un cocycle représentant μ. L'hypothèse précédente est équivalente à l'existence d'une famille $(w_{a,n})_{a\in X,n\geqslant1}$ d'éléments de V telle que la suite de terme général

$$\sup_{\tau\in\mathscr{G}_{K_\infty}}\sup_{a\in X}\|\beta^r_{a,n,N}(\mu_\tau)-(1-\delta_\tau)\star w_{a,n}\|$$

soit $\eta(r)$-bornée. Les $\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x-a)^N$ pour $n\geqslant1$ et $a\in(\cup_{i=0}^N[p^{n-1}+ip^n,(i+1)p^n-1])\cap X$ forment une base de $LP^{[0,N]}$. Il existe donc une unique distribution $\lambda\in\mathscr{D}^{[0,N]}_{\mathrm{alg}}(X,V)$ telle que l'on ait $\beta^r_{a,n,k}(\mu)=w_{a,n}$ quels que soient $n\geqslant1$ et $a\in(\cup_{i=0}^N[p^{n-1}+ip^n,(i+1)p^n-1])\cap X$. Il suffit alors d'utiliser la caractérisation (v) des distributions d'ordre r pour montrer que $\mu_\tau-(1-\delta_\tau)\star\lambda$ peut se prolonger en une distribution d'ordre r et conclure au fait que $\tau\to\mu_\tau$ est dans l'image de $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_r(X,V))$.

3. Lien entre $H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$.

Proposition II.3.1. — *Le $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K)$-module $H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))$ a une $\mathscr{D}_0(\Gamma_K)$-structure naturelle. Plus précisément, si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+ \bigcup\{\mathrm{temp}\}$, l'application naturelle de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K) \otimes_{\Lambda_K} H^1(K, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))$ dans $H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Malgré son apparence tautologique, cette proposition n'a pas l'air d'être purement formelle. Sa démonstration nécessite de comparer 2 normes naturelles sur un espace de cohomologie, ce qui se fait grâce au lemme II.1.6 qui lui-même utilise la dualité locale. Si $n \in \mathbf{N}$, on déduit du lemme de Shapiro l'isomorphisme $H^1(K_n, \mathscr{D}_r(\Gamma_{K_n}, V)) \cong H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$, ce qui permet, quitte à remplacer K par K_n de supposer que Γ_K est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. D'autre part, utilisant la suite exacte d'inflation-restriction, on se ramène à démontrer que, si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+ \bigcup\{\mathrm{temp}\}$, l'application naturelle de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K) \otimes_{\Lambda_K} H^1(K_\infty, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ est un isomorphisme.

Soit γ un générateur topologique de Γ_K. Si $n \geqslant 1$, soient $\nu_n = (\delta_\gamma - \delta_1)^{\star^n} \in \Lambda_K$ et $\Lambda_n = \Lambda_K/\nu_n\Lambda_K$. On munit $\mathscr{D}_0(\Gamma_K)/\nu_n = \mathscr{D}_r(\Gamma_K)/\nu_n$ de la norme $\| \ \|_n$ définie par $\|x\|_n = 1$ si et seulement si x appartient au réseau Λ_n. Notons que si r est fini, alors $\mu \in \mathscr{D}_r(\Gamma_K)$ si et seulement si la suite de terme général $(1+n)^{-r}\|\mu\|_n$ est $\eta(r)$-bornée, comme on le voit en utilisant l'isomorphisme $\mathscr{D}_r(\Gamma_K) \cong \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ et le (ii) de la proposition I.5.2. Soit M un réseau de V stable par $\mathscr{G}_K$. On munit $H^1(K, \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$ de la norme $\| \ \|_{M,n}$ définie par $\|x\|_{M,n} \leqslant 1$ si et seulement si x appartient au réseau image de $H^1(K, \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)$.

Lemme II.3.2. — *Si $(V(-1))^{\mathscr{G}_K} = 0$, alors*

(i) les groupes $\Lambda_n \otimes_{\Lambda_K} H^1(K_\infty, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ et $H^1(K_\infty, \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\Gamma_K}$ sont naturellement isomorphes.

(ii) Si $\mu_1, \dots, \mu_d$ forment une base de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ sur $\mathscr{D}_0(\Gamma_K)$, leurs images par π_n forment une base de $H^1(K_\infty, \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\Gamma_K}$ sur $\mathscr{D}_0(\Gamma_K)/\nu_n = \mathbf{Q}_p \otimes \Lambda_n$.

(iii) Il existe $C > 0$ ne dépendant pas de n tel que, si $\mu \in H^1(K_\infty, \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les coordonnées de μ dans la base $\pi_n(\mu_1), \dots, \pi_n(\mu_d)$, alors $\|\lambda_i\|_n \leqslant C\|\mu\|_{M,n}$ quel que soit $i \in \{1, \dots, d\}$.

Démonstration. — Posons $X = \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$ et, si $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$. On part du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \Lambda_n \otimes_{\Lambda_K} H^1(\Gamma_K, X^{\mathscr{G}_{K_\infty}}) & \to & H^1(\Gamma_K, X_n^{\mathscr{G}_{K_\infty}}) & \to & H^2(\Gamma_K, X^{\mathscr{G}_{K_\infty}})^{\nu_n = 0} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \Lambda_n \otimes_{\Lambda_K} H^1(K, X) & \to & H^1(K, X_n) & \to & H^2(K, X)^{\nu_n = 0} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\ker & \to & \Lambda_n \otimes_{\Lambda_K} H^1(K_\infty, X)^{\Gamma_K} & \to & H^1(K_\infty, X_n)^{\Gamma_K} & \to & \mathrm{coker} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dans lequel la première (resp. deuxième) colonne provient de la suite d'inflation-restriction pour $\Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$ (resp. $\Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$) et les première et deuxième lignes des suites exactes courtes de cohomologie que l'on déduit de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M \xrightarrow{\nu_n} \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M \longrightarrow \Lambda_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} M \longrightarrow 0$$

et de son homologue obtenue en prenant les points fixes par $\mathscr{G}_{K_\infty}$. Comme Γ_K est procyclique, le groupe $H^2(\Gamma_K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ est nul et un petit exercice de chasse au diagramme montre que ker $= 0$ et coker est isomorphe à $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)^{\nu_n=0}$. On a d'autre part, $V(-1)^{\mathscr{G}_K} = \big(V(-1)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\big)^{\gamma=1} = H^2(K, \Lambda_K \otimes V)^{\gamma=1}$ et donc, sous l'hypothèse $V(-1)^{\mathscr{G}_K} = 0$, le groupe $H^2(K, \Lambda_K \otimes V)^{\nu_n=0}$ est nul quel que soit $n \geqslant 1$. On en déduit le fait que $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)^{\nu_n=0}$ est inclus dans le sous-groupe de torsion de $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)$. Le (i) s'en déduit en tensorisant la dernière ligne du diagramme ci-dessus par $\mathbf{Q}_p$.

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). Le sous-groupe de torsion de $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)$ est fini puisque $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)$ est isomorphe au dual de Pontryagin de $(M^\wedge(1))^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ et est donc de type fini sur $\mathbf{Z}_p$; il existe donc $k_1 \in \mathbf{N}$ tel que p^{k_1} annule le groupe $H^2(K, \Lambda_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)^{\nu_n=0}$ quel que soit $n \geqslant 1$. Finalement, il existe $k_2 \in \mathbf{N}$ tel que le sous-Λ_K-module de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ engendré par $\mu_1, \dots, \mu_d$ contienne $p^{k_2} H^1(K_\infty, M \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda_K)^{\Gamma_K}$ et on peut prendre $C = p^{k_1+k_2}$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition II.3.1. Comme on l'a déjà constaté, l'application qui à $\mu \in \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V)$ associe $\chi(x)^k \mu \in \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V(k))$ est un isomorphisme $\mathscr{G}_K$-équivariant, ce qui fait que l'on peut remplacer V par $V(k)$, et donc supposer que $(V(-1))^{\mathscr{G}_K} = 0$. Soit $\lambda \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$. On tire du lemme précédent le fait que les coordonnées $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,d} \in \mathscr{D}_0$ de $\pi_n(\lambda)$ dans la base $\pi_n(\mu_1), \dots, \pi_n(\mu_d)$ vérifient $\|\lambda_{n,i}\|_n \leqslant C \|\pi_n(\lambda)\|_{M,n}$ et donc, puisque $\lambda \in H^1(K, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))$, que si r est fini, alors les suites $n^{-r}\|\lambda_{n,i}\|$ sont $\eta(r)$-bornées. Comme d'autre part, on a $\lambda_{n+1,i} = \lambda_{n,i}$ modulo ν_n, on en déduit l'existence (et l'unicité) de $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathscr{D}_r(\Gamma_K)$ vérifiant $\lambda_i = \lambda_{n,i}$ modulo ν_n quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On vient donc de montrer que si $\lambda \in H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$, il existe un unique d-uplet d'éléments de $\mathscr{D}_r(\Gamma_K)$ tel que l'image de $\lambda - \sum_{i=1}^d \lambda_i \star \mu_i$ dans $H^1(K_\infty, V \otimes \Lambda_n)$ soit nulle quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On en déduit alors, en utilisant l'isomorphisme

$$\mathscr{D}_r(\Gamma_K)/\nu_n \cong \mathscr{D}_r(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)/(\delta_1 - \delta_0)^{*^n},$$

le (i) de la proposition I.5.2 et le (ii) de la proposition II.2.1, que $\lambda = \sum_{i=1}^d \lambda_i \star \mu_i$, ce qui permet de démontrer l'isomorphisme entre $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_r(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ et $\mathscr{D}_r(\Gamma_K) \otimes_{\Lambda_K} H^1(K_\infty, \mathscr{D}_0(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$ dans le cas où r est fini. Le cas de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}$ s'en déduit par passage à la limite inductive.

III. Rappels sur les anneaux de Fontaine et les représentations p-adiques

1. Les anneaux $\mathscr{R}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et les éléments ε, t et ω.— Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la topologie p-adique. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On munit $\mathscr{R}$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x + y = s$ où $s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x \cdot y = t$ avec $t^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$ ce qui fait de $\mathscr{R}$ un anneau de caractéristique p parfait et complet pour la valuation $v_{\mathscr{R}}$ définie par $v_{\mathscr{R}}(x) = v_p(x^{(0)})$. Soit

$\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)} \dots)$ un élément de $\mathscr{R}$ tel que $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, ce qui implique que si $n \geqslant 1$, alors $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité. Si $n \geqslant 1$, on note $\varepsilon_n = (\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(n+1)}, \dots)$ la racine p^n-ième de ε dans $\mathscr{R}$.

Soient $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = W(\mathscr{R})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathscr{R}$, φ l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ et, si $x \in \mathscr{R}$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $W(\mathscr{R})$. L'homomorphisme θ de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ est surjectif, son noyau est un idéal principal dont $\omega = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_1]-1}$ est un générateur et $(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}, \theta)$ est l'épaississement p-adique universel de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$.

On prolonge θ en un morphisme de $\mathbf{B}_{\mathrm{inf}}^+ = \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ sur $\mathbf{C}_p$, on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau $\varprojlim \mathbf{B}_{\mathrm{inf}}^+/(\ker \theta)^n$ et on prolonge θ par continuité en un morphisme de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\mathbf{C}_p$. Ceci fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\ker \theta$ et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$. L'action de $\mathscr{G}_K$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{inf}}^+$ s'etend par continuité en une action continue de $\mathscr{G}_K$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La série $\log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}([\varepsilon]-1)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément que nous noterons t, qui est un générateur de $\ker \theta$ sur lequel $\sigma \in \mathscr{G}_K$ agit via la formule $\sigma(t) = \chi(\sigma) t$, où χ est le caractère cyclotomique, et qui peut être vu comme un analogue p-adique de $2i\pi$.

On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$, ce qui fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ un corps et on munit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ de la filtration décroissante définie par $\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Cette filtration est stable par l'action de $\mathscr{G}_K$.

2. Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$.— Soit $\mathbf{A}_{\mathrm{max}}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ constitué des éléments x de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{\omega}{p}\right)^n$, où a_n est une suite d'éléments de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}^+ = \mathbf{A}_{\mathrm{max}}[\frac{1}{p}]$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{max}} = \mathbf{B}_{\mathrm{max}}^+[\frac{1}{t}]$. De même, soit $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ constitué des éléments x de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\omega^n}{n!}$, où a_n est une suite d'éléments de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tendant vers 0, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ = \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[\frac{1}{p}]$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[\frac{1}{t}]$. On aurait pu, dans la définition de $\mathbf{A}_{\mathrm{max}}$ et $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$, remplacer ω par n'importe quel élément u de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ dont la réduction $\overline{u}$ modulo p vérifie $v_{\mathscr{R}}(\overline{u}) = 1$. En particulier, on aurait pu remplacer ω par n'importe quel générateur de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \cap \ker \theta$. Les actions de $\mathscr{G}_K$ et φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{inf}}$ s'étendent par continuité à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}$ qui contiennent t et on a $\varphi(t) = pt$.

Dans cet article, nous utiliserons systématiquement $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ pour des raisons de confort topologique. La raison est que la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est un peu désagréable. Le lecteur pourra par exemple méditer sur le fait suivant. Par construction de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$, la suite de terme général $x_n = \frac{\omega^{p^n-1}}{(p^n-1)!}$ ne tend pas vers 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$, mais la suite de terme général $\omega x_n = p^n \frac{\omega^{p^n}}{p^n!}$, tend, elle, vers 0 ; on en déduit le fait que la suite de terme général $t x_n$ tend vers 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ et donc que la suite x_n tend vers 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et que la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$ induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ n'est pas la topologie naturelle sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+$.

L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est celui avec lequel on a pris l'habitude de travailler car il est relié de près à la cohomologie cristalline. Le remplacer par $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}$ ne pose pas de problème pour l'étude des représentations p-adiques car on a $\varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{max}}) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{max}}$ et les périodes des représentations p-adiques vivent dans des espaces de dimension finie stables par φ et sont donc éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}} = \cap_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}) = \cap_{n=1}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\mathrm{max}})$. D'ailleurs, la conjecture $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ de Fontaine a d'abord été énoncée en utilisant $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}$ (que l'on note ici de cette manière à cause de son lien avec les distributions continues cf. proposition VIII.3.1) au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et les résultats de Fontaine-Laffaille [**13**] utilisent un anneau très proche de $\varphi(\mathbf{B}_{\mathrm{max}})$. On a en particulier $\mathbf{B}_{\mathrm{max}}^{\varphi=1} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$.

On munit $\mathbf{B}^+_{\max}$ d'une structure d'espace de Banach p-adique grâce à la norme $\| \ \|_{\max}$ définie par le fait que $\|x\|_{\max} = 1$ si et seulement si $x \in \mathbf{A}_{\max} - p\mathbf{A}_{\max}$. L'avantage de travailler avec $\mathbf{B}_{\max}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ vient de la proposition suivante.

Proposition III.2.1. — *Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{B}^+_{\max}$, alors*

$$p^{-1}\|x\|_{\max}\|y\|_{\max} \leqslant \|xy\|_{\max} \leqslant \|x\|_{\max}\|y\|_{\max}.$$

On tire de cette proposition le fait que la division par un élément de $\mathbf{B}^+_{\max}$ est continue pour la topologie de $\mathbf{B}^+_{\max}$ et donc que la topologie de $\mathbf{B}^+_{\max}$ induite par celle de $t^{-n}\mathbf{B}^+_{\max}$ est encore celle de $\mathbf{B}^+_{\max}$. On en tire aussi le fait qu'un endomorphisme injectif d'un $\mathbf{B}^+_{\max}$-module libre de rang fini induit un homéomorphisme de ce module sur son image.

Lemme III.2.2. — *Si u est un générateur de $\mathbf{A}_{\inf} \cap \ker\theta$, tout élément de $\mathbf{A}_{\max}$ peut s'écrire (de manière non unique) sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n]\left(\frac{u}{p}\right)^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{R}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soit $x \in \mathbf{A}_{\max}$. Par définition, cela signifie qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ telle que l'on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\left(\frac{u}{p}\right)^n$. Soit s une section de l'application (surjective) qui à $a \in \mathscr{R}$ associe $\theta([a]) \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ définie par récurrence à partir des formules $a_{-1} = 0$, $y_0 = x_0$ et, si $n \geqslant 1$, $a_{n-1} = s(\theta(y_{n-1}))$ et $y_n = x_n + p\frac{y_{n-1}-[a_{n-1}]}{u}$ répond à la question comme on peut le constater si on remarque que $v_{\mathscr{R}}(a_n) = v_p(\theta(y_n)) \geqslant \inf(v_p(\theta(x_n)), v_p(\theta(y_{n-1})) + 1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Lemme III.2.3. — *Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\left(\frac{u}{p}\right)^n$ n'appartient pas à $p\mathbf{A}_{\max}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $v_p(\theta(x_n)) < 1$*

Démonstration. — Supposons que $v_p(\theta(x_n)) \geqslant 1$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $a_n = s(p^{-1}\theta(x_n))$ et $b_n = \frac{x_n - p[a_n]}{u}$, ce qui fait que l'on a $x_n = p[a_n] + ub_n$. Les suites $([a_n])_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et on a $x = p\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n]\left(\frac{u}{p}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{u}{p}\right)^{n+1}\Big) \in p\mathbf{A}_{\max}$, ce qui permet de conclure.

Soit $\tilde{p} = (p^{(0)}, \ldots, p^{(n)}, \ldots)$ un élément de $\mathscr{R}$ vérifiant $p^{(0)} = p$, ce qui fait de $[\tilde{p}] - p$ un générateur de $\mathbf{A}_{\inf} \cap \ker\theta$.

Lemme III.2.4. — *Soit $\alpha \in \mathscr{R}$ vérifiant $v_{\mathscr{R}}(\alpha) < 2$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ telle qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ pour lequel $v_p(\theta(z_n)) = 0$. Alors $z = [\alpha]\sum_{k=0}^{+\infty} z_k\left(\frac{[\tilde{p}]-p}{p}\right)^k$ n'appartient pas à $p^2\mathbf{A}_{\max}$.*

Démonstration. — Soit n_0 tel que $v_p(\theta(z_{n_0})) = 0$ et soit $N \geqslant n_0 + 1$. Soit $A = \mathbf{A}_{\inf}/(p^2, p[\tilde{p}]) = \mathbf{A}_{\inf}/(p^2, p([\tilde{p}] - p))$. Il suffit de vérifier que l'image de z dans $\mathbf{A}_{\max}/(p^2, p[\tilde{p}], \left(\frac{[\tilde{p}]-p}{p}\right)^N) \cong A[X]/(X^N, [\tilde{p}] - p - pX)$ est non nulle.

Quitte à multiplier α par $\tilde{p}$, on peut supposer $v_{\mathscr{R}}(\alpha) \geqslant 1$. Un élément de A s'écrit de manière unique sous la forme $[x] + p[y]$ avec $x \in \mathscr{R}$ et $y \in \mathscr{R}/\tilde{p}\mathscr{R}$ et comme $v_{\mathscr{R}}(\alpha) \geqslant 1$, si $z_n = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[z_{n,k}]$, alors l'image de z dans $A[X]/(X^N, [\tilde{p}] - p - pX)$ est aussi celle de $\sum_{n=0}^{N}[\alpha z_{n,0}]X^n$. Si cette image est nulle, c'est qu'il existe $P \in A[X]$ tel que le polynôme $([\tilde{p}] - p - pX)P(X) -$

$\sum_{n=0}^{N}[\alpha z_{n,0}]X^n$ soit divisible par X^N et comme $p([\tilde{p}]-p-pX)=0$ dans $A[X]$, on peut prendre P de la forme $\sum_{n=0}^{N-1}[a_n]X^n$, les a_n appartenant à $\mathscr{R}$. Considérant le terme de degré n, on obtient les relations $\alpha z_{n,0}=\tilde{p}a_n$ et $a_{n-1}+a_n\in\tilde{p}\mathscr{R}$. Appliquant ceci pour $n=n_0$ (resp. $n=n_0-1$), on obtient $v_{\mathscr{R}}(a_{n_0})=v_{\mathscr{R}}(\alpha)-1$ et $v_{\mathscr{R}}(a_{n_0}+a_{n_0-1})\geqslant 1$ [resp. $v_{\mathscr{R}}(a_{n_0-1})>v_{\mathscr{R}}(\alpha)-1$], ce qui implique $v_{\mathscr{R}}(a_{n_0}+a_{n_0-1})=v_{\mathscr{R}}(\alpha)-1\geqslant 1$ et est impossible car on a supposé $v_{\mathscr{R}}(\alpha)<2$. Ceci permet de conclure.

Lemme III.2.5. — *Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{A}_{\max}$ n'appartenant pas à $p\mathbf{A}_{\max}$, alors xy n'appartient pas à $p^2\mathbf{A}_{\max}$.*

Démonstration. — Soit $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ (resp. $(y_j)_{j\in\mathbf{N}}$) une famille d'éléments de $\mathscr{R}$ tendant vers 0 quand i (resp. j) tend vers $+\infty$ telle que l'on ait $x=\sum_{i=0}^{+\infty}[x_i]\big(\frac{[\tilde{p}]-p}{p}\big)^i$ [resp. $y=\sum_{j=0}^{+\infty}[y_j]\big(\frac{[\tilde{p}]-p}{p}\big)^j$]. Soit i_0 (resp. j_0) le plus petit entier tel que l'on ait $v_{\mathscr{R}}(x_i)\geqslant v_{\mathscr{R}}(x_{i_0})$ [resp. $v_{\mathscr{R}}(y_j)\geqslant v_{\mathscr{R}}(y_{j_0})$] quel que soit i [resp. j] appartenant à $\mathbf{N}$. Comme x (resp. y) n'appartient pas à $p\mathbf{A}_{\max}$, on a $v_{\mathscr{R}}(x_{i_0})<1$ [resp. $v_{\mathscr{R}}(y_{j_0})<1$] d'après le lemme III.2.3. Posons $\alpha=x_{i_0}y_{j_0}$ et $z_k=\sum_{i+j=k}\big[\frac{x_iy_j}{\alpha}\big]$ de telle sorte que $v_{\mathscr{R}}(\alpha)<2$ et $xy=[\alpha]\sum_{k=0}^{+\infty}z_k\big(\frac{[\tilde{p}]-p}{p}\big)^k$. Par construction, on a $v_p(\theta(z_{i_0+j_0}))=0$ et on peut donc utiliser le lemme précédent pour conclure.

La proposition III.2.1 se déduit de ce lemme.

3. La suite exacte fondamentale.

Proposition III.3.1. — *La suite*

$$0\to\mathbf{Q}_p\to\mathbf{B}_{\max}\to\mathbf{B}_{\max}\oplus\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\to 0,$$

dans laquelle l'application de $\mathbf{B}_{\max}$ dans $\mathbf{B}_{\max}\oplus\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est celle qui à x associe $((1-\varphi)x,x)$ et où l'on a utilisé l'injection naturelle de $\mathbf{B}_{\max}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ pour définir la seconde composante, est exacte et scindée en tant que suite exacte de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques.

Démonstration. — On peut trouver une démonstration de cet énoncé avec $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\max}$ dans [**15**] et la démonstration qui suit en est une adaptation. Pour démontrer l'exactitude, il suffit de prouver que la suite

$$0\to\mathbf{Q}_p\to\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\to 0 \tag{III.3.2}$$

est exacte et $1-\varphi:\mathbf{B}_{\max}\to\mathbf{B}_{\max}$ est surjective.

Commençons par le plus facile, à savoir la démonstration de la surjectivité de $1-\varphi$. On a $\mathbf{B}_{\max}=\cup_{i=1}^{+\infty}t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+$ et résoudre l'équation $(1-\varphi)(t^{-i}x)=(t^{-i}y)$ est équivalent à résoudre l'équation $(1-p^{-i}\varphi)(x)=y$. Il suffit donc de prouver que si $i\geqslant 1$, alors l'application $1-p^{-i}\varphi:\mathbf{B}_{\max}^+\to\mathbf{B}_{\max}^+$ est surjective.

$1-p^{-i}\varphi$ a formellement deux inverses possibles, à savoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty}p^{-ki}\varphi^k\quad\text{ou}\quad-\sum_{k=1}^{+\infty}p^{ki}\varphi^{-k}.$$

D'autre part, tout élément de $\mathbf{B}_{\max}^+$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{[\tilde{p}]^n}{p^n}$, où a_n est une suite d'éléments de $\mathbf{B}_{\inf}^+$ tendant vers 0 dans $\mathbf{B}_{\inf}^+$ et quitte à multiplier x par une puissance de p, on peut supposer que les a_n sont dans $\mathbf{A}_{\inf}$, auquel cas la série $-\sum_{k=1}^{+\infty} p^{ki}\varphi^{-k}(a_0)$ converge dans $\mathbf{A}_{\inf}$ vers un élément y_0 vérifiant $(1-p^{-i}\varphi)(y_0) = a_0$.

De plus, on a $p^{-ki}\varphi^k(\frac{[\tilde{p}]^n}{p^n}) = p^{np^k-n-ik}\frac{[\tilde{p}]^{np^k}}{p^{np^k}}$ et comme la suite double (pour $n \geqslant 1, k \in \mathbf{N}$) de terme général $np^k - n - ik$ est minorée par une constante $m(i)$ et tend vers $+\infty$ quand $n+k$ tend vers $+\infty$, la série double

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k(a_n)p^{np^k-n-ik}\frac{[\tilde{p}]^{np^k}}{p^{np^k}}$$

converge dans $\mathbf{B}^+_{\max}$ vers un élément y_1 de $p^{-m(i)}\mathbf{A}_{\max}$ verifiant $(1-p^{-i}\varphi)(y_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{[\tilde{p}]^n}{\alpha_n} = x - a_0$. On a donc $(1-p^{-i}\varphi)(y_0+y_1) = x$, ce qui permet de conclure.

Passons à la démonstration de l'exactitude de la suite III.3.2 Comme $\mathbf{B}_{\max} = \cup_{k=0}^{+\infty} t^{-k}\mathbf{B}^+_{\max}$, il suffit de prouver que si $k \in \mathbf{N}$, alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow (t^{-k}\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=1} \longrightarrow t^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \longrightarrow 0$$

est exacte ou encore, multipliant tout par t^k et utilisant le fait que $\varphi(t^k) = p^k t^k$, que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p t^k \longrightarrow (\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=p^k} \longrightarrow \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k \longrightarrow 0 \tag{III.3.3}$$

est exacte, ce que nous ferons par récurrence sur k en utilisant le lemme suivant dont la démonstration sera faite plus loin.

Lemme III.3.4. — *Si $x \in \mathbf{B}^+_{\max}$ est tel que $\varphi^i(x) \in \ker\theta$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, alors $\varphi(x)$ est divisible par t dans $\mathbf{B}^+_{\max}$.*

Revenons à la démonstration de l'exactitude de la suite III.3.3. Si $k=0$, on tombe sur la proposition suivante.

Proposition III.3.5. — $(\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathbf{A}_{\max}^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$. Soit $x \in \mathbf{A}_{\max}^{\varphi=1}$. On peut écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\frac{[\tilde{p}]^n}{p^n}$ où $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0. Si $i \in \mathbf{N}$, on a alors

$$x = \varphi^i(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n(p^i-1)}\varphi^i(x_n)\frac{[\tilde{p}]^{np^i}}{p^{np^i}} \equiv \varphi^i(x_0) \bmod p^{p^i-1}\mathbf{A}_{\max}.$$

On en déduit le fait que x est la limite de la suite de terme général $\varphi^i(x_0)$ et donc appartient à $\mathbf{A}_{\inf}^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$

Pour $k \geqslant 1$, il y a deux choses à vérifier. La première est que l'ensemble des éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=p^k}$ qui sont divisibles par t^k dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est réduit à $\mathbf{Q}_p t^k$ et la seconde est que l'application de $(\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=p^k}$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k$ est surjective.

Soit donc $x \in (\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=p^k} \cap t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Le lemme III.3.4 permet de montrer que $\varphi(x)$ et donc $x = p^{-k}\varphi(x)$ est divisible par t dans $\mathbf{B}^+_{\max}$. On peut donc écrire $x = ty$, où $y \in (\mathbf{B}^+_{\max})^{\varphi=p^{k-1}}$ est divisible par t^{k-1} dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui permet de montrer, utilisant l'hypothèse de récurrence, que $y \in \mathbf{Q}_p t^{k-1}$ et $x \in \mathbf{Q}_p t^k$.

Soit maintenant $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Soit $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}^{**} = \{x \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p} \mid |x-1| < 1\}$. L'application $\log : \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}^{**} \to \mathbf{C}_p$ est surjective ; on peut donc trouver $\alpha \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}^{**}$ tel que $(\log \alpha)^k = \theta(x)$. Soit $\tilde{\alpha} \in \mathscr{R}$ tel que $\tilde{\alpha}^{(0)} = \alpha$. On a alors $x - \log([\tilde{\alpha}])^k = ty$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $y_0 \in (\mathbf{B}_{\max}^+)^{\varphi = p^{k-1}}$ tel que $y - y_0 \in t^{k-1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et alors $x_0 = \log([\tilde{\alpha}])^k + ty_0$ est un élément de $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\varphi = p^k}$ congru à x modulo t^k, ce qui permet de d'établir la surjectivité de l'application de $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\varphi = p^k}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^k$ et termine la démonstration de l'exactitude de la suite fondamentale (modulo le lemme III.3.4).

Passons à la démonstration du lemme III.3.4.

Lemme III.3.6. — *Soit $\alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ dont l'image $\overline{\alpha}$ dans $\mathscr{R}$ est non nulle ; alors $(\alpha) \cap (p) = (p\alpha)$.*

Démonstration. — Si $x \in (\alpha) \cap (p)$, on peut écrire $x = \alpha y$ avec $\overline{x} = 0$ car $x \in (p)$ et d'autre part, on a $\overline{x} = \overline{\alpha y}$, ce qui implique $\overline{y} = 0$ car $\mathscr{R}$ est intègre et donc $y \in (p)$ et $x \in (p\alpha)$.

Lemme III.3.7. — *Soit $I = \{x \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \mid \varphi^n(x) \in \ker\theta$ quel que soit $n \in \mathbf{N}\}$. Alors I est l'idéal de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ engendré par $([\varepsilon]-1)$.*

Démonstration. — Soit $I_n = (\frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_n]-1})$. Montrons que $I = \cap_{n=1}^{+\infty} I_n$. En effet, si $x \in I \cap I_n$, on peut écrire $x = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_n]-1} x_n$ et donc $\varphi^n(x) = \frac{[\varepsilon]^{p^n}-1}{[\varepsilon]-1}\varphi^n(x_n)$ et comme $\theta(\frac{[\varepsilon]^{p^n}-1}{[\varepsilon]-1}) = p^n$, si $x \in I$, cela implique $\varphi^n(x_n) \in \ker\theta$. Comme $\ker\theta = I_1$ et φ est bijectif sur $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, on peut écrire $\varphi^n(x_n)$ sous la forme $\varphi^n(x_n) = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_1]-1}\varphi^n(x_{n+1})$ et on obtient $x = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon_{n+1}]-1}x_{n+1}$, ce qui montre que $x \in I_{n+1}$. Comme d'autre part, $I \subset \ker\theta = I_1$, on en déduit par récurrence sur n le fait que I est inclus dans l'intersection des I_k pour $k \leqslant n$ et l'inclusion inverse étant évidente, cela termine la démonstration de l'égalité $I = \cap_{n=1}^{+\infty} I_n$.

Soit alors ι l'inclusion de $([\varepsilon]-1)$ dans I. On cherche à montrer que ι est une surjection et comme $([\varepsilon]-1)$ et I sont complets et séparés pour la topologie p-adique (car fermés dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ qui l'est), il suffit de vérifier que ι induit une surjection modulo p. Or on a

$$v_{\mathscr{R}}(\overline{x}) = v_{\mathscr{R}}(\overline{x}_n) + v_{\mathscr{R}}(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon_n-1}) \geqslant v_{\mathscr{R}}(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon_n-1}) = (1-\frac{1}{p^n})v_{\mathscr{R}}(\varepsilon-1).$$

On en déduit, en passant à la limite, l'inégalité $v_{\mathscr{R}}(\overline{x}) \geqslant v_{\mathscr{R}}(\varepsilon-1)$ et le fait qu'il existe $y \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tel que $z = x - ([\varepsilon]-1)y \in p\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Ceci implique que si $n \geqslant 1$, alors $z \in I_n \cap p\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = pI_n$ d'après le lemme 15.1 et donc que $z \in \cap_{n=1}^{+\infty} pI_n = pI$. On a donc $x - ([\varepsilon]-1)y \in pI$, ce qui permet de conclure.

Lemme III.3.8. — *Si $x \in \mathbf{A}_{\max}$ est tel que $\varphi^k(x) \in \ker\theta$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, alors $\varphi(x)$ est divisible par $(\frac{[\varepsilon]-1}{p})$*

Démonstration. — D'après le lemme III.2.2, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}$ tendant vers 0, telle que x s'écrive sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n](\frac{\omega}{p})^n$ et comme x appartient à $\ker\theta$, on a $a_0 = 0$. D'autre part, $\varphi(\frac{\omega}{p}) - 1 = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{[\varepsilon]^i-1}{p}$ est divisible par $\frac{[\varepsilon]-1}{p}$. On en déduit le fait que modulo $\frac{[\varepsilon]-1}{p}$, on a $\varphi^k(x) = \varphi^k(\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n])$ si $k \geqslant 1$ et que $\varphi^k(x) \in \ker\theta$ si et seulement si $\varphi^k(\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n]) \in \ker\theta$. D'après le lemme III.3.7, ceci entraine qu'il existe $y \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\varphi(\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n]) = ([\varepsilon]-1)y$ et permet de conclure

Lemme III.3.9. — *$\frac{t}{[\varepsilon]-1}$ est une unité de $\mathbf{A}_{\max}$.*

Démonstration. — $\frac{t}{[\varepsilon]-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-[\varepsilon])^n}{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n+1}(\frac{1-[\varepsilon]}{p})^n \in 1 + p\mathbf{A}_{\max}$, ce qui permet de conclure (dans le cas $p = 2$, il faut modifier l'argument et utiliser le fait que $\frac{1-[\varepsilon]}{4} = \frac{1+[\varepsilon_1]}{2}\frac{1-[\varepsilon_1]}{2} \in \mathbf{A}_{\max}$).

Le lemme III.3.4 est alors une conséquence immédiate des lemmes III.3.8 et III.3.9.

Finalement, l'existence d'un scindage continu est une conséquence de la théorie générale des espaces de Banach p-adiques. Plus précisément, notons $A_i = t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+$ et $B_i = t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+ \oplus t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ si $i \geqslant 1$, ce qui fait de A_i et B_i des espaces de Banach p-adiques quel que soit $i \geqslant 1$. D'autre part, la proposition III.2.1 implique que B_i est fermé dans B_{i+1} ; on peut donc trouver un supplémentaire fermé C_{i+1} de B_i dans B_{i+1}. Il résulte de la démonstration précédente que si $i \geqslant 1$, l'application f de $\mathbf{B}_{\max}^+$ dans $\mathbf{B}_{\max}^+ \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est une surjection de A_i sur B_i. On peut donc trouver une section continue $s_1 : B_1 \to A_1$ de f et, si $i \geqslant 2$, une section continue $s_i : C_i \to A_i$ de f et comme $t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+ \oplus t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = B_1 \oplus (\oplus_{i=2}^{+\infty} C_i)$, l'application $s : t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+ \oplus t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{B}_{\max}$ qui coïncide avec s_1 sur B_1 et s_i sur C_i si $i \geqslant 2$, est une section continue de f par construction.

Le même genre d'arguments permet de construire un supplémentaire fermé B de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{B}_{\max}$ et donc de scinder continuement l'injection $\mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\max}$, ce qui termine la démonstration.

4. Représentations cristallines et représentations de de Rham. — Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$. Le K-espace vectoriel $D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ est de dimension inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbf{Q}_p$. On dit que V est de de Rham s'il y a égalité. D'autre part, $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni de la filtration induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$; c'est une filtration décroissante et on a $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$ si $i \ll 0$ et $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = \{0\}$ si $i \gg 0$.

Le $K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ est aussi de dimension inférieure où égale à celle de V sur $\mathbf{Q}_p$ et on dit que V est cristalline s'il y a égalité. Comme nous l'avons mentionné plus haut, utiliser $\mathbf{B}_{\max}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ pour définir $D_{\mathrm{cris}}(V)$ ne change rien au résultat. L'action de φ sur $\mathbf{B}_{\max}$ commutant à celle de $\mathscr{G}_K$, ceci munit naturellement $D_{\mathrm{cris}}(V)$ d'une action semi-linéaire (relativement à la structure de $K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel) de φ.

Si M est un $\mathbf{Z}_p[\mathscr{G}_K]$-module, on note $M(k)$ le tordu de M par la puissance k-ième du caractère cyclotomique et $x \to x(k)$ l'isomorphisme $\mathbf{Z}_p$-linéaire de M sur $M(k)$. Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors $D_{\mathrm{dR}}(V(k)) = t^{-k}D_{\mathrm{dR}}(V)$ et $D_{\mathrm{cris}}(V(k)) = t^{-k}D_{\mathrm{cris}}(V)$; en particulier, si V est cristalline ou de de Rham, il en est de même de $V(k)$.

Finalement, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on pose

$$D_{\mathrm{Iw}}(V) = (\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}.$$

Le module $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ est très lié au module $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$, comme on le verra au chapitre VI et sa structure est étudiée au chapitre IV.

5. L'application exponentielle de Bloch-Kato et sa duale.— Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$. Tensorisant la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0$$

avec V et prenant la suite exacte de cohomologie associée, on obtient la suite exacte

$$0 \to V^{\mathscr{G}_K} \to D_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}(V) \to ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \to H_e^1(K,V) \to 0,$$

où l'on a noté $H_e^1(K,V)$ le noyau de l'application naturelle de $H^1(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)$. On en déduit une application de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(K,V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato et notée $\exp_V$. Cette application se factorise à travers $D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V)$ et son image est incluse dans $H_e^1(K,V)$. D'autre part, si V est de de Rham, on a $((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V)^{\mathscr{G}_K} = D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(V)$ et l'image de $\exp_V$ est $H_e^1(K,V)$ tout entier [**4**], Lemma 3.8.1. Finalement, si V est de de Rham et $k \gg 0$, alors $\exp_{V(k)}$ est un isomorphisme de $D_{\mathrm{dR}}(V(k))$ sur $H_e^1(K,V(k))$.

Soient B_1 (resp. B_2) un supplémentaire fermé de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\max}$ (resp. $\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}$) et $B = B_1 \oplus B_2$. On note Eul_B l'isomorphisme de $\mathbf{B}_{\max}$ sur $B_1 = \mathrm{Fil}^0 B$ inverse de $1-\varphi$ et e_B l'isomorphisme de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $B_2 = B^{\varphi=1}$ inverse de la projection modulo $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Les isomorphismes Eul_B et e_B sont continus.

Lemme III.5.1. — *Si $x \in D_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\tilde{x}$ est n'importe quel élément de $\mathbf{B}_{\max} \otimes V$ dont l'image modulo $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est égale à x, alors $\exp_V(x)$ est représenté par le cocycle qui à $\tau \in \mathscr{G}_K$ associe $(1-\delta_\tau) \star \tilde{x} - (1-\delta_\tau) \star \mathrm{Eul}_B((1-\varphi)\tilde{x})$.*

Démonstration. — Par construction de l'application de connexion, $\exp_V(x)$ est représenté par le cocycle qui à $\tau \in \mathscr{G}_K$ associe $(1-\delta_\tau)\star e_B(x)$. D'autre part, si pr_B désigne la projection de $\mathbf{B}_{\max}$ sur B parallèlement à $\mathbf{Q}_p$, alors $e_B(\tilde{x})$ et $\mathrm{pr}_B(\tilde{x}) - \mathrm{Eul}_B((1-\varphi)\tilde{x})$ sont par construction des éléments de $B \otimes V$ qui ont même image par $(1-\varphi)$ et modulo $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$; ils sont donc égaux. Finalement, $\tilde{x}$ et $\mathrm{pr}_B(\tilde{x})$ ne diffèrent que par un élément de V et le cocycle $\tau \to (1-\delta_\tau) \star (\tilde{x} - \mathrm{pr}_B(\tilde{x}))$ est un cobord, ce qui permet de conclure.

Le choix de t nous fournit un isomorphisme entre $D_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1)) = t^{-1}K$ et K. Si V est une représentation de $\mathscr{G}_K$, l'accouplement $[\ ,\ ]_{D_{\mathrm{dR}}(V)}$ obtenu en composant les applications

$$D_{\mathrm{dR}}(V) \times D_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to D_{\mathrm{dR}}(V \otimes V^*(1)) \to D_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1)) \cong K \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}} \mathbf{Q}_p$$

est non dégénéré, ce qui fait que $D_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$ s'identifie naturellement au dual de $D_{\mathrm{dR}}(V)$. De même, $H^1(K,V^*(1))$ s'identifie naturellement, grâce au cup-produit

$$H^1(K,V) \times H^1(K,V^*(1)) \to H^2(K,\mathbf{Q}_p(1)) = \mathbf{Q}_p,$$

au dual de $H^1(K,V)$. Ceci permet de voir l'application $\exp^*_{V^*(1)}$ transposée de l'application $\exp_{V^*(1)} : D_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to H^1(K,V^*(1))$ comme une application de $H^1(K,V)$ dans $D_{\mathrm{dR}}(V)$. Si V est de de Rham et $k \gg 0$, l'application $\exp^*_{V^*(1+k)}$ est un isomorphisme de $H^1(K,V(-k))$ sur $D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$. Cette définition de l'application exponentielle duale n'est pas très commode pour les calculs (il faut dualiser deux fois), mais on a la proposition suivante due à Kato.

Proposition III.5.2. — *Si V est une représentation de de Rham, l'application qui à $x \in D_{\mathrm{dR}}(V)$ associe le cocycle $\tau \to x \log \chi(\tau) \in D_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ induit un isomorphisme de $D_{\mathrm{dR}}(V)$ sur $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ et l'application $\exp^*_{V^*(1)}$ est la composée de l'inverse de cet isomorphisme avec l'application naturelle de $H^1(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$.*

Démonstration. — Proposition 1.2.3, définition 1.2.4 et (i) du théorème 1.4.1 du chapitre II de [**19**].

IV. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine.

Le thème général de ce chapitre est qu'il ne se passe rien entre K_∞ et $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (l'extension $K_\infty/\mathbf{Q}_p$ est profondément ramifiée dans la terminologie de Coates et Greenberg ou l'extension $\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty$ est presque étale dans celle de Faltings). Les résultats obtenus sont des généralisations de ceux de Tate [**31**] et Sen [**26**] ; les méthodes de démonstration sont d'ailleurs largement inspirées de celles de Sen. Des résultats du même genre ont été obtenus par Cherbonnier [**5**].

1. La méthode de Sen.— Soit A un anneau local complet pour une valuation v_A à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{K_\infty}$. Considérons les 3 conditions suivantes

(C1) Quelle que soit l'extension finie L de K_∞, l'extension $\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_L})/\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ est une extension séparable de degré $[L : K_\infty]$.

(C2) Si L est une extension finie de K_∞, l'idéal maximal de $A^{\mathscr{G}_L}$ n'est pas réduit à 0 et si $L_0 \subset L_1$ sont deux extensions finies de K_∞, alors l'image de l'idéal maximal de $A^{\mathscr{G}_{L_1}}$ par l'application Tr_{L_1/L_0} contient (et donc est égal à) l'idéal maximal de $A^{\mathscr{G}_{L_0}}$.

(C3) La restriction de v_A à $A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ n'est pas discrète.

Remarque IV.1.1. — i) La condition (C2) implique que si $L_0 \subset L_1$ sont deux extensions finies de K_∞ et si $\pi \in A^{\mathscr{G}_{L_0}}$ vérifie $v_A(\pi) > 0$, alors il existe $\alpha \in \mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_{L_1}})$ vérifiant $v_A(\alpha) \geqslant -v_A(\pi)$ et $\mathrm{Tr}_{L_1/L_0}(\alpha) = 1$.

ii) L'anneau $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie les conditions (C1) et (C3) de manière plus ou moins évidente et (C2) de manière un peu moins évidente [**31**], prop.9.

iii) L'anneau $\mathscr{R}$ vérifie lui aussi les conditions (C1), (C2) et (C3). La condition (C1) est une conséquence de la théorie du corps des normes (cf. [**14**]) développée par Fontaine et Wintenberger [**11**] et [**34**]. (C3) est une conséquence du fait que $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (il contient par exemple $\varepsilon - 1$), est stable par Frobenius et de la formule $v_{\mathscr{R}}(\varphi^{-n}(x)) = p^{-n}v_{\mathscr{R}}(x)$ valable quels que soient $x \in \mathscr{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Finalement, pour démontrer (C2), il suffit de prouver que si L est une extension finie de K_∞, alors $\mathrm{Tr}_{L/K_\infty}(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}^{\mathscr{G}_L}})$ contient des éléments de valuation arbitrairement proche de 0. Comme cette image est stable par φ^{-1}, il suffit de montrer qu'elle n'est pas réduite à $\{0\}$, ce qui est une conséquence du fait que l'extension $\mathrm{Frac}(\mathscr{R}^{\mathscr{G}_L})/\mathrm{Frac}(\mathscr{R}^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ est séparable. On peut d'ailleurs démontrer que $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie (C2) à partir du fait que $\mathscr{R}$ vérifie (C2).

Lemme IV.1.2. — *Soient A un anneau local valué complet muni d'une action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ vérifiant les conditions (C1) et (C2) et π un élément de $A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ vérifiant $v_A(\pi) > 0$. Si L_0 est une extension finie de K_∞, n un entier $\geqslant 2$ et $\tau \to U_\tau$ un 1-cocycle continu de $\mathscr{G}_{L_0}$ dans $1 + \pi^n M_d(A)$, alors il existe $M \in 1 + \pi^{n-1}M_d(A)$ tel que le cocycle $M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit à valeurs dans $1 + \pi^{n+1}\mathrm{M}_d(A)$.*

Démonstration. — Soit L_1 une extension finie de L_0 telle que U_τ appartienne à $1 + \pi^{n+2}\mathrm{M}_d(A)$ si $\tau \in \mathscr{G}_{L_1}$ et soit α un élément de $\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_{L_1}})$ vérifiant $\mathrm{Tr}_{L_1/L_0}(\alpha) = 1$ et $v_A(\alpha) \geqslant -v_A(\pi)$. Si T

est un système de représentants de $\mathscr{G}_{L_0}/\mathscr{G}_{L_1}$, posons

$$M_T = \sum_{\tau \in T} \tau(\alpha) U_\tau.$$

Les hypothèses mises sur α entraînent que M_T est élément de $1 + \pi^{n-1}\mathrm{M}_d(A)$. D'autre part, si T' est un autre système de représentants de $\mathscr{G}_{L_0}/\mathscr{G}_{L_1}$, la relation de cocycle et le choix de L_1 font que $M_T - M_{T'} \in \pi^{n+1}\mathrm{M}_d(A)$. Finalement la relation de cocycle permet d'obtenir la relation $M_T^{-1} U_\tau \tau(M_T) = 1 + M_T^{-1}(M_{\tau T} - M_T)$ qui permet de montrer que M_T répond à la question (quel que soit le choix de T).

Corollaire IV.1.3. — *Soient A un anneau local valué complet muni d'une action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ vérifiant les conditions (C1) et (C2) et π un élément de $A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ vérifiant $v_A(\pi) > 0$. Si L est une extension finie de K_∞ et $\tau \to U_\tau$ un 1-cocycle continu de $\mathscr{G}_L$ dans $1 + \pi^2 M_d(A)$, alors il existe $M \in 1 + \pi \mathrm{M}_d(A)$ tel que l'on ait $M^{-1} U_\tau \tau(M) = 1$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_L$.*

Démonstration. — Une récurrence utilisant le lemme précédent permet de construire une suite de matrices $(M_m)_{m \geqslant 1}$ telle que $M_m \in 1 + \pi^m \mathrm{M}_d(A)$ et que le cocycle $\tau \to (\prod_{i=1}^m M_i)^{-1} U_\tau \tau(\prod_{i=1}^m M_i)$ soit à valeurs dans $1 + \pi^{m+2}\mathrm{M}_d(A)$. Le produit infini $\prod_{i=1}^{+\infty} M_i$ converge alors vers une matrice M qui répond à la question.

Proposition IV.1.4. — *Si A est un anneau local valué complet muni d'une action de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ vérifiant les conditions (C1) et (C2), alors*

(i) $H^1(K_\infty, \mathrm{GL}_d(\mathrm{Frac}(A))) = \{1\}$.

(ii) $H^1(K_\infty, \mathrm{Frac}(A)) = 0$.

Si de plus, A vérifie la condition (C3), alors

(iii) $H^1(K_\infty, \mathfrak{m}_A) = 0$.

(iv) $H^1(K_\infty, 1 + \mathrm{M}_d(\mathfrak{m}_A)) = \{1\}$.

Démonstration. — Considérons un 1-cocycle continu $\tau \to U_\tau$ de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathrm{Frac}(A))$. La continuité de U_τ implique l'existence d'une extension finie L de K_∞ telle que U_τ soit à valeurs dans $1 + \pi^2 M_d(A)$ si $\tau \in \mathscr{G}_L$. Le corollaire précédent nous donne l'existence de $M \in 1 + \pi\mathrm{M}_d(A)$ tel que l'on ait $M^{-1} U_\tau \tau(M) = 1$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_L$. Le cocycle $\tau \to M^{-1} U_\tau \tau(M) = 1$ peut donc être vu comme un cocycle sur $\mathscr{G}_{K_\infty}/\mathscr{G}_L$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_L}))$ et est donc trivial d'après le théorème de Hilbert 90 puisque l'extension $\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_L})/\mathrm{Frac}(A^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ est séparable. Ceci démontre le (i).

Soient $\tau \to c_\tau$ un cocycle continu de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans $\mathrm{Frac}(A)$, $\pi \in A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ vérifiant $v_A(\pi) > 0$ et $\alpha \in A^{\mathscr{G}_{K_\infty}} - \{0\}$ tel que αc_τ soit à valeurs dans $\pi^2 A$. Si $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$, soit $U_\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha c_\tau \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in 1 + \pi^2 \mathrm{M}_2(A)$. La relation de cocycle satisfaite par c_τ se traduit par le fait que $\tau \to U_\tau$ est un cocycle. D'après le corollaire IV.1.3, il existe donc une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in 1 + \pi\mathrm{M}_2(A)$ telle que l'on ait $U_\tau \tau(M) = M$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. Cette dernière identité se traduit par le fait que d est un élément de $A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ (inversible car congru à 1 modulo π) et par la relation $\alpha c_\tau = (1 - \delta_\tau) \star (d^{-1}c)$ qui permet de conclure au fait que αc_τ est trivial et de démontrer le (ii).

Pour démontrer le (iii) [resp. le (iv)], il suffit de remarquer que la compacité de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ implique que si $\tau \to c_\tau$ est un cocycle continu à valeurs dans $\mathfrak{m}_A$ [resp. $1 + \mathrm{M}_d(\mathfrak{m}_A)$], alors la condition

(C3) implique qu'il existe $\pi \in \mathfrak{m}_{A^{\mathscr{G}_{K_\infty}}}$ tel que c_τ soit à valeurs dans $\pi^2\mathfrak{m}_A$ [resp. $1+\pi^2\mathrm{M}_d(\mathfrak{m}_A)$] ; on conclut alors comme pour le (ii) [resp. en utilisant le corollaire IV.1.3].

2. Application au H^0 des représentations p-adiques.

Théorème IV.2.1. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors*

(i) $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-module libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

(ii) $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ possédant une base constituée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$.

Démonstration. — Le choix d'une base $e_1,\dots,e_d$ de V sur $\mathbf{Q}_p$ permet de considérer la représentation comme un 1-cocycle continu $\tau \to U_\tau$ de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p) \subset \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. Ce cocycle est cohomologue au cocycle trivial d'après la proposition IV.2.2 ci-dessous, ce qui se traduit par le fait que le $\mathscr{G}_{K_\infty}$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et permet déjà de démontrer le (i). Le (ii) sera démontré après la proposition IV.2.2.

Proposition IV.2.2. — *Si $i \in \{1,2,\dots,+\infty\}$, alors $H^1(K_\infty, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)) = \{1\}$.*

Démonstration. — Le cas $i=1$ correspondant à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbf{C}_p$ est une conséquence immédiate du (i) de la proposition IV.1.4 puisque $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie les conditions (C1), (C2) et (C3). Ce cas est d'ailleurs traité par Sen ([**26**], prop.4) et la démonstration que nous en avons donnée est exactement la même que celle de [**26**].

Le cas $i=+\infty$ s'obtient à partir du cas i fini par passage à la limite, la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant plus faible que la topologie t-adique. D'autre part, la suite exacte

$$1 \to 1+\mathrm{M}_d(\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i) \to 1$$

permet en passant à la suite exacte de cohomologie associée et en utilisant l'isomorphisme (de $\mathscr{G}_{K_\infty}$-modules)

$$1+\mathrm{M}_d(\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \cong \mathrm{M}_d(\mathbf{C}_p)$$

de démontrer le résultat par récurrence sur i grâce au (ii) de la proposition IV.1.4 appliquée à $A=\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$, l'application de $1+\mathrm{M}_d(\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbf{C}_p)$ étant celle qui à M associe $\theta(t^{-i}(M-1))$.

Lemme IV.2.3. — *Si T est une $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, alors*

(i) Le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathscr{R}\otimes T$ engendré par $(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est égal à $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T$.

(ii) $H^1(K_\infty, \mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T) = 0$.

Démonstration. — Le (i) de la proposition IV.1.4 appliqué à $A=\mathscr{R}$ admet comme conséquence le fait que $\mathrm{Frac}(\mathscr{R})\otimes T$ est isomorphe à $(\mathrm{Frac}(\mathscr{R}))^d$ en tant que $\mathscr{G}_{K_\infty}$-module ; on peut donc trouver une base $f_1,\dots,f_d$ de $\mathrm{Frac}(\mathscr{R})\otimes T$ fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$ et, quitte à multiplier les f_i par une puissance de $\pi=\varepsilon-1$, on peut supposer que cette base est constituée d'éléments de $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T$. Soient $e_1,\dots,e_d$ une base de T sur $\mathbf{F}_p$ et M la matrice de $f_1,\dots,f_d$ dans la base $e_1,\dots,e_d$. Si $n\in\mathbf{N}$, $\varphi^{-n}(f_i)$ est aussi un élément de $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T$ fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$ et la matrice de $\varphi^{-n}(f_1),\dots,\varphi^{-n}(f_d)$ dans la base $e_1,\dots,e_d$ est $\varphi^{-n}(M)$ et vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{\mathscr{R}}(\det\varphi^{-n}(M))=0$, ce qui permet de montrer que tout élément de $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}\otimes T$ est dans le $\mathscr{R}$-module engendré par $\varphi^{-n}(f_1),\dots,\varphi^{-n}(f_d)$ si n est assez grand, ce qui démontre le (i).

Passons au (ii). Comme $\mathscr{G}_{K_\infty}$ est compact, il existe $\eta > 0$ tel que si $\tau \to c_\tau$ est un 1-cocycle continu à valeurs dans $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}} \otimes T$, alors les coordonnées de c_τ dans la base $e_1, \dots, e_d$ ont une image par $v_{\mathscr{R}}$ supérieure ou égale à η quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. On en déduit l'existence de $n \in \mathbf{N}$ tel que les coordonnées de c_τ dans la base $\varphi^{-n}(f_1), \dots, \varphi^{-n}(f_d)$ appartiennent à $\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$ et comme $\varphi^{-n}(f_1), \dots, \varphi^{-n}(f_d)$ sont stables par $\mathscr{G}_{K_\infty}$, on peut utiliser le (iii) de la proposition IV.1.4 pour conclure.

Proposition IV.2.4. — *Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, alors*
(i) $H^1(K_\infty, W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T) = 0$.
(ii) Le sous $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$-module de $W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T$ engendré par $(W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est égal à $W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T$.

Démonstration. — La nullité de $H^1(K_\infty, \mathfrak{m}_{\mathscr{R}} \otimes T)$ permet de construire par récurrence une suite d'éléments $c^{(n)}$ de $W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T$ et une suite de cocycles $\tau \to c_\tau^{(n)}$ de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans $W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T$ telles que l'on ait $c_\tau = c_\tau^{(0)}$ et $c_\tau^{(n)} - (1 - \delta_\tau) \star c^{(n)} = p c_\tau^{(n+1)}$. Ceci implique que si l'on pose $c = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n c^{(n)}$, alors on a $c_\tau - (1 - \delta_\tau) \star c = 0$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. On en tire le (i).

De la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \to pW(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T \to W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T \to \mathfrak{m}_{\mathscr{R}} \otimes T \to 0$$

et du (i), on déduit le fait que l'application naturelle de $(W(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}}) \otimes T)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ dans $(\mathfrak{m}_{\mathscr{R}} \otimes T)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est surjective, ce qui, utilisant le (i) du lemme IV.2.3 et la complétude de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ pour la topologie p-adique, permet de conclure.

Corollaire IV.2.5. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, le $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-module libre $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ possède des bases formées d'éléments de $(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le (ii) de la proposition précédente à un réseau T de V stable par $\mathscr{G}_{K_\infty}$.

Revenons à la démonstration du (ii) du théorème IV.2.1. Le même argument que pour le (i) du théorème permet de démontrer que $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$. Le seul problème est donc d'arriver à construire une base de cet espace vectoriel constituée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$. Pour ce faire, partons d'une base $e_1, \dots, e_d$ de V sur $\mathbf{Q}_p$ et d'une base $v_1, \dots, v_d$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ formée d'éléments de $(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ et dont l'existence est assurée par le corollaire IV.2.5. L'image par θ du déterminant de $v_1, \dots, v_d$ dans la base $e_1, \dots, e_d$ est non nulle puisque $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ engendre $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$.

Si $k \geqslant 1$ et $1 \leqslant i \leqslant d$, la série $\sum_{m \in \mathbf{Z}} p^{-km} \varphi^{m-1}(([\varepsilon] - 1)^{k+1} v_i)$ converge dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ vers un élément $v_{i,k}$ vérifiant $\varphi(v_{i,k}) = p^k v_{i,k}$. D'autre part, l'image par θ du déterminant de $\frac{v_{1,k}}{([\varepsilon_1]-1)^{k+1}}, \dots, \frac{v_{d,k}}{([\varepsilon_1]-1)^{k+1}}$ dans la base $e_1, \dots, e_d$ tend vers $\det \theta(M)$ quand k tend vers $+\infty$ et est donc non nulle quand k est assez grand. Ceci montre que si k est assez grand, alors $t^{-k} v_{1,k}, \dots, t^{-k} v_{d,k}$ forment une base de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ constituée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$, ce qui permet de conclure.

3. Application au H^1 des représentations p-adiques.

Théorème IV.3.1. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{K_\infty}$, alors*
(i) $H^1(K_\infty, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V) = 0$ quel que soit $i \in \{1, 2, \dots, +\infty\}$.
(ii) $H^1(K_\infty, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V) = 0$.

(iii) $H^1(K_\infty, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V) = 0$.
(iv) $H^1(K_\infty, \mathrm{Fil}^{-i}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)) = 0$ *quel que soit* $i \geqslant 1$.
(v) $H^1(K_\infty, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V) = 0$.

Démonstration. — Comme on l'a déjà vu, la proposition IV.2.2 implique que le $\mathscr{G}_{K_\infty}$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V$ est isomophe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, ce qui permet de déduire le (i) de la trivialité de $H^1(K_\infty, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, trivialité que l'on peut démontrer, par exemple, à partir de la proposition IV.2.2 en utilisant l'argument qui nous a permis de déduire le (ii) du (i) de la proposition IV.1.4. Le (ii) se déduit du (i) par passage à la limite inductive en utilisant l'isomorphisme entre $\mathrm{Fil}^{-i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et $t^{-i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. De même le (iii) se déduit du (i) en écrivant $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ comme la limite inductive des $t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et le (v) du (iv) en écrivant $\mathbf{B}_{\max}$ comme la limite inductive des $t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^+$. Il ne reste donc plus que le (iv) à démontrer.

Lemme IV.3.2. — *Si* $\pi = \varepsilon - 1 \in \mathscr{R}$ *et* $\beta = (-1)^{p-1} \sum_{k \in \mathbf{N}, (k,p)=1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}[\pi]^k \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, *alors* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\varphi^n(\beta)}{p^n} = t$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord $p \neq 2$. Si m est un entier, on peut écrire

$$t = p^m \log[\varepsilon_m] = p^m \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}([\varepsilon_m]-1)^k = \sum_{n=-m}^{+\infty} p^{-n} \sum_{(k,p)=1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}([\varepsilon_m]-1)^{kp^{m+n}}$$

et comme $([\varepsilon_m]-1)^{p^m}$ tend vers $[\pi]$ quand m tend vers $+\infty$, on en tire le lemme dans le cas $p \neq 2$. Dans le cas $p = 2$, il faut faire attention au fait que si $(k,2) = 1$ et $n + m \geqslant 1$, alors $(-1)^{2^{n+m}k-1} = -1 \neq (-1)^{k-1}$, mais le facteur p^{-n} fait tendre le terme correspondant à $n = -m$ vers 0, ce qui permet de conclure.

Lemme IV.3.3. — *L'image de* $H^1(K_\infty, V)$ *dans* $H^1(K_\infty, \mathrm{Fil}^{-1}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V))$ *est nulle.*

Démonstration. — Soit $\tau \to c_\tau$ un cocycle de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans V. D'après le (i) de la proposition IV.2.4, il existe $c \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \otimes V$ tel que l'on ait $[\pi]c_\tau = (1-\delta_\tau) \star c$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_\infty}$. Utilisant le lemme IV.3.2, on obtient $c_\tau = (1-\delta_\tau) \star c'$, où l'on a posé

$$c' = \frac{1}{pt} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\varphi^n}{p^n}\big([\pi]^{-1}\varphi(\beta)c\big)$$

et la série converge (vers un élément de $\mathrm{Fil}^{-1}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)$) car $[\pi]^{-1}\varphi(\beta)c \in [\pi]\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \otimes V$. Ceci permet de conclure.

Revenons à la démonstration du (iv) du théorème IV.3.1. Si on considère la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to V \to \mathrm{Fil}^{-i}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V) \to \mathrm{Fil}^{-i}((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V) \to 0$$

et que l'on utilise le lemme IV.3.3, on voit que $H^1(K_\infty, \mathrm{Fil}^{-i}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V))$ s'injecte dans $H^1(K_\infty, \mathrm{Fil}^{-i}((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V))$ qui est nul d'après le (i) du théorème IV.3.1 puisque $\mathrm{Fil}^{-i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ est égal à $t^{-i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, ce qui permet de conclure.

V. Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, $\mathbf{B}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, etc...

Ce chapitre est plus ou moins consacré à l'étude de la représentation triviale de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$; cette étude est à la base des constructions du chapitre suivant. On rappelle que si $n \in \mathbf{N}$, on a posé $F_n = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^n})$ et $F_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$.

1. Les analogues p-adiques de la fonction $x \to e^{2i\pi x}$.

— Rappelons que si $n \geqslant 1$, on a noté $\varepsilon_n = (\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(n+1)}, \dots)$ l'unique racine p^n-ième de ε dans $\mathscr{R}$. L'analogue p-adique du fait que $\exp \frac{2i\pi}{p^n}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité est le lemme suivant

Lemme V.1.1. — $\varepsilon^{(n)} = [\varepsilon_n] \exp -\frac{t}{p^n}$.

Démonstration. — Les deux membres sont des racines p^n-ièmes de l'unité ayant même image par θ dans $\mathbf{C}_p$; ils sont donc égaux.

Plus généralement, la fonction $x \to e^{2i\pi x}$ qui joue un rôle primordial en analyse réelle a 3 analogues p-adiques. Le plus évident (mais le moins utile) est la fonction qui à $x \in \mathbf{Q}_p$ associe $\exp(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tx)^k}{k!} \in 1 + \ker\theta$.

On a $v_{\mathscr{R}}(\varepsilon_n - 1) > 0$, ce qui permet de définir ε_n^x si $x \in \mathbf{Z}_p$ par la formule habituelle $\varepsilon_n^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{x}{k}(\varepsilon_n - 1)^k$. On peut donc, si $x \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$ définir ε^x par la formule $\varepsilon^x = \varepsilon_n^{p^n x}$ et la fonction qui à $x \in \mathbf{Q}_p$ associe $[\varepsilon^x]$ sera notre second analogue de la fonction $x \to e^{2i\pi x}$. C'est un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^*$ et on a $\exp(tx) = [\varepsilon^x]$ si $x \in \mathbf{Z}_p$.

Plus généralement, si $x \in \mathbf{Q}_p$, $\varepsilon(x) = \frac{[\varepsilon^x]}{\exp(tx)}$ est une racine de l'unité (si $x \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$, $\varepsilon(x)$ est d'ordre p^n) et la fonction $x \to \varepsilon(x)$, qui est un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}_p$ dans μ_{p^∞}, constitue notre troisième analogue de la fonction $x \to e^{2i\pi x}$. Si on a choisit un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans $\mathbf{C}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$, alors $\varepsilon^{(n)} = \exp \frac{2i\pi}{p^n}$ et que l'on identifie $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ à un sous-groupe de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, alors on a $\varepsilon(x) = e^{2i\pi\tilde{x}}$, où, si $x \in \mathbf{Q}_p$, on a noté $\tilde{x}$ l'image de x modulo $\mathbf{Z}_p$.

La fonction $x \to \varepsilon(x)$ sera utilisée au §2 du chapitre VIII pour construire une "transformée de Fourier algébrique" et la fonction $x \to [\varepsilon^x]$ pour construire une "transformée de Fourier continue" (chapitre VIII §3).

2. L'anneau $\mathbf{C}_p^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.

Lemme V.2.1. — *Soit $I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\frac{j}{p^n} \mid 0 \leqslant j < (p-1)p^{n-1}\}$.*

(i) Tout élément de $\mathbf{C}_p^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} a_i(x)\varepsilon(i)$ où la suite $(a_i(x))_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I (i.e. quel que soit $N \in \mathbf{N}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $v_p(a_i(x)) \leqslant N$ est un ensemble fini).

(ii) Si $x \in \mathbf{C}_p^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, alors $\inf_{i\in I} v_p(a_i(x)) \leqslant v_p(x) < 1 + \inf_{i\in I} v_p(a_i(x))$.

Démonstration. — Les $\varepsilon(i)$ pour $i \in I$ forment une base sur $\mathbf{Z}_p$ de l'anneau des entiers de $F_\infty = \overline{\mathbf{Q}}_p^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ dont $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ est le séparé complété pour la topologie p-adique d'après le théorème d'Ax-Sen-Tate. Le lemme s'en déduit.

3. Compléments sur la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.— $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et, si pour $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{Z}$, on pose $U_{n,k} = p^n \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + (\ker \theta)^{k+1}$, alors les $U_{n,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Si u est un générateur de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \cap \ker \theta$, tout élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$, avec $a_k \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[p^{-1}]$. Une telle écriture est loin d'être unique, mais certaines sont meilleures que d'autres. Si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, soit $w_k(x) = \sup\{m \in \mathbf{Z} \mid x \in U_{m,k}\}$; en particulier, $w_0(x)$ est la partie entière de $v_p(\theta(x))$. On appelle écriture minimale de x toute série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ dont la somme est x et telle que $a_k \in p^{w_k(x)} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de x, alors l'image de $\theta(a_k)$ dans $\mathbf{C}_p / p^{w_{k-1}(x)} \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ ne dépend que de x et de u et peut être vue comme la k-ième dérivée de x par rapport à u. On dira qu'un élément a de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est plat si $w_k(a)$ ne dépend pas de k (ce qui signifie que toutes ses "dérivées" sont nulles) ; on notera alors $w(a)$ la valeur commune des $w_k(a)$.

Lemme V.3.1. — *(i) $a \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est plat si et seulement si $a = 0$ ou bien $\theta(a)$ est non-nul et $a \in p^{w(a)} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ où $w(a)$ est la partie entière de $v_p(\theta(a))$.*

(ii) Tout élément x de $\mathbf{C}_p$ a un relèvement plat dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$; c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{x} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ plat et vérifiant $\theta(\tilde{x}) = x$.

(iii) Si u est un générateur de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \cap \ker \theta$ et $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments plats de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de sa somme x et $w_k(x) = \inf_{0 \leqslant i \leqslant k} w(a_i)$.

(iv) Tout élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ a une écriture minimale.

(v) Si u est un générateur de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \cap \ker \theta$ et $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments plats de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ appartient à $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ (resp. $\mathbf{A}_{\max}$) si et seulement si $w(a_k) \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ (resp. $w(p^k a_k) \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} w(p^k a_k) = +\infty$).

Démonstration. — (i) Si a est plat et $\theta(a) = 0$, alors $w(a) = w_0(a) = +\infty$ et a est nul. Si a est plat et $\theta(a) \neq 0$, alors $w(a) = w_0(a)$ est égal à la partie entière de $v_p(\theta(a))$ et donc $a \in \cap_{k=1}^{+\infty} U_{w(a),k} = p^{w(a)} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$; la réciproque est immédiate.

(ii) Soit $x \in \mathbf{C}_p$. Si $x = 0$, on peut prendre $\tilde{x} = 0$. Si $x \neq 0$, soit n la partie entière de $v_p(x)$ et $a \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\theta(a) = p^{-n} x$. Alors $\tilde{x} = p^n a$ est un relèvement plat de x.

(iii) Soit $w_k = \inf_{0 \leqslant i \leqslant k} w(a_i)$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$. Il suffit de prouver que l'on a $w_k(x) = w_k$ pour tout k car $a_k \in p^{w_k} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Tous les termes de la série sont éléments de $U_{w_k,k}$ car $a_i u^i \in p^{w_k} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ si $i \leqslant k$ par définition de w_k et $a_i u^i \in (\ker \theta)^{k+1}$ si $i \geqslant k+1$. On en tire $x \in U_{w_k,k}$ et $w_k(x) \geqslant w_k$. Pour montrer l'autre inégalité, il nous faut vérifier que x n'est pas élément de $U_{w_k+1,k}$. Soit k_0 le plus petit entier i tel que $w(a_i) = w_k$, ce qui fait que $a_i u^i \in p^{w_k+1} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \subset U_{w_k+1,k_0}$ si $i < k_0$ et $a_i u^i \in (\ker \theta)^{k_0+1} \subset U_{w_k+1,k_0}$ si $i > k_0$, et comme $a_{k_0} u^{k_0} \notin U_{w_k+1,k_0}$ car $a_{k_0} \notin U_{w_k+1,0}$ puisque $w(a_{k_0}) = w_0(a_{k_0}) = w_k$, on voit que tous les termes de la série sauf un sont dans U_{w_k+1,k_0}, ce qui implique que la somme de la série n'est pas dans U_{w_k+1,k_0} et comme cet ouvert contient $U_{w_k+1,k}$, ceci termine la démonstration.

(iv) Soit $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Définissons par récurrence 2 suites (a_k) et (x_k) d'éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ en posant $x_0 = x$ et $x_{k+1} = u^{-1}(x_k - a_k)$ où a_k est n'importe quel relèvement plat de $\theta(x_k)$. Un petit calcul montre que l'on a $x - u^{k+1} x_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i$ et donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de x d'après le (iii).

(v) Le cas de $\mathbf{A}_{\inf}$ est une conséquence directe du (iii). D'autre part x appartient à $\mathbf{A}_{\max}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments b_k de $\mathbf{A}_{\inf}$ tendant vers 0 telle que l'on ait $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{p^k} u^k$. On en déduit le fait que $x \in \mathbf{A}_{\max}$ si et seulement si $w_k(p^k x) \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} w_k(x) + k = +\infty$, ce qui permet de conclure en utilisant le (iii).

4. L'anneau $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et les applications Res_X, R_n, R_n^* et $\mathrm{T}_{K,n}$.— Rappelons que $\omega = \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{\frac{1}{p}}]-1}$ est un générateur de $\mathbf{A}_{\inf} \cap \ker \theta$. Ce générateur est particulièrement agréable car il est fixe par $\mathscr{G}_{F_\infty}$ et est un polynôme en $[\varepsilon^{\frac{1}{p}}]$.

Lemme V.4.1. — *Tout élément de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \Big(\sum_{i \in I} a_{k,i}(x)[\varepsilon^i]\Big)$, où $(a_{i,k}(x))_{k \in \mathbf{N}, i \in I}$ est une suite double d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ telle que si k est fixé, alors la suite $(a_{k,i}(x))_{i \in I}$ tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies.*

De plus, cette écriture est minimale et $x \in \mathbf{A}_{\inf}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ si et seulement si $a_{k,i}(x) \in \mathbf{Z}_p$ quels que soient $k \in \mathbf{N}$ et $i \in I$.

Démonstration. — Soient $(a_i)_{i \in I}$ la suite d'applications de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ dans $\mathbf{Q}_p$ définies par $\theta(y) = \sum_{i \in I} a_i(y)\varepsilon(i)$ (l'existence des a_i est assurée par le lemme V.2.1) et R l'application de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ définie par $R(y) = \omega^{-1}(y - \sum_{i \in I} a_i(y)[\varepsilon^i])$. Si $x \in (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$x = \omega^{n+1} R^{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} \omega^k (\sum_{i \in I} a_i(R^k(x))[\varepsilon^i]),$$

ce qui montre que l'on peut poser $a_{i,k}(x) = a_i(R^k(x))$; d'où l'existence d'une telle écriture. D'autre part, si on utilise l'application θ et le lemme V.2.1, on montre par récurrence sur k que l'on doit poser $a_{i,k}(x) = a_i(R^k(x))$, ce qui montre l'unicité.

Finalement, comme $\sum_{i \in I} a_{k,i}(x)[\varepsilon^i]$ est plat d'après le (i) du lemme V.3.1 et le (ii) du lemme V.2.1, une telle écriture est automatiquement minimale et le fait que $x \in \mathbf{A}_{\inf}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ si et seulement si $a_{k,i}(x) \in \mathbf{Z}_p$ quels que soient $i \in I$ et $k \in \mathbf{N}$ est une conséquence immédiate du (v) du lemme V.3.1.

Proposition V.4.2. — *Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $X + p^{-1}\mathbf{Z}_p = X$, il existe une unique application $\mathbf{Q}_p$-linéaire Res_X continue de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ telle que l'on ait $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = [\varepsilon^x]$ si $x \in X$ et $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = 0$ sinon.*

Démonstration. — Utilisant le fait que $\omega = \sum_{i=0}^{p-1} [\varepsilon^{\frac{i}{p}}]$ est un polynôme en $[\varepsilon^{\frac{1}{p}}]$, on voit que l'application Res_X, si elle existe, doit être donnée par la formule

$$\mathrm{Res}_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \Big(\sum_{i \in I \cap X} a_{k,i}(x)[\varepsilon^i] \Big). \qquad \text{(V.4.3)}$$

Il est apparent sur cette formule que $\mathrm{Res}_X(p^n \mathbf{A}_{\inf}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}) \subset p^n \mathbf{A}_{\inf}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et $\mathrm{Res}_X((\ker \theta)^{k+1}) = \mathrm{Res}_X(\omega^{k+1} (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}) \subset (\ker \theta)^{k+1}$ et donc que $\mathrm{Res}_X(U_{n,k}) \subset U_{n,k}$, ce qui permet de montrer que l'application Res_X définie par la formule (V.4.3) est continue.

Il ne reste donc plus qu'à calculer $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x])$ si $x \in \mathbf{Q}_p$. Soit donc $x \in \mathbf{Q}_p$. On peut décomposer x de manière unique sous la forme $i_x + y$ avec $i_x \in I \cap [0, \frac{1}{p}[$ et $y \in p^{-1}\mathbf{Z}_p$. On a donc $[\varepsilon^x] = [\varepsilon]^i[\varepsilon^y]$ et $[\varepsilon^y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{py}{n}([\varepsilon^{\frac{1}{p}}] - 1)^n \in \mathbf{Z}_p[[[\varepsilon^{\frac{1}{p}}] - 1]]$. D'autre part, on vérifie facilement que tout élément z de $\mathbf{Z}_p[[[\varepsilon^{\frac{1}{p}}] - 1]]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \sum_{i\in\{0,\frac{1}{p},\dots,\frac{p-2}{p}\}} a_{k,i}(z)[\varepsilon^i]$. Avec les précautions que l'on a prises, on a $i_x + i \in I$ si $i \in \{0, \frac{1}{p}, \dots, \frac{p-2}{p}\}$ et $i_x + i \in X$ si et seulement si $x \in X$ puisque $X = X + p^{-1}\mathbf{Z}_p$, ce qui permet de montrer en utilisant la formule explicite pour Res_X que l'on a $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = [\varepsilon^x]$ si $x \in X$ et $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = 0$ sinon et permet de conclure.

Pour alléger un peu les notations, si $n \geqslant 1$ (resp. $n \geqslant 2$), nous noterons R_n (resp. R^*_n) l'application $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$ (resp. $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}$).

Proposition V.4.4. — *i) Si $z \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n(z) = z$ et, si $n \geqslant 1$, alors $z = \mathrm{R}_n(z) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}^*_m(z)$.*

ii) Si $\sigma \in \Gamma$, alors $\mathrm{R}_n \circ \delta_\sigma = \delta_\sigma \circ \mathrm{R}_n$ et $\mathrm{R}^*_n \circ \delta_\sigma = \delta_\sigma \circ \mathrm{R}^*_n$.

Démonstration. — Le i) est évident sur la formule (V.4.3) et le ii) vient de ce que $\delta_\sigma \star [\varepsilon^x] = [\varepsilon^{\chi(\sigma)x}]$ et $\chi(\sigma) \in \mathbf{Z}_p^*$ et de la caractérisation de l'application Res_X par sa valeurs sur les $[\varepsilon^x]$.

Proposition V.4.5. — *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si $n \in \mathbf{N}$, il existe une unique application $\mathrm{T}_{K,n} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \to K_n((t))$ qui est $K_n((t))$-linéaire et continue et telle que si $x \in K_\infty$ et $m \geqslant n$ est assez grand, alors $\mathrm{T}_{K,n}(x) = p^{-m}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$. De plus, si $z \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, alors $z = \lim_{n\to+\infty} p^n \mathrm{T}_{K,n}(z)$.*

Démonstration. — Remarquons que si $x \in K_\infty$, alors la suite $p^{-m}\mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$ est stationnaire à partir d'un certain rang et donc que $\mathrm{T}_{K,n}$ est bien défini sur K_∞.

Commençons par traiter le cas $K = \mathbf{Q}_p$ et donc $K_n = F_n$ et $K_\infty = F_\infty$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit S_n le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel (c'est aussi la sous-$\mathbf{Q}_p$-algèbre) de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par les $[\varepsilon^x]$ pour $x \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$ et soit $S_\infty = \cup_{n=0}^{+\infty} S_n$. La proposition V.4.1 permettant d'écrire tout élément de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ comme une série à termes dans S_∞, cela implique que S_∞ est dense dans $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Comme $[\varepsilon^x] = \varepsilon(x)\exp(xt) \in \varepsilon(x)\mathbf{Q}_p((t)) \subset F_\infty \otimes_{F_n} F_n((t))$, la valeur de $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}([\varepsilon^x])$ est imposée si $x \in \mathbf{Q}_p$, ce qui montre que l'on a pas le choix pour la restriction de $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$ à S_∞ et donc aussi à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ par continuité de $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$. Finalement, si $z \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $t^k z \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et on doit poser $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(z) = t^{-k}\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(t^k z)$, ce qui montre déjà l'unicité.

Passons à l'existence. Commençons par remarquer que si l'on a réussi à construire $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$ et si $m \leqslant n$, alors on peut poser $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,m} = \mathrm{Tr}_{F_n((t))/F_m((t))} \circ \mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$, ce qui fait que l'on peut supposer $n \geqslant 1$. De plus, comme on l'a vu plus haut, $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$ est déterminé par sa restriction à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Un petit calcul montre que si $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(\varepsilon(x)) = \frac{1}{p^n}\varepsilon(x)$ si $x \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$ et $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(\varepsilon(x)) = 0$ si $x \in \mathbf{Q}_p - p^{-n}\mathbf{Z}_p$ et donc, utilisant la formule $[\varepsilon^x] = \varepsilon(x)\exp(xt)$ et la $F_n((t))$-linéarité de $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$, que l'on doit avoir $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}([\varepsilon^x]) = p^{-n}\mathrm{R}_n([\varepsilon^x])$ si $x \in \mathbf{Q}_p$. Pour terminer la démonstration, il suffit donc de prouver que R_n est $F_n[[t]]$-linéaire et donc que l'on peut poser $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n} = p^{-n}\mathrm{R}_n$ si $n \geqslant 1$.

Lemme V.4.6. — *Si $n \geqslant 1$, l'adhérence de S_n dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est $F_n[[t]]$.*

Démonstration. — On a $[\varepsilon^x] = \varepsilon(x)\exp(xt) \in F_n[[t]]$ si $x \in p^{-n}\mathbf{Z}_p$, ce qui implique que l'adhérence de S_n est incluse dans $F_n[[t]]$. Réciproquement, $t = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\varepsilon]^{p^n}-1}{p^n}$ appartient à cette adhérence qui contient donc $\mathbf{Q}_p[[t]]$. Elle contient donc aussi $\varepsilon^{(n)} = [\varepsilon^{p^{-n}}]\exp(-\frac{t}{p^n})$, ce qui permet de conclure.

Corollaire V.4.7. — *Si $n \geqslant 1$ et $X + p^{-n}\mathbf{Z}_p = X$, alors Res_X est $F_n[[t]]$-linéaire.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que l'on a $\mathrm{Res}_X(xy) = x\mathrm{Res}_X(y)$ si $x \in F_n[[t]]$ et $y \in (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Par densité, on peut se restreindre au cas où $x \in S_n$ et $y \in S_\infty$ qui est immédiat.

Ce corollaire appliqué à $X = p^{-n}\mathbf{Z}_p$ permet de terminer la démonstration de la proposition V.4.5 dans le cas $K = \mathbf{Q}_p$. Passons au cas général. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $[K_n : F_n] = [K_\infty : F_\infty]$ et soit $e_1, \dots, e_d$ une base de K_n sur F_n. Les e_i forment aussi une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}}$. La restriction de T à K_n est égale à Tr_{K_n/F_n}, ce qui fait que la base $e_1^*, \dots, e_d^*$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ duale de $e_1, \dots, e_d$ est constituée d'éléments de K_n. Si $z \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, on a $z = \sum_{i=1}^d \mathrm{T}(ze_i)e_i^*$ et on peut définir $\mathrm{T}_{K,m}$ par la formule $\mathrm{T}_{K,m}(z) = \sum_{i=1}^d \mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,m}(ze_i)e_i^*$ si $m \geqslant n$, puis poser $\mathrm{T}_{K,m} = \mathrm{Tr}_{K_n((t))/K_m((t))} \circ \mathrm{T}_{K,n}$ si $m \leqslant n$, ce qui permet de montrer l'existence.

Finalement, comme $[K_\infty((t)) : F_\infty((t))] = [K_\infty : F_\infty] = [\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}]$ et comme $F_\infty((t))$, qui contient S_∞ d'après le lemme V.4.6, est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, on en déduit la densité de $K_\infty((t))$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, ce qui permet de prouver l'unicité et termine la démonstration de la proposition V.4.5.

5. L'anneau $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.

Proposition V.5.1. — *Les $[\varepsilon^i]\left(\frac{\omega}{p}\right)^k$, pour $i \in I$ et $k \in \mathbf{N}$ forment une base de Banach de $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition V.4.1 et du (v) du lemme V.3.1.

Cette proposition peut se réécrire de plusieurs manières. Soit $\mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$ le complété p-adique de $\mathbf{Z}_p[\frac{\omega}{p}]$ et $\mathbf{Q}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle = \mathbf{Q}_p \otimes \mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$. On munit $\mathbf{Q}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$ de la structure d'espace de Banach p-adique naturelle définie par $\|x\| = 1$ si et seulement si $x \in \mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle - p\mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$ et les $\left(\frac{\omega}{p}\right)^k$, pour $k \in \mathbf{N}$ en forment une base de Banach.

Corollaire V.5.2. — *i) Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $X + p^{-1}\mathbf{Z}_p = X$, alors $\mathrm{Res}_X(\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}) \subset \mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. En particulier, la restriction de Res_X à $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ est continue.*

ii) Si $n \geqslant 1$ et $x \in (\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, alors $\|x\|_{\max} = \sup(\|\mathrm{R}_n(x)\|_{\max}, \sup_{m\geqslant n+1}\|\mathrm{R}_m^*\|_{\max})$.

iii) Tout élément de $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} b_i(x)[\varepsilon^i]$, où $(b_i(x))_{i\in I}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{Q}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$ tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies et on a $\|x\|_{\max} = \sup_{i\in I}\|b_i(x)\|$.

Démonstration. — Le i) est une conséquence de la proposition précédente et de la formule (V.4.3). Le ii) est une conséquence de la proposition précédente et de la formule (V.4.3) qui impliquent que l'on a $\|\mathrm{Res}_X(x)\|_{\max} = \sup_{i\in I\cap X, k\in\mathbf{N}} |a_{k,i}(x)|$ et une démonstration immédiate montre que l'on doit poser $b_i(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,i}(x)\big(\frac{\omega}{p}\big)^k$ d'où l'on déduit le reste du iii).

Proposition V.5.3. — *Si $n \geqslant 1$, l'application qui, à une série formelle $G(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$ à cefficients dans $\mathbf{Q}_p$ convergeant sur la boule fermée $B(0, |\varepsilon^{(n)} - 1|)$, associe $G([\varepsilon_n] - 1)$ est un isomorphisme de cet espace sur $\mathbf{B}^+_{\max} \cap F_n[[t]]$. De plus, si on munit cet espace de séries formelles de la norme $\| \ \|$ définie par $\| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k\| = \sup_{k\in\mathbf{N}} p^{-\left(v_p(a_k)+E\left(\frac{k}{(p-1)p^{n-1}}\right)\right)}$ et $\mathbf{B}^+_{\max} \cap F_n[[t]]$ de la norme $\| \ \|_{\max}$, cet isomorphisme devient une isométrie.*

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme V.5.4. — *Si $n \geqslant 1$, les $e_{k,i} = [\varepsilon_n]^i \frac{\omega^k}{p^k}$ pour $0 \leqslant i < (p-1)p^{n-1}$ et $k \in \mathbf{N}$, forment une base de Banach de $\mathbf{B}^+_{\max} \cap F_n[[t]]$.*

Démonstration. — D'après le lemme V.4.6, si $n \geqslant 1$, un élément z de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ appartient à $F_n[[t]]$ si et seulement si $\mathrm{R}_n(z) = z$ ou encore, utilisant la formule (V.4.3), si et seulement si z s'écrit sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} \omega^k \Big(\sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}-1} a_{k,i}(z)[\varepsilon_n]^i\Big)$ et la proposition V.5.1 permet de conclure.

Corollaire V.5.5. — *Si $n \geqslant 1$, les $e'_{k,i} = \frac{([\varepsilon_n]-1)^{k(p-1)p^{n-1}+i}}{p^k}$ pour $k \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant i < (p-1)p^{n-1}$, forment une base de Banach de $\mathbf{B}^+_{\max} \cap F_n[[t]]$.*

Démonstration. — On a $1 + (1+X)^{p^{n-1}} + \cdots (1+X)^{(p-1)p^{n-1}} = X^{(p-1)p^{n-1}} + pQ_n(X)$, où Q_n est un polynôme à coefficients entiers de degré strictement inférieur à $(p-1)p^{n-1}$. On a donc $\frac{\omega}{p} = \frac{([\varepsilon_n]-1)^{(p-1)p^{n-1}}}{p} + Q_n([\varepsilon_n]-1)$, ce qui montre que l'on passe des $e_{k,i}$ aux $e'_{k,i}$ par une matrice triangulaire à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$ et dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On en déduit le résultat.

La proposition V.5.3 est une réécriture du corollaire V.5.5.

6. Action de Γ sur $(\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.—

Lemme V.6.1. — *Si $n \geqslant 1$ et $\sigma \in \Gamma_n$, alors $(\delta_\sigma - 1) \star (\frac{\omega}{p}) \in p^{n-1}\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.*

Démonstration. — Soit $u \in \mathbf{Z}_p$ défini par $\chi(\sigma) = 1 + p^n u$. On a

$$(\delta_\sigma - 1) \star (\frac{\omega}{p}) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}[\varepsilon^{\frac{i}{p}}]([\varepsilon^{p^{n-1}iu}] - 1)$$

et comme

$$[\varepsilon^{iu}] = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{iu}{k}([\varepsilon]-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{iu}{k}p^k(\frac{\omega}{p})^k([\varepsilon^{\frac{1}{p}}]-1)^k \in 1 + p\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}},$$

on a $[\varepsilon^{iu}]^{p^{n-1}} - 1 \in p^n\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, ce qui permet de conclure.

Si $\sigma \in \Gamma$, on pose $T_\sigma = 1 + \delta_\sigma + \cdots \delta_{\sigma^{p-1}} \in \Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$. La proposition suivante sera cruciale pour la construction de l'application logarithme.

Proposition V.6.2. — *Si $\sigma\in\Gamma_4$ et $x\in\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, alors $\|T_\sigma\star x\|_{\max}\geqslant p^{-2}\|x\|_{\max}$.*

Démonstration. — D'après la proposition V.4.4, on a $\mathrm{R}_m(T_\sigma\star x)=T_\sigma\star\mathrm{R}_m(x)$ si $m\geqslant 1$ et $\mathrm{R}_m^*(T_\sigma\star x)=T_\sigma\star\mathrm{R}_m^*(x)$ si $m\geqslant 2$. De plus, d'après le corollaire V.5.2, si $y\in(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et $n\geqslant 1$, alors $\|y\|_{\max}=\sup(\|\mathrm{R}_n(x)\|_{\max},\sup_{m\geqslant n+1}\|\mathrm{R}_m^*(y)\|_{\max})$. Il suffit donc de prouver le lemme suivant.

Lemme V.6.3. — *Si $n\geqslant 4$, σ est un générateur topologique de Γ_n et $x\in(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, alors*
i) $\|T_\sigma\star\mathrm{R}_n(x)\|_{\max}\geqslant p^{-2}\|\mathrm{R}_n(x)\|_{\max}$
ii) $\|T_\sigma(\mathrm{R}_m^*(x))\|_{\max}\geqslant p^{-2}\|\mathrm{R}_m^*(x)\|_{\max}$ si $m\geqslant n+1$.

Démonstration. — Pour alléger les notations, posons $A=\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, $\mathrm{R}_n(x)=x_n$ et $\mathrm{R}_m^*(x)=x_m$ si $m\geqslant n+1$. Par définition de la norme $\|\ \|_{\max}$, il s'agit de prouver que si $m\geqslant n$ et $x_m\in A-pA$, alors $T_\sigma(x_m)\notin p^3A$.

Commençons par traiter le cas $m=n$. D'après le corollaire V.5.2, on peut écrire x_n sous la forme $\sum_{i\in I\cap p^{-n}\mathbf{Z}_p} b_i(x)[\varepsilon_i]$ où, si $i\in I\cap p^{-n}\mathbf{Z}_p$, alors $b_i(x)\in\mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$. De plus, $x_n\notin pA$ si et seulement si il existe i tel que $b_i(x)\notin p\mathbf{Z}_p\langle\langle\frac{\omega}{p}\rangle\rangle$. Utilisant alors le lemme V.6.1 et l'hypothèse $\sigma\in\Gamma_4$, on obtient

$$T_\sigma\star x_n\equiv\sum_{i\in I_n}a_iT_\sigma\star[\varepsilon^i]\quad\text{mod. }p^3A.$$

D'autre part, si $0\leqslant j\leqslant p-1$ et $i\in I\cap p^{-n}\mathbf{Z}_p$, on a

$$\delta_{\sigma^j}\star[\varepsilon^i]=[\varepsilon^{i\chi(\sigma)^j}]=[\varepsilon^i][\varepsilon^{i(\chi(\sigma)^j-1)}]\equiv[\varepsilon^i](1+ji(\chi(\sigma)-1)([\varepsilon]-1))\text{ mod. }p^2A.$$

On en déduit les égalités

$$T_\sigma\star[\varepsilon^i]\equiv[\varepsilon^i](\sum_{j=0}^{p-1}(1+ji(\chi(\sigma)-1)([\varepsilon]-1)))\equiv[\varepsilon^i](p+\frac{p(p-1)}{2}i(\chi(\sigma)-1)([\varepsilon]-1))$$

modulo p^2A et comme $[\varepsilon]-1\in pA$ (resp. p^2A) et $\frac{p(p-1)}{2}\in p\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Z}_p$) si $p\geqslant 3$ (resp. $p=2$), on obtient finalement, $T_\sigma\star x_n=px_n$ modulo p^2A. En particulier, ceci implique que si $x_n\notin pA$, alors $T_\sigma\star x_n\notin p^2A$, ce qui permet de conclure dans le cas $m=n$.

Supposons maintenant $m\geqslant n+1$ et posons $\tau=\sigma^{p^{m-n}}$. Comme T_σ divise $\delta_\tau-1$ dans Λ, il suffit de prouver que si $x_m\notin pA$, alors $(\delta_\tau-1)\star x_m\notin p^3A$. D'après le corollaire V.5.2, on peut écrire x_m sous la forme $x_m=\sum_{i\in I\cap p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} b_i(x)[\varepsilon^i]$ avec $b_i(x)\in\mathbf{Z}_p\{\{\frac{\omega}{p}\}\}$ et pour la même raison que précédemment, on a $(\delta_\tau-1)\star x_m=\sum_{i\in I\cap p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} b_i(x)(\delta_\tau-1)\star[\varepsilon^i]$ modulo p^3A. D'autre part, on peut écrire $(\delta_\tau-1)\star[\varepsilon^i]$ sous la forme

$$[\varepsilon^i]([\varepsilon^{i(\chi(\tau)-1)}]-1)=[\varepsilon^i]([\varepsilon]-1)\Big(i(\chi(\tau)-1)+\binom{i(\chi(\tau)-1)}{2}([\varepsilon]-1)+\cdots\Big)$$

et donc $(\delta_\tau - 1)\star x_m = ([\varepsilon]-1)y$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i\in I\cap p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} b_i(x)[\varepsilon^i]\Big(i(\chi(\tau)-1) + \binom{i(\chi(\tau)-1)}{2}([\varepsilon]-1)+\cdots\Big) \\ &= \sum_{i\in I\cap p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} b_i(x)[\varepsilon^i]i(\chi(\tau)-1) \bmod pA. \end{aligned}$$

Comme $i\in p^{-m}\mathbf{Z}_p^*$, ce qui implique $i(\chi(\tau)-1)\in\mathbf{Z}_p^*$, on a $y\notin pA$ si $x_m\notin pA$ et donc $\|y\|_{\max} = \|x_m\|_{\max}$. Pour conclure il suffit alors d'utiliser le fait que $\frac{[\varepsilon]-1}{p}\notin pA$ (resp. $\frac{[\varepsilon]-1}{p^2} = \frac{\omega}{p}u$, ou u est une unité de A) si $p\geqslant 3$ (resp. si $p=2$) et la proposition III.2.1.

7. Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{temp}}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$.— Rappelons que l'on a défini un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty}\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$. Si $r\in\overline{\mathbf{R}}$, un élément z de $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+$ sera dit d'ordre r si la suite $p^{E(nr)}\varphi^{-n}(z)$ est $\eta(r)$-bornée (cf. convention I.4.1) dans $\mathbf{B}_{\max}^+$; il sera dit tempéré s'il existe $r\in\overline{\mathbf{R}}$ tel qu'il soit d'ordre r. Les éléments tempérés de $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+$ forment un anneau noté $\mathbf{B}_{\mathrm{temp}}^+$ qui est stable par φ et on pose $\mathbf{B}_{\mathrm{temp}} = \mathbf{B}_{\mathrm{temp}}^+[\frac{1}{t}]$.

Proposition V.7.1. — *Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, il existe une unique application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue* Res_X *de* $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ *dans* $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ *(et même dans $K_n[[t]]\cap(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ si $X\subset p^{-n}\mathbf{Z}_p$) vérifiant* $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = [\varepsilon^x]$ *si $x\in X$ et* $\mathrm{Res}_X([\varepsilon^x]) = 0$ *si $x\in\mathbf{Q}_p - X$. De plus, si $r\in\overline{\mathbf{R}}_+$,* Res_X *transforme un élément d'ordre r en un élément d'ordre r.*

Démonstration. — L'unicité est une conséquence de la densité de S_∞. En particulier, si X vérifie $X+p^{-1}\mathbf{Z}_p = X$, Res_X doit coïncider avec l'application construite dans la proposition V.4.2. L'unicité implique, en outre, que l'on doit avoir

$$\mathrm{Res}_X(z) = \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(\varphi^{-n}(z)))$$

quels que soient X, $n\in\mathbf{N}$ et $z\in(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$. Comme $p^{-n}X+p^{-1}\mathbf{Z}_p = p^{-n}X$ si n est assez grand et que $\mathrm{Res}_{p^{-n}X}$ envoie $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ dans $(\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ si $p^{-n}X+p^{-1}\mathbf{Z}_p = p^{-n}X$, cette formule permet de définir Res_X pour X quelconque. D'autre part, $\mathrm{Res}_X(z)\in\varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ par construction et ce, quel que soit $n\in\mathbf{N}$ assez grand, ce qui implique que Res_X envoie $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$.

Finalement, si z est d'ordre r, alors $p^{rn}\varphi^{-n}(z)$ est $\eta(r)$-bornée dans $\mathbf{B}_{\max}^+$ et comme $\mathrm{Res}_{p^{-n}X}$ envoie $p^m\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ dans $p^m\mathbf{A}_{\max}^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ si n est assez grand, la suite $p^{rn}\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_X(z)) = \mathrm{res}_{p^{-n}X}(p^{rn}\varphi^{-n}(z))$ est $\eta(r)$-bornée et Res_X transforme un élément d'ordre r en un élément d'ordre r, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Remarque V.7.2. — Si $X+p^{-1}\mathbf{Z}_p\neq X$, on ne peut pas prolonger Res_X par continuité à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Par exemple, on a

$$[\varepsilon] = ([\varepsilon]^p)^{p^{-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p^{-1}}{n}([\varepsilon]^p-1)^n$$

mais $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}([\varepsilon]) = 0$ et $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(([\varepsilon]^p-1)^n) = ([\varepsilon]^p-1)^n$, ce qui prouve que $\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$ ne s'étend pas par continuité à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ (la série converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ mais pas dans $\mathbf{B}_{\max}^+$ et l'exemple considéré n'est donc pas un contrexemple à la proposition V.7.1).

VI. Les applications “exponentielle” et “logarithme”.

1. L’application exponentielle.— Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, la suite exacte fondamentale induit une suite exacte de $\mathscr{G}_K$-modules

$$0 \longrightarrow \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, V) \longrightarrow \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V) \longrightarrow \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\rm dR}/\mathbf{B}_{\rm dR}^+) \otimes V) \longrightarrow 0$$

que l’on peut scinder en utilisant l’application $e_B : \mathbf{B}_{\rm dR}/\mathbf{B}_{\rm dR}^+ \to \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}$ définie au §5 du chapitre III. On en déduit, en composant l’application de connexion dans la suite de cohomologie continue associée avec l’application naturelle de $\mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ dans $\mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, (\mathbf{B}_{\rm dR}/\mathbf{B}_{\rm dR}^+) \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$, une application “exponentielle de Bloch-Kato”

$$\exp_V : \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \longrightarrow H^1(K, \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, V)).$$

Si $\mu \in \mathscr{D}_{\rm alg}^I(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$, $k \in I$, $n \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in \Gamma_K$, un petit calcul montre que $\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu \in \big(\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V(k)\big)^{\mathscr{G}_{K_n}}$ et que l’on a

$$\text{(VI.1.1)} \qquad \int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \exp_V(\mu) = \exp_{V(k)}\Big(\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mu\Big) \in H_e^1(K_n, V(k)).$$

Soient V une représentation de de Rham et $D(V) = D_{\rm dR}(V)$. L’application naturelle de $\mathbf{B}_{\rm dR}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \otimes D(V)$ dans $(\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ est un isomorphisme, ce qui permet d’étendre les applications $\mathrm{T}_{K,n}$ pour $n \in \mathbf{N}$, définies au chapitre V, par linéarité à $\mathbf{B}_{\rm dR}^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \otimes D(V)$. D’autre part, si $z \in K_\infty((t)) \otimes D(V)$, alors z s’écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k \gg -\infty} t^k d_k$ avec $d_k \in K_\infty \otimes D(V)$ et on note $\delta_{V(-k)}(z)$ l’élément $t^k d_k$ de $K_\infty \otimes D(V(-k))$. Finalement, si $i \in \mathbf{Z}$, on note $\mathrm{F}_V^i(\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)$ le sous-espace $(\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\rm dR}) \otimes D(V)$ de $\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V$. Si W est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V$, on pose $\mathrm{F}_V^i(W) = W \cap \mathrm{F}_V^i(\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)$. En particulier, on a

$$\mathrm{F}_V^0((\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}) = (\mathbf{B}_{\rm dR}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}} \otimes D(V).$$

Lemme VI.1.2. — *Soient $h \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $z \in \mathrm{F}_V^0(\mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$. Il existe un (unique) élément $\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)$ de $\mathscr{D}_{\rm alg}^{[1-h,0]}(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\rm dR} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ tel que si $k \in [0, h-1]$, $n \in \mathbf{N}$ et $\gamma \in \Gamma_K$, alors*

$$\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k} \mathrm{Tay}_V^{(h)}(z) = \frac{(h-1-k)!k!}{(-\chi(\gamma))^k} \delta_\gamma \star \delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,n}(z).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que $\delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,n}(z)$ appartient à $t^k K_n \otimes D_{DR}(V)$ et que $\chi(\gamma)^{-k} \delta_\gamma \star \delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,n}(z)$ ne dépend donc bien que de la classe de γ modulo Γ_{K_n}. L’additivité de $\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)$ est une conséquence immédiate de l’identité

$$\mathrm{Tr}_{K_{n+1}((t))/K_n((t))} \circ \mathrm{T}_{K,n+1} = \mathrm{T}_{K,n}$$

et son invariance par $\mathscr{G}_K$ découle du calcul suivant

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k}\sigma\big(\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)\big) =&\sigma\Big(\int_{\Gamma_K} \mathbf{1}_{\gamma\Gamma_{K_n}}(\overline{\sigma}x)\chi(\overline{\sigma}x)^{-k}\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)\Big)\\ =&\sigma\Big(\int_{\overline{\sigma}^{-1}\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(\overline{\sigma}x)^{-k}\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)\Big)\\ =&\delta_{\overline{\sigma}}\star\Big(\chi(\overline{\sigma})^{-k}\frac{(h-1-k)!k!}{(-\chi(\overline{\sigma}^{-1}\gamma))^k}\delta_{\overline{\sigma}^{-1}\gamma}\star\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z)\Big)\\ =&\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k}\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)\end{aligned}$$

car $\delta_{\overline{\sigma}}\star\delta_{\overline{\sigma}^{-1}\gamma}=\delta_\gamma$.

Nous noterons $\mathrm{Exp}_V^{(h)}$ l'application qui à $z\in \mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))$ associe la classe de cohomologie $\exp_V(\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z))\in H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,0]}(\Gamma_K,V))^{\Gamma_K}$.

Théorème VI.1.3. — *Soient V une représentation de de Rham et $h\geqslant 1$ un entier tel que l'on ait $\mathrm{Fil}^{-h}D(V)=D(V)$. Si $z\in \mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))$, son image par $\mathrm{Exp}_V^{(h)}$ est tempérée d'ordre h^-, c'est-à-dire appartient à $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,V))^{\Gamma_K}$.*

Démonstration. — Nous allons utiliser l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii) de la proposition II.2.3 avec $r=h^-$ et $N=h-1$ pour montrer que $\chi(x)^{1-h}\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$ est d'ordre h^-, ce qui montrera que $\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$ est d'ordre h^-. Son invariance par Γ_K sera alors une conséquence du fait que son image dans $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,0]}(\Gamma_K,V))$ l'est puisque c'est la restriction d'un élément de $H^1(K,\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,0]}(\Gamma_K,V))$ et que l'application de $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,V))$ dans $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,0]}(\Gamma_K,V))$ est injective d'après le corollaire II.2.2. Il s'agit donc de montrer que

$$\beta_{n,\gamma}=p^n\int_{\gamma\Gamma_{K_n}}(\chi(x)-\chi(\gamma))^{h-1}(\chi(x)^{1-h}\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z))$$

tend uniformément vers 0 pour $\gamma\in\Gamma_{K_n}$ quand n tend vers $+\infty$. Un petit calcul et le fait que $\delta_V(-k)\circ \mathrm{T}_{K,n}(z)\in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$ si $k\geqslant h$ (car on a supposé $\mathrm{Fil}^{-h}D(V)=D(V)$) nous donnent

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\Gamma_{K_n}}(1-\chi(\gamma x^{-1}))^{h-1}\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z) =&(h-1)!\delta_\gamma\star\Big(\sum_{k=0}^{h-1}\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z)\Big)\\ \equiv&(h-1)!\delta_\gamma\star \mathrm{T}_{K,n}(z) \bmod (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V).\end{aligned}$$

On en déduit le fait que $\frac{1}{(h-1)!}\beta_{n,\gamma}$ est représenté par le cocycle

$$\tau\to(1-\delta_\tau)\star e_B\big(\delta_\gamma\star(p^n\mathrm{T}_{K,n}(z))\big).$$

D'autre part, comme $z\in \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V$, on a $\delta_\gamma\star z-e_B(\delta_\gamma\star z)\in V$ et comme $\delta_\gamma\star z$ est fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$, ceci implique que $\frac{1}{(h-1)!}\beta_{\gamma,n}$ est aussi représenté par le cocycle $\tau\to(1-\delta_\tau)\star e_B\big(\delta_\gamma\star(p^n\mathrm{T}_{K,n}(z)-z)\big)$. Finalement, $p^n\mathrm{T}_{K,n}(z)$ tend vers z quand n tend vers $+\infty$ et comme e_B est continue et δ_γ agit par une isométrie sur $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$, on en déduit le fait que $e_B\big(\delta_\gamma\star(p^n\mathrm{T}_{K,n}(z)-z)\big)$ tend, uniformément pour $\gamma\in\Gamma_K$, vers 0, ce qui permet de conclure.

2. Le noyau de l'application exponentielle.— Si $i \in \mathbf{Z}$, soit $W_i = \cup_{n\in\mathbf{N}}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V(-i))^{\mathscr{G}_{K_n}}$. Si $I \subset \mathbf{Z}$, soit $W_I = \underset{i\in I}{\oplus} W_i$. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel W_I est de dimension finie quel que soit $I \subset \mathbf{Z}$ car il est inclus dans

$$\cup_{n=0}^{+\infty}((\oplus_{i\in\mathbf{Z}}t^{-i}\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1})\otimes V)^{\mathscr{G}_{K_n}} \subset \cup_{n=0}^{+\infty}(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes V)^{\mathscr{G}_{K_n}}$$

qui est de dimension sur $\mathbf{Q}_p$ inférieure ou égale à $[K_\infty\cap\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}:\mathbf{Q}_p]\dim_{\mathbf{Q}_p}V < +\infty$. D'autre part, l'hypothèse $\mathrm{Fil}^{-h}D(V) = D(V)$ implique que $W_i = \{0\}$ si $i \geqslant h+1$ et $W_h = \cup_{n\in\mathbf{N}}V(-h)^{\mathscr{G}_{K_n}}$. Finalement, comme $W_i \subset K_n\otimes D(V(-i)) = t^iK_n\otimes D(V)$, on a $W_i\cap \mathrm{F}_V^0D_{\mathrm{Iw}}(V) = \{0\}$ si $i<0$.

Proposition VI.2.1. — *Le noyau de* $\mathrm{Exp}_V^{(h)}$ *est égal à* $W_{[0,h]}$.

Démonstration. — $z\in\ker\mathrm{Exp}_V^{(h)}$ si et seulement si, quels que soient $\gamma\in\Gamma_K$, $n\geqslant 1$ et $k\in[0,h-1]$ on a $\exp_{V(-k)}\left(\int_{\gamma\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-k}\mathrm{Tay}_V^{(h)}(z)\right) = 0$, c'est-à dire si et seulement si $\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z)\in(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V)+(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V(-k))^{\mathscr{G}_{K_n}}$ quels que soient $n\geqslant 1$ et $k\in[0,h-1]$. On en déduit déjà le fait que $W_{[0,h]}$ est inclus dans $\ker\mathrm{Exp}_V^{(h)}$.

Réciproquement, si $z\in\ker\mathrm{Exp}_V^{(h)}$, il existe $z_1\in W_{[h-1]}$ tel que $z_2 = z-z_1$ vérifie $\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z_2)\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$ quel que soient $n\geqslant 1$ et $k\in[0,h-1]$. Comme d'autre part $\mathrm{Fil}^{-h}D(V) = D(V)$, ceci implique $\delta_{V(-k)}\circ T_n(z_2)\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$ si $k\geqslant h$ et comme $z_2\in \mathrm{F}_V^0D_{\mathrm{Iw}}(V)\subset(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes D(V)$, on a $\mathrm{T}_{K,n}(z_2) = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z_2)$. On en déduit le fait que $\mathrm{T}_{K,n}(z_2)\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$. Comme de plus $z_2 = \lim_{n\to+\infty}p^n\mathrm{T}_{K,n}(z_2)$, ceci implique $z_2\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$ et comme $z_2\in D_{\mathrm{Iw}}(V)$, ceci implique $z_2\in V^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\subset W_{\mathbf{Z}}$. On en déduit l'appartenance de z à $W_{\mathbf{Z}}\cap \mathrm{F}_V^0D_{\mathrm{Iw}}(V) = W_{[0,h]}$, ce qui permet de conclure.

Remarque VI.2.2. — La formule $\lim_{n\to+\infty}p^n\mathrm{T}_{K,n}(z) = z$ permet de reconstruire z à partir de $\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$. En effet, $(-1)^i(h-1-i)!i!e_B(\delta_{V(-i)}\circ \mathrm{T}_{K,n}(z))$ est l'unique élément $c_{n,i}$ de $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V)/(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V(-i))^{\mathscr{G}_{K_n}}$ tel que le cocycle $\tau\to(1-\chi(\tau)^{-i}\delta_\tau)\star c_{n,i}$ représente $\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-i}\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$ dans $H^1(K_n,V(-i))$. Le calcul fait lors de la démonstration du théorème VI.1.3 montre que la suite de terme général $\frac{1}{(h-1)!}p^n\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}c_{n,i}$ tend vers z modulo $\ker\mathrm{Exp}_V^{(h)}$. Cette remarque est à la base de la construction de l'application "logarithme" à laquelle le reste du chapitre est consacré.

Remarque VI.2.3. — La construction de l'application $\mathrm{Exp}_V^{(h)}$ ne fait intervenir les classes de cohomologie $\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-k}\mathrm{Exp}_V^{(h)}(z)$ que pour $k\in[0,h-1]$. On peut se demander s'il est possible de décrire ces classes de cohomologie pour $k\in\mathbf{N}$ quelconque, directement à partir de z. Un début de réponse dans le cas général est donné au chapitre VII et une réponse complète dans le cas cristallin utilisant les résultats de Perin-Riou **[23]** se trouve dans le chapitre IX.

3. Définition de l'application logarithme.— Soit V une représentation de de Rham. Si $i\in\mathbf{Z}$, soit W_i le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V(-i))^{\mathscr{G}_{K_n}}$ introduit au paragraphe précédent et si $I\subset\mathbf{Z}$, soit $W_I = \oplus_{i\in I}W_i$. Soit $\mu\in H^1(K,\mathscr{D}_{h^-}(\mathbf{Z}_p^*,V))$ et $\tau\to\mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Si $\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-i}\mu\in H_e^1(K_n,V(-i))$, cela signifie, par définition, qu'il existe $c_{n,i}\in$

$\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V$ tel que $(1-\chi(\tau)^{-i}\delta_\tau) \star c_{n,i} = \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_n}$ et $c_{n,i}$ étant bien défini à un élément de $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V(-i))^{\mathscr{G}_{K_n}}$ près, son image modulo W_i est bien définie.

Théorème VI.3.1. — *Soit $h \geqslant 1$. Soit V une représentation de de Rham. Soit $\mu \in H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\mathbf{Z}_p^*, V))$ tel que $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu \in H^1_e(K_n, V(-i))$ quels que soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant h-1$. Finalement, soit $\tau \to \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $c_{n,i} \in \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V$ tel que l'on ait $(1-\chi(\tau)^{-i}\delta_\tau) \star c_{n,i} = \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_n}$. Alors*

(i) La suite de terme général $\frac{1}{(h-1)!}p^n\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}c_{n,i}\Big)$ converge dans $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)/W_{[0,h-1]}$ vers un élément de $D_{\mathrm{Iw}}(V)/W_{[0,h-1]}$ noté $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu)$.

(ii) Si on suppose de plus que $\mathrm{Fil}^{-h}D(V) = D(V)$, alors $\mathrm{Log}_V^{(h)} \circ \mathrm{Exp}_V^{(h)}$ est l'identité de $\mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V))/W_{[0,h]}$.

Démonstration. — Le (ii) est le contenu de la remarque VI.2.2. Pour démontrer le (i), nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme VI.3.2. — *Si μ appartient à $H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, V))$, il existe un élément μ' de $H^1(\Gamma_K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, \mathrm{Fil}^{-1}D_{\mathrm{Iw}}(V)))$ dont l'image dans $H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V))$ est égale à celle de μ.*

Démonstration. — Posons $B = \mathrm{Fil}^{-1}(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)$, ce qui fait de B un espace de Banach p-adique. D'après le théorème IV.3.1, on a $H^1(K_\infty, B) = 0$, ce qui implique à la fois que $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, B))$ est nul et que $B^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ est fermé dans $Z^1(\mathscr{G}_{K_\infty}, B)$ puisqu'il lui est égal. D'après la proposition II.2.1, ce dernier fait implique que l'application de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, B))$ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, B))$ est injective, ce qui implique $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, B)) = 0$. On en déduit le fait que l'application d'inflation de $H^1(\Gamma_K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, B^{\mathscr{G}_{K_\infty}}))$ dans $H^1(K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, B))$ est surjective, ce qui permet de conclure.

Si $\tau \to \mu'_\tau$ est un cocycle représentant μ', il existe $\nu \in \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V)$ tel que l'on ait $\mu_\tau - \mu'_\tau = (1-\delta_\tau) \star \nu$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_K$. Si on définit $u_{n,i}$ par $u_{n,i} = c_{n,i} - \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\nu$, alors $u_{n,i}$ est un élément de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ tel que l'on ait $(1-\chi(\tau)^{-i}\delta_\tau) \star u_{n,i} = \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu'_\tau$ quel que soit $\tau \in \mathscr{G}_{K_n}$ et on a

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\Big(p^n\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}c_{n,i}\Big) - p^n\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}u_{n,i}\Big)\Big)\\ &= \lim_{n\to+\infty} p^n \int_{\Gamma_{K_n}} (1-\chi(x)^{-1})^{h-1}\nu = 0\end{aligned}$$

car ν est d'ordre h^-. D'après le lemme VI.3.2, on peut imposer que ν soit à valeurs dans $\mathrm{Fil}^{-1}\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V$. D'autre part, comme V est supposée être de de Rham, ce qui implique que $H^1_e(K_n, V(-i))$ est l'image de $K_n \otimes D(V(-i))$ par l'application exponentielle de Bloch-Kato, on en déduit le fait que $c_{n,i} \in t^iK_n \otimes D(V) + \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes D(V) + \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$ et que, si $k_1 \in \mathbf{N}$ est tel que $\mathrm{Fil}^{-k_1}D(V) = D(V)$ et $k = \sup(1, k_1)$, alors $u_{n,i} \in \mathrm{Fil}^{-k}\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V = (t^{-k}\mathbf{B}_{\max}^+)^{\varphi=1} \otimes V$. On peut donc remplacer μ par μ' et $c_{n,i}$ par $u_{n,i}$ et on est ramené à démontrer la proposition suivante.

Proposition VI.3.3. — *Soient* $\mu \in H^1(\Gamma_K, \mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K, D_{\mathrm{Iw}}(V)))$ *et* $k \in \mathbf{N}$ *tels que, quels que soient* $n \geqslant 1$ *et* $0 \leqslant i \leqslant h-1$, *l'image dans* $H^1(\Gamma_{K_n}, \mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V(i)))$ *de* $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu$ *soit nulle. Soit* $\tau \to \mu_\tau$ *un cocycle représentant* μ. *Si* $n \in \mathbf{N}$, *soit* $u_{n,i} \in \mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)$ *tel que l'on ait* $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu_\tau = (1 - \chi(\tau)^{-i}\delta_\tau) \star u_{n,i}$ *quel que soit* $\tau \in \Gamma_{K_n}$, *alors la suite de terme général* $v_n = p^n\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}u_{n,i}\Big)$ *converge dans* $\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)/W_{[0,h-1]}$.

Démonstration. — Soient $\sigma \in \Gamma_n$ et $\tau \in \Gamma_{n-1}$. On tire de la relation de cocycle l'identité

$$\delta_{\sigma^{-1}} \star \mu_\tau = \mu_{\sigma^{-1}\tau\sigma} + \delta_{\sigma^{-1}\tau\sigma} \star \mu_{\sigma^{-1}} - \mu_{\sigma^{-1}} = \mu_\tau + (\delta_\tau - 1) \star \mu_{\sigma^{-1}},$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} t^{-i}\int_{\chi(\sigma)+p^n\mathbf{Z}_p} \chi(x)^{-i}\mu_\tau =& t^{-i}\chi(\sigma)^{-i}\delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\delta_{\sigma^{-1}} \star \mu_\tau\Big) \\ =& \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i}\delta_{\sigma^{-1}} \star \mu_\tau\Big) \\ =& (1-\delta_\tau) \star \delta_\sigma \star \Big(t^{-i}u_{n,i} - \int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i}\mu_{\sigma^{-1}}\Big). \end{aligned}$$

On en tire les identités (modulo W_i pour la première et $W_{[0,h-1]}$ pour la seconde).

$$\begin{aligned} t^{-i}u_{n-1,i} =& \sum_{\sigma \in \Gamma_{K_{n-1}}/\Gamma_{K_n}} \Big(\delta_\sigma \star (t^{-i}u_{n,i}) - \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i}\mu_{\sigma^{-1}}\Big)\Big) \\ -v_n + v_{n-1} =& p^{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}t^i z_{n,i}\Big), \text{ avec} \\ z_{n,i} =& \sum_{\sigma \in \Gamma_{K_{n-1}}/\Gamma_{K_n}} \Big((\delta_\sigma - 1) \star (t^{-i}u_{n,i}) - \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i}\mu_{\sigma^{-1}}\Big)\Big). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\chi(\sigma) \in 1 + p^{n-1}\mathbf{Z}_p$ si $\sigma \in \Gamma_{K_{n-1}}$ et comme $\sigma \to \mu_{\sigma^{-1}}$ est une application continue de Γ_K (compact) dans les distributions d'ordre h^-, la suite de terme général

$$p^n\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}t^i\delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i}\mu_{\sigma^{-1}}\Big) = p^n\delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (1-\chi(\sigma x)^{-1})^{h-1}\mu_{\sigma^{-1}}\Big)$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour prouver que la suite v_n converge, il suffit donc de prouver que si σ_n est une suite d'éléments de Γ_K vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{K_{n-1}}$, alors la suite de terme général

$$p^n\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}(\chi(\sigma_n)^{-i}\delta_{\sigma_n} - 1) \star u_{n,i}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. Le cas $h = 1$. — Commençons par supposer $h = 1$, ce qui permettra de séparer les difficultés réelles du problème des ennuis techniques dûs au fait de travailler avec des distributions d'ordre quelconque. Si pour $\sigma \in \Gamma_K$, on définit $T_\sigma \in \Lambda_K$ par $T_\sigma = \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{\sigma^j}$, alors on a

$$T_{\sigma_n} \star (\delta_{\sigma_n} - 1) \star (u_{n,0}) = (\delta_{\sigma_n^p} - 1) \star u_{n,0} = -\int_{\Gamma_{K_n}} \mu_{\sigma_n^p}$$

car $\sigma_n^p \in \Gamma_{K_n}$. On en déduit le fait que si σ_n est une suite d'éléments de Γ_K vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{K_{n-1}}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors la suite de terme général $p^n T_{\sigma_n} \star (1 - \delta_{\sigma_n}) \star u_{n,0}$ tend vers 0 car $\mu_{\sigma_n^p}$ varie dans un compact des distributions d'ordre 1^-.

Proposition VI.4.1. — *Soit $\| \ \|$ une norme sur $t^{-k}\mathbf{B}_{\max}^+ \otimes V$ provenant de la norme $\| \ \|_{\max}$ sur $\mathbf{B}_{\max}^+$. Il existe $C > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que l'on ait $\|T_\sigma \star z\| \geqslant C\|z\|$ quels que soient $z \in \mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)$ et $\sigma \in \Gamma_{K_n}$.*

Avant de passer à la démonstration, montrons comment on peut terminer, grâce à elle, (dans le cas $h = 1$) la démonstration de la proposition VI.3.3 et donc du (i) du théorème VI.3.1. Notons X l'espace de Banach $\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)$ et posons $y_n = p^n(1 - \delta_{\sigma_n}) \star u_{n,0} \in X/W_0$. On vient de démontrer que la suite de terme général $T_{\sigma_n} \star y_n$ tend vers 0 dans X/W_0, ce qui implique qu'il existe $z_n \in W_0$ tel que la suite $T_{\sigma_n} \star y_n - z_n$ tende vers 0 dans X. Mais, si n est assez grand, on a $T_{\sigma_n} \star z_n = pz_n$, ce qui montre que la suite $T_{\sigma_n} \star (y_n - p^{-1}z_n)$ tend vers 0 dans X et donc utilisant la proposition VI.4.1, que la suite $y_n - p^{-1}z_n$ tend vers 0 dans X et y_n tend vers 0 dans X/W_0, ce qu'il fallait démontrer.

Revenons à la démonstration de la proposition VI.4.1. Nous aurons besoin du lemme suivant qui permet de se ramener au cas de la représentation triviale de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, cas traité dans le chapitre V.

Lemme VI.4.2. — *Il existe un morphisme injectif $f : \mathbf{B}_{\max} \otimes V \to (\mathbf{B}_{\max})^d$ de $\mathbf{B}_{\max}$-modules tel que $f((\mathbf{B}_{\max} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ soit inclus dans $\big(\mathbf{B}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}}\big)^d$.*

Démonstration. — Soit $W = \mathrm{ind}_{K_\infty}^{F_\infty} V$ et soit $v_1, \dots, v_d$ une base de W sur $\mathbf{Q}_p$. Soit $e_1, \dots, e_d$ une famille d'éléments de $(\mathbf{B}_{\max} \otimes W)^{\mathscr{G}_{F_\infty}} = (\mathbf{B}_{\max} \otimes V)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}$ formant une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes W$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ (l'existence d'une telle famille est assurée par le théorème IV.2.1). Soit $e_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j} v_j$ la décomposition de e_i dans la base $v_1, \dots, v_d$. Par hypothèse, les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbf{B}_{\max}$ et le fait que e_i soit fixe par $\mathscr{G}_{F_\infty}$ se traduit sur le déterminant de la matrice $(a_{i,j})$ par la formule

$$\det(\sigma)\sigma(\det(a_{i,j})) = \det(a_{i,j}) \quad \text{quel que soit } \sigma \in \mathscr{G}_{F_\infty},$$

où $\det(\sigma)$ désigne le déterminant de la matrice de σ dans la base $v_1, \dots, v_d$ ou, ce qui revient au même, l'action de σ sur la représentation $\det W$ qui est de dimension 1 sur $\mathbf{Q}_p$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $[K_n : F_n] = [K_\infty : F_\infty]$, ce qui fait que W en tant que représentation de $\mathscr{G}_{F_\infty}$ n'est autre que la restriction de $\mathrm{Ind}_{K_n}^{F_n} V$ qui est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{F_n}$. La représentation $\det W$ est donc une représentation de $\mathscr{G}_{F_n}$ qui est de de Rham et de dimension 1 et il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $(\det W)^{\otimes N}$ soit cristalline et $\Omega \in \mathbf{B}_{\max}^*$ tel que l'on ait $\sigma(\Omega) = \det^N(\sigma)\Omega$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{F_n}$. On en déduit le fait que $\Delta = \Omega(\det(a_{i,j}))^N$ est fixe par $\mathscr{G}_{F_\infty}$ et comme Δ est divisible par $\det(a_{i,j})$ dans $\mathbf{B}_{\max}$ et on peut prendre pour f l'application qui à un élément x de $\mathbf{B}_{\max} \otimes W$ associe les coordonnées de Δx dans la base $e_1, \dots, e_d$.

Corollaire VI.4.3. — *Si $k \in \mathbf{N}$, il existe un morphisme injectif $f_k : t^{-k}\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V \to (\mathbf{B}^+_{\max})^d$ de $\mathbf{B}^+_{\max}$-modules tels que $f_k(\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V))$ soit inclus dans $\big((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}\big)^d$.*

Démonstration. — On a $\mathrm{Fil}^{-k}\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\max} \subset t^{-k}\mathbf{B}^+_{\max}$, ce qui fait que si s est tel que $f(\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V)$ est inclus dans $t^{-s}(\mathbf{B}^+_{\max})^d$, on peut prendre $f_k = t^{k+s}f$.

Lemme VI.4.4. — *Quel que soient $k \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que si $\sigma \in \Gamma_{K_n}$ et $z \in \mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)$, alors $\|f_k(\delta_\sigma \star z) - \delta_\sigma \star f_k(z)\| \leqslant \varepsilon\|z\|$.*

Démonstration. — Soit γ_2 un générateur topologique de Γ_{K_2} et soit $\tilde\gamma_2$ un relèvement de γ_2 dans le p-Sylow de $\mathscr{G}_K$. On déduit de $\tilde\gamma_2$ un homomorphisme continu de Γ_{K_2} dans $\mathscr{G}_{K_2}$ section de la projection canonique. Si $\sigma \in \Gamma_{K_2}$, on notera $\tilde\sigma$ l'image de σ par cet homomorphisme. L'application $f_k \circ \delta_{\tilde\sigma} - \delta_{\tilde\sigma} \circ f_k$ de $\mathbf{B}_{\max} \otimes V$ dans $(\mathbf{B}_{\max})^d$ est $\tilde\sigma$-semi-linéaire et coïncide avec $f_k \circ \delta_\sigma - \delta_\sigma \circ f_k$ sur $D_{\mathrm{Iw}}(V)$. D'autre part, la continuité de la représentation de $\mathscr{G}_K$ dans $\mathrm{GL}(V)$ et celle de f_k impliquent que les applications qui à $\sigma \in \Gamma_{K_2}$, associent

$$f_k(\delta_{\tilde\sigma} \star (t^{-k}v_i)) - \delta_{\tilde\sigma} \star f_k(t^{-k}v_i) = f_k((\delta_{\tilde\sigma} - 1) \star (t^{-k}v_i)) + (1 - \delta_{\tilde\sigma}) \star f_k(t^{-k}v_i)$$

tendent vers 0 quand σ tend vers 1, ce qui, compte-tenu du fait que $t^{-k}v_1, \dots, t^{-k}v_d$ forment une base de $t^{-k}\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V$ et de la $\tilde\sigma$-semi-linéarité de $f_k \circ \delta_{\tilde\sigma} - \delta_{\tilde\sigma} \circ f_k$, permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition VI.4.1. On déduit du lemme précédent le fait que si $\sigma \in \Gamma_{K_n}$, alors $\|f_k(T_\sigma \star z) - T_\sigma \star f_k(z)\| \leqslant \varepsilon\|z\|$. D'autre part, d'après la proposition V.6.2, si $n \geqslant 4$ et $\sigma \in \Gamma_{K_n}$, alors $\|T_\sigma \star f_k(z)\| \geqslant p^{-2}\|f_k(z)\|$; il existe donc n tel que l'on ait $\|f_k(T_\sigma \star z)\| \geqslant p^{-2}\|f_k(z)\|$ si $\sigma \in \Gamma_{K_n}$ et on conclut en utilisant le fait que f_k (comme toute application $\mathbf{B}_{\max}$-linéaire injective) induit un homéomorphisme de $\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{Iw}}(V)$ sur son image.

5. Le cas h général. — Revenons à la démonstration de la proposition VI.3.3 dans le cas h général. Le lemme suivant sera très utile pour travailler avec les distributions.

Lemme VI.5.1. — *Si P est un polynôme de degré $\leqslant h-2$, alors*

$$\sum_{i=0}^{h-1} (-1)^i \binom{h-1}{i} P(i) = 0.$$

Démonstration. — On démontre par récurrence sur k que si P est un polynôme, alors le polynôme $P^{[k]}$ défini par $P^{[k]}(X) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} P(X+i)$ est de degré $-k + \deg P$. En particulier, si $\deg P < k$, alors $P^{[k]}$ est identiquement nul et s'annule a fortiori en 0. Le lemme s'en déduit.

Lemme VI.5.2. — *Soit $k \geqslant 1$. Soient $P_0, \dots, P_k, Q_0, \dots, Q_k \in \mathbf{Q}[X]$ vérifiant les 2 conditions*

(a) $Q_j(0) = 1$ quel que soit $j \in \{0, \dots, k\}$

(b) $\deg Q_j = \deg P_j = j$ quel que soit $j \in \{0, \dots, k\}$.

Soient $Y_0, \dots, Y_k, U_0, \dots, U_k$ des variables et, si $i \in \{0, \dots, k\}$, soient $X_i = \sum_{j=0}^k P_j(i) Y_j$ et $T_i = \sum_{j=0}^k Q_j(i) U_j$. Alors le polynôme

$$T_0 \cdots T_k \Big(\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \frac{X_i}{T_i} \Big)$$

peut s'écrire sous la forme $\sum_{\ell=0}^{k} R_\ell(U)Y_\ell$*, où* R_ℓ *est dans l'idéal de* $\mathbf{Q}[U_0,\dots,U_k]$ *engendré par les monômes du type* $\prod_{j=1}^{k}(U_j^{a_j})$ *avec* $\sum_{j=1}^{k} ja_j \geqslant k-\ell$.

Démonstration. — Le polynôme considéré est une forme linéaire en $Y_0,\dots,Y_k$ et peut donc s'écrire sous la forme $\sum_{\ell=0}^{k} R_\ell(U)Y_\ell$ avec $R_\ell(U)\in\mathbf{Q}[U_0,\dots,U_k]$. D'autre part, un calcul brutal montre que le développement en série entière de $\frac{X_i}{T_i}$ est de la forme

$$\frac{1}{U_0}\sum_{\ell=0}^{k} Y_\ell \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_k)\in\mathbf{N}^k} P_{\ell,\mathbf{a}}(i)\big(\frac{U_1}{U_0}\big)^{a_1}\cdots\big(\frac{U_k}{U_0}\big)^{a_k},$$

où $P_{\ell,\mathbf{a}}$ est un polynôme de degré $\ell+\sum_{j=1}^{k} ja_j$. On déduit du lemme VI.5.1 le fait que $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k-1}{i}P_{\ell,\mathbf{a}}(i) = 0$ si $\ell+\sum_{j=0}^{k} ja_j \leqslant k-1$. Ceci est équivalent au fait que $\big(\frac{\partial}{\partial U_1}\big)^{a_1}\cdots\big(\frac{\partial}{\partial U_k}\big)^{a_k}R_\ell(0)=0$ si $\ell+\sum_{j=1}^{k} ja_j\leqslant k-1$ et permet de conclure.

Rappelons que l'on cherche à montrer que la suite de terme général

$$p^n\Big(\sum_{i=1}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}(\chi(\sigma_n)^{-i}\delta_{\sigma_n}-1)\star u_{n,i}\Big)$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Lemme VI.5.3. — *Si* $\ell\in\mathbf{N}$ *et* $\sigma\in\Gamma_K$*, soit* $T_{\ell,\sigma}=\sum_{j=0}^{p-1}\chi(\sigma)^{-\ell j}\delta_{\sigma^j}\in\Lambda_K$*. Alors la suite de terme général*

$$p^n\Big(\mathop{\star}_{\ell=0}^{h-1}T_{\ell,\sigma_n}\Big)\star\Big(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{h-1}{i}(\chi(\sigma_n)^{-i}\delta_{\sigma_n}-1)\star u_{n,i}\Big)$$

tend vers 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. — On a

$$T_{i,\sigma_n}\star(\chi(\sigma_n)^{-i}\delta_{\sigma_n}-1)\star u_{n,i}=(\chi(\sigma_n^p)^{-i}\delta_{\sigma_n^p}-1)\star u_{n,i}=-\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-i}\mu_{\sigma_n{}^p}$$

car $\sigma_n^p\in\Gamma_{K_n}$. On est donc amené à prouver que la suite de terme général

$$p^n\Big(\sum_{i=1}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\Big(\mathop{\star}_{\ell\neq i}T_{\ell,\sigma_n}\Big)\star\Big(\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-i}\mu_{\sigma_n^p}\Big)\Big)$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui se déduit du lemme précédent appliqué à $k=h-1$,

$$Y_j=\int_{\Gamma_{K_n}}(\chi(x)^{-1}-1)^j\mu_{\sigma_n^p},$$

$$U_j=\sum_{\ell=0}^{p-1}(\chi(\sigma_n{}^{-\ell})-1)^j\delta_{\sigma_n^\ell}$$

$$P_j(X)=Q_j(X)=\binom{X}{j},$$

du fait que $\chi(\sigma_n)\equiv 1 \bmod p^n$ et donc $U_j\in p^{nj}\Lambda_K$ et $R_\ell(U)\in p^{n(h-1-\ell)}\Lambda_K$ et du fait que $p^nR_\ell(U)Y_\ell\in p^{n(h-\ell)}\Lambda_K\star\big(\int_{\Gamma_{K_n}}(\chi(x)^{-1}-1)^\ell\mu_{\sigma_n^p}\big)$ tend vers 0 car les μ_σ varient dans un compact des distributions d'ordre h^-.

Pour terminer la démonstration de la proposition VI.3.3 et donc du théorème VI.3.1 dans le cas h général, il suffit donc d'utiliser le lemme suivant et le même argument que dans le cas $h=1$ pour passer d'une convergence dans $\mathrm{Fil}^{-k}D_{\mathrm{Iw}}(V)$ à une convergence modulo $W_{[0,h-1]}$.

Lemme VI.5.4. — *Il existe $C>0$ et $n\in\mathbf{N}$ tels que l'on ait $\|\mathop{\star}_{i=0}^{h-1} T_{i,\sigma}\star z\|\geqslant C\|z\|$ quel que soient $z\in\mathrm{Fil}^{-k}D_{\mathrm{Iw}}(V)$ et $\sigma\in\Gamma_{K_n}$.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser h fois la proposition VI.4.1 en remarquant que l'on a $\|T_{i,\sigma}-T_\sigma\|\leqslant p^{-n}$ si $\sigma\in\Gamma_{K_n}$.

VII. Lois de réciprocités explicites

1. Formules explicites pour l'application logarithme.— Le but de ce paragraphe est de donner une description à peu près complète de l'application logarithme en termes de l'application duale de l'exponentielle de Bloch-Kato.

Théorème VII.1.1. — *Soient V une représentation de de Rham, $h\geqslant 1$ et $\mu\in H^1(K,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,V))$ tel que $\int_{\Gamma_{K_n}}\chi(x)^{-i}\mu\in H^1_e(K_n,V(-i))$ quels que soient $n\geqslant 1$ et $0\leqslant i\leqslant h-1$. Alors*

$$\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{T}_{K,m}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu))=\exp^*_{V^*(1+k)}\Big(\frac{(-1)^h}{k(k-1)\cdots(k-h+1)}\int_{\Gamma_{K_m}}\chi(x)^{-k}\mu\Big)$$

quels que soient $m\in\mathbf{N}$ et $k\notin[0,h-1]$.

Remarque VII.1.2. — Comme l'application $\exp^*_{V^*(1+k)}$ est à valeurs dans $\mathrm{Fil}^0D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$ qui est nul si $k\ll 0$, l'égalité ci-dessus devient $0=0$ pour $k\ll 0$.

Démonstration. — Si on reprend la démonstration de l'existence de $\mathrm{Log}_V^{(h)}$, on voit que l'on peut remplacer μ par un élément de $H^1(\Gamma_K,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,D_{\mathrm{Iw}}(V)))$ ayant même image que μ dans $H^1(K,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V))$ pour faire le calcul et donc supposer que μ appartient à $H^1(\Gamma_K,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,D_{\mathrm{Iw}}(V)))$. Nous nous placerons donc dans cette situation et reprendrons les notations utilisées pour la démonstration de la proposition VI.3.3. D'autre part, pour alléger un peu les formules, l'opérateur $\delta_{V(-k)}\circ\mathrm{T}_{K,m}$ sera noté simplement $T_{m,k}$ dans le reste de ce chapitre.

Soit soit γ_2 un générateur de Γ_{K_2}. Compte-tenu de la formule

$$\mathrm{T}_{K,r}=\mathrm{Tr}_{K_m((t))/K_r((t))}\circ\mathrm{T}_{K,m}\text{ si } r\leqslant m$$

et de ce que si $L_1\subset L_2$ sont deux extensions finie de K, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(L_2,V) & \xrightarrow{\exp^*_{V^*(1)}} & L_2\otimes D_{\mathrm{dR}}(V)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cor}_{L_2/L_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_{L_2/L_1}\otimes\mathrm{id}}\\ H^1(L_1,V) & \xrightarrow{\exp^*_{V^*(1)}} & L_1\otimes D_{\mathrm{dR}}(V)\end{array}$$

est commutatif, il suffit de démontrer le théorème pour m assez grand ; on supposera en particulier $m\geqslant 2$ dans ce qui suit.

Si $n \geqslant 2$, soit $\gamma_n = \gamma_2^{[K_n:K_2]}$; c'est un générateur de Γ_{K_n}. On a $T_{m,k}(p^n u_{n,i}) = t^i \delta_{V(i-k)} \circ \mathrm{T}_{K,m}(p^n t^{-i} u_{n,i})$. D'autre part, si $\gamma \in \Gamma_{K_m}$, alors

$$T_{m,k-i} \circ \delta_\gamma = \chi(\gamma)^{k-i} T_{m,k-i},$$

ce qui nous donne

$$\frac{1-\chi(\gamma_n)^{k-i}}{p^n} T_{m,k-i}(p^n t^{-i} u_{n,i}) = T_{m,k-i}((1-\delta_{\gamma_n}) \star (t^{-i} u_{n,i}))$$

Par construction, on a

$$(1-\delta_{\gamma_n}) \star (t^{-i} u_{n,i}) = t^{-i} \int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i} \mu_{\gamma_n}$$

et comme $\gamma_n = \gamma_m^{[K_n:K_m]}$ si $n \geqslant m$, on déduit de la relation de cocycle la formule

$$\mu_{\gamma_n} = \sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} \delta_{\gamma_m^\ell} \star \mu_{\gamma_m},$$

d'où l'on tire

$$\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i} \mu_{\gamma_n} = \sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} t^{-i} \delta_{\gamma_m^\ell} \star \Big(\int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \chi(\gamma_m^\ell x)^{-i} \mu_{\gamma_m} \Big)$$

$$T_{m,k-i}\Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i} \mu_{\gamma_n} \Big) = t^{-i} \sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} T_{m,k}\Big(\delta_{\gamma_m^\ell} \star \Big(\int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \chi(\gamma_m^\ell x)^{-i} \mu_{\gamma_n} \Big) \Big).$$

On peut alors utiliser la formule $T_{m,k} \circ \gamma_m^\ell = \chi(\gamma_m)^{\ell k} T_{m,k}$, ce qui nous donne

$$T_{m,k-i}\Big(\int_{\Gamma_{K_n}} (t\chi(x))^{-i} \mu_{\gamma_n} \Big) = t^{-i} T_{m,k}\Big(\sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} \chi(\gamma_m)^{\ell(k-i)} \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i} \mu_{\gamma_m} \Big).$$

Tout ceci permet d'exprimer $T_{m,k}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu))$ comme $\frac{1}{(h-1)!} \times$ la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'expression rébarbative suivante

$$\text{(VII.1.3)} \quad T_{m,k}\Big(\sum_{i=0}^{h-1} (-1)^i \binom{h-1}{i} \frac{p^n}{1-\chi(\gamma_n)^{k-i}} \Big(\sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} \chi(\gamma_m)^{\ell(k-i)} \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i} \mu_{\gamma_m} \Big) \Big).$$

2. Le cas $h = 1$.— Nous allons de nouveau commencer par supposer $h = 1$ pour éviter les difficultés techniques dues au fait de traiter le cas de distributions d'ordre quelconque. Dans le cas $h = 1$, l'expression générale se "simplifie" un peu et on obtient

$$T_{m,k}(\mathrm{Log}_V^{(1)}(\mu)) = \lim_{n\to+\infty} T_{m,k}\Big(\frac{p^n}{1-\chi(\gamma_n)^k} \Big(\sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} \chi(\gamma_m)^{\ell k} \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \mu_{\gamma_m} \Big) \Big).$$

Les $\gamma_m^{-\ell}$ pour $\ell \in \{0, \dots, [K_n : K_m] - 1\}$ formant un système de représentants de $\Gamma_{K_m}/\Gamma_{K_n}$ et μ_{γ_m} étant une distribution d'ordre 1^-,

$$\chi(\gamma_m)^{\ell k} \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \mu_{\gamma_m} - \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-k} \mu_{\gamma_m}$$

tend vers 0 uniformément pour $\ell \in \{0, \ldots, [K_n : K_m] - 1\}$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit le fait que la suite de terme général

$$\sum_{\ell=0}^{[K_n:K_m]-1} \chi(\gamma_m)^{\ell k} \int_{\gamma_m^{-\ell}\Gamma_{K_n}} \mu_{\gamma_m}$$

tend vers $\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu_{\gamma_m}$ et comme $\frac{p^n}{1-\chi(\gamma_n)^k}$ tend vers $\frac{-p^m}{k\log\chi(\gamma_m)}$, on obtient finalement $\mathrm{T}_{K,m}$ et $\mathrm{Tr}_{/K_m}$,

$$T_{m,k}(\mathrm{Log}_V^{(1)}(\mu)) = \frac{-p^m}{k\log\chi(\gamma_m)} T_{m,k}\Big(\int_{\Gamma_{K_m}} \chi(x)^{-k}\mu_{\gamma_m}\Big) \tag{VII.2.1}$$

quels que soient $k \neq 0$ et $m \in \mathbf{N}$.

Remarque VII.2.2. — La démonstration précédente montre que si $m \in \mathbf{N}$, alors la suite de terme général $p^n\mathrm{T}_{K,m}(u_{n,0})$ converge, ce qui est un résultat un peu plus faible que l'existence de $\mathrm{Log}_V^{(1)}$.

Pour terminer la démonstration de la proposition, il reste à exprimer le membre de droite de cette égalité en terme de l'application duale de l'exponentielle de Bloch-Kato. Pour cela, nous allons utiliser la formule de Kato (proposition III.5.2).

Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, soit $\mathrm{Tr}_{/L}$ l'unique application $L((t))$-linéaire continue de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{L_\infty}}$ dans $L((t))$ telle que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in L_n$, alors $\mathrm{Tr}_{/L}(x) = \frac{1}{[L_n:L]}\mathrm{Tr}_{L_n/L}(x)$. L'existence et l'unicité de $\mathrm{Tr}_{/L}$ viennent de ce que l'on peut et doit poser $\mathrm{Tr}_{/L} = \frac{p^m}{[L_m:L]}\mathrm{T}_{L,0}$ si m est assez grand. D'autre part, on a $\mathrm{Tr}_{/K_m} = p^m\mathrm{T}_{K,m}$ si m est assez grand.

Proposition VII.2.3. — *Soient L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et W une représentation p-adique de $\mathscr{G}_L$. Si $c \in H^1(L, W(-k))$, il existe un cocycle $\tau \to c_\tau$ sur Γ_L à valeurs dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes W)^{\mathscr{G}_{L_\infty}}$ ayant même image que c dans $H^1(L, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes W)$. Si de plus W est de de Rham, alors*

$$\exp^*_{W^*(1)}(c) = \delta_W \circ \mathrm{Tr}_{/L}\Big(\frac{1}{\log\chi(\gamma)}c_\gamma\Big)$$

quel que soit $\gamma \in \Gamma_L$ tel que $\log\chi(\gamma) \neq 0$.

Démonstration. — Comme $H^1(L_\infty, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes W)$ est nul d'après le théorème IV.3.1, l'application d'inflation de $H^1(\Gamma_L, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes W)^{\mathscr{G}_{L_\infty}})$ dans $H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes W)$ est un isomorphisme, d'où l'existence du cocycle $\tau \to c_\tau$. Maintenant, si W est de de Rham, l'application $\tau \to \delta_W \circ \mathrm{Tr}_{/L}(c_\tau)$ est un cocycle sur Γ_L à valeurs dans $D_{\mathrm{dR}}(W)$ sur lequel Γ_L agit trivialement ; il est donc de la forme $\tau \to d\log\chi(\tau)$, avec $d \in D_{\mathrm{dR}}(W)$ et si c est nul, ce qui implique que $\tau \to c_\tau$ est un cobord, alors $d = 0$. On en déduit le fait que $\delta_W \circ \mathrm{Tr}_{/L}(\frac{1}{\log\chi(\gamma)}c_\gamma) \in D_{\mathrm{dR}}(W)$ ne dépend ni de $\gamma \in \Gamma_L$ tel que $\log\chi(\gamma) \neq 0$ ni du choix du cocycle $\tau \to c_\tau$ représentant c, ce qui nous fournit une application naturelle de $H^1(K, W)$ dans $D_{\mathrm{dR}}(W)$ qui coïncide avec $\exp^*_{W^*(1)}$ comme on le constate aisément en utilisant le théorème de Kato (proposition III.5.2).

Cette proposition (utilisée dans le cas $L = K_m$ et $W = V(-k)$), la formule (VII.2.1) et la relation $\mathrm{Tr}_{/K_m} = p^m\mathrm{T}_{K,m}$ si m est assez grand, permettent de terminer la démonstration du théorème VII.1.1 dans le cas $h = 1$.

3. Le cas h quelconque.— Les mesures étant denses dans les distributions, on peut déduire le calcul pour les distributions de celui pour les mesures si on remplace V par $V(k)$ pour $k \gg 0$ car alors la condition $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu \in H^1_e(K_n, V(-i))$ est automatique. Malheureusement, le cas qui nous intéresse vraiment est celui où $\mathrm{Fil}^{-h} D(V) = D(V)$ et dans ce cas les mesures telles que $\int_{\Gamma_{K_n}} \chi(x)^{-i}\mu \in H^1_e(K_n, V(-i))$ quels que soient $n \geqslant 1$ et $i \in \{0, \ldots, h-1\}$ sont très loin d'être denses dans les distributions d'ordre h^- vérifiant les mêmes conditions.

Lemme VII.3.1. — *Si μ est une distribution d'ordre h^-, si $\alpha \equiv 1$ $[p]$ et si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p^*$, alors la suite de terme général*

$$\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\Big(\frac{p^n}{1-\alpha^{(k-i)p^n}}\sum_{a\in X/p^n\mathbf{Z}_p} a^{k-i}\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i\mu\Big)$$

tend vers

$$\frac{(-1)^h(h-1)!}{k(k-1)\cdots(k-h+1)\log\alpha}\int_X x^k\mu$$

quand n tend vers $+\infty$.

On peut utiliser le lemme précédent avec $X = \chi(\Gamma_{K_m})$ pour évaluer la limite de l'expression (VII.1.3). On en déduit la formule

$$T_{m,k}(\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu)) = \frac{(-1)^h}{k(k-1)\cdots(k-h+1)\log\chi(\gamma_m)}\delta_{V(-k)}\circ \mathrm{Tr}_{/K_m}\Big(\int_{\Gamma_{K_m}}\chi(x)^{-k}\mu_{\gamma_m}\Big).$$

et il suffit d'utiliser la proposition VII.2.3 pour exprimer le membre de droite à l'aide de l'application duale de l'exponentielle de Bloch-Kato et terminer la démonstration du théorème VII.1.1 dans le cas h général.

Passons à la démonstration du lemme VII.3.1. Comme μ est d'ordre h^-, il s'agit de vérifier (cf. définition I.4.2) que, si l'on pose

$$\begin{aligned} f_{n,a}(x) &= \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x)\Big(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\frac{p^n}{1-\alpha^{(k-i)p^n}}a^{k-i}x^i\Big),\\ g_{n,a} &= \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x)\frac{(-1)^h(h-1)!}{k(k-1)\cdots(k-h+1)\log\alpha}x^k,\\ f_n(x) &= \sum_{a\in X/p^n\mathbf{Z}_p} f_{n,a}(x) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sum_{a\in X/p^n\mathbf{Z}_p} g_{n,a}(x), \end{aligned}$$

alors $\|f_n - g_n\|_{\mathrm{LA}_n}$ est un $O(p^{-nh})$, ou encore, qu'il existe $C > 0$ tel que l'on ait $\|f_{n,a} - g_{n,a}\|_{\mathrm{LA}_n} \leqslant Cp^{-nh}$, quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $a \in X$.

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{T(T-1)\cdots(T-h+1)}$ nous fournit la formule

$$\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\frac{1}{T-i} = \frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{T(T-1)\cdots(T-h+1)},$$

ce qui permet de réécrire $f_{n,a}(x) - g_{n,a}(x)$ sous la forme

$$\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x)\left(\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}\left(\frac{p^n}{1-\alpha^{(k-i)p^n}}a^{k-i}x^i + \frac{1}{(k-i)\log\alpha}x^k\right)\right).$$

Posons alors $\log\alpha = -p\beta$ avec $\beta \in \mathbf{Z}_p$ et $x = a(1+p^n u)$. L'expression en facteur de $\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(x)$ peut se mettre sous la forme $\sum_{i=0}^{h-1}(-1)^i\binom{h-1}{i}F(u,i-k)$, où l'on a posé

$$\begin{aligned}F(u,z) =& (a(1+p^n u))^k\Big(\frac{p^n}{1-e^{-p^{n+1}\beta z}}(1+p^u)^z - \frac{1}{\beta z}\Big)\\ =& (a(1+p^n u))^k\left(\frac{1}{p\beta z}\left(\left(\sum_{r=0}^{+\infty} b_r(p^n\beta z)^r\right)\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\binom{z}{s}(p^n u)^s\right)-1\right)\right)\\ =& (a(1+p^n u))^k\left(\sum_{t=1}^{+\infty} p^{nt}P_t(z,u)\right),\end{aligned}$$

où P_t est un polynôme de degré $t-1$ en z et u à coefficients dans $\frac{1}{p\beta}\mathbf{Z}_p$, les b_r sont des éléments de $\mathbf{Z}_p$ définis par $\frac{p}{1-e^{-pX}} = \frac{1}{X}\big(\sum_{r=0}^{+\infty} b_r X^r\big)$ et où l'on passe de la seconde à la troisième ligne en développant brutalement. Le lemme VI.5.1 permet alors d'obtenir la majoration $\|f_{n,a} - g_{n,a}\|_{\mathrm{LA}_n} \leqslant |\frac{1}{p\beta}|p^{-nh}$ qui permet de conclure.

VIII. Transformées de Fourier des distributions.

1. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$.— Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $p^n X$ soit un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$. Cela nous permet de définir par transport de structure, si $i \in \{\ ,+,-,I,i\}$, l'espace $\mathrm{LP}^?(X,B)$ des fonctions localement polynomiales de degrés convenables à support dans X et à valeurs dans B, si B est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre et l'espace $\mathscr{D}^?_{\mathrm{alg}}(X,A)$ des distributions algébriques à valeurs dans A, si A est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel. De même, cela permet de définir les espaces $\mathrm{LA}_h(X)$, si $h \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{D}_?(X,A)$, si $? \in \overline{\mathbf{R}}_+ \cup \{\mathrm{cont}, \mathrm{temp}\}$ et A est un espace de Banach p-adique. Il est clair que ces définitions ne dépendent pas du choix de n.

On note $\mathrm{LP}^?(\mathbf{Q}_p,B) = \cup_X \mathrm{LP}^?(X,B)$ [resp. $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p)$] l'espace des fonctions localement polynomiale de degrés convenables [resp. localement analytique] à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. Si A est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel [resp. un espace de Banach p-adique] et $? \in \{\ ,+,-,I,i\}$ [resp. $? \in \overline{\mathbf{R}}_+ \cup \{\mathrm{cont},\mathrm{temp}\}$], on note $\mathscr{D}^?_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p,A)$ [resp. $\mathscr{D}_?(\mathbf{Q}_p,A)$] l'espace des morphismes de $\mathrm{LP}^?(\mathbf{Q}_p)$ [resp. $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p)$] dans A dont la restriction à $\mathrm{LP}^?(X,\mathbf{Q}_p)$ [resp. $\mathrm{LA}(X)$] appartient à $\mathscr{D}^?_{\mathrm{alg}}(X,A)$ [resp. $\mathscr{D}_?(X,A)$], quel que soit l'ouvert compact X de $\mathbf{Q}_p$.

On munit ces différents espaces de distributions d'un Frobenius $\varphi_{\mathscr{D}}$ et, si A est lui-même muni d'une action de $\mathscr{G}_K$, d'une action de $\mathscr{G}_K$ grâce aux formules

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\,\varphi_{\mathscr{D}}(\mu) = \int_{\mathbf{Q}_p} f(px)\,\mu \quad\text{et}\quad \int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\,\delta_\tau\star\mu = \delta_\tau\star\Big(\int_{\mathbf{Q}_p} f(\chi(\tau)x)\,\mu\Big).$$

Ces deux actions commutent entre elles et on a

$$\varphi_{\mathscr{D}}(x^k\mu) = p^{-k}x^k\varphi_{\mathscr{D}}(\mu) \text{ et } \varphi_{\mathscr{D}}(\mathrm{Res}_X(\mu)) = \mathrm{Res}_{pX}(\varphi_{\mathscr{D}}(\mu)).$$

Si $i \in \mathbf{Z}$, on note $\delta_0^{[i]}$ la distribution donnant le i-ème terme du développement de Laurent en 0, c'est-à-dire l'élément de $\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ donné par les formules $\int_{\mathbf{Q}_p} x^i \delta_0^{[i]} = 1$ et $\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\delta_0^{[i]} = 0$ si $f \in \mathrm{LP}^i(\mathbf{Q}_p)$ est nulle sur un voisinage de 0. On note $\mu_{\mathrm{Haar},i}$ l'élément de $\mathscr{D}^i_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ défini par

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i \mu_{\mathrm{Haar},i} = p^{-n},$$

si $n \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{Q}_p$.

2. Transformée de Fourier algébrique. — Soit $x \to \varepsilon(x)$ l'application de $\mathbf{Q}_p$ dans μ_{p^∞} définie au §1 du chapitre V. Si f est une fonction localement constante à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ et $y \in \mathbf{Q}_p$, la suite de terme général $p^{-k}\sum_{x \bmod p^k} f(x)\varepsilon(xy)$ est constante pour k assez grand. On note $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y)$ sa limite quand k tend vers $+\infty$. On a aussi $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y) = \int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\varepsilon(xy)\mu_{\mathrm{Haar},0}(x)$, où $\mu_{\mathrm{Haar},0}$ est l'élément de $\mathscr{D}^0_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ défini ci-dessus. L'application $f \to \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)$ transforme une fonction localement constante à support compact en une fonction localement constante à support compact et vérifie les règles habituelles d'une transformée de Fourier, à savoir

(i) $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f(x+a))(y) = \varepsilon(-ay)\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y)$

(ii) $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(\varepsilon(ax)f(x))(y) = \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y+a)$

(iii) $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f(cx))(y) = |c|\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(c^{-1}y)$ si $c \in \mathbf{Q}_p^*$

De plus, on a

(iv) $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p})(y) = p^{-n}\varepsilon(ay)\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(y)$

Comme on le constate aisément en se ramenant au cas $a = 0$ grâce à la formule (i). Finalement, on tire de ces formules la formule d'inversion de Fourier

(v) $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}} \circ \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y) = f(-y)$.

On étend $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}$ en une application linéaire de LP^+ dans LP^- en demandant que si $f \in LP^{[1,+\infty[}$, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f')(y) = (-ty)\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(f)(y)$. Cette formule est l'analogue de la formule habituelle pour la transformée de Fourier d'une dérivée, t étant l'analogue p-adique de $2i\pi$. Il faut tout de même faire attention au fait que cette formule n'est pas valable si f a une composante de degré 0, composante dont la dérivée est nulle.

Si $h \in \mathbf{Z}$, définissons la transformée de Fourier tordue $\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(f)$ d'un élément $f \in LP^{[1-h,+\infty[}$ par la formule

$$\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(f)(y) = (-ty)^{h-1}\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(x^{h-1}f(x))(y).$$

De manière explicite, on a

$$\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(x^k\mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p})(y) = p^{-n}\frac{(k+h-1)!}{(-ty)^k}\varepsilon(ay)\mathbf{1}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(y) \text{ si } k \geqslant 1-h,\ n \in \mathbf{Z} \text{ et } a \in \mathbf{Q}_p.$$

Si $\mu \in \mathscr{D}^{]-\infty,h-1]}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$, définisoons sa transformée de Fourier tordue $\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(\mu)$ grâce à la formule

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f(x)\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(\mu) = \int_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(f)(y)\mu.$$

Proposition VIII.2.1. — *Si $\mu \in \mathscr{D}^{]-\infty,h-1]}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$, alors $\mathscr{F}^{(h)}_{\mathrm{alg}}(\mu)$ est un élément de $\mathscr{D}^{[1-h,+\infty[}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$ fixe par $\mathscr{G}_K$.*

Démonstration. — Soit $\tau \in \mathscr{G}_K$. On utilise les formules $\tau(\varepsilon(ax)) = \varepsilon(\chi(\tau)ax)$ et $\tau(t) = \chi(\tau)t$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k \delta_\tau \star \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu) &= \delta_\tau \star \Big(\int_{\chi(\tau)^{-1}a+p^n\mathbf{Z}_p} (\chi(\tau)x)^k \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu)\Big) \\ &= p^{-n}(k+h-1)!\chi(\tau)^k \bigg(\delta_\tau \star \Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \varepsilon(\chi(\tau)^{-1}ax)(-tx)^{-k}\mu\Big)\bigg) \\ &= p^{-n}(k+h-1)!\Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \varepsilon(ax)(-tx)^{-k}\mu\Big) \\ &= \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\delta_\tau \star \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu)$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu)$ coïncident sur une famille génératrice de $LP^{[1-h,+\infty[}$ et donc sont égales.

3. Transformée de Fourier des distributions continues.— Si $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ est à support compact, on peut définir sa transformée de Fourier continue $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) \in F_\infty[[t]]$ par la formule

$$\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) = \int_{\mathbf{Q}_p} [\varepsilon^x]\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \int_X \varepsilon(x)\frac{x^k}{k!}\mu,$$

où X est n'importe quel ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$ contenant le support de μ. Notre but est d'étudier les distributions continues et tempérées sur $\mathbf{Q}_p$ via leur transformée de Fourier.

Rappelons que l'on a défini au §7 du chapitre V des anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathrm{temp}}^+$ et, si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, une application continue Res_X de $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ dans lui-même.

Proposition VIII.3.1. — *Si μ est une distribution continue à support compact sur $\mathbf{Q}_p$, sa transformée de Fourier appartient à $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Réciproquement, si $z \in (\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ est tel qu'il existe un ouvert compact X de $\mathbf{Q}_p$ tel que l'on ait $\mathrm{Res}_X(z) = z$, alors z est la transformée de Fourier d'une unique distribution continue $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ à support dans X. De plus, si $r \in \overline{\mathbf{R}}$, une distribution continue à support compact est d'ordre r si et seulement si sa transformée de Fourier est d'ordre r et on a les formules suivantes :*

(i) $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Res}_X(\mu)) = \mathrm{Res}_X(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu))$ *si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\varphi_{\mathscr{D}}(\mu)) = \varphi(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu))$

(iii) $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\delta_a * \mu) = [\varepsilon^a]\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)$ *si $a \in \mathbf{Q}_p$.*

On dit que $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ possède une transformée de Fourier si la suite de terme général $\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}[\varepsilon^x]\mu$ converge dans $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. Si $z \in (\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$, la proposition précédente implique que z est la transformée de Fourier de l'unique distribution μ telle que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Res}_X(\mu)) = \mathrm{Res}_X(z)$ quel que soit l'ouvert compact X de $\mathbf{Q}_p$. On obtient donc, en passant à la limite dans la proposition VIII.3.1, le résultat suivant.

Corollaire VIII.3.2. — *L'application $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}$ induit un isomorphisme de l'espace des distributions continues sur $\mathbf{Q}_p$ possédant une transformée de Fourier sur $(\mathbf{B}_{\mathrm{cont}}^+)^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$ vérifiant les propriétés (i)-(iii) de la proposition précédente.*

L'ingrédient principal de la démonstration de la proposition VIII.3.1 est la description des distributions continues et tempérées à support dans $\mathbf{Z}_p$ en termes de leur transformée d'Amice (propositions I.3.3 et I.4.4). En effet, si $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) = \mathscr{A}_\mu([\varepsilon]-1)$, comme on le voit en revenant à la définition de la transformée d'Amice.

Lemme VIII.3.3. — *L'application $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}$ induit un isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ sur $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big((\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}\big)$. De plus si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, une distribution est d'ordre r si et seulement si sa transformée de Fourier est d'ordre r.*

Démonstration. — Si μ est une distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$, sa transformée d'Amice $\mathscr{A}_\mu(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$ est une série de rayon de convergence 1 et on a $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) = \mathscr{A}_\mu([\varepsilon]-1)$. On tire de la proposition V.5.3, le fait que si $n \geqslant 1$, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k([\varepsilon_n]-1)^k$ converge vers un élément z_n de $\mathbf{B}^+_{\max} \cap F_n[[t]]$. On a de plus $\varphi^n(z_n) = \mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)$, ce qui prouve que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}}$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = \varphi^n \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z_n) = \varphi^n(z_n)$ car $z_n \in F_n[[t]]$. On en déduit à la fois la formule $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = \mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)$ et le fait que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) \in \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big((\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}\big)$.

Réciproquement, si $z \in \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big((\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}\big)$ et si $n \geqslant 1$, alors

$$\varphi^{-n}(z) = \varphi^{-n}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z)) = \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-n}(z)) \in F_n[[t]] \cap \mathbf{B}^+_{\max}$$

et la proposition V.5.3 implique l'existence d'une suite $b_{k,n}$ d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,n} T^k$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à $p^{-\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}}$ et telle que l'on ait $\varphi^{-n}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,n}([\varepsilon_n]-1)^k$. Appliquant φ^n à cette identité, on obtient le fait que $b_{k,n}$ est indépendant de $n \in \mathbf{N}$, ce qui implique que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,1} T^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et est donc la transformée d'Amice d'une distribution continue à support dans $\mathbf{Z}_p$ dont z est la transformée de Fourier.

Si $r \in \mathbf{R}_+$ et μ est une distribution d'ordre r, sa transformée d'Amice est une série de la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$ telle qu'il existe $C > 0$ tel que l'on ait $|a_k| \leqslant C k^r$ quel que soit $k \in \mathbf{N} - \{0\}$. Soit $a > 0$. La fonction $f(x,a,r) = ax - r\frac{\log x}{\log p}$ atteint un minimum fini $g(a,r)$ pour $x \in \mathbf{R}^*_+$ en $x = \frac{r}{a \log p}$. On a

$$\begin{aligned} v_p(a_k) + rn + \frac{k}{(p-1)p^{n-1}} \geqslant & rn + \frac{k}{(p-1)p^{n-1}} - r\frac{\log k}{\log p} - \frac{\log C}{\log p} \\ = & f(\frac{k}{p^n}, \frac{p}{p-1}, r) - \frac{\log C}{\log p} \\ \geqslant & g(\frac{p}{p-1}, r) - \frac{\log C}{\log p}. \end{aligned}$$

On en tire le fait, utilisant la proposition V.5.3, que si $m \leqslant -1 + g(\frac{p}{p-1}, r) - \frac{\log C}{\log p}$, alors $p^{E(nr)}\varphi^{-n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = p^{E(nr)}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k([\varepsilon_n]-1)^k \in p^m \mathbf{A}_{\max}$ et donc que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)$ est d'ordre r.

Réciproquement, si $z \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}} \cap \mathbf{Q}_p[[t]]$, alors il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $z = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k([\varepsilon]-1)^k$. Si de plus $p^{nr+m}\varphi^{-n}(z) \in \mathbf{A}_{\max}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la proposition V.5.3 implique $v_p(a_k) \geqslant -m - nr - \frac{k}{(p-1)p^{n-1}} = -m - r\frac{\log k}{\log p} - f(\frac{k}{p^n}, \frac{p}{p-1}, r)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, ce qui implique $v_p(a_k) \geqslant -m - r\frac{\log k}{\log p} - \sup_{x\in[p^{-1},1]} f(x, \frac{p}{p-1}, r)$ et permet de conclure au fait que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ est d'ordre r.

La même démonstration permet de prouver que si $m_0 \leqslant -1+g(\frac{1}{p-1},r)$ et si $|a_k| \leqslant p^{-m}k^r$ si k est assez grand, alors $p^{nr}\varphi^{-n}(z) \in p^{m+m_0}\mathbf{A}_{\max}$ si n est assez grand (pour que $p^{E(nr)}$ tue les coefficients ne vérifiant pas l'inégalité $|a_k| \leqslant p^{-m}k^r$) et réciproquement, que si $p^{E(nr)}\varphi^{-n}(z) \in p^m\mathbf{A}_{\max}$ pour n assez grand, alors $v_p(a_k) \geqslant m - r\frac{\log k}{\log p} - \sup_{x\in[p^{-1},1]} f(x, \frac{p}{p-1}, r)$ si k est assez grand, ce qui permet de traiter le cas d'une distribution d'ordre r^- et de terminer la démonstration du lemme VIII.3.3.

Maintenant, si μ est à support compact, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^n_{\mathscr{D}}(\mu)$ soit à support dans $\mathbf{Z}_p$. Comme les formules (i) à (iii) de la proposition VIII.3.1 sont évidentes si μ est une masse de Dirac et que μ peut s'écrire comme une limite de masses de Dirac, on a $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu) = \varphi^{-n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\varphi^n_{\mathscr{D}}(\mu))) \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. On tire de cette formule et du lemme VIII.3.3 l'injectivité de la transformée de Fourier. Le même argument de densité montre que les formules (i) à (iii) restent valables pour n'importe quelle distribution à support compact. Finalement, si X est un ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, on peut écrire X comme une réunion finie disjointe $\bigsqcup_{a\in A} a + p^n\mathbf{Z}_p$ de translatés de $\mathbf{Z}_p$. On a alors

$$\mathrm{Res}_X(z) = \sum_{a\in A} \mathrm{Res}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z) = \sum_{a\in A} [\varepsilon^a]\varphi^n(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-n}([\varepsilon^{-a}]z)))$$

quel que soit $z \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{F_\infty}}$. En particulier, si $\mathrm{Res}_X(z) = z$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\varphi^{-n}([\varepsilon^{-a}]z))$ est la transformée de Fourier de la distribution $\mu_a \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ [l'existence de μ_a est une conséquence du lemme VIII.3.3], alors z est la transformée de Fourier de la distribution $\sum_{a\in A} \delta_a * \varphi^n_{\mathscr{D}}(\mu_a)$ qui est à support dans X. Ceci termine la démonstration de la proposition VIII.3.1.

Proposition VIII.3.4. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)$ a une transformée de Fourier continue, alors*

$$\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\Big(p^{-n}\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \varepsilon(x)\frac{x^k}{k!}\mu\Big) \quad \text{si} \quad n \geqslant 1$$

$$\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,0}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \frac{x^k}{k!}\mu - p^{-1}\int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} \frac{x^k}{k!}\mu\Big).$$

Démonstration. — Si $n \geqslant 1$, c'est une conséquence immédiate de la formule

$$\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = p^{-n}\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)) = p^{-n}\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(\mu))$$

et de la définition de $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}$. On déduit le cas $n = 0$ du cas $n = 1$ grâce à la formule $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,0} = \mathrm{Tr}_{F_1((t))/\mathbf{Q}_p((t))} \circ T_{\mathbf{Q}_p,1}$ et au fait que $\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(\varepsilon(x)) = -1$ si $x \in p^{-1}\mathbf{Z}_p - \mathbf{Z}_p$ et $\mathrm{Tr}_{F_1/\mathbf{Q}_p}(\varepsilon(x)) = p - 1$ si $x \in \mathbf{Z}_p$.

IX. Représentations absolument cristallines.

Dans tout ce chapitre, on suppose que V est absolument cristalline, ce qui signifie que K est une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ et que V est une représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$ ou encore que $\mathrm{Ind}_K^{\mathbf{Q}_p} V$ est une représentation cristalline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On commence par donner une construction de l'exponentielle de Perrin-Riou [**23**] en utilisant le langage des distributions. La seule différence avec la construction de Perrin-Riou est l'utilisation de la transformée de Fourier algébrique qui rend les formules plus naturelles. Les calculs effectués pour démontrer la continuité de l'exponentielle sont une traduction de ceux effectués par Perrin-Riou. Finalement, on compare cette exponentielle avec celle construite au chapitre VI, ce qui nous permet d'utiliser les résultats du chapitre VII pour démontrer la formule de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou (conjecture Réc(V) de [**23**]).

1. L'exponentielle de Perrin-Riou.— Comme on a supposé K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$, on a en particulier $\Gamma_K \cong \mathbf{Z}_p^*$ et $\mathrm{T}_{K,n} = \mathrm{id} \otimes \mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{K^\infty}} = K \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{F^\infty}}$ si $n \in \mathbf{N}$. Dans tout ce chapitre, on note $D(V)$ le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V)$. L'endomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^I(\mathbf{Q}_p, D(V))$ composé de φ et $\varphi_{\mathscr{D}}$ sera noté $\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi$.

La proposition VIII.2.1 et l'isomorphisme $\mathscr{D}^-(\mathbf{Q}_p, D(V)) \cong \mathscr{D}^-(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p) \otimes D(V)$ montrent que si $\mu \in \mathscr{D}^-(\mathbf{Q}_p, D(V))$, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(\mu)$ est fixe par $\mathscr{G}_K$ puisque $\mathscr{G}_K$ agit trivialement sur $D(V)$. Appelons “exponentielle de Perrin-Riou” l'application $\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_V$ de $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^-(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi = 1}$ dans $H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, V))$ obtenue par composition des applications :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mathrm{alg}} :& \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^-(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi = 1} \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \\
\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} :& \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\mathbf{Z}_p^*, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \cong \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \\
\exp_V :& \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K} \longrightarrow H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^+(\Gamma_K, V)).
\end{aligned}$$

L'invariance de μ par $\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi$ se traduit par

$$\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} f(x) \frac{\mu}{(-tx)^k} = \varphi^{-n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} f(\frac{x}{p^n}) \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)$$

quel que soit f localement constante sur $p^{-n}\mathbf{Z}_p$. On en tire les formules

$$\begin{aligned}
\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^k \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(\mu) =& k! p^{-n} \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \varepsilon(ax) \frac{\mu}{(-tx)^k} \\
=& k! \frac{\varphi^{-n}}{p^n} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \varepsilon(\frac{ax}{p^n}) \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big) \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \\
\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^k \mathscr{F}_{\mathrm{alg}}(\mu) =& k! \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \frac{\mu}{(-tx)^k} - p^{-1} \int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big) \\
=& k! (1 - p^{-1}\varphi^{-1}) \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big) \\
\text{“ =”}& k! \frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)
\end{aligned}$$

La raison d'être des guillemets dans la dernière égalité est que $(1 - \varphi)$ n'est pas forcément inversible sur $D(V(k))$ et que l'équation $(1 - \varphi)x = (-t)^{-k} \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{-k}\lambda$, qui a des solutions, peut en avoir une infinité ; mais deux de ces solutions diffèrent par un élément de $D(V(k))^{\varphi = 1}$, c'est-à-dire par un élément de $\ker \exp_{V(k)}$. La raison pour laquelle on l'écrit de cette manière est pour faire apparaître l'opérateur $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$ qui est à l'origine des facteurs d'Euler biscornus dans la définition des fonctions L p-adiques. Utilisant la formule VI.1.1, on obtient finalement les formules

$$\text{(IX.1.1)}\qquad \begin{aligned}\int_{\Gamma_K}\chi(x)^k\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_V(\mu) =&k!\exp_{V(k)}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)\Big)\\ \int_{\gamma\Gamma_{K_n}}\chi(x)^k\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_V(\mu) =&k!\exp_{V(k)}\Big(\frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}\varepsilon(\frac{\chi(\gamma)x}{p^n})\frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)\Big)\ \text{ si }\ n\geqslant 1.\end{aligned}$$

Si $h\in\mathbf{Z}$, on définit de même une application

$$\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{h,V}:\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{]-\infty,h-1]}(\mathbf{Q}_p,D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}\longrightarrow H^1(K,\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,+\infty[}(\Gamma_K,V))$$

par la formule $\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{h,V}=\exp_V\circ\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}$. La relation entre $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}$ et $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}$ se traduit par les formules

(IX.1.2)

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{h,V}(\mu)(y) =&\chi(y)^{1-h}\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{V(1-h)}((-tx)^{h-1}\mu(x))(y)\\ \int_{\Gamma_K}\chi(x)^k\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{h,V}(\mu) =&(k+h-1)!\exp_{V(k)}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)\Big)\\ \int_{\gamma\Gamma_{K_n}}\chi(x)^k\tilde{\mathrm{E}}\mathrm{xp}_{h,V}(\mu) =&(k+h-1)!\exp_{V(k)}\Big(\frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}\varepsilon(\frac{\chi(\gamma)x}{p^n})\frac{\mu}{(-tx)^k}\Big)\Big)\ \text{ si }\ n\geqslant 1,\end{aligned}$$

formules que l'on pourra comparer, en utilisant la formule I.5.1, avec le diagramme (i) du théorème énoncé dans l'introduction de [**23**].

2. Continuité de l'exponentielle de Perrin-Riou.— Il n'y a pas d'application naturelle de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V))$ dans $\mathscr{D}^{]-\infty,h-1]}(\mathbf{Q}_p,D(V))$ car on ne peut pas définir $\int_{\mathbf{Z}_p}x^{-k}\mu$ si $k\geqslant 1$ et $\mu\in\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V))$, la division d'une distribution par x n'étant bien définie qu'à un multiple de la masse de Dirac en 0 près. Pour remédier à cette difficulté, introduisons l'espace $\mathrm{LA}'(\mathbf{Q}_p)$ des fonctions f localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p-\{0\}$ telles qu'il existe $N\in\mathbf{N}$ (dépendant de f) de telle sorte que x^Nf se prolonge en un élément de $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p)$. Tout élément de $\mathrm{LA}'(\mathbf{Q}_p)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x\to f(x)+\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x)P(x^{-1})$, où $f\in\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p)$ et P est un polynôme sans terme constant.

Si A est un espace de Banach p-adique, on note $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$ l'espace des morphismes continus de $\mathrm{LA}'(\mathbf{Q}_p)$ dans A. La multiplication par x est un isomorphisme de $\mathrm{LA}'(\mathbf{Q}_p)$ et donc induit un isomorphisme de $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$; d'autre part, les espaces $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$ sont reliés par la suite exacte

$$0\to\prod_{i<0}A\delta_0^{[i]}\to\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)\to\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)\to 0$$

et on note $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,A)$ l'image réciproque de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,A)\subset\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$ dans $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,A)$ et $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,A)$ s'injecte naturellement dans $\mathscr{D}^{]-\infty,h-1]}(\mathbf{Q}_p,A)$.

L'image par $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}$ d'une distribution tempérée n'est pas une distribution tempérée (ce n'est même pas une distribution continue car une distribution continue fixe sous l'action de $\mathscr{G}_K$ est à support $\{0\}$) ; le théorème IX.2.1 ci-dessous est donc un petit peu miraculeux.

Théorème IX.2.1. — *Si $h \in \mathbf{Z}$ est tel que* $\mathrm{Fil}^{-h} D(V) = D(V)$ *et μ est une distribution appartenant à $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi = 1}$, son image par l'application* $\mathrm{Exp}_{h,V}$ *composée de* $\tilde{\mathrm{Exp}}_{h,V}$ *avec la restriction de $\mathscr{G}_K$ à $\mathscr{G}_{K_\infty}$ est continue, c'est-à-dire appartient à $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K}$.*

Remarque IX.2.2. — (i) On a utilisé l'injection naturelle de $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{]-\infty,h-1]}(\mathbf{Q}_p, D(V))$ pour donner un sens à $\tilde{\mathrm{Exp}}_{h,V}$.

(ii) On préfèrerait ne pas avoir à restreindre à $\mathscr{G}_{K_\infty}$, ce qui fait disparaître le sous-Λ_K-module de torsion de $H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))$ (cf. proposition II.1.4).

Démonstration. — La formule $x^{1-h}\mathrm{Exp}_{1,V(1-h)}\big((-tx)^{h-1}\mu\big) = \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu)$ permet, quitte à remplacer V par $V(1-h)$ et μ par $(-tx)^{h-1}\mu$ de supposer $h=1$ pour la démonstration, ce que nous ferons. Soit $\mu \in \tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi = 1}$. La démonstration de ce théorème repose sur l'équivalence des propriétés (i) et (ii) de la proposition II.2.3 et notre problème est donc d'arriver à évaluer, si $n \geqslant 1$ et $j \in \mathbf{N}$, les quantités $p^{-nj} \int_{\gamma\Gamma_{K_n}} (\chi(x) - \chi(\gamma))^j \mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)$.

Si $\nu \in \tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p, D(V))$, posons

$$\begin{aligned} \gamma_{a,n,k}(\nu) &= k! \frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \varepsilon\big(\frac{ax}{p^n}\big) \frac{\nu}{(-tx)^k}\Big) \\ \tilde{\gamma}_{a,n,k}(\nu) &= k! \frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} [\varepsilon^{ax}]\big(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-atx)^i}{i!}\big) \frac{\nu}{(-tx)^k}\Big). \end{aligned}$$

Lemme IX.2.3. — *(i) Si* $\mathrm{Fil}^{-1} D(V) = D(V)$, *alors $\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\nu) - \gamma_{a,n,k}(\nu) \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$ quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $k \geqslant 0$.*

(ii) $\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\nu) \in \mathbf{B}_{\max} \otimes D(V)$ et $(1-\varphi)\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\nu) = \tilde{\gamma}_{a,n,k}((1 - \varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi)\nu)$.

Démonstration. — On part de la formule $\varepsilon\big(\frac{1}{p^n}\big) = [\varepsilon_n]\exp(-\frac{t}{p^n})$ d'où l'on tire

$$\varepsilon\big(\frac{x}{p^n}\big) \equiv [\varepsilon_n^x]\Big(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\big(\frac{-tx}{p^n}\big)^i\Big) = \varphi^{-n}\Big([\varepsilon^x]\big(\sum_{i=0}^{k} \frac{(-tx)^i}{i!}\big)\Big) \bmod \mathrm{Fil}^{k+1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}},$$

si $x \in \mathbf{Z}_p$. On en tire le (i) car l'hypothèse $\mathrm{Fil}^{-1}D(V) = D(V)$ implique que l'on a $\mathrm{Fil}^{k+1}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes t^{-k}D(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$. Quant au (ii), il découle des identités $\varphi(t) = pt$ et $\varphi([\varepsilon]) = [\varepsilon^p]$.

Lemme IX.2.4. — *Si $\gamma \in \Gamma_K$, $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbf{N}$, alors $\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)$ est représenté par le cocycle*

$$\tau \to (\delta_\tau - 1) \star \mathrm{Eul}_B(\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu))),$$

où $a = \chi(\gamma)$ et $\mathrm{Eul}_B : \mathbf{B}_{\max} \to \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\max})$ *est l'application définie au §5 du chapitre III.*

Démonstration. — Posons $\alpha_{a,n,k} = \int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(x)^k \mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)$. D'après la formule IX.1.2, on a $\alpha_{a,n,k} = \exp_{V(k)}\big(\gamma_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu))\big)$. Maintenant, le (i) du lemme précédent montre que $\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu))$ est un relèvement de $\gamma_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu))$ appartenant à $\mathbf{B}_{\max} \otimes V$ qui est fixe par $\mathscr{G}_{K_\infty}$ comme on le voit sur sa définition. Le lemme III.5.1 implique donc que $\alpha_{a,n,k}(\mathrm{Exp}_{1,V}(\mu))$ est représenté par le cocycle

$$\tau \to -(1 - \delta_\tau) \star \mathrm{Eul}_B\big((1-\varphi)\tilde{\gamma}_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu))\big),$$

ce qui, compte-tenu du (ii) du lemme IX.2.3 et de la formule $(1-\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi)\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu)=\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu)$, formule qui découle de l'invariance de μ par $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi$, permet de conclure.

Corollaire IX.2.5. — *Sous les mêmes hypothèses,* $p^{-jn}\int_{\gamma\Gamma_{K_n}}(\chi(x)-\chi(\gamma))^j\mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)$ *est représenté par le cocycle*

$$\tau\to(\delta_\tau-1)\star\mathrm{Eul}_B(\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)),$$

où l'on a posé

$$\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)=p^{-jn}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-a)^{j-k}\tilde\gamma_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu)).$$

Pour évaluer cette dernière quantité, on peut utiliser la formule définissant $\tilde\gamma_{a,n,k}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu))$, ce qui nous donne (en utilisant l'identité $e^t=[\varepsilon]$)

$$\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)=p^{-jn}\frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}S_j(atx)\frac{\mu}{(-tx)^j}\Big),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}S_j(u)=&e^u\sum_{k=0}^{j}\Big(k!\binom{j}{k}u^{j-k}\Big(\sum_{i=0}^{k}\frac{(-u)^i}{i!}\Big)\Big)\\=&j!e^u,\end{aligned}$$

comme on le constate en regroupant les termes de même degré en u. On obtient donc

$$\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)=j!p^{-jn}\frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}[\varepsilon]^{ax}\frac{\mu}{(-tx)^j}\Big)=j!(-t)^{-j}\frac{\varphi^{-n}}{p^n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}[\varepsilon]^{ax}\frac{\mu}{x^j}\Big),$$

ce qui, utilisant la proposition VIII.3.1 (ou le lemme VIII.3.3), permet de montrer que si $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu)$ est d'ordre r, si $r(V)\in\mathbf{R}$ est tel que la suite d'endomorphismes $p^{nr(V)}\varphi^{-n}$ de $D(V)$ est bornée (il suffit de prendre pour $r(V)$ la plus grande pente de φ, voir plus loin) et si $\|\ \|_j$ est une norme sur $t^{-j}\mathbf{B}^+_{\max}\otimes_K D(V)$ provenant de la norme $\|\ \|_{\max}$ sur $\mathbf{B}^+_{\max}$, alors la suite de terme général $\sup_{a\in\mathbf{Z}_p^*}\Big\|p^{n(r(V)+r+1)}\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)\Big\|_j$ est $\eta(r)$-bornée. Comme Eul_B est continue et que d'après le corollaire IX.2.5,

$$p^{n(1+r(V)+r-j)}\int_{\gamma\Gamma_{K_n}}(\chi(x)-\chi(\gamma))^j\mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)$$

est représenté par le cocycle $\tau\to(\delta_\tau-1)\star\mathrm{Eul}_B\big(p^{n(r(V)+r+1)}\tilde\beta_{a,n,j}(\mu)\big)$, on peut utiliser la proposition II.2.3 pour conclure au fait que si $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu)$ est d'ordre r, alors $\mathrm{Exp}_{1,V}(\mu)\in H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{r(V)+r+1}(\Gamma_K,V))$.

Pour terminer la démonstration du théorème IX.2.1, il ne reste plus qu'à démontrer que $\mathrm{Exp}_{1,V}(\lambda)$ est fixe par Γ_K. Pour cela, remarquons que son image dans $H^1(K_\infty,\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,V))$ l'est puisque c'est la restriction à $\mathscr{G}_{K_\infty}$ d'un élément de $H^1(K,\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,V))$ et comme l'application naturelle de $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_r(\Gamma_K,V))$ dans $H^1(K_\infty,\mathscr{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_K,V))$ est injective d'après le corollaire II.2.2, ceci permet de conclure.

Remarque IX.2.6. — (i) Soit δ_1' la dérivée de la masse de Dirac en 1. C'est la distribution définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*} f(x)\delta_1' = -f'(1)$ et elle est d'ordre 1. Soit $\ell_h = h\delta_1 - \delta_1'$ ce qui fait de ℓ_h un élément de $\mathscr{D}_1(\mathbf{Z}_p^*)$ et ℓ_h est l'unique élément de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*)$ tel que, quel que soit $k \in \mathbf{Z}$, on ait $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^k \ell_h = k+h$. Ceci implique, grâce aux formules (IX.1.2) que $\mathrm{Exp}_{h+1,V}$ et $\mathrm{Exp}_{h,V}$ sont reliés par la relation

$$\mathrm{Exp}_{h+1,V} = \ell_h \mathrm{Exp}_{h,V}. \tag{IX.2.7}$$

Appelons pseudo-distribution tempérée un élément du localisé $\mathscr{D}_{\mathrm{ps}}(\mathbf{Z}_p^*)$ de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*)$ en la partie multiplicative engendrée par les ℓ_h, où h décrit $\mathbf{Z}$. La relation (IX.2.7) permet, en étendant les scalaires de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*)$ à $\mathscr{D}_{\mathrm{ps}}(\mathbf{Z}_p^*)$, de définir $\mathrm{Exp}_{h,V}$ pour tout $h \in \mathbf{Z}$.

(ii) Si on note Tw_φ l'isomorphisme de $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V(1)))$ dans $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))$ commutant à $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi$ qui, à λ associe $(-tx)\lambda$ et $\mathrm{Tw}_{\mathscr{G}_K}$ l'isomorphisme de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V(1))$ commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$ qui, à λ associe $x\lambda(1)$, un petit calcul nous montre que les applications exponentielles pour V et $V(1)$ sont reliées par la formule

$$\mathrm{Exp}_{h+1,V(1)} = \mathrm{Tw}_{\mathscr{G}_K} \circ \mathrm{Exp}_{h,V} \circ \mathrm{Tw}_\varphi$$

quel que soit $h \in \mathbf{Z}$.

(iii) Plutôt que de travailler avec des distributions sur $\mathbf{Z}_p^*$, Perrin-Riou préfère travailler avec des séries entières, le passage d'un point de vue à l'autre se faisant au moyen de la transformée d'Amice. Modulo ce changement de point de vue, si on note $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))^{\tilde{\Delta}=0}$ le noyau de l'application $\mathbf{Q}_p$-linéaire

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} : \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V)) &\longrightarrow \underset{i\in\mathbf{Z}}{\oplus}(D(V)/(1-p^i\varphi)D(V))\\ \mu &\longrightarrow \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\mu\Big)_{i\in\mathbf{Z}},\end{aligned}$$

l'application exponentielle $\Omega_{V,h}$ (appelée application des périodes dans [**23**]) construite par Perrin-Riou peut se voir comme une application

$$\Omega_{V,h} : \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))^{\tilde{\Delta}=0} \longrightarrow \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes_{\Lambda_K} \Big(H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\Big).$$

Pour comparer cette application avec l'application $\mathrm{Exp}_{h,V}$, il suffit de traduire les formules (IX.1.2) en termes de transformée d'Amice et d'utiliser l'isomorphisme

$$H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))^{\Gamma_K} \cong \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes_{\Lambda_K} \Big(H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\Big)$$

et le lemme IX.2.8 ci-dessous (appliqué à $D = D(V)$ et $u = \varphi$) qui montre que l'image de $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))$ par l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ est $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))^{\tilde{\Delta}=0}$. D'autre part, le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ est facile à déterminer et est constitué des éléments de la forme $\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i\delta_0^{[-i]}$, où $v_i \in D(V)^{\varphi=p^i}$. Un calcul immédiat montre qu'alors $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu) = \sum_{i=0}^{+\infty}(i+h-1)!\frac{v_i}{t^i}\mu_{\mathrm{Haar},i}$ appartient à $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V)$ et est dans le noyau de $\exp_V$, ce qui prouve que $\mathrm{Exp}_{h,V}$ se factorise à travers $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*, D(V))^{\tilde{\Delta}=0}$. Pour montrer que $\mathrm{Exp}_{h,V}$ et $\Omega_{V,h}$ coïncident, il suffit alors de comparer la formule (IX.1.2) avec les formules de Perrin-Riou en utilisant la formule (I.5.1)

Lemme IX.2.8. — *Soit D un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme u.*

(i) Si $\mu \in \mathscr{D}_{\rm cont}(\mathbf{Q}_p, D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$ (resp. $\tilde{\mathscr{D}}_{\rm cont}(\mathbf{Q}_p, D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$), alors $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\mu \in (1-p^iu)D$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$ (resp. $i \in \mathbf{Z}$).

(ii) Réciproquement, si $\lambda \in \mathscr{D}_{\rm cont}(\mathbf{Z}_p^*, D)$ est tel que $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda \in (1-p^iu)D$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$ (resp. $i \in \mathbf{Z}$), alors il existe $\mu \in \mathscr{D}_{\rm cont}(\mathbf{Q}_p, D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$ (resp. $\tilde{\mathscr{D}}_{\rm cont}(\mathbf{Q}_p, D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$) vérifiant $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu) = \lambda$.

Démonstration. — Si $\lambda \in \mathscr{D}_{\rm cont}(\mathbf{Z}_p^*, D)$ est la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ d'une distribution μ vérifiant $\varphi_{\mathscr{D}}(\mu) = u^{-1}(\mu)$, alors
$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda = \int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu - u\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} (px)^i\mu\Big) = (1-p^iu)\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu\Big),$$
ce qui démontre le (i).

Réciproquement, si $i \in \mathbf{N}$ (resp. $i \in \mathbf{Z}$), soit v_i un élément de D vérifiant $(1-p^iu)v_i = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda$. Soit $A(\mathbf{Z}_p)$ (resp. $A'(\mathbf{Z}_p)$) l'ensemble des séries de la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} a_ix^i$ (resp. $\sum_{i\gg-\infty}^{+\infty} a_ix^i$) à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$ convergeant pour $x \in \mathbf{Z}_p$ (resp. $x \in \mathbf{Z}_p - \{0\}$). L'application linéaire λ' qui à $\sum a_ix^i$ associe $\sum a_iv_i$ est continue sur $A(\mathbf{Z}_p)$ (resp. $A'(\mathbf{Z}_p)$) car $\|v_i\| = \|\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda\|$ si i est assez grand. Si f appartient à LA (resp. LA'), il existe $h(f) \in \mathbf{N}$ tel que si $h \geqslant h(f)$, alors f peut se décomposer sous la forme $f_h(p^{-h}x) + g_h(x)$, où f_h appartient à $A(\mathbf{Z}_p)$ (resp. $A'(\mathbf{Z}_p)$) et g_h est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. Une telle décomposition est alors unique (à h fixé). On a de plus $g_h(x) - g_{h+1}(x) = -\mathbf{1}_{p^h\mathbf{Z}_p^*}(x)f(x)$ et si $f_h(x) = \sum p^{ih}a_ix^i$, alors
$$\begin{aligned} u^h\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} f_h\lambda'\Big) - u^{h+1}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} f_{h+1}\lambda'\Big) &= u^h\Big(\sum p^{ih}a_iv_i\Big) - u^{h+1}\Big(\sum p^{i(h+1)}a_iv_i\Big) \\ &= u^h\Big(\sum p^{ih}a_i(1-p^iu)v_i\Big) = u^h\Big(\sum p^{ih}a_i\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\lambda\Big) \\ &= u^h\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} f(p^hx)\lambda\Big). \end{aligned}$$
On en déduit le fait que la forme linéaire μ définie par $\int_{\mathbf{Q}_p} f\mu = u^h\big(\int_{\mathbf{Z}_p} f_h\lambda'\big) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} u^n\big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} g_h(p^nx)\,\lambda\big)$ ne dépend pas du choix de h et on vérifie qu'elle répond à la question (la série est en fait une somme finie car g_h est à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$).

3. Comparaison entre les deux applications exponentielles. — La comparaison entre l'exponentielle de Perrin-Riou et l'application construite au §1 du chapitre VI repose sur le théorème IX.3.2 ci-dessous qui permet de donner une description de $D_{\rm Iw}(V)$ en termes de distributions tempérées.

Soit D un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme u. Si $r \in \mathbf{Q}$, on dit que D est de pente $-r$ si toutes les valeurs propres de u sont de valuation $-r$. Cette condition équivaut à ce que la famille d'endomorphismes $(p^{E(nr)}u^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de D est bornée dans $\mathrm{End}(D)$. Si u est quelconque et $r \in \mathbf{Q}$, on note $D^{[r]}$ le plus grand sous-espace de D stable par u de pente

$-r$. D est alors la somme directe des $D^{[r]}$, r décrivant $\mathbf{Q}$ et on note pr_r la projection de D sur $D^{[r]}$ parallèlement à $\oplus_{r'\neq r}D^{[r']}$.

Lemme IX.3.1. — *Si z est un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D$ stable par $\varphi\otimes u$, alors μ appartient à $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cont}})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D$.*

Démonstration. — Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base de D et soit $\sum_{i=1}^d z_ie_i$ la décomposition de z dans cette base. Si z est stable par $\varphi\otimes u$, alors z est stable par $\varphi^n\otimes u^n$ quelque soit $n\in\mathbf{N}$. On obtient donc, si $(e_i^*,\dots,e_d^*)$ désigne la base duale de la base $(e_1,\dots,e_d)$, l'égalité $z_i=\sum_{j=1}^d(e_i^*|u^n(e_j))\varphi^n(z_j)\in\varphi^n((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}})$ qui permet de conclure.

Si $z=\sum_{i=1}^d z_ie_i$ appartient à $((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D)^{\varphi\otimes u=1}$, on définit $\mathscr{F}^{-1}_{\mathrm{cont}}(z)\in\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,D)$ par la formule $\mathscr{F}^{-1}_{\mathrm{cont}}(z)=\sum_{i=1}^d\mathscr{F}^{-1}_{\mathrm{cont}}(z_i)e_i$, formule qui a un sens en vertu du lemme IX.3.1 et du corollaire VIII.3.2.

Soit $\Delta_k:\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Z}_p^*,D)\to D/(1-p^ku)D$ l'application qui à μ associe l'image de $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^k\mu$ dans $D/(1-p^ku)D$ et soit $\tilde\Delta=\oplus_{k\geqslant 0}\Delta_k$.

Théorème IX.3.2. — *Soit D un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme injectif u. Alors*

(i) l'application qui à z associe $\mathscr{F}^{-1}_{\mathrm{cont}}(z)$ induit un isomorphisme de $((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D)^{\varphi\otimes u=1}$ sur $\oplus_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}'_r(\mathbf{Q}_p,D^{[r]})^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$, où $\mathscr{D}'_r(\mathbf{Q}_p,D^{[r]})$ désigne le sous-espace des éléments de $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D^{[r]})$ dont la restriction à $\mathbf{Q}_p^*$ est d'ordre r^-.

(ii) Si on munit $((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$ d'une norme induite par $\|\ \|_{\max}$ sur $\mathbf{B}^+_{\max}$ et $\mathscr{D}_{r^-}(\mathbf{Z}_p^*,D^{[r]})$ de la norme $\|\ \|_r$, alors la suite

$$\begin{array}{cccc} & ((\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D)^{\varphi\otimes u=1} & \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}^{-1}_{\mathrm{cont}}} & \bigoplus_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}_{r^-}(\mathbf{Z}_p^*,D^{[r]}) & \\ & \uparrow & & \downarrow & \\ 0\to & \bigoplus_{k\geqslant 0}t^kD^{u=p^{-k}} & & \bigoplus_{k\geqslant 0}D/(u-p^{-k})D & \to 0\end{array}$$

est une suite exacte d'espaces de Banach p-adiques et les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\bigoplus_{k\geqslant 0}t^kD^{u=p^{-k}}$ et $\bigoplus_{k\geqslant 0}D/(u-p^{-k})D$ sont tous les deux de dimension finie et ont la même dimension.

Démonstration. — Quitte à appliquer pr_r à chacun des espaces et morphismes considérés, on peut supposer que D est de pente $-r$, ce que nous ferons. Si $z\in(\mathbf{B}^+_{\max})^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D$ est fixe par $\varphi\otimes u$, alors quel que soit l'ouvert compact X de $\mathbf{Q}_p$, on a

$$\begin{aligned}\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_X(z))=\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(\varphi^{-n}(z)) &=\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(u^n(z))\\ &=p^{-E(nr)}\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(p^{E(nr)}u^n(z)).\end{aligned}$$

La suite d'opérateurs $p^{E(nr)}u^n$ étant bornée dans $\mathrm{End}(V)$, on en déduit l'existence d'une constante $C\geqslant 0$ telle que l'on ait

$$\|p^{E(nr)}\varphi^{-n}(\mathrm{Res}_X(z))\|_{\max}\leqslant C\|\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(z)\|_{\max}$$

quels que soient X et $n\in\mathbf{Z}$. Appliquant ceci à $X=\mathbf{Z}_p$ (resp. $X=\mathbf{Z}_p^*$) et utilisant le fait que $\|\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z)\|_{\max}\leqslant\|z\|_{\max}$ si $n\geqslant 1$ (resp. $\|\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(z)\|_{\max}\leqslant\|z\|_{\max}$ si $n\geqslant 2$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(z)=0$) et la proposition VIII.3.1, on en déduit le fait que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z))$ est d'ordre r (resp. $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z))$ est d'ordre r^- et l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$ est continue). Comme de plus, l'invariance de z par $\varphi\otimes u$ entraine celle de $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ par $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u$ et que $\mathbf{Q}_p=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}p^{-n}\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Q}_p^*=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}p^{-n}\mathbf{Z}_p^*$), on en déduit le fait que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ est d'ordre r sur $\mathbf{Q}_p$ (resp. d'ordre r^- sur $\mathbf{Q}_p^*$). On a donc déjà vérifié que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$ est continue et que l'image de $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$ est bien incluse dans $\mathscr{D}'_r(\mathbf{Q}_p,D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$.

Le fait que l'image de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$ se trouve dans le noyau de $\tilde{\Delta}$ est une réécriture du (i) du lemme IX.2.8. Réciproquement, si λ est dans le noyau de $\tilde{\Delta}$, alors d'après le (ii) du lemme IX.2.8, il existe $\mu\in\mathscr{D}_{\mathrm{cont}}(\mathbf{Q}_p,D^{[r]})^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est égale à λ. Comme μ est fixe par $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u$, quels que soient l'ouvert compact X de $\mathbf{Q}_p$ et l'entier n, on a

$$\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(\mu)=\mathrm{Res}_{p^{-n}X}(\varphi_{\mathscr{D}}^{-n}\otimes u^{-n}(\mu))=\varphi_{\mathscr{D}}^{-n}\otimes u^{-n}(\mathrm{Res}_X(\mu)).$$

Appliquant ceci à $X=\mathbf{Z}_p^*$, on en déduit formellement la formule

$$\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mu)=\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\mu))+\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi^{-n}\otimes u^{-n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\lambda)).$$

D'autre part, comme u est de pente $-r$, la suite de terme général $p^{-E(nr)}u^{-n}$ est bornée dans $\mathrm{End}(D)$ et comme λ est d'ordre r^-, la suite de terme général $p^{E(nr)}\varphi^{-n}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\lambda))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit la convergence de la série, ce qui permet de montrer, l'exactitude en $\bigoplus\limits_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}_{r^-}(\mathbf{Z}_p^*,D^{[r]})$ et le fait que $\mathscr{D}'_r(\mathbf{Q}_p,D)^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u=1}$ est dans l'image de $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$ et donc de terminer la démonstration du (i) et d'une grande partie du (ii).

La surjectivité de $\tilde{\Delta}$ étant une trivialité ainsi que le fait que les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0}t^kD^{u=p^{-k}}$ et $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0}D/(u-p^{-k})D$ sont tous les deux de dimension finie et ont la même dimension, il ne reste plus qu'à déterminer le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}\circ\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}$. Si $z\in((\mathbf{B}_{\max}^+)^{\mathscr{G}_{K_\infty}}\otimes_K D)^{\varphi\otimes u=1}$ est tel que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z))=0$, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ est à support $\{0\}$ à cause de l'invariance de $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ par $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes u$. Ceci implique que $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}^{-1}(z)$ est une somme de dérivées de la masse de Dirac en 0 et donc que z est une somme d'éléments de la forme t^kd_k avec $d_k\in D$. L'invariance de z par $\varphi\otimes u$ implique que $d_k\in D^{u=p^{-k}}$, ce qui permet de conclure.

Nous allons appliquer le théorème précédent au cas où $D=D(V)$ est muni de l'automorphisme de Frobenius φ. Si $r\in\mathbf{Q}$, on note $D^{[r]}(V)$ le sous-espace de $D(V)$ de pente $-r$ et on note $r(V)$ la plus grande pente de φ agissant sur $D(V)$, ce qui fait que $r(V)$ est aussi l'opposé du minimum des $r\in\mathbf{Q}$ tels que $D^{[r]}\neq\{0\}$. On obtient alors la proposition suivante.

Proposition IX.3.3. — *(i) $\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}$ induit un isomorphisme*

$$\oplus_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}'_r(\mathbf{Q}_p,D^{[r]}(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}\cong\mathrm{F}_V^0(D_{\mathrm{Iw}}(V)).$$

(ii) Si $h\in\mathbf{N}$ et si $\mu\in H^1(K,\mathscr{D}_{h^-}(\Gamma_K,V))$ est dans l'ensemble de dfinition de $\mathrm{Log}_V^{(h)}$, alors il existe $k\in\mathbf{N}$ et $F\in t^{-k}D(V)[[T]]$ de rayon de convergence 1 tel que l'on ait

$$\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V^{(h)})=p^{-n}\varphi^{-n}(F([\varepsilon]-1))$$

quel que soit $n\geqslant 1$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du théorème précédent. Passons au (ii). Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu) \in \mathrm{F}^0_{V(k)} D_{\mathrm{Iw}}(V)$, ce qui implique, d'après le (i), l'existence de $\lambda \in \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, t^{-k}D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ tel que l'on ait $\mathrm{Log}_V^{(h)}(\mu) = \int_{\mathbf{Q}_p}[\varepsilon^x]\lambda$. D'autre part, la formule (i) de la proposition VIII.3.1 et le fait que $\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n} = p^{-n}\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}$, (cf. démonstration de la proposition V.4.5), nous donnent la formule

$$\mathrm{T}_{K,n}(\mathrm{Log}_V^{(h)}) = p^{-n}\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}[\varepsilon^x]\lambda = p^{-n}\varphi^{-n}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p}[\varepsilon^x]\lambda\Big)$$

car λ est fixe par $\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi$. On peut donc prendre pour F la transformée d'Amice de λ.

Lemme IX.3.4. — *Si $\mu \in \tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ est d'ordre $r(\mu)$, alors $\frac{\mu}{(-tx)^i}$ a une transformée de Fourier continue quel que soit $i > r(\mu)+r(V)$.*

Démonstration. — Soit $r_0 \in \mathbf{R}$ strictement supérieur à l'ordre de μ. On a donc

$$\mu \in \oplus_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}'_{r_0}(\mathbf{Q}_p, D^{[r]}(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1} \text{ et } \frac{\mu}{(-tx)^i} \in \oplus_{r\in\mathbf{Q}}\mathscr{D}'_{r_0}(\mathbf{Q}_p, D^{[r+i]}(V(i)))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$$

quel que soit $i \in \mathbf{Z}$. D'après le (i) de la proposition IX.3.3, la transformée de Fourier de $\frac{\mu}{(-tx)^i}$ converge dès que $r_0 \leqslant r+i$ quel que soit $r \in \mathbf{Q}$ tel que $D^{[r]}(V) \neq \{0\}$, c'est à dire dès que $i \geqslant r_0 + r(V)$. On en déduit le résultat.

Proposition IX.3.5. — *Si $\mu \in \tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ et $i > r(\mu)+r(V)$, alors*

$$\chi(y)^{-i}\mathrm{Exp}_{V(i)}^{(h+i)}\Big(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}\big(\frac{\mu}{(-tx)^i}\big)\Big)(y) = \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu)(y).$$

Démonstration. — Si $i > r(\mu)+r(V)$, soit $z_i = \mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\frac{\mu}{(-tx)^i})$. Si $\gamma \in \Gamma_K$, $n \geqslant 1$ et $k \in [0, i+h-1]$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\Gamma_{K_n}} \chi(y)^{-k}\mathrm{Tay}_{V(i)}^{(h+i)}(z_i)(y) =& \frac{(h+i-1-k)!k!}{(-\chi(\gamma))^k}\delta_\gamma \star \delta_{V(i-k)} \circ \mathrm{T}_{K,n}(z_i)\\ =&(h+i-1-k)!p^{-n}\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}\varepsilon(\chi(\gamma)x)\frac{\mu}{(-tx)^{i-k}}\\ =&\int_{\chi(\gamma)+p^n\mathbf{Z}_p} x^{i-k}\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}(\mu)\end{aligned}$$

la première égalité venant de la définition de $\mathrm{Tay}_{V(i)}^{(h+i)}$, la seconde étant une conséquence du lemme VIII.3.4, de l'isomorphisme

$$\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V)) \cong \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p)\otimes D(V)$$

et de l'identité $\mathrm{T}_{K,n} = \mathrm{id}\otimes\mathrm{T}_{\mathbf{Q}_p,n}$ et la dernière venant de la définition de $\mathscr{F}_{\mathrm{alg}}^{(h)}$. Composer ces égalités avec l'exponentielle de Bloch-Kato permet de montrer que $\chi(y)^{-i}\mathrm{Exp}_{V(i)}^{(h+i)}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\frac{\mu}{(-tx)^i}))$ et $\mathrm{Exp}_{h,V}(\mu)$ prennent les mêmes valeurs sur les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{\gamma\Gamma_{K_n}}(y)\chi(y)^k$ pour $\gamma \in \Gamma_K$, $n \geqslant 1$ et $k \in [1-h, i]$. D'autre part, d'après la démonstration du théorème IX.2.1, si μ est d'ordre $r(\mu)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$, alors $\mathrm{Exp}_{h,V}(\mu)$ est d'ordre $h+r(\mu)+r(V) < h+i$ [seul le cas $h=1$ est traité dans cette démonstration, mais le cas général s'en déduit en utilisant la formule (IX.2.7) de la remarque IX.2.6] ; de même, $\mathrm{Exp}_{V(i)}^{(h+i)}(\mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\frac{\mu}{(-tx)^i}))$ est d'ordre $(h+i)^-$ et il suffit d'utiliser le fait que l'application naturelle de $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{(h+i)^-}(\Gamma_K, V))$ dans $H^1(K_\infty, \mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,i]}(\Gamma_K, V))$ est injective pour conclure ; cette injectivité se déduit du corollaire II.2.2 en multipliant tout par $\chi(y)^{1-h}$ pour se ramener à $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[0,h+i-1]}(\Gamma_K, V)$ au lieu de $\mathscr{D}_{\mathrm{alg}}^{[1-h,i]}(\Gamma_K, V)$.

Remarque IX.3.6. — (i) On aimerait bien sûr pouvoir prendre $i = 0$, mais ce n'est pas toujours possible, la transformée de Fourier des distributions que l'on considère ne convergeant pas forcément. D'autre part, la proposition IX.3.5 fournit une réponse au problème soulevé dans la remarque VI.2.3.

(ii) Tout ce que l'on a fait dans ce chapitre se généralise à la situation au cas où V est de de Rham et K quelconque en remplaçant $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ par son sous-espace $(\mathbf{B}_{\max}^{\mathscr{G}_{F_\infty}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{cris}}(V))^{\varphi=1}$. La seule différence est que dans le cas général, cet espace est plus petit que $D_{\mathrm{Iw}}(V)$.

4. La loi de réciprocité explicite de Perrin-Riou.

Proposition IX.4.1. — *Soient $h \in \mathbf{Z}$ et $\mu \in \tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p, D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}} \otimes \varphi = 1}$. Alors*

$$\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-k} \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu) = (-1)^h (\exp^*_{V^*(1+k)})^{-1} \Big(\frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^k}{(k-h)!} \mu \Big) \Big)$$

si $k \gg 0$.

Démonstration. — Soit $r \in \mathbf{N}$ suffisamment grand pour que $z_r = \mathscr{F}_{\mathrm{cont}}(\frac{\mu}{(-tx)^r})$ existe. Commençons par supposer que $\mathrm{Fil}^{-h} D(V) = D(V)$; on a donc $z_r = \mathrm{Log}_{V(r)}^{(h+r)} \circ \mathrm{Exp}_{V(r)}^{(h+r)}(z_r)$ modulo le noyau de $\mathrm{Exp}_{V(r)}^{(h+r)}$. Utilisant le théorème VII.1.1, on en tire

$$\delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,0}(z_r) = \frac{(-1)^{h+r}}{\prod_{i=0}^{h+r-1}(r+k-i)} \exp^*_{V^*(1+k)} \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-r-k} \mathrm{Exp}_{V(r)}^{(h+r)}(z_r) \Big),$$

si $k \gg 0$, ce qui permet, utilisant la formule $\mathrm{Exp}_{h,V}(\mu) = \chi(x)^{-r} \mathrm{Exp}_{V(r)}^{(h+r)}(z_r)$ [cf. proposition IX.3.5], d'obtenir la formule

$$\delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,0}(z_r) = \frac{(-1)^{h+r}}{\prod_{i=0}^{h+r-1}(r+k-i)} \exp^*_{V^*(1+k)} \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-k} \mathrm{Exp}_{h,V}(\mu) \Big).$$

D'autre part, z_r est la transformée de Fourier continue de $\frac{\mu}{(-tx)^r}$ et le lemme VIII.3.4 nous fournit la formule

$$\begin{aligned} \delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,0}(z_r) &= \int_{\mathbf{Z}_p} \frac{(tx)^{r+k}}{(r+k)!} \frac{\mu}{(-tx)^r} - p^{-1} \int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} \frac{(tx)^{r+k}}{(r+k)!} \frac{\mu}{(-tx)^r} \\ &= (-1)^r \frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^k}{(k+r)!} \mu \Big), \end{aligned}$$

le passage de la première ligne à la seconde résultant du calcul du §1 du chapitre IX.

Il suffit alors de comparer les 2 formules donnant la valeur de $\delta_{V(-k)} \circ \mathrm{T}_{K,0}(z_r)$ pour conclure dans le cas $\mathrm{Fil}^{-h} D(V) = D(V)$. Le cas général se déduit, par récurrence descendante sur h, de ce cas particulier et de la formule $\mathrm{Exp}_{h,V} = \ell_{h-1} \mathrm{Exp}_{h-1,V}$.

Soit W une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$. Soient $\mu \in \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, W)$ et f une fonction localement analytique sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $\sigma \in \mathscr{G}_K$, alors

$$\int_{\Gamma_K \times \Gamma_K} f(xy^{-1})\, \delta_\sigma \star \mu = \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_K \times \Gamma_K} f(\overline{\sigma}x(\overline{\sigma}y)^{-1})\mu \Big) = \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_K \times \Gamma_K} f(xy^{-1})\mu \Big).$$

On en déduit le fait que si $\mu(\sigma,\tau)$ est un 2-cocycle (resp. 2-cobord) sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, W)$ et si f est une fonction localement analytique sur $\mathbf{Z}_p^*$, alors $\int_{\Gamma_K \times \Gamma_K} f(xy^{-1})\mu(\sigma,\tau)$ est un 2-cocycle (resp. 2-cobord) sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans W, d'où l'existence d'une application naturelle de $H^2(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, W))$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, H^2(K,W))$. On peut appliquer ceci en particulier à $W = \mathbf{Q}_p(1)$ et, utilisant l'isomorphisme canonique entre $H^2(K, \mathbf{Q}_p(1))$ et $\mathbf{Q}_p$, on obtient une application naturelle de $H^2(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, \mathbf{Q}_p(1)))$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p)$.

Maintenant, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, le cup-produit composé avec la projection de $V \otimes V^*(1)$ sur $\mathbf{Q}_p(1)$ induit une application bilinéaire

$$H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)) \times H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V^*(1))) \to H^2(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, \mathbf{Q}_p(1)))$$

et, composant avec l'application naturelle de $H^2(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, \mathbf{Q}_p(1)))$ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p)$, un accouplement

$$(\cdot,\cdot)_V : H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V)) \times H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V^*(1))) \to \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p).$$

Lemme IX.4.2. — *Si $\mu \in H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V))$, $\mu' \in H^1(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, V^*(1)))$ et $i \in \mathbf{Z}$, alors $\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i (\mu,\mu')_V$ est égal au cup-produit de $\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu \in H^1(K, V(i))$ et de $\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-i} \mu' \in H^1(K, V^*(1-i))$.*

(ii) Si la restriction de μ ou μ' à K_∞ est nulle, alors $(\mu,\mu')_V = 0$.

Démonstration. — (i) Si $\sigma \to \mu_\sigma$ (resp. $\tau \to \mu'_\tau$) est un 1-cocycle représentant μ (resp. μ'), la classe de $\mu \cup \mu'$ dans $H^2(K, \mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K \times \Gamma_K, V \otimes V^*(1)))$ est représentée par le 2-cocycle $\mu_\sigma \otimes (\delta_\sigma \star \mu'_\tau)$ et son image λ dans $\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K, H^2(K, V \otimes V^*(1)))$ est par construction telle que $\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \lambda$ est représenté par le 2-cocycle

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_K \times \Gamma_K} \chi(x)^i \chi(y)^{-i} \mu_\sigma \otimes (\delta_\sigma \star \mu'_\tau) &= \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu_\sigma \Big) \otimes \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(y)^{-i} \delta_\sigma \star \mu'_\tau \Big) \\ &= \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu_\sigma \Big) \otimes \delta_\sigma \star \Big(\int_{\Gamma_K} (\chi(\sigma)y)^{-i} \mu'_\tau \Big) \\ &= \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu_\sigma \Big) \otimes \delta_\sigma \star \Big(\Big(\int_{\Gamma_K} \chi(y)^{-i} \mu'_\tau \Big)(-i) \Big).\end{aligned}$$

On en déduit la formule

$$\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \lambda = \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu \Big) \cup \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-i} \mu' \Big) \in H^2(K, V(i) \otimes V^*(1-i)),$$

ce qui, utilisant l'isomorphisme $V(i) \otimes V^*(1-i) \cong V \otimes V^*(1)$ et projetant tout sur $\mathbf{Q}_p(1)$ permet de démontrer le (i).

Le (ii) est une conséquence du fait que si la restriction de μ à K_∞ est nulle, alors μ est de Λ_K-torsion ((iii) de la proposition II.1.4) et $\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \mu$ est nul pour presque tout i, ce qui permet de déduire la nullité de $(\mu,\mu')_V$ du (i) et du fait que la nullité de $\int_{\Gamma_K}\chi(x)^i\lambda$ pour i assez grand entraine celle de λ.

Corollaire IX.4.3. — *$(\cdot,\cdot)_V$ s'étend en un accouplement*

$$H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K,V)))^{\Gamma_K}\times H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K,V^*(1)))^{\Gamma_K}\to\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\Gamma_K,\mathbf{Q}_p)$$

qui sera encore noté $(\cdot,\cdot)_V$.

Démonstration. — Si $W\in\{V,V^*(1)\}$, l'application de restriction induit une surjection de $H^1(K,\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*,W))$ sur $H^1(K_\infty,\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*,W)))^{\Gamma_K}$ car Γ_K est procyclique et le (ii) du lemme IX.4.2 montre que si $\tilde\mu$ (resp. $\tilde\mu'$) est un relèvement de μ (resp. μ'), alors $(\tilde\mu,\tilde\mu')_V$ ne dépend que de μ et μ' et pas des choix des relèvements.

On étend l'accouplement $[\ ,\ ]_{D(V)}:D(V)\times D(V^*(1))\to\mathbf{Q}_p$ en un accouplement

$$\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}\times\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V^*(1)))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}\to\mathscr{D}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Z}_p^*,\mathbf{Q}_p)$$

encore noté $[\ ,\ ]_{D(V)}$ par la formule

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*}f(x)[\mu,\mu']_{D(V)}=\mathrm{Tr}_{D(V\otimes V^*(1))}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*}f(x^{-1}y)\mu\otimes\mu'\Big),$$

où $\mathrm{Tr}_{D(V\otimes V^*(1))}$ est la projection de $D(V)\otimes D(V^*(1))$ sur $\mathbf{Q}_p$ utilisée pour définir l'accouplement entre $D(V)$ et $D(V^*(1))$. En particulier, si $i\in\mathbf{Z}$, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i[\mu,\mu']_{D(V)}=\Big[\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^{-i}\mu,\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\mu'\Big]_{D(V)}.$$

Remarque IX.4.4. — Cet accouplement n'est pas exactement le même que celui utilisé par Perrin-Riou qui est construit à partir du produit de convolution sur $\mathbf{Z}_p^*$, c'est-à-dire obtenu en remplaçant $f(x^{-1}y)$ par $f(xy)$ dans la formule définissant $[\ ,\ ]_{D(V)}$. Cela explique la petite différence de formulation entre le théorème suivant et la conjecture $\mathrm{Réc}(V)$ de [**23**].

Théorème IX.4.5. — *Soit V une représentation cristalline de $\mathscr{G}_K$. Si μ et μ' sont des éléments de $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ et $\tilde{\mathscr{D}}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{Q}_p,D(V^*(1)))^{\varphi_{\mathscr{D}}\otimes\varphi=1}$ respectivement, alors*

$$(\mathrm{Exp}_{0,V}(\mu),\mathrm{Exp}_{1,V^*(1)}(\mu'))_V=-[\delta_{-1}\star\mu,\mu']_{D(V)}.$$

Démonstration. — D'après la formule (IX.1.2), si $i\gg 0$, alors

$$\int_{\Gamma_K}\chi(x)^i\mathrm{Exp}_{0,V}(\mu)=\exp_{V(i)}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big((i-1)!\int_{\mathbf{Z}_p^*}\frac{\mu}{(-tx)^i}\Big)\Big).$$

D'autre part, d'après la proposition IX.4.1 utilisée pour $V^*(1)$ au lieu de V, si $i\gg 0$, alors

$$\int_{\Gamma_K}\chi(x)^{-i}\mathrm{Exp}_{1,V^*(1)}(\mu)=-(\exp^*_{V(i)})^{-1}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*}\frac{(tx)^i}{(i-1)!}\mu'\Big)\Big).$$

Lemme IX.4.6. — *Soit W une représentation cristalline. Si $x\in D(W)$ et $y\in D(W^*(1))$, alors*

(i) $\exp_W(x)\cup(\exp^*_W)^{-1}(y)=[x,y]_{D(W)}$.

(ii) $[(1-\varphi)^{-1}x,(1-p^{-1}\varphi^{-1})y]_{D(W)}=[(1-p^{-1}\varphi^{-1})x,(1-\varphi)^{-1}y]_{D(W)}=[x,y]_{D(W)}$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence de la définition de l'application $\exp^*_W$. D'autre part, l'accouplement entre $D(W)$ et $D(W^*(1))$ s'obtient par projection de $D(W) \otimes D(W^*(1)) = D(W \otimes W^*(1))$ sur $D(\mathbf{Q}_p(1)) = t^{-1}\mathbf{Q}_p$. Comme φ agit par multiplication par p^{-1} sur $D(\mathbf{Q}_p(1))$, on en tire la formule $[\varphi(x), \varphi(y)]_{D(W)} = p^{-1}[x,y]_{D(W)}$ et le fait que l'opérateur adjoint de φ est $p^{-1}\varphi^{-1}$ et celui de $1 - p^{-1}\varphi^{-1}$ est $1 - \varphi$.

Ce lemme nous permet, posant $\lambda = \mathrm{Exp}_{0,V}(\mu)$ et $\lambda' = \mathrm{Exp}_{1,V^*(1)}(\mu')$, d'obtenir la formule

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i \lambda\Big) \cup \Big(\int_{\Gamma_K} \chi(x)^{-i} \lambda'\Big) &= \Big[\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(i-1)!}{(-tx)^i}\mu, -\int_{\mathbf{Z}_p^*} \frac{(tx)^i}{(i-1)!}\mu'\Big]_{D(V(i))} \\ &= -\Big[\int_{\mathbf{Z}_p^*} (-x)^{-i}\mu, \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \mu'\Big]_{D(V)}\end{aligned}$$

qui montre que l'on a

$$\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i (\mathrm{Exp}_{0,V}(\mu), \mathrm{Exp}_{1,V^*(1)}(\mu'))_V = -\int_{\Gamma_K} \chi(x)^i [\delta_{-1} \star \mu, \mu']_{D(V)}$$

si $i \gg 0$ et permet de conclure.

Références

[1] Y. Amice, Interpolation p-adique, Bull. Soc. France **92**, 117-180, 1964

[2] Y. Amice, Duals. *Proc. of a conf. on p-adic analysis* (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978

[3] Y. Amice et J. Vélu, Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. Astérisque **24-25**, 119-131, 1975

[4] S. Bloch et K. Kato, L functions and Tamagawa numbers of motives. Dans "*The Grothendieck Fesschrift*", vol. 1, 333-400, Prog. Math., vol. **86**, Birkhaüser 1990

[5] F. Cherbonnier, *Représentations p-adiques surconvergentes*, thèse de l'université d'Orsay, 1996

[6] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, prépublication du LMENS-97-27, 1997

[7] J. Coates et A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Australian Math. Soc., **A 26**, 1-25, 1978

[8] R. Coleman, Division values in local fields, Inv. Math. **53**, 91-116, 1979

[9] R. Coleman, The dilogarithm and the norm residue symbol, Bull. Soc. Math. France **109**, 373-402, 1981

[10] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Prépub. du L.M.E.N.S. 96-18, http ://www.dmi.ens.fr/dmi/preprints

[11] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288**, 367-370, 1979

[12] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115**, 529-577, 1982

[13] J.-M. Fontaine et G. Laffaille Construction de représentations p-adiques. Ann. Sci. E.N.S. **15**, 547-608, 1982

[14] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol II, Birkhauser, Boston 249-309, 1991.

[15] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223**, 59-102, 1994

[16] J.-M. Fontaine, Sur un théorème de Bloch et Kato (lettre à B. Perrin-Riou), Appendice à [**23**], Invent. math. **115**, 151-161, 1994

[17] K. Iwasawa, On explicit formulas for the norm residue symbol, Math. Soc. Japan **20**, 151-164, 1968

[18] U. Jannsen, Continous étale cohomology, Math. Ann. **280**, 207-245, 1988

[19] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, dans "*Arithmetic Algebraic Geometry*", Lecture Notes in math. **1553**, 1993

[20] K. Kato, M. Kurihara et T. Tsuji, preprint 1996

[21] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Inv. Math. **84**, 1-48, 1986

[22] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques, Inv. Math. **109**, 137-185, 1992

[23] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local. Inv. Math. **115**, 81-149, 1994

[24] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229**, 1995

[25] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques, dans *Proc. Int. Congress Math. Zürich*, 400-410, Birkhäuser, 1995

[26] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations. Inv. Math. **62**, 89-116, 1980

[27] J.-P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, Pub. Math. IHES **12**, 69-85, 1962

[28] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, cinquième édition, révisée et complétée, Lecture Notes in math. **5**, 1994

[29] C. Soulé, On higher p-adic regulators, *Algebric K-theory Evanston 1980*, Springer Lect. Notes **854**, 375-401, 1981

[30] C. Soulé, Éléments cyclotomiques en K-théorie, *Journées arithmétiques de Besançon*, Astérisque **147-148**, 225-257, 1987

[31] J. Tate, p-divisible groups. Dans "*Proc. of a conf. on local fields*", Nuffic Summer School at Driebergen, 158-183, Springer 1967

[32] M. Vishik, Non-archimedian measures connected with Dirichlet series, Math. U.S.S.R. Sb. **28**, 216-228, 1976

[33] A. Wiles, Higher explicit reciprocity laws, Ann. of Math. **107**, 235-254, 1978

[34] J.-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci. E.N.S. **16**, 59-89, 1983

Pierre Colmez, Laboratoire de mathématiques, École normale supérieure, Paris, France
Institut de mathématiques de Jussieu, Paris, France