

---

# **Théorie géométriquement exacte des coques en rotations finies et son implantation éléments finis**

**Adnan Ibrahimbegovic**

*Université de Technologie de Compiègne  
Génie des systèmes mécaniques, Division MNM  
Laboratoire G2mS, URA 1505 CNRS  
BP-649, 60206 Compiègne*

*Adnan.Ibrahimbegovic@utc.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, nous examinons les progrès significatifs obtenus au cours des dix dernières années, dans l'analyse des coques concernant les formulations théoriques ainsi que les implantations numériques. Premièrement, une attention particulière est portée aux grandes rotations tridimensionnelles, incluant le choix de paramètres optimaux, leurs variations admissibles et les nombreuses relations révélatrices entre différents paramètres. Une dérivation non-classique de la théorie des coques en efforts résultants est présentée, qui fait intervenir le principe des travaux virtuels et la base locale cartésienne. Cette même dérivation n'introduit aucune hypothèse simplificatrice concernant les équations d'équilibres des coques en efforts résultants, par conséquent la théorie résultante des coques se réfère à la théorie géométriquement exacte. Les mesures des déformations conjugués dans le sens de l'énergie aux efforts résultants choisis ont été identifiées et la nature des efforts résultants est expliquée par rapport au milieu continu tridimensionnel. Des observations sont faites concernant une extension plus utile de la théorie des coques, qui tient compte des degrés de libertés de rotation autour de la normale. Une théorie linéaire des coques est obtenue comme un sous-produit très utile du présent travail, par linéarisation de la théorie géométriquement exacte des coques sur la configuration de référence. Il est montré que cette approche non conventionnelle, non seulement clarifie la démarche souvent confuse dans la dérivation de la théorie linéaire des coques, mais aussi conduit à une nouvelle théorie linéaire des coques, capable d'apporter une amélioration significative des résultats et des solutions essentiellement exactes des problèmes tests linéaires standards. Un autre aspect important des solutions des problèmes non-linéaires de coques concernant l'approximation éléments finis de la théorie des coques, est aussi examiné. Le problème modèle d'interpolation dite substituée en cisaillement, est utilisé pour illustrer que l'implantation numérique qui conserve le trait saillant de la formulation théorique, apporte souvent une amélioration du résultat*

*final. Les questions relatives à la linéarisation cohérente des problèmes non-linéaires de coques ont été examinées, pour la paramétrisation des rotations choisies. Dans de nombreuses simulations numériques, il est montré que cette linéarisation cohérente joue un rôle déterminant non seulement pour obtenir de solides performances des procédures de résolution newtonienne, mais aussi dans le problème de flambement des coques. Plusieurs directions pour les recherches futures sont rassemblées et les travaux contemporains d'un intérêt spécial sont répertoriés.*

**ABSTRACT.** *In this article, we review the significant progress on shell problem theoretical foundation and numerical implementation attained over a period of the last several years. First, a careful consideration of the three-dimensional finite rotations is given including the choice of optimal parameters, their admissible variations and the much revealing relationship between different parameters. A non-conventional derivation of the stress resultant shell theory is presented, which makes use of the virtual work principle and local Cartesian frames. The presented derivation introduces no simplifying hypotheses regarding the shell balance equations, hence the resulting shell theory is referred to being the geometrically exact. The strain measures energy-conjugate to the chosen stress resultants are identified and the nature of the stress resultants with respect to the three-dimensional stress tensor is explained along with the resulting constitutive restrictions. Comments are made regarding a rather useful extension of the shell theory which accounts for the rotational degree of freedom about the director, the so-called drilling rotation. A linear shell theory is obtained as a very useful by-product of the present work, by linearizing the present nonlinear shell theory about the reference configuration. It is shown that this non-conventional approach not only clarifies an often confusing derivation of the linear shell theory, but also leads to a novel linear shell theory capable of delivering significantly improved results and essentially exact solutions to the standard linear benchmark problems. Another important aspect of the nonlinear shell problem solution, the finite element approximation of the shell theory, is also discussed. The model problem of assumed shear strain interpolation is used to illustrate that numerical implementation which preserves the salient features of the theoretical formulation often brings an improved final result. For the selected rotation parameterization and the finite element interpolation, the issues of the consistent linearization of the nonlinear shell problem are addressed. In a number of numerical simulations, the latter is proved to play a crucial role not only in ensuring the robust performance of the Newton solution procedure, but also in linear and nonlinear buckling problems of shells. Several directions for future research are pointed out and some contemporary works of special interest are listed.*

**MOTS-CLÉS :** *formulation non linéaire de coques, géométriquement exact, grandes rotations, approximations en éléments finis, problèmes de flambement.*

**KEY WORDS :** *nonlinear shell formulation, geometrically exact, finite rotations, finite element approximations, buckling problems.*

---

**Remarques sur les notations.** Nous utilisons la notation tensorielle avec notations indicielles rajoutées seulement pour clarifier les détails. Afin d'acquérir quelque cohérence, nous utilisons les lettres majuscules et caractères gras pour noter les tenseurs de second ordre (et les matrices), et nous gardons les lettres minuscules et caractères gras pour les vecteurs. Les composantes des vecteurs et tenseurs sont notées avec leurs lettres et indices en caractères fins. Les indices dénotés avec des lettres latines varient dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , tandis que les indices dénotés avec les lettres grecques varient dans l'ensemble  $\{1, 2\}$ . La convention de sommation est appliquée aux indices répétés. (Il existe seulement une exception dans la règle de sommation, au sujet de la lettre grecque  $\varphi$ , laquelle montre que l'objet est paramétrisé dans la configuration courante). Nous utilisons :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_i b_i$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \epsilon_{ijk} a_j b_k$  et  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := a_i b_j$  pour dénoter, respectivement, le produit scalaire, vectoriel et tensoriel de deux vecteurs.

## 1. Introduction

Ces quelques dernières années ont été marquées par un développement intense dans le domaine de l'analyse non-linéaire des coques. Par conséquent, de nombreuses réalisations significatives dans le traitement numérique de la théorie des coques non-linéaire sont assez récentes. Une figure représentative de cet état de l'art, peut être obtenue basée sur les publications de plusieurs ouvrages des colloques de spécialistes, citons par exemple : 1989 ASME Winter Meeting à San Francisco [NBS89], WCCM II à Stuttgart [Zie91] et EUROMECH 292 à Munich [Wun92].

Dans cet article, nous mettrons seulement au point quelques-unes de ces récentes réalisations, qui affectent néanmoins tous les aspects de la formulation théorique non-linéaire des coques ainsi que son implantation numérique. En particulier, nous discuterons comment inclure les rotations finies (grandes rotations sans restriction de taille) dans notre formulation de coques, parallèlement avec les problèmes apparentés de linéarisation cohérente d'une telle théorie. Nous discuterons aussi comment formuler une théorie des coques non-linéaire qui soit appropriée non seulement pour les coques lisses, mais également pour les coques de surface non lisse et les intersections de coques. Finalement nous discuterons aussi comment fournir quelques solutions aux phénomènes de verrouillage lesquels sont souvent associés à une implantation éléments finis inadéquate. En passant, nous commenterons comment une théorie de coques géométriquement linéaire peut être récupérée à partir d'une version correspondante de la théorie géométriquement non-linéaire, et comment cette approche non conventionnelle fournissant une théorie de coque linéaire peut avoir certain avantage. Afin de pourvoir, avec ce compte rendu, à une initiation pratique dans une recherche contemporaine sur les coques, nous essayerons de faire le

traitement de quelques sujets sélectionnés d'une compréhension moyenne pour tous.

Nous notons d'abord, que la mécanique des coques est un sujet mature, avec un nombre important de problèmes abordés il y a déjà un siècle (par exemple, [Nag72] pour un résumé de ces contributions anciennes). Cependant la plupart des formulations existantes de la théorie des coques ne sont pas convenables pour une implantation numérique directe. Plus précisément, l'utilisation de coordonnées curvilignes générales, que l'on trouve typiquement dans les exposés classiques sur la théorie des coques (par exemple, voir [Koi66, Bud68, Nag72]), entraîne des difficultés dans l'implantation numérique en ce qui concerne la représentation du mouvement de corps rigide (par exemple, voir [FC73]). D'où, en cherchant une approche optimale de l'implantation numérique de la théorie des coques, on découvre inévitablement que la formulation existante de la théorie doit être réexaminée, car la formulation et l'implantation en coques sont fermement couplées. C'est dans cet esprit que cet article est écrit.

### 1.1. Au sujet du terme « géométriquement exact »

Depuis le début des années 1970 jusqu'à un temps assez récent, l'analyse numérique des coques a été dominée par la soi-disante « procédure de coque dégénérée » (en anglais, *degenerate shell procedure*), où la théorie de milieu continu tridimensionnel est réduite, ou dégénérée, à une théorie des coques par la discrétisation éléments finis. Commencant avec le travail pionnier de [AIZ70], les travaux de [HL81, Atl83, DB84, Pie84, RM86, BD86, BK89, Par91, BSL+85, BWC92] et, [Kra93] parmi d'autres, ont apporté cette méthode dans sa pleine généralité pour le régime non-linéaire.

Contrairement aux travaux précédents, les travaux plus récents de [SF89, SFR90, GEW89, CMS92, SB92, WG93, Ibr94] et, [Ibr94] sont retournés vers les origines de la théorie classique non-linéaire, laquelle trouve ses racines dans le travail original de [CC09], redécouvert ultérieurement par [ET58], et plus tard développé dans [GZ68, SD72, Rei74] et [Ant76]. Dans cette approche dite directe, la coque est considérée comme une surface bidimensionnelle de Cosserat avec un vecteur directeur attaché à chaque point. L'avantage conceptuel de l'approche directe par rapport à la procédure de coque dégénérée, est que nous éliminons le besoin d'introduire l'intégration (numérique) sur toute l'épaisseur pour concevoir les efforts résultants de contraintes. Autrement dit, considérer une coque comme une surface bidimensionnelle de Cosserat, conduit naturellement à la formulation théorique et aux équations d'équilibre en termes d'efforts résultants. Comme mentionné par [Ant76, Ant95] et encore [SFR90], aucune approximation n'est introduite en dérivant cette équation d'équilibre de coque, d'où, la théorie correspondante est dite *géométriquement exacte*. C'est seulement dans l'implantation éléments finis de ces équations d'équilibre que nous introduisons les approximations. Par rapport à la procédure de coque dégénérée, une approximation de moins est introduite.

Dans un travail récent de [BR92], on a montré comment la procédure de coque dégénérée peut être mise en correspondance avec la théorie classique des coques. L'idée essentielle est d'appliquer le théorème de Caley-Hamilton pour calculer l'inverse du jacobien du domaine de coque tridimensionnelle. Dans la plupart des éléments de coques basés sur la procédure de coque dégénérée, on utilise une forme approchée de son inverse, en prenant seulement les termes qui sont linéaires dans la direction à travers l'épaisseur (e.g., voir [BWS89]).

## 2. Cinématique de rotations finies

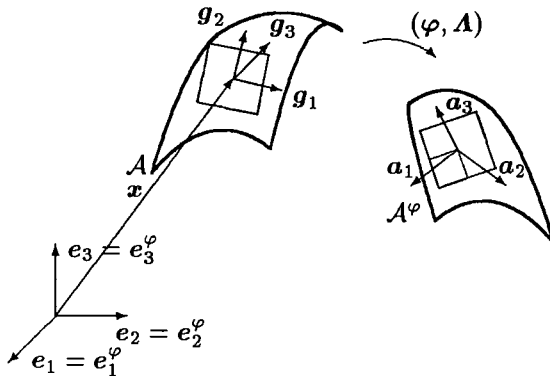
### 2.1. Hypothèses cinématiques sur les coques

Nous considérons une coque comme une surface bidimensionnelle incluse dans l'espace euclidien tridimensionnel.

Le vecteur position pour un point dans la configuration de référence de la coque est

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad (1)$$

où  $x_i$  sont les coordonnées euclidiennes et  $\mathbf{e}_i$  sont les vecteurs de base (voir figure 1).



**Figure 1.** Configuration de référence et configuration courante avec les vecteurs de base des systèmes cartésiens locaux

Nous considérerons d'ailleurs qu'un vecteur directeur est attaché à chaque point de la coque. La construction d'un trièdre  $\mathbf{g}_i$  ortho-normal dont le vecteur directeur en est le membre, prouvera la commodité pour le traitement des rotations finies. Sans perte de généralité, on peut supposer que le vecteur directeur,

disons  $\mathbf{g}_3$ , est initialement parallèle à la normale de la surface non déformée de la coque, d'où les vecteurs  $\mathbf{g}_1$  et  $\mathbf{g}_2$  sont dans le plan tangent. Ainsi les vecteurs  $\mathbf{g}_i$  constituent une base locale cartésienne et les coordonnées des vecteurs dans une telle base sont appelées coordonnées normales. Une manière pratique pour construire les vecteurs de base  $\mathbf{g}_i$  est simplement de tourner les vecteurs de la base euclidienne globale  $\mathbf{e}_i$  par l'application suivante,

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_i , \tag{2}$$

où  $\mathbf{A}_0$  est un tenseur orthogonal, donné comme une fonction connue de la configuration de référence.

La structure locale cartésienne a aussi été employée comme une base utile à la manipulation de grande rotation, par [HL81] ainsi que [SF89]. Comme noté dans [Ibr94], par l'utilisation d'une base locale cartésienne, on peut simplifier aussi bien la dérivation que l'implantation de la théorie des coques.

Avec les notations précédentes en main, la configuration de référence de la coque peut être définie comme suit :

$$\mathcal{S} := \{ \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \zeta \mathbf{g}_3 ; \zeta \in [h^-, h^+] \} , \tag{3}$$

où  $h = h^+ - h^-$  est l'épaisseur de la coque.

Dans une configuration déformée, chaque point matériel sur la surface de référence de la coque est assigné à un nouveau vecteur position

$$\mathbf{x}^\varphi = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi_i \mathbf{e}_i^\varphi , \tag{4}$$

où  $\mathbf{e}_i^\varphi$  sont les vecteurs de la base globale euclidienne, utilisés pour la configuration courante. Bien que l'on choisisse typiquement deux systèmes euclidiens pour la configuration de référence et la configuration courante qui coïncident (voir figure 1), i.e.  $\mathbf{e}_i^\varphi = \delta_{ij} \mathbf{e}_j$  avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker, dans les équations suivantes nous garderons les différents symboles pour les deux ensembles de vecteurs de base afin de distinguer clairement l'objet matériel (avec repère  $\mathbf{e}_i$ ) de l'objet spatial (avec repère  $\mathbf{e}_i^\varphi$ ).

Nous comptons sur l'hypothèse généralisée de Kirchhoff (conservation de la section droite) et sur l'inextensibilité des vecteurs directeurs, pour décrire le mouvement d'un vecteur directeur par

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A} \mathbf{g}_i , \tag{5}$$

où  $\mathbf{A}$  est un tenseur orthogonal.

Donc, à l'aide de (4) et (5), la configuration déformée de la coque est définie par

$$\mathcal{S}^\varphi := \{ \mathbf{x}^{\varphi*} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}^{\varphi*} = \boldsymbol{\varphi} + \zeta \mathbf{a}_3 ; \zeta \in [h^-, h^+] \} . \tag{6}$$

Nous considérons la transformation décrite en (5) donnant une nouvelle position du vecteur directeur comme une transformation isométrique, afin que

le vecteur directeur  $\alpha_3$  n'ait pas d'autre restriction que d'être unitaire. Ce genre d'hypothèses cinématiques conduit à un ordre réduit des dérivées apparaissant dans la forme faible des équations d'équilibres des coques et donc, comme noté depuis longtemps, cela produit une base plus convenable pour l'implantation éléments finis par rapport à la base classique liée à l'hypothèse cinématique de Kirchhoff-Love, où le vecteur directeur reste normal à la surface déformée de la coque.

Pour le problème de coque avec rotations finies, les hypothèses cinématiques dans (5) conduisent à la séparation des déplacements et des rotations dans l'espace de configuration de la coque, ce qui facilite la considération de leurs différentes natures. Plus précisément, si la rotation de la coque n'est pas réduite en taille (i.e, les rotations finies par rapport à l'usage conventionnel des approximations des rotations linéaires ou du second ordre), les rotations devraient être paramétrisées par un tenseur orthogonal particulier  $\mathbf{A}$ , élément du groupe  $SO(3)$ <sup>1</sup>. Le développement des éléments de coque pour les rotations finies basé sur les hypothèses de Kirchhoff est beaucoup plus embrouillé (e.g., voir [MP89] et [Pie93]).

A partir de (4) et (5) nous concluons que l'espace de configuration de la coque peut être écrit comme

$$\mathcal{C} := \{ \phi = (\varphi, \mathbf{A}) \mid \phi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^3 \times SO(3) \} . \quad (7)$$

A cause de la présence de  $SO(3)$ , l'espace de configuration de la coque n'est plus linéaire (e.g., les rotations finies ne sont pas additives), lequel donne en retour l'implantation élément fini beaucoup plus embrouillée.

*Remarque 1* : L'espace de configuration de la coque en (7) est le même que l'espace de configuration d'une poutre courbe tridimensionnelle (e.g., voir [Rei72, SV86] ou [Ibr95a]). Ceci facilite la construction des modèles complexes, composés d'éléments de poutre et de coque, qui sont compatibles les uns avec les autres. Les modèles de ce type sont appropriés pour l'analyse des problèmes pratiques incluant les structures de coques avec des raidisseurs et les connexions poutres-coques.

Une autre possibilité (voir [SF89, SFR90]) pour définir l'espace de configuration de la coque est introduite par exclusion de la rotation autour de la normale, laquelle est plus habituelle dans les développements classiques de la théorie des coques. Le tenseur de rotation correspondant appartient au sous-espace de  $SO(3)$ , dit  $S_g^2$ , défini comme

$$S_g^2 := \{ \hat{\Lambda} \in SO(3) \mid \theta \in \mathbb{R}^3, \hat{\Lambda}\theta = \theta, \theta \cdot g_3 = 0 \} . \quad (8)$$

<sup>1</sup> $SO(3) := \{ \Lambda : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \Lambda^T = \Lambda^{-1}, \det \Lambda = +1 \}$  est un groupe orthogonal spécial de tenseurs 3d, lequel est un exemple classique de groupe de Lie à un paramètre (e.g., voir [CD87] ou [AMR83]).

Dans ce cas  $S_g^2 \subset SO(3)$  remplace  $SO(3)$  dans l'espace de configuration de la coque (7) et on récupère une théorie de coque à cinq paramètres.

### 2.2. Paramétrisation des rotations finies

Depuis le travail de [Arg82] attirant l'attention de la communauté des mécaniciens numériques sur les difficultés de calcul numérique qui proviennent des rotations finies, un nombre important de travaux sur ce sujet est apparu, comme ceux de [PB83, Spr86, Pie86, SV86, SFR90, Par91, BR92, SB92, CMS92, AP93, Ibr95b], parmi d'autres. Dans la suite, nous discuterons brièvement de quelques-unes des différentes approches proposées. La représentation intrinsèque des rotations finies conduit à un tenseur orthogonal  $\Lambda$ , élément du groupe  $SO(3)$ . Cependant, nous sautons par dessus la mathématique sous-jacente <sup>2</sup>, et nous examinons seulement les aspects des rotations finies liés au calcul numérique. Une attention spéciale est aussi consacrée à la clarification des aspects géométriques des rotations finies [Ibr95b].

Tout d'abord, en considérant que le tenseur  $\Lambda$  apparaît comme la transformation d'un vecteur de base  $g_i$  dans la configuration de référence à un autre vecteur de base  $a_i$  dans la configuration courante ; il suit que  $\Lambda$  est un tenseur bi-punctuel (en anglais, *two-point tensor*)

$$\begin{aligned} \Lambda &= a_i \otimes g_i \\ &= \bar{\Lambda}_{ji} e_j^\varphi \otimes e_i, \end{aligned} \tag{9}$$

où  $\bar{\Lambda}_{ij}$  est sa représentation en coordonnées dans les repères euclidiens globaux. Rappelons aussi que ces deux repères euclidiens coïncident, i.e., nous pouvons définir un tenseur unitaire bi-punctuel  $I$

$$e_i^\varphi = I e_i \implies I = e_i^\varphi \otimes e_i. \tag{10}$$

D'après le théorème d'Euler pour la rotation finie d'un corps rigide (e.g., voir [Gol80]), il existe un vecteur  $\theta$  qui n'est pas touché par cette rotation (voir figure 2), ainsi

$$\begin{aligned} \theta &= \Lambda \vartheta \\ &= I \vartheta. \end{aligned} \tag{11}$$

En d'autres mots,  $\vartheta$  est le vecteur propre de  $\Lambda$ , avec la valeur propre correspondante égale à 1. De plus, comme  $\Lambda$  est un tenseur à deux points, dans l'équation précédente  $\theta$  est le champ de vecteur spatial correspondant à un

---

<sup>2</sup>Nous citons les ouvrages de [CD87] et de [AMR83] pour un exposé complet sur la structure mathématique de  $SO(3)$  en tant que groupe de Lie.

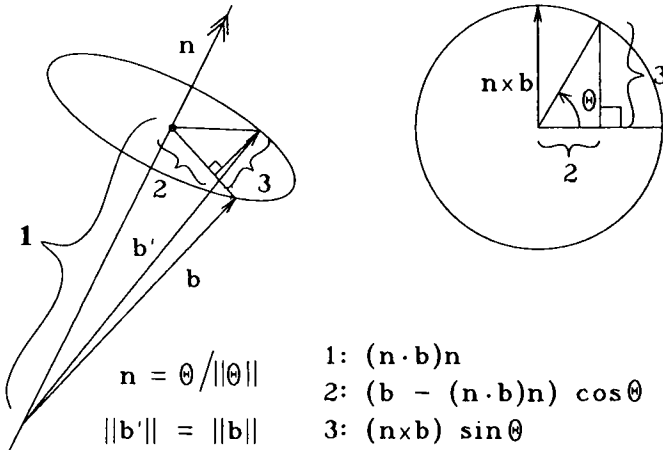


vecteur matériel  $\vartheta$ . Pour notre choix des bases dans (10), les composantes des deux vecteurs coïncident, i.e.

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}_i^\varphi = \vartheta \cdot \mathbf{e}_i = \theta_i . \tag{12}$$

Par conséquent, nous utiliserons fréquemment les symboles  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\vartheta$  interchangeablement.

On a déjà constaté que la paramétrisation intrinsèque des rotations finies est un tenseur orthogonal  $\mathbf{A}$ . Toutefois, le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  peut aussi être utilisé pour paramétriser des rotations finies ; ainsi, avec un léger abus de langage, nous l'appellerons *vecteur de rotation*. Les rapports entre ces deux paramétrisations de rotation découlent directement de la figure suivante comme



**Figure 2.** Rotation finie d'un vecteur, décomposition géométrique de sa nouvelle position

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \cos \theta [\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] + \sin \theta [\mathbf{n} \times \mathbf{I}] + [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \\ &= \cos \theta \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\Theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} , \end{aligned} \tag{13}$$

où  $\theta = \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}$  est la norme du vecteur rotation et  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\theta} / \theta$  est un vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation. Dans (13),  $\boldsymbol{\Theta}$  définit la matrice anti-symétrique dont le vecteur axial est  $\boldsymbol{\theta}$ , i.e.

$$\boldsymbol{\Theta} \mathbf{b} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{b} ; \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 ; \boldsymbol{\Theta} \in so(3) , \tag{14}$$

où

$$so(3) := \{ \boldsymbol{\Theta} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\Theta}^T = \mathbf{o} \} . \tag{15}$$

En utilisant l'identité vectorielle standard

$$\Theta(\Theta b) = [\theta \otimes \theta - \theta^2 I]b ,$$

de (13) nous récupérons

$$A = I + \frac{\sin\theta}{\theta} \Theta + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \Theta \Theta , \tag{16}$$

qui est une autre possibilité pour la représentation d'un tenseur orthogonal, proposée par [Arg82]. Il est intéressant de noter que cette dernière expression n'est que la représentation exacte de l'application exponentielle d'une matrice antisymétrique, aussi connue comme la formule de Rodrigues<sup>3</sup>

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Theta^n = \exp[\Theta] . \tag{17}$$

On a traité jusqu'ici deux paramétrisations des rotations finies avec un tenseur orthogonal ou un vecteur de rotation, qui sont deux extrêmes, chacun souffrant de certaines déficiences. D'une part, la représentation par le vecteur de rotation (représentation à trois paramètres) n'est pas valable dans un sens global : par la suite, nous identifierons clairement le problème de manque de régularité associé à ce choix de paramètres. D'autre part, le tenseur orthogonal donne une représentation à neuf paramètres qui est trop coûteuse, et il est plus naturel d'exploiter les conditions d'orthogonalité de ce tenseur pour essayer de réduire le nombre de ces paramètres.

D'abord, on peut se rattacher au travail de [Stu64] pour découvrir qu'au moins cinq paramètres sont nécessaires afin de représenter le groupe rotationnel. Cependant, on peut utiliser la soi-disante méthode de « quaternions » proposée par Hamilton (e.g., voir [CS60, Gol80] ou [Arg82]) pour réduire le nombre de paramètres à quatre. La représentation par quaternions est une représentation globale où, pour chaque tenseur orthogonal, il existe deux séries de quaternions. En calcul pratique, cette dernière ne pose pas de problème (e.g., [Ibr95a]) et la méthode de quaternions conduit à un algorithme très efficace : pour une série de quaternions  $q_0$  et  $q^T = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ , tel que  $q_0^2 + q \cdot q = 1$  (quaternion unitaire), nous pouvons ainsi retrouver le tenseur orthogonal correspondant par

$$A = (2q_0^2 - 1)I + 2q_0[q \times I] + 2q \otimes q . \tag{18}$$

En comparant cette dernière expression avec la formule de Rodrigues (13), nous pouvons reconnaître immédiatement que

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad q = n \sin \frac{\theta}{2} ,$$

---

<sup>3</sup>Les aspects historiques de la rotation finie ont été retracés par [CG89].

qui révèle les relations entre les paramètres quaternions et le vecteur de rotation.

### 2.3. Variations admissibles des rotations finies

Dans cette partie, nous traitons des variations admissibles des rotations finies, ou, en d'autres mots, nous discutons comment gérer les petites rotations superposées aux rotations finies. Cette superposition est une tâche standard pour construire la forme faible des équations d'équilibre d'une coque ou les équations du travail virtuel. La superposition des rotations infinitésimales et des rotations finies est aussi rencontrée dans la procédure d'actualisation de solution dans un schéma itératif. Bien que nous ne considérons que la première de ces deux situations, les remarques suivantes s'appliquent aussi bien à cette dernière, mais avec les rotations virtuelles remplacées par les rotations incrémentales.

La variation admissible du champ de rotation finie est construite en superposant les rotations virtuelles (infinitésimales)  $\delta\mathbf{W}$  sur les rotations existantes  $\mathbf{A}$ . A cette fin, l'application exponentielle (17) est utilisée pour obtenir la rotation finie correspondante à la rotation infinitésimale. En outre, en tenant compte du fait que la procédure d'actualisation des rotations finies est multiplicative, avec les rotations superposées pré-multipliant la rotation existante  $\mathbf{A}$ , nous pouvons obtenir la rotation admissible  $\delta\mathbf{A}$  comme

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{A} &= \left. \frac{d}{dt}[\mathbf{A}_t] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}[\exp(t \delta\mathbf{W}) \mathbf{A}] \right|_{t=0} \\ &= \delta\mathbf{W} \mathbf{A} . \end{aligned} \tag{19}$$

*Remarque 2* : Nous notons qu'une des plus utiles caractéristiques de la paramétrisation par quaternions, est que l'on peut éviter la multiplication matricielle et calculer  $\mathbf{A}_t$  d'une manière plus efficace. Plus précisément, si nous définissons ( $t = 1$ ):

$$q_0w = \cos \frac{\delta w}{2} , \quad \mathbf{q}_w = \sin \frac{\delta w}{2} \frac{\delta \mathbf{w}}{\delta w} , \tag{20}$$

la multiplication des matrices dans (19) est remplacée par

$$\begin{aligned} q_0 &\leftarrow q_0q_0w - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_w , \\ \mathbf{q} &\leftarrow q_0w \mathbf{q} + q_0\mathbf{q}_w + \mathbf{q}_w \times \mathbf{q} \end{aligned} \tag{21}$$

et  $\mathbf{A}_t$  est tiré de (18).

D'après l'orthogonalité de  $\mathbf{A}$  et (19), il en résulte que  $\delta\mathbf{W}$  est un tenseur antisymétrique, dont nous noterons  $\delta\mathbf{w}$  le vecteur axial. En plus, comme  $\mathbf{A}$  est

un tenseur bi-punctuel, nous pouvons montrer que  $\delta \mathbf{W}$  est un objet spatial qui peut être représenté comme :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{W} &= \delta \mathbf{A} \mathbf{A}^T \\ &= \delta W_{ij} e_i^\varphi \otimes e_j^\varphi . \end{aligned} \tag{22}$$

Dans la terminologie de [Arg82], l'ordre des rotations dans (19) correspond aux rotations autour d'axes suiveurs. Nous pouvons obtenir un résultat équivalent avec des axes fixés, en inversant les positions des rotations existantes et superposées, si bien que (19) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{A} &= \left. \frac{d}{dt} [\mathbf{A}_t] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [\mathbf{A} \exp(t \delta \Psi)] \right|_{t=0} \\ &= \mathbf{A} \delta \Psi . \end{aligned} \tag{23}$$

Le tenseur  $\delta \Psi$  est toujours un tenseur antisymétrique des rotations infinitésimales, avec  $\delta \psi$  comme vecteur axial, mais à présent c'est un objet matériel, i.e.

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= \mathbf{A}^T \delta \mathbf{A} \\ &= \delta \Psi_{ij} e_i \otimes e_j . \end{aligned} \tag{24}$$

La représentation graphique des précédentes considérations pour la version matérielle et la version spatiale est donnée dans la figure 3. On dit que  $\delta \mathbf{W}$  est un élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  au point  $\mathbf{A}$ ,  $T_{\mathbf{A}}SO(3)$ , et  $\delta \Psi$  est un élément de l'espace tangent  $T_1SO(3)$ .

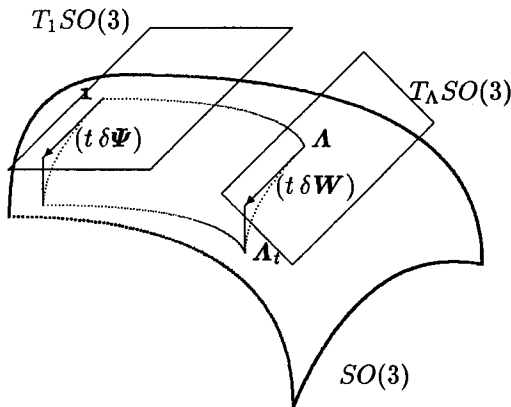


Figure 3. Variations admissibles des rotations finies : version spatiale et matérielle

A l'aide de (19) et (23) nous trouvons les relations entre les variations admissibles des rotations finies comme

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \mathbf{A}^T \delta\mathbf{W} \mathbf{A} \\ \delta\mathbf{W} &= \mathbf{A} \delta\Psi \mathbf{A}^T, \end{aligned} \tag{25}$$

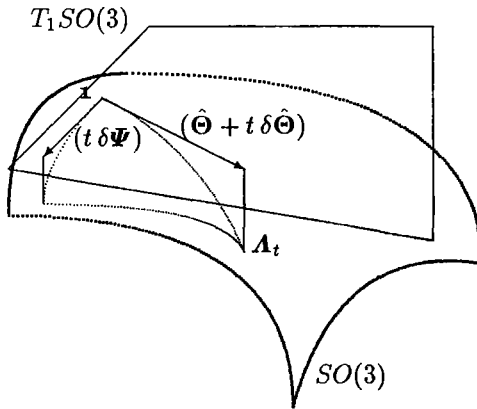
par lesquelles nous pouvons déduire les relations correspondantes entre leurs vecteurs axiaux

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \mathbf{A}^T \delta\mathbf{w} \\ \delta\mathbf{w} &= \mathbf{A} \delta\psi. \end{aligned} \tag{26}$$

Si le vecteur rotation est utilisé pour paramétriser les rotations finies, ces variations admissibles peuvent être obtenues en exploitant la formule de Rodrigues dans (16). Dans la version matérielle, par exemple, nous avons :

$$\exp[\hat{\Theta} + t \delta\hat{\Theta}] = \exp[\hat{\Theta}] \exp[t \delta\Psi] ; \quad \hat{\Theta} \mathbf{b} = \vartheta \times \mathbf{b}. \tag{27}$$

La représentation graphique de cette expression est donnée par la figure 4.



**Figure 4.** Décomposition géométrique des variations admissibles de la rotation finie pour des paramètres du vecteur de rotation : version matérielle

Il est important de noter que les tenseurs antisymétriques  $\delta\hat{\Theta}$  et  $\delta\Psi$  appartiennent au même espace tangent  $T_1SO(3)$ . On peut montrer (voir [Ibr95b]) que leurs vecteurs axiaux sont liés par

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \mathbf{T}^T(\vartheta) \delta\vartheta, \\ \mathbf{T}(\vartheta) &= \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos\vartheta}{\vartheta^2} \hat{\Theta} + \frac{\vartheta - \sin\vartheta}{\vartheta^3} \vartheta \otimes \vartheta. \end{aligned} \tag{28}$$

Il est évident que les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$  dans (13) et (28), sont des combinaisons linéaires des mêmes tenseurs élémentaires. De plus, ils partagent les mêmes

vecteurs propres, par conséquent ils commutent. Avec ce dernier résultat en main, les variations de (11) conduisent à

$$\delta\theta = I \delta\vartheta \tag{29}$$

$$= T^{-1} \Lambda T^T \delta\vartheta \tag{30}$$

$$= T^{-1} \Lambda \delta\psi \tag{31}$$

$$= T^{-1} \delta w, \tag{32}$$

d'où nous prenons

$$\delta w = T(\theta) \delta\theta, \tag{33}$$

comme forme spatiale de la relation (28).

Le diagramme commutatif de la figure 5 résume les différentes possibilités pour paramétriser les rotations virtuelles et leurs relations mutuelles.

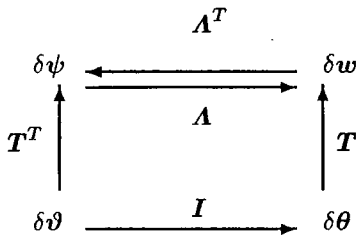


Figure 5. Diagramme commutatif des variations admissibles de rotations finies

En exploitant le fait que l'inverse du tenseur  $T$  partage aussi ses vecteurs propres, nous pouvons facilement calculer l'expression pour  $T^{-1}$  comme

$$T^{-1} = \frac{\theta/2}{\tan(\theta/2)} I - \frac{1}{2} \Theta + \frac{1}{\theta^2} \left[ 1 - \frac{\theta/2}{\tan(\theta/2)} \right] \theta \otimes \theta. \tag{34}$$

Cette dernière expression révèle le problème de la paramétrisation de vecteur rotation à cause de la présence des singularités pour les multiples de  $2\pi$ .

### 2.4. Rotations finies : relation sur la sphère unité

Dans le développement de la théorie classique des coques comme surface de Cosserat avec le vecteur directeur inextensible, où la composante rotationnelle autour du vecteur directeur est négligée, la sphère unité  $S^2$  joue un rôle prépondérant

$$S^2 := \{t \in \mathbb{R}^2 \mid \|t\| = 1\}. \tag{35}$$

L'espace tangent pour  $\mathbf{t} \in S^2$  est un espace linéaire de vecteurs,  $T_t S^2$ , défini comme

$$T_t S^2 := \{ \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{t} = 0 \}. \quad (36)$$

On peut montrer (voir [SF89]) que la sphère unité est en bijection avec un sous-ensemble du groupe des rotations,  $S_g \subset SO(3)$ , dont chaque élément  $\hat{\mathbf{A}} \in S_g^2$  est une rotation autour de l'axe perpendiculaire à  $\mathbf{g}_3$ . Comme montré par [SFR90],  $\hat{\mathbf{A}}$  peut être construit comme

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{I} + [(\mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3) \times \mathbf{I}] + (1 + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{a}_3)^{-1} (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3) \otimes (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3). \quad (37)$$

Nous pouvons facilement vérifier que  $\hat{\mathbf{A}} \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$  et  $\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}^T$ . Nous pouvons aussi vérifier que  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3) = (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3)$ , d'où l'axe de rotation est  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}_3 \times \mathbf{a}_3$ .

Il découle de cette analogie que l'on peut construire (voir [SFR90]) une variation admissible de cette rotation à la place de variation admissible sur la sphère unité. D'où, la position admissible du vecteur directeur sous rotations virtuelles  $\bar{\mathbf{w}}$  peut être calculée avec  $\mathbf{a}_{3t} = \Delta \hat{\mathbf{A}} \mathbf{a}_3$ , où :

$$\Delta \hat{\mathbf{A}} = \cos \|\bar{\mathbf{w}}\| \mathbf{I} + \frac{\sin \|\bar{\mathbf{w}}\|}{\|\bar{\mathbf{w}}\|} [(\mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{w}}) \times \mathbf{I}] + \frac{1 - \cos \|\bar{\mathbf{w}}\|}{\|\bar{\mathbf{w}}\|^2} (\mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{w}}) \otimes (\mathbf{a}_3 \times \bar{\mathbf{w}}). \quad (38)$$

Ce point de vue dans le développement de la théorie classique des coques, où la sphère unité  $S^2$  est remplacée par l'espace des rotations finies  $S_g \in SO(3)$ , est la nouveauté principale par rapport aux travaux classiques (e.g., voir [ET58] ou [Nag72] et références dedans) qui nous facilite les modifications du développement en régime des rotations finies.

### 3. Théorie non-linéaire des coques en rotations finies

#### 3.1. Équations d'équilibre locales géométriquement exactes

Dans cette partie nous obtenons des équations d'équilibre locales dites géométriquement exactes pour les coques. Nous considérons une région dans la configuration de référence de la coque (non déformée)  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ , avec un bord lisse (au moins par morceaux)  $\partial \bar{\mathcal{A}}$  et un vecteur unitaire normal  $\mathbf{v}$ . Dans une configuration courante (déformée)  $\bar{\mathcal{A}}^\varphi$ , le bord et le vecteur unitaire normal correspondants sont notés respectivement par  $\partial \bar{\mathcal{A}}^\varphi$  et  $\mathbf{v}^\varphi$ . Les efforts résultants  $\mathbf{n}^{\varphi\alpha}$  et  $\mathbf{m}^{\varphi\alpha}$  agissent dans la configuration déformée ainsi que les vecteurs de charge extérieure  $\mathbf{p}^\varphi$  et  $\mathbf{r}^\varphi$  (voir figure 6).

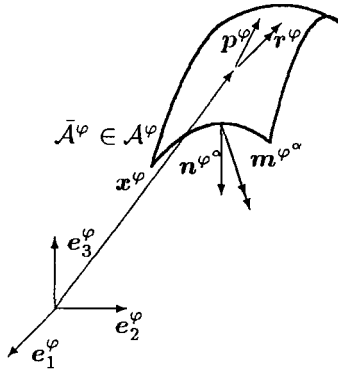


Figure 6. Efforts résultants

Tout comme [Bud68], nous introduisons le changement de coordonnées

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \mathbf{p}^\varphi \frac{d\mathcal{A}^\varphi}{d\mathcal{A}} , \\
 \mathbf{r} &= \mathbf{r}^\varphi \frac{d\mathcal{A}^\varphi}{d\mathcal{A}} , \\
 \mathbf{n}^\alpha &= \mathbf{n}^{\varphi\alpha} \frac{v_\alpha^\varphi ds^\varphi}{v_\alpha ds} , \\
 \mathbf{m}^\alpha &= \mathbf{m}^{\varphi\alpha} \frac{v_\alpha^\varphi ds^\varphi}{v_\alpha ds} ,
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

sans sommation sur  $\alpha$ .

Ci-dessus,  $\mathbf{n}^\alpha$  et  $\mathbf{m}^\alpha$  sont les efforts résultants et les couples agissant toujours dans la configuration courante, mais paramétrisés dans la configuration de référence. (La transformation dans (40) pour la coque est équivalente à la transformation du vecteur de contraintes de Cauchy au premier vecteur de Piola-Kirchhoff pour les milieux continus). La forme intégrale des équations d'équilibre des moments linéaires et cinétiques peut alors être écrite, respectivement, comme

$$\int_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{n}^\alpha v_\alpha ds + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{p} d\mathcal{A} = \mathbf{0}
 \tag{40}$$

et

$$\int_{\partial\mathcal{A}} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha) v_\alpha ds + \int_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}) d\mathcal{A} = \mathbf{0} .
 \tag{41}$$

En utilisant les outils standards, le théorème de la divergence pour les surfaces (e.g., voir [Sim82] ou [Nio85]) et le théorème de localisation, nous obtenons la forme locale des équations d'équilibres



$$\frac{1}{j}(jn^\alpha)_{,\alpha} + p = \mathbf{o} , \quad (42)$$

$$\varphi_{,\alpha} \times n^\alpha + \frac{1}{j}(jm^\alpha)_{,\alpha} + r = \mathbf{o} , \quad (43)$$

où  $j$  est le jacobien de la surface moyenne. Notons que les équations d'équilibre sont obtenues sans aucune approximation tout en respectant la géométrie exacte des coques, d'où elles sont appelées les équations de coques *géométriquement exactes* (e.g., voir [SFR90] et [Ant95]).

La forme vectorielle ou intrinsèque des équations d'équilibre locales (42) et (43) est bien connue, e.g. voir [GZ68], p.380, [SD72, Rei74], parmi d'autres. Ces auteurs, cependant, se mettent immédiatement à discuter la forme des composantes dans un repère gaussien menant à l'apparition des symboles de Christoffel (voir [Nag72]). En contraste avec ces développements précoces, nous utilisons la base locale cartésienne ce qui peut être justifié comme suit. D'après le résultat bien connu (e.g. [Sok64], p. 162), pour un point donné dans la coque, on peut toujours construire un système de coordonnées géodésiques (en fait, plusieurs), lesquelles sont localement cartésiennes, et donc les symboles de Christoffel disparaissent à ce point. Dans l'implantation élément fini, la forme (faible) de l'intégrale gouvernante est calculée par la quadrature numérique et donc ces bases locales cartésiennes sont seulement construites aux points d'intégrations numériques.

*Remarque 3* : Dans la suite, on a souvent besoin de calculer les dérivées partielles par rapport aux coordonnées normales  $s_\alpha$ , i.e.  $(\bullet)_{,\alpha} = \partial(\bullet)/\partial s_\alpha$  (e.g. aux points d'intégration numérique). Ces dérivées peuvent être facilement construites en exploitant une représentation isoparamétrique de la surface de coque. Plus précisément, si  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les coordonnées naturelles, alors par la règle pour la dérivée d'une application composée

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} &= [\mathbf{x}_{,\xi_1}, \mathbf{x}_{,\xi_2}]^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \\ \frac{\partial}{\partial s_3} \end{pmatrix} &= [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais, puisque la base locale est une base ortho-normale avec

$$([\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]^T)^{-1} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3] ,$$

il suit de ces deux dernières expressions que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_1 & \mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} .$$

### 3.2. Mesures de déformations - forme vectorielle

Après avoir défini les équations d'équilibre en efforts résultants, nous cherchons à obtenir des mesures de déformations correspondantes. Une remarquable caractéristique de la procédure proposée est de fournir la forme vectorielle (intrinsèque) des mesures de déformations des coques d'où l'on peut récupérer le résultat classique pour toutes les composantes (e.g., voir [Bud68] ou [Nag72]).

L'idée essentielle qui fait intervenir le principe des travaux virtuels pour obtenir les mesures de déformations, est due à Reissner et ses collaborateurs (e.g., voir [Rei72, Rei74, SD72]). Plus précisément, comme les efforts résultants  $\mathbf{n}^\alpha$  et les couples  $\mathbf{m}^\alpha$  satisfont aux équations d'équilibre locales, ils satisfont aussi au principe des travaux virtuels pour les coques, qui s'écrit comme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} (\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \delta\boldsymbol{w} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{A} + \int_{\partial_n \mathcal{A}} \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \bar{\mathbf{n}}_v ds + \int_{\partial_m \mathcal{A}} \delta\boldsymbol{w} \cdot \bar{\mathbf{m}}_v ds \\ = \int_{\mathcal{A}} (\delta\epsilon_\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha + \delta\kappa_\alpha \cdot \mathbf{m}^\alpha) d\mathcal{A} , \end{aligned} \quad (44)$$

où  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  et  $\delta\boldsymbol{w}$  sont, respectivement, les déplacements virtuels et les rotations virtuelles,  $\delta\epsilon_\alpha$  et  $\delta\kappa_\alpha$  sont les déformations virtuelles, et  $\bar{\mathbf{n}}_v$  et  $\bar{\mathbf{m}}_v$  sont les vecteurs de traction. En utilisant les équations d'équilibre locales (42) et (43) pour exprimer les forces externes, comme

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{j}(j\mathbf{n}^\alpha)_{,\alpha} , \quad \mathbf{r} = -\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha - \frac{1}{j}(j\mathbf{m}^\alpha)_{,\alpha} , \quad (45)$$

et la forme bidimensionnelle du principe de Cauchy pour exprimer les vecteurs de traction,

$$\bar{\mathbf{n}}_v = \mathbf{n}^\alpha v_\alpha , \quad \bar{\mathbf{m}}_v = \mathbf{m}^\alpha v_\alpha , \quad (46)$$

le côté gauche de (44) peut être transformé et l'équation du travail virtuel devient alors

$$\int_{\mathcal{A}} \{(\delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} - \delta\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{n}^\alpha + \delta\boldsymbol{w}_{,\alpha} \cdot \mathbf{m}^\alpha\} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} (\delta\epsilon_\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha + \delta\kappa_\alpha \cdot \mathbf{m}^\alpha) d\mathcal{A} . \quad (47)$$

En considérant  $\mathbf{n}^\alpha$  et  $\mathbf{m}^\alpha$  comme des fonctions arbitraires, d'après (47) nous obtenons

$$\delta\epsilon_\alpha = \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} - \delta\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \quad (48)$$

et

$$\delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \delta \boldsymbol{w}_{,\alpha} , \quad (49)$$

pour la forme explicite des déformations virtuelles. Nous pouvons obtenir encore une autre expression pour les déformations virtuelles de flexion. D'un côté, en utilisant les résultats dans (5) et (19), nous pouvons calculer la variation du vecteur de base  $\boldsymbol{a}_i$  comme

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{a}_i &= \delta \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{a}_i \\ &= \delta \boldsymbol{W} \boldsymbol{a}_i \\ &= \delta \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}_i . \end{aligned} \quad (50)$$

D'un autre côté, en prenant les dérivées du vecteur de base  $\boldsymbol{a}_i$  par rapport aux coordonnées normales (voir remarque 3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{i,\alpha} &= \boldsymbol{\Lambda}_{,\alpha} \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Lambda}_{0,\alpha} \boldsymbol{\Lambda}_0^T \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{a}_i \\ &= [\boldsymbol{\Omega}_\alpha + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Omega}_{0\alpha} \boldsymbol{\Lambda}^T] \boldsymbol{a}_i . \end{aligned} \quad (51)$$

Puisque  $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$  et  $\boldsymbol{\Omega}_{0\alpha}$  sont des tenseurs antisymétriques, la dernière expression peut être réécrite en termes de vecteurs axiaux correspondants  $\boldsymbol{\omega}_\alpha$  et  $\boldsymbol{\omega}_{0\alpha}$  comme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{i,\alpha} &= (\boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\omega}_{0\alpha}) \times \boldsymbol{a}_i \\ &= \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha \times \boldsymbol{a}_i . \end{aligned} \quad (52)$$

Finalement, en prenant la dérivée et la variation des expressions dans (50) et (52), nous en tirons que

$$(\delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha + \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha \times \delta \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{a}_i = \delta \boldsymbol{w}_{,\alpha} \times \boldsymbol{a}_i , \quad (53)$$

ce qui, en comparaison du résultat de (49), entraîne une autre expression (par rapport à celle dans (49)) pour les déformations virtuelles de flexion

$$\delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha - \delta \boldsymbol{w} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha . \quad (54)$$

En utilisant l'identité dans (50), les déformations virtuelles peuvent être transformées en une forme équivalente

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}_\alpha = \delta \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} - \delta \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} - (\delta \boldsymbol{a}_\alpha - \delta \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a}_\alpha) . \quad (55)$$

et

$$\delta \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \delta \boldsymbol{\omega}_\alpha - \delta \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{\omega}_\alpha . \quad (56)$$

Comme montré brièvement, le passage de (48) à (55) et celui de (54) à (56) reviennent à l'élimination du mouvement rigide.

Ces deux dernières expressions pour les déformations virtuelles  $\delta\epsilon_\alpha$  et  $\delta\kappa_\alpha$  peuvent formellement être écrites comme

$$\delta\epsilon_\alpha = \Lambda \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\Lambda^T(\varphi_{,\alpha} - a_\alpha)] \tag{57}$$

et

$$\delta\kappa_\alpha = \Lambda \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\Lambda^T(\omega_\alpha)] . \tag{58}$$

La logique, derrière cette observation, est la suivante : afin d'obtenir des déformations virtuelles, les déformations réelles correspondantes sont transformées (transfert convectif en arrière, en anglais *pull-back*) dans la configuration de référence, leurs variations admissibles sont obtenues et le résultat est transformé (transfert convectif en avant, en anglais *push-forward*) dans la configuration courante<sup>4</sup>. En reconnaissant que, dans ce cas, la poussée en arrière et la poussée en avant sont effectuées par un tenseur à deux points  $\Lambda$ , de (57) et (58) on obtient immédiatement que les déformations réelles sont

$$\epsilon_\alpha = \varphi_{,\alpha} - a_\alpha \tag{59}$$

et

$$\kappa_\alpha = \omega_\alpha . \tag{60}$$

La mesure de déformations (59) met le tenseur de rotation finie  $\Lambda$  en relation avec les dérivées du vecteur position  $\varphi_{,\alpha}$ . Nous notons en passant qu'afin d'empêcher les déformations extrêmes, on devrait imposer la condition suivante (e.g., voir [Ant95] p. 582)

$$(\varphi_{,\alpha} \times \varphi_{,\beta}) \cdot a_3 > 0. \tag{61}$$

Pour montrer que (59) et (60) sont vraiment des mesures de déformations, supposons que la coque subisse un mouvement rigidifiant de la forme

$$\varphi^{r_{bm}} = Qx + c , \quad \Lambda = Q \tag{62}$$

où  $Q$  est un tenseur orthogonal propre (constant) représentant la rotation, tandis que  $c$  est un vecteur (constant) de la translation. On peut rapidement vérifier que les deux mesures de déformations sont en effet égales à zéro, i.e.

$$\epsilon_\alpha^{r_{bm}} = Qx_{,\alpha} - a_\alpha \tag{63}$$

$$= Q(g_\alpha - g_\alpha) = 0 \tag{64}$$

---

<sup>4</sup> Les expressions (57) et (58) correspondent à une expression particulière de la dérivée de Lie (e.g., voir [Lan95], ou [MH83]) pour le champ de vecteur spatial.

et

$$\Omega_{\alpha}^{rbm} = Q_{,\alpha} Q^T = 0 \quad (65)$$

$$\Rightarrow \kappa_{\alpha}^{rbm} = \omega_{\alpha}^{rbm} = 0 \quad (66)$$

On peut aussi montrer que les formes vectorielles des mesures de déformations proposées sont des champs de vecteurs spatiaux objectifs. Dans ce sens, soit le mouvement rigidifiant superposé sur la configuration déformée,  $\phi = (\varphi, \mathbf{A})$ , de la forme

$$\varphi^{srbm} = Q\varphi + \mathbf{c}, \quad \mathbf{A}^{srbm} = Q\mathbf{A}. \quad (67)$$

Les mesures des déformations correspondantes peuvent être calculées comme

$$\epsilon_{\alpha}^{srbm} = \varphi_{,\alpha}^{srbm} - \mathbf{a}_{\alpha}^{srbm} \quad (68)$$

$$= Q(\varphi_{,\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha}) \quad (69)$$

$$= Q\epsilon_{\alpha}, \quad (70)$$

qui est la forme correcte de la transformation pour un champ de vecteurs spatiaux objectifs (e.g., voir [Nag72]).

De même, nous calculons le tenseur antisymétrique

$$\Omega_{\alpha}^{srbm} = (Q\mathbf{A})_{,\alpha} (Q\mathbf{A})^T \quad (71)$$

$$= Q\mathbf{A}_{,\alpha}\mathbf{A}^T Q^T \quad (72)$$

$$= Q\Omega_{\alpha} Q^T, \quad (73)$$

d'où, en utilisant le résultat sur la transformation similaire d'un vecteur axial correspondant (e.g., voir [Gol80]), nous obtenons plus loin

$$\kappa_{\alpha}^{srbm} = \omega_{\alpha}^{srbm} \quad (74)$$

$$= Q\omega_{\alpha} \quad (75)$$

$$= Q\kappa_{\alpha}, \quad (76)$$

### 3.3. Mesures de déformations - composantes

Les composantes des déformations dans (59) et (60) peuvent être calculées dans la base locale cartésienne  $\mathbf{a}_i$  comme

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \varphi_{,\beta} - \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta} \\ &= \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \varphi_{,\beta} - \mathbf{g}_{\alpha} \cdot \mathbf{g}_{\beta}, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha} &= \mathbf{a}_3 \cdot \varphi_{,\alpha} - \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha} \\ &= \mathbf{a}_3 \cdot \varphi_{,\alpha} - \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_{\alpha} \end{aligned} \quad (78)$$

et

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}_\beta \\ &= \mathbf{a}_\alpha \cdot (\bar{\boldsymbol{\omega}}_\beta - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_{0\beta}) \\ &= \mathbf{a}_\alpha \cdot \bar{\boldsymbol{\omega}}_\beta - \mathbf{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}_{0\beta} , \end{aligned} \tag{79}$$

où  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\gamma_\alpha$  et  $\kappa_{\alpha\beta}$  sont, respectivement, les composantes des déformations de membrane, cisaillement et flexion.

Afin de simplifier la forme des équations constitutives, on trouve plus comode de changer la numérotation des composantes des déformations de flexion en introduisant  $\hat{\kappa}_{\alpha\gamma} = e_{\alpha\beta}\kappa_{\beta\gamma}$  (où  $e_{\alpha\beta}$  est le tenseur alternateur bidimensionnel). Avec cette notation et (52) en main, on peut réécrire l'expression (79) comme

$$\hat{\kappa}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} . \tag{79a}$$

Le choix des vecteurs de base  $\mathbf{a}_i$  et des coordonnées cartésiennes locales, est différent du choix préféré des vecteurs de base  $\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}$  et  $\mathbf{a}_3$  et des coordonnées curvilignes, fait par la majorité des travaux classiques sur les coques (e.g., [GZ68, Nag72]).

En remplaçant dans (77) à (79) les vecteurs de base  $\mathbf{a}_\alpha$  par  $\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}$ , nous obtenons une autre forme des composantes des mesures de déformations dans la théorie des coques comme

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\beta} - \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta , \tag{80}$$

$$\tilde{\gamma}_\alpha = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 \tag{81}$$

et

$$\tilde{\kappa}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} , \tag{82}$$

qui correspondent aux mesures de déformations conventionnelles (e.g., voir [Bud68]).

Rappelons que la procédure habituelle pour obtenir ces dernières mesures de déformations (e.g., voir [Bud68, Nag72, Nio85]) fait appel uniquement à la cinématique de la surface de la coque (première et seconde forme fondamentale). Le fait que le même résultat est ici obtenu en inversant cette procédure de dérivation et en commençant par les équations d'équilibre, est assez intéressant. La même remarque a été faite par [Ant95, Val95].

*Remarque 4 :* Afin d'approfondir nos explications de la nature physique de deux formes des mesures de déformations de coque, nous établissons une analogie avec la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Dans ce sens, nous pouvons utiliser le théorème de décomposition polaire de Cauchy (e.g., voir [MH83] ou [Ant95]) pour présenter le gradient de déformations,  $\mathbf{F}$ , comme

$$\mathbf{F} := [\boldsymbol{\varphi}_{x_1}, \boldsymbol{\varphi}_{x_2}, \boldsymbol{\varphi}_{x_3}] = \mathbf{R}\mathbf{U} \tag{83}$$

où  $\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal propre (i.e.,  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ ) et  $\mathbf{U}$  est le tenseur (symétrique) d'allongement à droite (i.e.,  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$ ). Parmi plusieurs possibilités pour définir les mesures des déformations finies (objectives), nous pouvons choisir des déformations de Green-Lagrange

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (84)$$

ou les déformations de Biot

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{R}^T \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (85)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité dans la base euclidienne. Le tenseur identité dans la base cartésienne locale pour les coques peut être écrit comme

$$\tilde{\mathbf{I}} = (\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta + \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{g}^3 . \quad (86)$$

De plus, en utilisant le tenseur de rotation  $\mathbf{A}$ , défini en (9), et le gradient de déformations de la surface de la coque, donné comme

$$\tilde{\mathbf{F}} = \varphi_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}^3 , \quad (87)$$

on peut obtenir les tenseurs de déformations pour la coque lesquels sont équivalents aux tenseurs de déformations de Green-Lagrange (84) et de Biot (85) pour l'élasticité 3d. On peut voir que leurs formes en composantes sont précisément celles en (80) et (81) pour le premier et celles en (77) et (78) pour le second.

### 3.4. Efforts résultants - restrictions constitutives

Dans cette partie, nous revenons sur le principe des travaux virtuels en efforts résultants, afin d'établir la correspondance avec la théorie tridimensionnelle et les restrictions pertinentes sur les équations constitutives.

Nous notons tout d'abord que l'équation du travail virtuel (44) peut être écrite en composantes comme

$$\delta \Pi := \int_{\mathcal{A}} \{ \delta \epsilon_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + \delta \kappa_{\alpha\beta} m^{\alpha\beta} + \delta \gamma_\alpha q^\alpha \} d\mathcal{A} - \delta \Pi_{ext} = 0 , \quad (88)$$

où  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\delta \kappa_{\alpha\beta}$  et  $\delta \gamma_\alpha$  sont respectivement les composantes des déformations virtuelles de membrane, flexion et cisaillement, tandis que  $n^{\alpha\beta}$ ,  $m^{\alpha\beta}$  et  $q^\alpha$  sont les composantes des efforts résultants. Nous avons

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta} = \delta \epsilon_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta , \delta \kappa_{\alpha\beta} = \delta \kappa_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta , \delta \gamma_\alpha = \delta \epsilon_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 , \quad (89)$$

et puisque  $\mathbf{a}_i$  est une base ortho-normale (avec  $\mathbf{a}_i \equiv \mathbf{a}^i$ ), nous avons aussi

$$n^{\alpha\beta} = \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta , m^{\alpha\beta} = \mathbf{m}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta , q^\alpha = \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathbf{a}_3 . \quad (90)$$

Afin d'éclaircir la nature des efforts résultants, nous allons établir prochainement le rapport entre les efforts résultants et le tenseur des contraintes. Pour un corps flexible tridimensionnel de la forme d'une coque, nous pouvons écrire le principe des travaux virtuels comme

$$\delta \Pi := \int_{\mathcal{A}} \int_{[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]} \delta \mathbf{F} : \mathbf{P} j(\zeta) d\zeta dA - \delta \Pi_{ext} = 0, \quad (91)$$

où  $\mathbf{F}$  est le gradient des déformations,  $\delta \mathbf{F}$  sa variation,  $\mathbf{P}$  est la première contrainte de Piola-Kirchhoff, et  $dV = j(\zeta) d\zeta dA$  est le volume élémentaire de la coque en coordonnées normales.

En accord avec les hypothèses cinématiques des coques dans (6), nous pouvons calculer le gradient des déformations comme une application de l'espace tangent dans la configuration de référence vers l'espace tangent dans la configuration courante

$$\mathbf{F} = (\varphi_{,\alpha} + \bar{\omega}_\alpha \times \zeta \mathbf{a}_3) \otimes \mathbf{g}^\alpha(\zeta) + \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{g}_3, \quad (92)$$

où  $\mathbf{g}^\alpha(\zeta) = \mathbf{g}_\alpha + \zeta(\omega_{0\alpha} \times \mathbf{g}_3)$  sont les vecteurs de base du système de coordonnées normales. La variation du gradient de déformation est déduite de (92) comme

$$\delta \mathbf{F} := (\delta \varphi_{,\alpha} + \delta \bar{\omega}_\alpha \times \zeta \mathbf{a}_3 + \bar{\omega}_\alpha \times (\delta \mathbf{w} \times \zeta \mathbf{a}_3)) \otimes \mathbf{g}^\alpha(\zeta) + (\delta \mathbf{w} \times \mathbf{a}_3) \otimes \mathbf{g}_3. \quad (93)$$

Avec les vecteurs des contraintes de Piola-Kirchhoff donnés comme

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{P} \mathbf{g}_\alpha(\zeta) = P^{i\alpha} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{p}^3 = \mathbf{P} \mathbf{g}_3 = P^{i3} \mathbf{a}_i, \quad (94)$$

le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff peut être représenté comme

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}^\alpha \otimes \mathbf{g}_\alpha(\zeta) + \mathbf{p}^3 \otimes \mathbf{g}_3 \\ &= P^{i\alpha} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}_\alpha(\zeta) + P^{i3} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{g}_3. \end{aligned} \quad (95)$$

En utilisant ces résultats, le principe des travaux virtuels tridimensionnels dans (91) peut se reformuler comme

$$\begin{aligned} \delta \Pi &:= \int_{\mathcal{A}} \int_{[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]} \{ (\delta \varphi_{,\alpha} + \delta \bar{\omega}_\alpha \times \zeta \mathbf{a}_3 + \bar{\omega}_\alpha \times (\delta \mathbf{w} \times \zeta \mathbf{a}_3)) \cdot \mathbf{p}^\alpha \\ &\quad + (\delta \mathbf{w} \times \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{p}^3 \} j(\zeta) d\zeta dA - \delta \Pi_{ext} = 0. \end{aligned} \quad (96)$$

Le prochain résultat clé est que nous pouvons éliminer le dernier terme dans (96), et écrire l'équation du travail virtuel sous une forme bidimensionnelle convenable pour la théorie des coques. Plus précisément, les équations d'équilibre du moment cinétique s'écrivent comme (e.g., voir [MH83])

$$skew[\mathbf{P}\mathbf{F}^T] = \mathbf{0}, \quad skew[\mathbf{P}\mathbf{F}^T] = \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{P}^T), \quad (97)$$



ou sous une autre forme

$$\begin{aligned} skew[\mathbf{p}^\alpha \otimes \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^* + \mathbf{p}^3 \otimes \mathbf{a}_3] &= \mathbf{0} \\ \iff \mathbf{p}^\alpha \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}^* + \mathbf{p}^3 \times \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (98)$$

Avec le produit scalaire de cette équation par  $\delta \mathbf{w}$ , nous obtenons

$$(\delta \mathbf{w} \times \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{p}^3 = -(\delta \mathbf{w} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} + \delta \mathbf{w} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}}_\alpha \times \zeta \mathbf{a}_3)) \cdot \mathbf{p}^\alpha . \quad (99)$$

Ce dernier résultat peut être utilisé dans (96) pour arriver à une autre forme du principe des travaux virtuels,

$$\begin{aligned} \delta \Pi &:= \int_{\mathcal{A}} \left\{ (\delta \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} - \delta \mathbf{w} \times \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha}) \cdot \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \mathbf{p}^\alpha j(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + (\delta \boldsymbol{\omega}_\alpha - \delta \mathbf{w} \times \boldsymbol{\omega}_\alpha) \cdot \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \zeta \mathbf{a}_3 \times \mathbf{p}^\alpha j(\zeta) d\zeta \right\} d\mathcal{A} \\ &\quad - \delta \Pi_{ext} = 0 . \end{aligned} \quad (100)$$

En comparant cette dernière expression et la forme correspondante dans (47), nous obtenons la forme explicite des efforts résultants comme

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \mathbf{p}^\alpha j(\zeta) d\zeta \quad (101)$$

et

$$\mathbf{m}^\alpha = \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \zeta \mathbf{a}_3 \times \mathbf{p}^\alpha j(\zeta) d\zeta d\mathcal{A} . \quad (102)$$

A partir des deux dernières expressions, on peut calculer les composantes des efforts résultants comme dans (90) pour obtenir

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} &= \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} P^{\alpha\beta} j(\zeta) d\zeta , \\ q^\alpha &= \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} P^{\alpha 3} j(\zeta) d\zeta , \\ m^{1\alpha} &= - \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \zeta P^{2\alpha} j(\zeta) d\zeta , \\ m^{2\alpha} &= \int_{[-\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}]} \zeta P^{1\alpha} j(\zeta) d\zeta , \\ m^{3\alpha} &= 0 . \end{aligned} \quad (103)$$

Le dernier résultat dans (103) sur les composantes du moment  $m^{3\alpha}$  représente une restriction importante sur les équations constitutives, qui élimine le

besoin d'introduire une hypothèse ad hoc sur les composantes de courbure correspondantes (e.g., voir [Rei82, GEW89] ou [SB92]).

Finalement, nous notons que si l'on renumérote les composantes du moment avec  $\hat{m}^{\alpha\gamma} = e_{\alpha\beta} m^{\beta\gamma}$ , on trouve

$$\hat{m}^{\alpha\beta} = \int_{[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]} \zeta P^{\alpha\beta} j(\zeta) d\zeta, \tag{104}$$

qui sont les composantes du moment énergétiquement conjuguées aux courbures  $\hat{\kappa}_{\alpha\beta}$  dans (79a).

Un résultat équivalent peut aussi être obtenu pour les efforts résultants conjugués avec les mesures de déformations conventionnelles dans (80) à (82) (e.g., voir [Bud68, Nio85, SF89]). Dans ce cas, l'intégration des équations d'équilibre tridimensionnelles pour le moment cinétique conduit à la restriction suivante écrite en termes d'efforts résultants

$$\varphi_{,\alpha} \times n^\alpha + a_{3,\alpha} \times \hat{m}^\alpha + a_3 \times l = o, \tag{105}$$

où  $l$  est l'effort résultant à travers l'épaisseur.

Les efforts résultants sont résolus dans les bases curvilignes  $\{\varphi_{,\alpha}, a_3\}$  comme

$$\begin{aligned} n^\alpha &= n^{\beta\alpha} \varphi_{,\beta} + q^\alpha a_3, \\ \hat{m}^\alpha &= \hat{m}^{\beta\alpha} \varphi_{,\beta} + \hat{m}^{3\alpha} a_3 \end{aligned} \tag{106}$$

et, le résultat pour  $a_{3,\alpha}$  est calculé en coordonnées curvilignes (e.g., voir [Nio85], ou [SF89]) comme

$$a_{3,\alpha} = \lambda_\alpha^\mu \varphi_{,\mu} + \lambda_\alpha^3 a_3. \tag{107}$$

En utilisant la condition d'inextensibilité du vecteur directeur (ce qui donne  $a_3 \cdot a_{3,\alpha} = 0$ ), nous pouvons exprimer  $\lambda_\alpha^3$  en termes de  $\lambda_\alpha^\gamma$  comme

$$\lambda_\alpha^3 = -\lambda_\alpha^\mu \varphi_{,\mu} \cdot a_3 = -\lambda_\alpha^\mu \gamma_\mu. \tag{108}$$

Avec ces résultats, la restriction dans (105) peut être écrite en composante comme

$$(n^{\beta\alpha} - \lambda_\mu^\beta \hat{m}^{\alpha\mu}) \varphi_{,\beta} \times \varphi_{,\alpha} + a_3 \times [l - (q^\alpha + \lambda_\mu^\alpha \hat{m}^{3\alpha} - \lambda_\mu^3 \hat{m}^{\alpha\mu}) \varphi_{,\alpha}] = o. \tag{109}$$

En prenant le produit scalaire de (109) avec  $a_3$ , nous obtenons une forme équivalente des équations d'équilibre du moment cinétique en termes de composantes d'efforts résultants, qui est

$$j e_{\alpha\beta} (n^{\beta\alpha} - \lambda_\mu^\beta \hat{m}^{\alpha\mu}) = 0, \tag{110}$$

où  $j$  est le jacobien de la surface de la coque. Par conséquent, on peut définir les efforts résultants dits effectifs (e.g., voir [Bud68, Nio85], ou [SF89])

$$\tilde{n}^{\beta\alpha} := n^{\beta\alpha} - \lambda_\mu^\beta \hat{m}^{\alpha\mu} \equiv \tilde{n}^{\alpha\beta}, \tag{111}$$

tels que la symétrie des efforts résultants effectifs provient de la restriction faite en (110).

Nous pouvons aussi définir les efforts résultants effectifs de cisaillement comme

$$\begin{aligned} \tilde{q}^\alpha &:= q^\alpha - \lambda_\mu^3 \hat{m}^{\alpha\mu} \\ &= q^\alpha + \lambda_\mu^\beta \gamma_{\beta\mu} \hat{m}^{\alpha\mu}, \end{aligned} \tag{112}$$

où nous avons utilisé le résultat dans (108). Les efforts résultants effectifs de membrane et de cisaillement,  $\tilde{n}^{\alpha\beta}$  et  $\tilde{q}^\alpha$ , et la partie symétrique du moment

$$\tilde{m}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\hat{m}^{\alpha\beta} + \hat{m}^{\beta\alpha}), \tag{113}$$

sont conjugués aux déformations dans (80), (81) et (82).

### 3.5. Équations constitutives locales (élastiques)

Dans le cadre de la théorie purement mécanique, les équations constitutives hyperélastiques peuvent être formulées en postulant sur l'existence d'une fonction d'énergie stockée. Si l'énergie stockée est choisie comme une fonction des mesures objectives des déformations, les efforts résultants obtenus comme dérivées partielles de l'énergie stockée par rapport aux déformations seront automatiquement objectifs.

L'énergie stockée devrait aussi être dépendante des propriétés métriques de la surface de référence de la coque (voir [CN72]). La définition et la caractérisation de coques transversalement isotropes sont encore plus délicates que cela pour le corps tridimensionnel, parce que la configuration de référence peut être courbe. Il est intuitivement clair que la réponse d'un point matériel dans la coque ne peut être isotrope transversalement à moins que la coque soit localement sphérique ou plane en ce point, ou à moins que les équations constitutives soient dégénérées irréellement.

Les équations constitutives les plus simples (premier ordre d'approximation, voir [Nio85]) pour les efforts résultants de membrane, cisaillement et flexion sont linéaires élastiques avec

$$n^{(\alpha\beta)} = \frac{Eh}{1-\nu^2} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{(\gamma\delta)}, \tag{114}$$

$$m^{(\alpha\beta)} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} H^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{(\gamma\delta)}, \tag{115}$$

$$q^\alpha = \frac{cEh}{2(1+\nu)} g^{\alpha\beta} \gamma_\beta, \tag{116}$$

où  $H^{\alpha\beta\gamma\delta}$  est défini par

$$H^{\alpha\beta\gamma\delta} = \nu g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + \frac{1}{2}(1-\nu)(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \tag{117}$$

et  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson. Dans (114) et (115), nous utilisons des parenthèses pour dénoter la partie symétrique des efforts résultants et les composantes des déformations.

La même forme pour les équations constitutives peut être utilisée pour les efforts résultants effectifs définis dans (111), (112) et (113) ; et pour les déformations correspondantes de (80) à (82). Strictement dit, par changement des mesures de déformations et des efforts résultants, nous avons aussi transformé le modèle constitutif. Toutefois, pour de petites déformations (et de grandes rotations), qui sont typiques en coques, la différence des deux modèles n'est pas très prononcée.

Dans le cas où de grandes déformations sont rencontrées, c'est non-seulement la différence entre ces deux modèles constitutifs de coque qui peut devenir importante, mais aussi leur incapacité à satisfaire aux conditions de polyconvexités (e.g., voir [MH83] ou [Ant95]).

### 3.6. Rotation autour de la normale

Le modèle constitutif défini dans (114), (115) et (116) n'est pas capable de supporter la rotation autour de la normale. Cette rotation est très importante pour les solutions des problèmes pratiques en relation avec les coques non-lisses ou les intersections de coques, où la normale ne peut être définie de manière unique, aussi bien que pour modéliser les jonctions des coques avec des poutres et des colonnes. Dans le but important de corriger ce défaut et de fournir une théorie des coques capable de supporter la rotation autour de la normale pour tout choix convenable d'interpolation éléments finis, nous proposons une formulation variationnelle régularisée (voir [Ibr94])

$$\Pi_\gamma := \int_{\mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \epsilon_{(\alpha\beta)} n^{(\alpha\beta)} + \hat{\kappa}_{(\alpha\beta)} \hat{m}^{(\alpha\beta)} + \gamma \alpha q^\alpha \right] + \epsilon_{[\alpha\beta]} n^{[\alpha\beta]} - \frac{1}{2} \gamma^{-1} n^{[\alpha\beta]} n^{[\alpha\beta]} \right\} d\mathcal{A} - \Pi_{ext} , \tag{118}$$

où  $\gamma$  est le paramètre de régularisation et  $n^{[\alpha\beta]}$  sont les composantes antisymétrique des efforts résultants.

Notons que la procédure de régularisation influence seulement les composantes des efforts résultants dans le plan défini par les vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$ .

Une forme régularisée du principe variationnel peut aussi être construite pour la forme conventionnelle de la théorie des coques employant les coordonnées curvilignes (voir [FS92]), en rendant celle-ci capable de supporter la rotation autour de la normale. Cependant, même dans ce cas, la régularisation des composantes antisymétriques des efforts résultants de membrane doit être imposée dans le plan défini par les vecteurs unitaires  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  de la base tournée

(voir figure 1), ce qu'exige le calcul de deux repères et rend l'implantation éléments finis plus difficile.

La formulation variationnelle (118) peut être utilisée comme la base pour la construction d'un élément fini de coque de type mixte, lequel est une généralisation de l'élément fini bidimensionnel de membrane de [IF93]. Une autre possibilité pour fournir une formulation variationnelle est obtenue en exploitant l'équation d'Euler-Lagrange de (118) associée à la variation de  $n^{[\alpha\beta]}$ ,

$$n^{[\alpha\beta]} = \gamma \epsilon_{[\alpha\beta]} , \quad (119)$$

ce qui nous donne le résultat suivant

$$\Pi_\gamma := \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_{(\alpha\beta)} n^{(\alpha\beta)} + \hat{\kappa}_{(\alpha\beta)} \hat{m}^{(\alpha\beta)} + \gamma_\alpha q^\alpha + \epsilon_{[\alpha\beta]} \gamma \epsilon_{[\alpha\beta]} \right\} d\mathcal{A} - \Pi_{ext} . \quad (120)$$

Cette dernière expression semble être le point de départ le plus convenable dans l'implantation éléments finis, puisqu'on y trouve un nombre plus petit de variables dépendantes.

Pour des considérations plus détaillées, liées à la question de la rotation autour de la normale, nous renvoyons à [ITW90, CMS92, FS92, GWW92, SB92, Ibr94] et, [Val95], parmi d'autres.

## 4. Théorie de coques géométriquement linéaire

### 4.1. Mesure de déformations linéarisée

Le progrès dans l'analyse non-linéaire des structures de coques est souvent motivé par les progrès correspondants dans l'analyse linéaire, puisque de nombreuses approches proposées pour l'analyse non-linéaire sont basées sur l'exploitation directe de la formulation utilisée pour l'analyse linéaire. Dans cette approche, on s'appuie sur l'hypothèse fondamentale que les déformations restent petites et que la source principale de non-linéarités géométriques provient des grandes rotations. Quelques approches qui appartiennent à cette catégorie sont : la formulation lagrangienne actualisée (e.g., voir [Bat95] et ces références), la formulation corotationnelle (e.g., voir [Wem69, SBCK84, BSL<sup>+</sup>85], ou [Cri91]) et l'approche naturelle d'Argyris (voir [ABD<sup>+</sup>79]). Le développement des éléments coques avec la rotation autour de la normale a également suivi ce chemin avec les travaux de [BN85] et [JF86] étant la première tentative dans cette direction basée sur la formulation corotationnelle. Nous notons en passant que la plupart de ces développements sont limités à une interpolation éléments finis d'ordre peu élevé (e.g., un élément coque à trois nœuds ou bien à quatre), et qu'il n'est pas du tout évident de les généraliser à des éléments d'ordre plus

élevé. (On note à cet égard, que le développement direct de la théorie non-linéaire des coques présenté dans la section précédente, n'implique pas le même inconvénient.)

Dans cette section, nous décrivons un développement théorique basé sur une démarche, qui est entièrement opposée à celle précédemment décrite. Plus précisément, après avoir développé une théorie non-linéaire générale des coques, nous nous mettons à obtenir une version géométriquement linéaire. Cela est simplement mis en pratique en utilisant la linéarisation cohérente de la théorie non-linéaire des coques dans la configuration de référence.

Avant tout, par la linéarisation cohérente du tenseur de rotation finie  $\mathbf{A}$  nous obtenons un tenseur antisymétrique  $\Theta$  des rotations infinitésimales, i.e.

$$\mathbf{A}(\theta) \stackrel{lin}{\mapsto} \mathbf{I} + \Theta, \tag{121}$$

lequel découle directement de la formule de Rodrigues dans (13). Les déformations de flexion linéarisées peuvent alors être calculées comme

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= \mathbf{A}_{,\alpha} \mathbf{A}^T \stackrel{lin}{\mapsto} \Theta_{,\alpha} (\mathbf{I} - \Theta) \approx \Theta_{,\alpha} \\ \omega_\alpha &\stackrel{lin}{\mapsto} \theta_{,\alpha} = \kappa^{lin}. \end{aligned} \tag{122}$$

La linéarisation d'autres mesures des déformations est influencée par la représentation choisie pour la surface de la coque. Dans la suite, nous discutons deux choix extrêmes : d'un côté l'approximation pour des éléments de coque peu profonde de [Ibr94] et de l'autre, la procédure de normalisation du vecteur directeur de [SF89]. Nous notons que les exemples numériques démontrent que la précision d'un élément de coque à quatre nœuds n'est pas beaucoup influencée par le genre d'hypothèse que nous faisons sur la représentation de la géométrie de la coque.

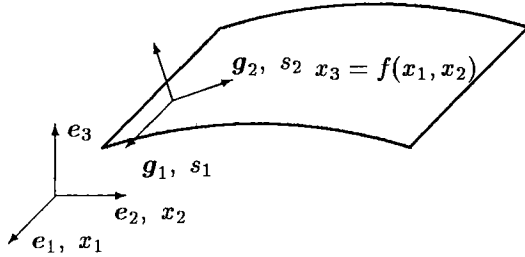
Dans une approximation pour la coque peu profonde, nous supposons que la coque est obtenue à partir d'une plaque par une application isométrique locale,  $\mathbf{A}_0$ . Dans le cadre de l'approximation utilisée pour les coques peu profondes dans le repère local (voir [Mar38, IW91]) nous pouvons écrire

$$\mathbf{A}_0 \stackrel{lin}{\mapsto} \mathbf{I} + \Theta_0, \quad \Theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_{,1} \\ 0 & 0 & -f_{,2} \\ f_{,1} & f_{,2} & 0 \end{bmatrix}, \tag{123}$$

où  $x_3 = f(x_1, x_2)$  représente la forme fonctionnelle de la configuration de référence de coque peu profonde<sup>5</sup> dans le repère global (voir figure 7).

---

<sup>5</sup>L'approximation de la géométrie de coque basée sur l'hypothèse de coque peu profonde se fait sur chaque élément par rapport à son repère local ; ce dernier et l'utilisation des coordonnées locales cartésiennes permettent la convergence vers les solutions qui sont aussi valables pour des coques profondes (voir [Ide81]).



**Figure 7.** Approximation par coque peu profonde pour la configuration de référence

En tenant compte que la forme linéarisée des vecteurs de base peut être calculée comme

$$a_i^{lin} = A^{lin} A_0^{lin} e_i , \tag{124}$$

et que la forme linéarisée des vecteurs de position peut être obtenue comme

$$\varphi \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ f + u_3 \end{pmatrix} , \tag{125}$$

nous pouvons écrire la forme vectorielle des mesures linéarisées des déformations comme

$$\epsilon_1^{lin} = \begin{pmatrix} 1 + u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} + f_{,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + \theta_2 f_{,1} \\ \theta_3 - \theta_1 f_{,1} \\ -\theta_2 + f_{,1} \end{pmatrix} \tag{126}$$

et

$$\epsilon_2^{lin} = \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ 1 + u_{2,2} \\ u_{3,2} + f_{,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\theta_3 + \theta_2 f_{,2} \\ 1 - \theta_1 f_{,2} \\ \theta_1 + f_{,2} \end{pmatrix} . \tag{127}$$

Si les composantes de rotations sont renumérotées comme

$$\hat{\theta}_\alpha = e_{\alpha\beta} \theta_\beta , \quad \psi = \theta_3 , \tag{128}$$

on obtient une forme plus compacte des mesures des déformations dans (126) et (127)

$$\epsilon_1^{lin} = \begin{pmatrix} u_{1,1} + \hat{\theta}_1 f_{,1} \\ u_{2,1} + \hat{\theta}_2 f_{,1} - \psi \\ u_{3,1} - \hat{\theta}_1 \end{pmatrix} \tag{129}$$

et

$$\epsilon_2^{lin} = \begin{pmatrix} u_{1,2} + \hat{\theta}_1 f_{,2} + \psi \\ u_{2,2} + \hat{\theta}_2 f_{,2} \\ u_{3,2} - \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} . \tag{130}$$

La partie symétrique des mesures de déformations de membrane et flexion peut donc être écrite comme

$$\epsilon_{(\alpha\beta)}^{lin} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_\alpha f_{,\beta} + \hat{\theta}_\beta f_{,\alpha}) . \quad (131)$$

Si les composantes de courbure sont aussi renumérotées de la façon donnée dans (79a), la partie symétrique s'écrit comme

$$\hat{\kappa}_{(\alpha\beta)}^{lin} = \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{\alpha,\beta} + \hat{\theta}_{\beta,\alpha}) . \quad (132)$$

De même, les déformations de cisaillement sont données par

$$\gamma_\alpha^{lin} = u_{3,\alpha} - \hat{\theta}_\alpha . \quad (133)$$

Notons que les mesures des déformations de cisaillement et flexion sont celles de la théorie des plaques de [Rei45] - [Min51]. D'où, en cherchant un schéma d'interpolation optimal pour un élément fini de coque, on peut bénéficier directement d'une très riche expérience déjà accumulée sur le problème de plaque (e.g. voir [HL81, Mac83], ou [BD85]).

On constate que l'expression des déformations de membrane dans (131) est différente de celle proposée par un certain nombre de travaux précédents (e.g., voir [BSL<sup>+</sup>85, Cri91]) du fait que le champ de rotation  $\hat{\theta}_\alpha$ , plutôt que les dérivées du déplacement latéral, est couplé avec les composantes de déplacements dans le plan à travers l'approximation de coque peu profonde. L'avantage principal de l'expression pour les déformations de membrane présentée ici est qu'elle simplifie la construction des interpolations éléments finis pour soulager le soi-disant phénomène de blocage.

*Remarque 5 :* Nous élaborons sur ces idées dans le cadre d'un problème quelque peu simplifié, concernant le choix d'interpolations d'une poutre peu profonde. Les mesures des déformations correspondantes peuvent alors être simplifiées par

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} , \quad \gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{df}{dx}\theta .$$

Par mise au point d'une interpolation élément fini simple de la géométrie d'un élément, basée sur les éléments à deux nœuds, on obtient

$$x^h = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) x_a ; \quad N_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) ;$$

$$f^h(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) f_a ; \quad f_a = \xi_a h_0 ; \quad \xi_a = \begin{cases} -1, & a = 1 \\ +1, & a = 2 \end{cases} ,$$



où  $h_0$  est la distance (nodale) maximale pour les axes de référence.

Si les interpolations isoparamétriques sont utilisées avec :

$$\theta^h(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi)\theta_a, \quad u^h(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi)u_a \quad \text{et} \quad v^h(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi)v_a,$$

les approximations de déformations seront comme suit

$$\kappa^h = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (134)$$

$$\gamma^h = \frac{1}{2}(v_2 - v_1)\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - \xi\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (135)$$

$$\epsilon^h = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) - \frac{h_0}{l}(\theta_1 + \theta_2) + \xi\frac{h_0}{l}(\theta_2 - \theta_1). \quad (136)$$

On peut voir que la seule possibilité pour introduire un état de flexion pure dans la poutre, i.e.  $\forall \xi \Rightarrow \epsilon^h(\xi) = 0$  et  $\gamma^h(\xi) = 0$  est avec  $(\theta_2 - \theta_1) = 0$ , laquelle, par les vertus de (134) conduit à  $\kappa^h = 0$ !

Une caractéristique de la théorie proposée, très pratique, s'annonce immédiatement : en gardant la même interpolation pour le champ de rotation  $\theta$ , on peut modifier les interpolations de déplacements  $u$  et  $v$  d'une manière indépendante de l'une des autres pour pallier au problème de blocage (e.g., voir [Tes86]). Un remède simple est d'utiliser la « meilleure » valeur de l'approximation de déformation discrète (obtenue pour  $\xi = 0$ ) et replacer celle-ci dans le calcul de la matrice de rigidité. En gros, c'est l'idée derrière la prétendue méthode de substitution de déformation que nous discuterons par la suite.

L'approximation de coque faible décrite dans la géométrie de la coque de référence est la plus simple approche que l'on peut utiliser en dehors d'élément de coque plate. Certains développements récents (e.g., voir [SF89, GK93]) prennent une direction opposée à celle justement décrite (de coque peu profonde) en essayant de réaliser une représentation de la géométrie des coques aussi précise que possible. En particulier, une attention spéciale est consacrée à la conservation de la norme du vecteur directeur  $\mathbf{g}_3$  pour qu'il reste un élément de la sphère unité

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{g}_{3I}}{\left\| \sum_{I=1}^4 N_I \mathbf{g}_{3I} \right\|}. \quad (137)$$

Ensuite, par la linéarisation cohérente des mesures de déformations dans (80) et (82) nous obtenons

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{lin} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}_\beta), \quad (138)$$

$$\gamma_\alpha^{lin} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \Delta \mathbf{g}_3 + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}_3 \quad (139)$$

et

$$\kappa_{\alpha\beta}^{lin} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_\alpha \cdot \Delta \mathbf{g}_{3,\beta} + \Delta \mathbf{g}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{g}_\beta + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} + \mathbf{g}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}), \quad (140)$$

comme des composantes de déformations de membrane, cisaillement et flexion.

Cette différence entre deux approximations utilisées pour la configuration de référence de coque, n'entraîne pas beaucoup d'écart entre les résultats numériques, du moins pas lorsque l'on utilise les interpolations éléments finis de coque à trois ou quatre nœuds. Les deux approches donnent des résultats de très haute précision dans tous les problèmes standards, parce que l'on a soigneusement choisi des interpolations éléments finis, lesquels sont brièvement décrits par la suite. Le champ de déformation de membrane est construit par la méthode des modes incompatibles (voir [IW91]) ou par la méthode des interpolations mixtes-hybrides (e.g., voir [PS84]). En dépit de la différence de ces deux types d'interpolations éléments finis, au niveau d'un élément à quatre nœuds, ces deux méthodes conduisent essentiellement à la même précision (e.g. voir [IW91]). Le même concept peut être étendu à l'interpolation du champ de déformation de flexion, où les modes incompatibles [IF94] et la méthode des interpolations mixtes-hybrides [SF89] apportent une précision améliorée par rapport à l'interpolation isoparamétrique standard. Finalement, comme la déformation de cisaillement est la même que celle obtenue pour la théorie des plaques de Reissner-Mindlin, les interpolations éléments finis pour les plaques basées sur la méthode de substitution des déformations de cisaillement (e.g., en anglais *assumed shear strain*, voir [Mac83, HL81, BD85]) sont aussi utilisées pour les coques ([SF89] ou [Ibr95b]).

## 4.2. Solution numérique pour quelques problèmes standards

Il existe un nombre de problèmes standards (voir [MH85]), pour tester les éléments de coque dans l'analyse linéaire. L'ensemble des problèmes retenus pour la présentation (dit « course d'obstacles » voir [BSL<sup>+</sup>85], et [BWS89]), est d'une part raisonnablement court, dans le sens d'éviter la répétition des problèmes tests de nature similaire et d'autre part, est suffisamment compréhensif pour assurer la qualité d'un élément. En bref, un bon élément de coque doit avoir la capacité pour s'accommoder aux modes de flexion pure, au mouvement rigide sans déformation et aux états complexes de déformation de membrane. Nous montrons que les deux éléments de coque linéaires à quatre nœuds

ont en effet cette propriété<sup>6</sup>. Le premier est l'élément de coque de [SF89] basé sur la théorie classique des coques et les interpolations mixtes-hybrides des efforts résultants de membrane et flexion, et le second est un élément de coque de [IF94] avec six degrés de liberté par nœud et des interpolations pour les déformations de membrane et de flexion enrichies par les modes incompatibles.

#### 4.2.1. La poutre vrillée

Le problème de poutre vrillée défini dans la figure 8 est un excellent test pour évaluer les performances des éléments coques dont la configuration de référence n'est pas dans le plan. D'après [BWC92], beaucoup d'éléments coques faillissent dans ce test.

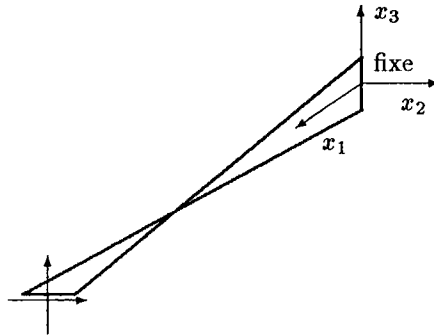


Figure 8. Problème de poutre vrillée

Les caractéristiques de la poutre sont les suivantes : longueur  $l = 12$ , épaisseur  $h = 0.32$ , largeur  $b = 1.1$ , module d'Young  $E = 29 \times 10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.22$ . L'angle de torsion est  $90^\circ$  et les deux cas de charges sont des forces de cisaillement unitaire appliquées à l'extrémité libre. Les solutions de référence pour les composantes de déplacement parallèles aux directions des forces pour les deux cas de charges sont égales à 0.005424 et 0.001754, respectivement (e.g., voir [MH85]). Les solutions éléments finis correspondantes sont obtenues avec des maillages uniformes de  $1 \times 6$ ,  $2 \times 12$  et  $4 \times 24$  éléments, et sont comparées avec les solutions de référence dans la figure 9. Nous pouvons voir que les deux éléments ont très rapidement convergé.

#### 4.2.2. Baril de Scordelis-Lo

Ce problème test est très utile pour juger de la capacité des éléments coque à résoudre exactement les états complexes des déformations de membrane. Le baril montré en figure 10 est appuyé aux extrémités sur des diaphragmes et soumis à son poids propre. Les caractéristiques géométriques sont : rayon de la

<sup>6</sup> Il existe d'autres éléments coques de haute performance pour l'analyse linéaire, e.g., voir la liste des références dans [NBS89, SF89] et [IF94].

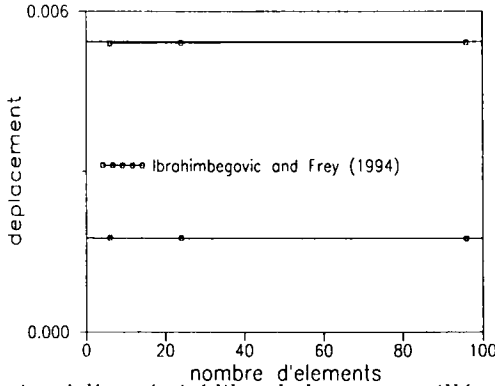


Figure 9. Déflexion à l'extrémité libre de la poutre vrillée pour les deux cas de charges par rapport au nombre total d'éléments

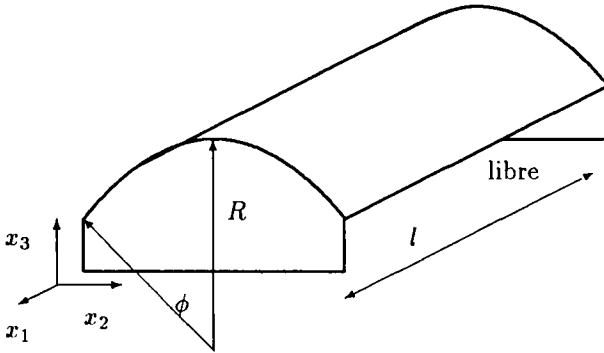


Figure 10. Baril de Scordelis-Lo : caractéristiques géométriques

coque  $R = 25$ , angle central  $\phi = 40^\circ$ , longueur du cylindre  $l = 50$  et épaisseur  $h = 0.25$ . Les caractéristiques matérielles sont : module d'Young  $E = 432 \times 10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . Le poids propre du baril est introduit comme une charge verticale répartie uniformément  $q = 90$ .

La solution de référence (e.g., voir [MH85]) pour le déplacement vertical au point central est égale à 0.3024. Les solutions éléments finis correspondantes sont obtenues par l'emploi d'un maillage uniforme construit pour un quart de la coque, et sont comparées avec les solutions de référence dans la figure 11.

Les deux éléments de coque, avec les interpolations de membrane qui apparaissent être optimal pour un élément de coque à quatre nœuds, convergent rapidement dans ce test.

#### 4.2.3. Coque hémisphérique pincée

Dans ce test, nous considérons une coque hémisphérique avec un trou au sommet, de la forme d'une capsule sphérique de  $18^\circ$  (voir figure 12). La coque

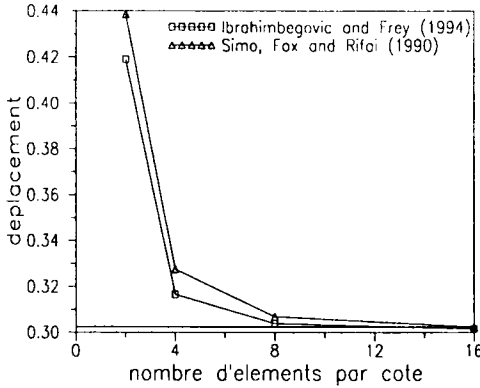


Figure 11. Déflexion du baril de Scordelis-Lo sous l'action de son poids propre

est soumise à deux paires de forces pinçantes, chacune de valeur  $P = 2$ , appliquant leur chargement sur le bord libre.

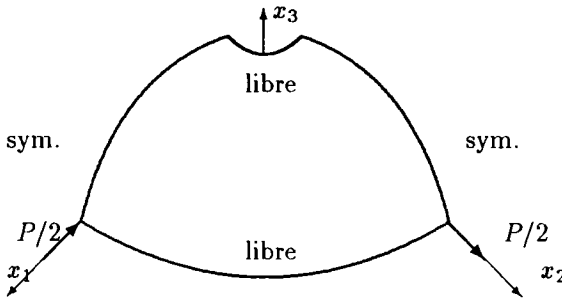
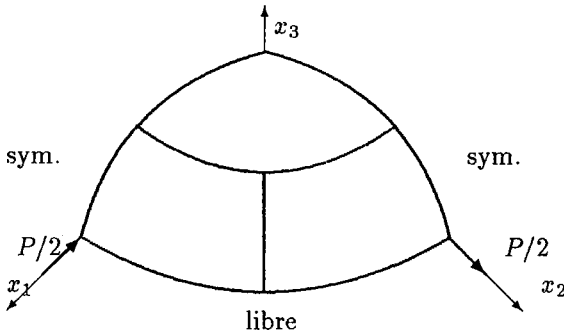


Figure 12. Coque hémisphérique avec trou

Les caractéristiques de la coque sont : module d'Young  $E = 68.25 \times 10^6$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , rayon  $R = 10$  et épaisseur  $h = 0.04$ . La solution de référence pour le déplacement au point d'application de la force, est égale à 0.093.

Une autre version de ce problème est essentiellement la même coque hémisphérique, mais sans le trou au sommet. La solution de référence pour le déplacement, change légèrement à 0.0924. Cependant, la nouvelle version du test accepte un maillage élément finis (voir figure 13), qui est encore plus exigeant sur les éléments.

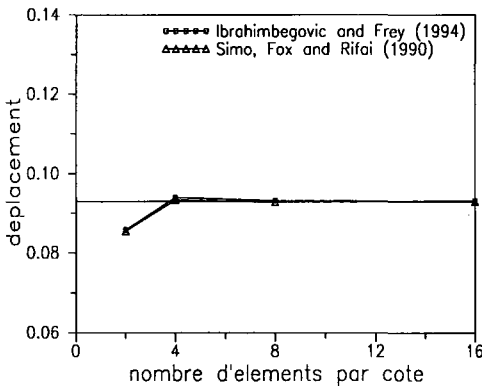
Avec ce test, nous pouvons vérifier que l'élément de coque est capable de représenter des modes de flexion pure. C'est aussi un très bon exemple pour



**Figure 13.** Coque hémisphérique pleine

vérifier la capacité d'un élément à représenter le mouvement rigidifiant, parce qu'une large partie de la coque tourne comme un corps rigide.

Concernant la performance des éléments de coque dans ce test, d'après la figure 14 nous pouvons voir qu'essentiellement les mêmes résultats, d'une très grande précision, sont obtenus pour les deux éléments pour la coque sphérique avec trou.



**Figure 14.** Déplacement sous la force pour la coque hémisphérique avec trou

Pour le maillage le plus exigeant utilisé pour la coque hémisphérique pleine, l'approximation élément fini en coque peu profonde de [IF94] converge quelque peu plus vite que les éléments de coque de [SF89] (voir figure 15). Ceci est probablement dû à une robuste interpolation des déformations de membrane de cet élément, qui est capable d'éliminer le problème de verrouillage par une méthode de projection des déformations (voir [BSL<sup>+</sup>85]) qui fait intervenir les hypothèses sur la coque peu profonde.

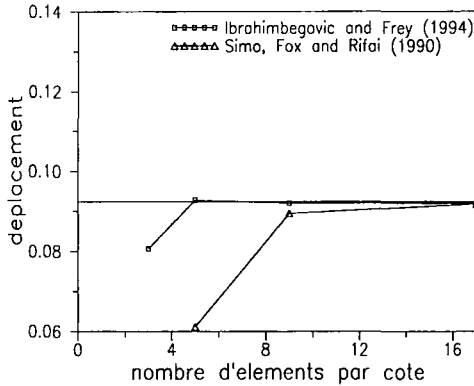


Figure 15. Déplacement sous la force pour la coque hémisphérique pleine

#### 4.2.4. Cylindre pincée avec diaphragme

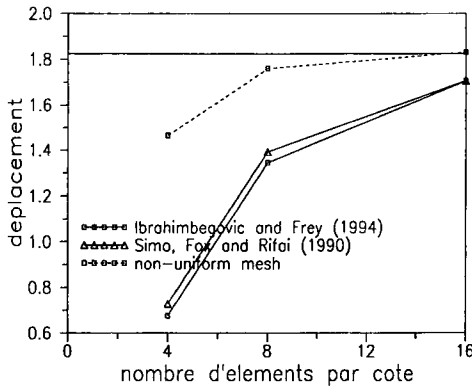
Une coque cylindrique, appuyée sur des diaphragmes rigides à ses extrémités, est pincée dans le milieu par une paire de forces unitaires. Les caractéristiques de la coque sont : module d'Young  $E = 30 \times 10^6$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , rayon du cylindre  $R = 300$  longueur  $l = 600$  et épaisseur  $h = 3$ . La présence du diaphragme rigide change la réponse de la coque de façon importante par rapport au problème moins exigeant sans diaphragme. Le mode dominant de déformation est une combinaison des modes de flexion inextensibles et d'état complexe de membrane. De plus, de grands gradients de déplacements se produisent dans le voisinage du point où la charge est appliquée.

Si l'on reste ignorant de la nature du problème en utilisant un maillage éléments finis uniforme, on n'obtient qu'un résultat d'une précision insuffisante pour le déplacement calculé au point d'application de la force, lequel demeure inférieur à la valeur de référence  $1.82488 \times 10^{-5}$  (voir figure 16). Toutefois, en retenant le même nombre d'éléments mais en choisissant un maillage non uniforme (voir [IF94]), on peut beaucoup améliorer la précision du résultat. En conclusion, cet exemple indique qu'en testant un nouvel élément coque, on devrait plutôt vérifier quel est le meilleur résultat que l'élément est capable de délivrer lorsqu'on l'utilise intelligemment (e.g., en combinaison avec les estimations d'erreurs et la stratégie de raffinement du maillage adaptatif).

## 5. Approximation éléments finis de la théorie non-linéaire des coques

Il est bien connu que l'utilisation des interpolations isoparamétriques (e.g., voir [AIZ70, ZTT71]) pour un élément de coque, conduit à de sérieux problèmes de verrouillage<sup>7</sup> rendant souvent catastrophiques la performance de cet élément

<sup>7</sup> Le phénomène de verrouillage en analyse non-linéaire des coques est typiquement associé



**Figure 16.** Déplacement sous la force pour la coque cylindrique pincée

de coque (e.g., voir [BSL<sup>+</sup>85]). On peut dire que choisir une bonne interpolation éléments finis est au moins aussi important que fournir une bonne base théorique, afin d'assurer une performance satisfaisante des éléments coques. De nombreux travaux ont été publiés sur les interpolations éléments finis proposés spécialement pour les éléments coques, afin d'éviter les phénomènes de verrouillage. Certains d'entre eux sont :

- méthode de substitution des déformations de cisaillement (e.g. voir [DB84, BD86, HW86, PS88, SMR89], ou [Par91]),
- des interpolations mixtes-hybrides [SFR90, SB92],
- méthode des modes incompatibles [Ibr94, BRR94],
- des éléments de Kirchhoff discrets [BBH80, SBCK84, BD92b, PC92],
- méthodes de contraintes discrètes [ZTPO90, BL89],
- intégrations réduites et sélectives avec stabilisation [BSL<sup>+</sup>85, BWS89, BWC92, BL94], etc.

La liste des remèdes étant trop longue pour être examinée en détail, nous nous référons aux travaux récents édités par [NBS89], qui donnent une synthèse représentative de l'état de l'art actuel.

Sans porter de jugement définitif sur ce domaine de recherche toujours très actif, il semble que les éléments de coques à quatre nœuds utilisant quelques-uns des différents concepts pour éviter le problème de verrouillage et améliorer la performance des éléments, apparaissent comme le choix préféré par la majorité des recherches.

---

avec les modes de flexion pure.



### 5.1. Substitution de déformations de cisaillement

L'idée principale que l'on tient à communiquer par la suite, est que la performance d'un remède contre le verrouillage déjà reconnu peut souvent être encore améliorée grâce à l'implantation numérique où l'attention est portée à la conservation des aspects importants de la formulation théorique.

Le problème modèle que nous considérons est une méthode pour construire une interpolation de déformations de cisaillement, dans le but d'éliminer le verrouillage en cisaillement, i.e. l'incapacité d'un élément coque à bien représenter l'état de déformation qui annule les déformations de cisaillement. Ce dernier est accompli en suivant les idées de [Mac83, HL81, DB84] et, [BD85] parmi d'autres ; et en construisant une substitution de déformation de cisaillement (qui ne découle pas nécessairement du choix d'interpolations pour les déplacements et les rotations), afin que cela facilite la production de modes de flexion pure dits les modes de Kirchhoff. Par la suite, nous discutons de cette procédure pour construire une substitution de déformation de cisaillement seulement pour un élément de coque à quatre nœuds. Comme les deux expressions pour les déformations de cisaillement dans (78) et (81) sont les mêmes, la considération qui suit s'applique à toutes les deux simultanément.

Nous donnons premièrement la formulation théorique de cette méthode d'approximation du cisaillement. Nous pouvons alors réécrire l'expression de l'énergie potentielle dans (120) comme

$$\Pi(\varphi, \mathbf{A}) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \gamma_{\alpha}(\varphi, \mathbf{A}) C^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}(\varphi, \mathbf{A}) d\mathcal{A} + \Pi_{rest}, \quad (141)$$

avec la signification évidente pour  $\Pi_{rest}$ . Pour plus de détails sur la construction d'interpolations éléments finis pour les champs de déformations de membrane et flexion, contenus dans  $\Pi_{rest}$ , il faut consulter les travaux de [BWS89, SFR90] et, [Ibr94] parmi d'autres.

Le but final est de fournir une interpolation de déformations de cisaillement, qui fait seulement intervenir des déplacements et des rotations. Pourtant, afin de placer cette procédure sur une base variationnelle rigoureuse, nous abandonnons d'abord celle basée uniquement sur les déplacements en faveur d'une formulation variationnelle plus générale de type Hu-Washizu

$$\Pi(\varphi, \mathbf{A}, \tilde{\gamma}_{\alpha}, \tilde{q}^{\alpha}) := \int_{\mathcal{A}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{\alpha} C^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_{\beta} + \tilde{q}^{\alpha} [\gamma_{\alpha}(\varphi, \mathbf{A}) - \tilde{\gamma}_{\alpha}] \right\} d\mathcal{A} + \Pi_{rest}, \quad (142)$$

où  $\tilde{\gamma}_{\alpha}$  est une approximation indépendante du cisaillement (différente de celle qui est basée sur les interpolations utilisées pour les déplacements et les rotations) et  $\tilde{q}^{\alpha}$  est le champ d'effort de cisaillement correspondant.

L'équation variationnelle de (142) associée à la variation de  $\tilde{\gamma}_\alpha$  peut être écrite comme

$$\delta\Pi(\varphi, \mathbf{A}, \tilde{\gamma}_\alpha, \tilde{q}^\alpha) \cdot \delta\tilde{\gamma}_\alpha := \int_{\mathcal{A}} \{ \delta\tilde{\gamma}_\alpha (C^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_\beta - \tilde{q}^\alpha) \} d\mathcal{A} = 0 \quad (143)$$

tandis que celle associée à la variation de  $\tilde{q}^\alpha$  est

$$\delta\Pi(\varphi, \mathbf{A}, \tilde{\gamma}_\alpha, \tilde{q}^\alpha) \cdot \delta\tilde{q}^\alpha := \int_{\mathcal{A}} \{ \delta\tilde{q}^\alpha (\gamma_\alpha(\varphi, \mathbf{A}) - \tilde{\gamma}_\alpha) \} d\mathcal{A} = 0 . \quad (144)$$

Puisque, dans les deux dernières équations variationnelles, il n'y a pas de dérivée sur les champs  $\tilde{\gamma}_\alpha$  et  $\tilde{q}^\alpha$ , ils appartiennent à l'espace des fonctions de carrés intégrables. Par conséquent, dans leur approximation par éléments finis, ces champs peuvent être construits indépendamment d'un élément à l'autre.

Nous allons choisir pour chaque élément de coques le champ d'efforts de cisaillement  $\tilde{q}^\alpha$  qui découle du champ de déformations de cisaillement  $\tilde{\gamma}_\alpha$ , à travers des équations constitutives

$$\tilde{q}^\alpha \Big|_{\mathcal{A}^e} = C^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_\beta ; e \in [1, Nel] , \quad (145)$$

où  $\mathcal{A}^e$  est un domaine d'élément coques et  $Nel$  est le nombre total d'éléments. Avec un tel champ d'efforts de cisaillement, l'équation variationnelle dans (143) est identiquement satisfaite. En plus, en exigeant qu'une condition d'orthogonalité,

$$\int_{\mathcal{A}^e} \{ \tilde{\gamma}_\beta C^{\beta\alpha} [\gamma_\alpha(\varphi, \mathbf{A}) - \tilde{\gamma}_\alpha] \} d\mathcal{A} = 0 ; e \in [1, Nel] , \quad (146)$$

soit satisfaite, nous pouvons effectivement éliminer le champ de déformations de cisaillement  $\gamma_\alpha(\varphi, \mathbf{A})$  et rendre la formulation de la méthode de substitution du cisaillement variationnellement consistante.

$$G := \int_{\mathcal{A}^h} \delta\tilde{\gamma}_\alpha^h C^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_\beta^h d\mathcal{A} + G_{rest} = 0 . \quad (147)$$

Une telle substitution de déformations de cisaillement, obéissant à la condition d'orthogonalité de (146), peut être construite (e.g., voir [DB84]) pour un élément de coque à quatre nœuds (voir figure 17) comme

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1^h &= \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\tilde{\gamma}_1^B + \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\tilde{\gamma}_1^D \\ \tilde{\gamma}_2^h &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\tilde{\gamma}_2^A + \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\tilde{\gamma}_2^C , \end{aligned} \quad (148)$$

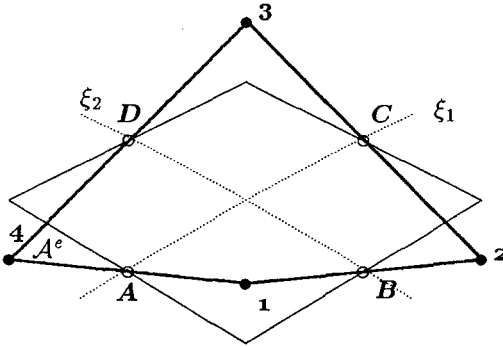


Figure 17. Nœuds et points d'approximations de déformation de cisaillement pour éléments coques

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont les coordonnées naturelles, et

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^B &= \mathbf{a}_3^B \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\xi_1}^B ; \\
 \gamma_1^D &= \mathbf{a}_3^D \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\xi_1}^D ; \\
 \gamma_2^A &= \mathbf{a}_3^A \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\xi_2}^A ; \\
 \gamma_2^C &= \mathbf{a}_3^C \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\xi_2}^C ;
 \end{aligned} \tag{149}$$

sont les paramètres d'approximation de cisaillement. On peut les obtenir à partir de la forme discrète des expressions correspondantes dans (78) ou (81) évaluée au centre de chaque côté de l'élément (i.e., en utilisant les valeurs optimales des approximations des déformations de cisaillement discrète, voir remarque 5).

Pour le calcul des paramètres d'approximation dans (149), nous avons besoin du vecteur  $\mathbf{a}_3$  aux points  $A, B, C$  et  $D$ . Ces derniers sont établis par une procédure spéciale décrite dans la suite (voir tableau 1).

D'un autre côté, le vecteur position et ses dérivées dans (149) sont calculés à partir de l'interpolation bilinéaire de la géométrie d'un élément déformé

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varphi}^h \Big|_{\mathcal{A}^e} &= \sum_{I=1}^{N_{en}} N_I(\xi_1, \xi_2) \boldsymbol{\varphi}_I ; \\
 N_I(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_1 \xi_{1I}) (1 + \xi_2 \xi_{2I}) .
 \end{aligned} \tag{150}$$

ce qui conduit à, par exemple

$$\gamma_2^A = \frac{1}{2} \mathbf{a}_3^A \cdot (\boldsymbol{\varphi}_4 - \boldsymbol{\varphi}_1) . \tag{151}$$

- calculer l'incrément de rotation

$$\Delta w^A = \frac{1}{2}(\Delta w_1 + \Delta w_4) ; \Delta w^A = || \Delta w^A ||$$

- calculer le quaternion unitaire correspondant

$$\{q_{0w}^A, q_w^A\} = \left\{ \cos \frac{\Delta w^A}{2}, \frac{\Delta w^A}{\Delta w^A} \sin \frac{\Delta w^A}{2} \right\}$$

- retrouver les quaternions pour les rotations existantes

$$\{q_0^A, q^A\}$$

- actualiser les rotations finies

$$\{q_0^A, q^A\} \leftarrow \{(q_0^A q_{0w}^A - q^A \cdot q_{0w}^A), (q_0^A q_w^A + q_{0w}^A q^A + q_w^A \times q^A)\}$$

- calculer des matrices orthogonales correspondantes

$$\Lambda^A = (2q_0^A{}^2 - 1)I + 2q_0^A[q^A \times I] + 2q^A \otimes q^A$$

- actualiser la rotation initiale

$$a_3^A = \Lambda^A g_3^A$$

**Tableau 1.** L'actualisation multiplicative de la rotation au point A

*Remarque 6 :* Nous pouvons aussi obtenir la forme correspondante de l'interpolation proposée pour la déformation de cisaillement en coordonnées cartésiennes  $s_\alpha$ . Nous reconnaitrons premièrement que dans la structure cartésienne, avec les vecteurs de base covariants et contravariants identiques ( $g_i \equiv g^i$ ), nous pouvons écrire la représentation du tenseur des déformations comme

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta + \bar{\gamma}_\alpha g_3 \otimes g_\alpha . \tag{152}$$

La représentation correspondante du tenseur des déformations dans le champ de coordonnées naturelles  $\xi_\alpha$  est

$$\epsilon = \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} b^\alpha \otimes b^\beta + \tilde{\gamma}_\alpha b^3 \otimes b^\alpha , \tag{153}$$

où  $b^\alpha$  sont les vecteurs contravariants de la base duale qui peuvent être calculés par ( $b^\alpha \cdot b_\beta = \delta_\beta^\alpha$  et  $b_\beta = x_{,\xi_\beta}$ ). En utilisant  $b^3 \equiv g^3 \equiv g_3$ , et en combinant les deux dernières expressions, nous obtenons

$$\tilde{\gamma}_\alpha = \bar{\gamma}_\beta (g_\beta \cdot x_{,\xi_\alpha}) . \tag{154}$$

Donc la substitution de déformation de cisaillement dans le système cartésien peut s'écrire comme

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^1 \\ \tilde{\gamma}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_1) & (\mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_2) \\ (\mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_1) & (\mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^1 \\ \tilde{\gamma}^2 \end{pmatrix}. \quad (155)$$

Il est intéressant de noter que la transformation dans (155) est identique à celle utilisée pour calculer les dérivées partielles par rapport aux coordonnées normales (voir remarque 3).

*Remarque 7 :* Un avantage de l'utilisation dans (155) de composantes cartésiennes de déformations de cisaillement est la forme simplifiée (diagonale) de la matrice constitutive. L'effort résultant de cisaillement  $\tilde{q}^\alpha$ , dans le système cartésien local, est donné par

$$\tilde{q}^\alpha = c\mu h \tilde{\gamma}_\alpha, \quad (156)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement,  $h$  l'épaisseur de la coque et  $c$  le facteur de correction du cisaillement (habituellement fixé à 5/6). L'effort tranchant  $\tilde{q}^\alpha$ , dans le système de coordonnées naturelles, peut être calculé par

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}^1 \\ \tilde{q}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_1) & (\mathbf{x}_{,\xi_1} \cdot \mathbf{g}_2) \\ (\mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_1) & (\mathbf{x}_{,\xi_2} \cdot \mathbf{g}_2) \end{bmatrix}^{-T} \begin{pmatrix} \tilde{q}^1 \\ \tilde{q}^2 \end{pmatrix}. \quad (157)$$

Par l'intermédiaire d'approximation du cisaillement dans (148), l'équation variationnelle restante dépend seulement des déplacements et rotations, ainsi que de leurs variations,

$$G(\boldsymbol{\varphi}^h, \mathbf{A}^h, \delta\boldsymbol{\varphi}^h, \delta\mathbf{w}^h) = \int_{\mathcal{A}^h} \delta\tilde{\gamma}_\alpha^h C^{\alpha\beta} \tilde{\gamma}_\beta^h d\mathcal{A} + G_{rest} = 0. \quad (158)$$

Dans (158),  $\delta\tilde{\gamma}_\alpha^h$  sont les déformations virtuelles de cisaillement, où on applique le même type d'interpolation que pour la déformation totale dans (148),

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\gamma}_1^h &= \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\delta\gamma_1^B + \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\delta\gamma_1^D, \\ \delta\tilde{\gamma}_2^h &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\delta\gamma_2^A + \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\delta\gamma_2^C, \end{aligned} \quad (159)$$

où  $\delta\gamma_1^B$ ,  $\delta\gamma_1^D$ ,  $\delta\gamma_2^A$  et  $\delta\gamma_2^C$  sont les paramètres d'interpolations, calculés par variation de (149). Par exemple, pour  $\delta\gamma_2^A$  nous obtenons

$$\delta\gamma_2^A = \mathbf{a}_3^A \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}_{,\xi_2}^A + (\mathbf{a}_3^A \times \boldsymbol{\varphi}_{,\xi_2}^A) \cdot \delta\mathbf{w}^A, \quad (160)$$

où nous avons utilisé que  $\delta \mathbf{a}_3^A = \delta \mathbf{w}^A \times \mathbf{a}_3^A$ .

En considérant que les déplacements virtuels  $\delta \varphi^h$  et les rotations virtuelles  $\delta \mathbf{w}^h$  sont interpolés de la manière isoparamétrique par rapport à (150),

$$\delta \varphi \Big|_{\mathcal{A}^e} = \sum_{I=1}^{Nen} N_I(\xi_1, \xi_2) \delta \varphi_I \tag{161}$$

et

$$\delta \mathbf{w} \Big|_{\mathcal{A}^e} = \sum_{I=1}^{Nen} N_I(\xi_1, \xi_2) \delta \mathbf{w}_I, \tag{162}$$

par (159) nous pouvons obtenir une forme matricielle pour les déformations virtuelles comme

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{\gamma}_1 \\ \delta \tilde{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_\varphi \delta \mathbf{u}_\varphi + \bar{\mathbf{B}}_w \delta \mathbf{u}_w, \tag{163}$$

où

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_\varphi^T &= \langle \delta \varphi_1, \delta \varphi_2, \delta \varphi_3, \delta \varphi_4 \rangle, \\ \delta \mathbf{u}_w^T &= \langle \delta w_1, \delta w_2, \delta w_3, \delta w_4 \rangle \end{aligned} \tag{164}$$

et

$$\bar{\mathbf{B}}_\varphi^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \xi_2) \mathbf{a}_3^B{}^T & -(1 - \xi_1) \mathbf{a}_3^A{}^T \\ (1 - \xi_2) \mathbf{a}_3^B{}^T & -(1 + \xi_1) \mathbf{a}_3^C{}^T \\ (1 + \xi_2) \mathbf{a}_3^D{}^T & (1 + \xi_1) \mathbf{a}_3^C{}^T \\ -(1 + \xi_2) \mathbf{a}_3^D{}^T & (1 - \xi_1) \mathbf{a}_3^A{}^T \end{bmatrix}, \tag{165}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_w^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 - \xi_2)(\mathbf{a}_3^B \times \varphi_{,\xi_1}^B)^T & (1 - \xi_1)(\mathbf{a}_3^A \times \varphi_{,\xi_2}^A)^T \\ (1 - \xi_2)(\mathbf{a}_3^B \times \varphi_{,\xi_1}^B)^T & (1 + \xi_1)(\mathbf{a}_3^C \times \varphi_{,\xi_2}^C)^T \\ (1 + \xi_2)(\mathbf{a}_3^D \times \varphi_{,\xi_1}^D)^T & (1 + \xi_1)(\mathbf{a}_3^C \times \varphi_{,\xi_2}^C)^T \\ (1 + \xi_2)(\mathbf{a}_3^D \times \varphi_{,\xi_1}^D)^T & (1 - \xi_1)(\mathbf{a}_3^A \times \varphi_{,\xi_2}^A)^T \end{bmatrix}. \tag{166}$$

### 5.2. Linéarisation cohérente d'équations variationnelles discrètes

Pour les valeurs nodales indépendantes des déplacements virtuels  $\delta \varphi_I$  et des rotations virtuelles  $\delta w_I$ , l'équation variationnelle discrète dans (158) conduit à un système d'équations algébriques non-linéaires. Si elles ont été résolues par une méthode itérative (e.g., voir [Zie91] ou [Bat95]), en employant une méthode de Newton, on doit effectuer la linéarisation cohérente (voir [MH83], Ch. 4) afin d'obtenir une forme consistante de l'opérateur tangent, et garantir un taux de convergence quadratique.

On note que la réalisation d'un taux de convergence quadratique de la méthode de Newton, n'est pas la seule raison pour laquelle on a besoin de

l'opérateur tangent cohérent, et qu'un tel opérateur soit aussi indispensable dans l'étude des problèmes de stabilité et de bifurcation.

La procédure de linéarisation cohérente dépend directement du choix des paramètres pour les rotations finies. Dans le cas où on utilise une matrice orthogonale pour représenter les grandes rotations, on peut aboutir à la forme linéarisée suivante

$$\begin{aligned}
 L[G(\varphi^h, \Lambda^h, \delta\varphi^h, \delta w^h)] &= G(\varphi^h, \Lambda^h, \delta\varphi^h, \delta w^h) \\
 &+ \frac{d}{d\alpha} [G(\varphi^h + \alpha \Delta\varphi^h, \exp(\alpha \Delta W^h) \Lambda^h, \delta\varphi^h, \delta w^h)] \Big|_{\alpha=0} \\
 &= 0, \tag{167}
 \end{aligned}$$

où  $\Delta\varphi^h$  et  $\Delta w^h$  sont, respectivement, les incréments de déplacements et de rotations. Le premier terme du côté droit dans (167), donne lieu au vecteur résidu, tandis que le second terme conduit à la matrice de rigidité tangente, qui peut être écrite comme

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\alpha} [G(\varphi^h + \alpha \Delta\varphi^h, \exp(\alpha \Delta W^h) \Lambda^h, \delta\varphi^h, \delta w^h)] \Big|_{\alpha=0} &= \\
 \int_{\mathcal{A}^h} \{ \delta\tilde{\gamma}_\alpha^h C^{\alpha\beta} \Delta\tilde{\gamma}_\beta^h + \Delta\delta\tilde{\gamma}_\alpha^h q^{\alpha h} \} dA. &\tag{168}
 \end{aligned}$$

En considérant que le même formalisme comme dans (163) s'applique au calcul de  $\Delta\tilde{\gamma}_\alpha^h$  mais avec des déplacements et des rotations incrémentaux remplaçant les objets virtuels correspondants, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \Delta\tilde{\gamma}_1 \\ \Delta\tilde{\gamma}_2 \end{pmatrix} = \bar{B}_\varphi \Delta u_\varphi + \bar{B}_w \Delta u_w, \tag{169}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Delta u_\varphi^T &= \langle \Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \Delta\varphi_4 \rangle; \\
 \Delta u_w^T &= \langle \Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3, \Delta w_4 \rangle. \tag{170}
 \end{aligned}$$

tandis que  $\bar{B}_\varphi$  et  $\bar{B}_w$  sont les mêmes que dans (165) et (166). Avec ces notations en main, nous pouvons écrire le premier terme de la matrice de rigidité tangente comme

$$\int_{\mathcal{A}^h} \{ \delta\tilde{\gamma}_\alpha^h C^{\alpha\beta} \Delta\tilde{\gamma}_\beta^h \} dA = \begin{pmatrix} \delta u_\varphi \\ \delta u_w \end{pmatrix} \cdot \int_{\mathcal{A}^h} \{ [\bar{B}_\varphi \bar{B}_w]^T C [\bar{B}_\varphi \bar{B}_w] \} dA \begin{pmatrix} \Delta u_\varphi \\ \Delta u_w \end{pmatrix}, \tag{171}$$

qui représente sa partie dite matérielle. Le second terme dans (168) conduit à la partie dite géométrique de la matrice de rigidité tangente. Pour obtenir la

forme explicite de ce terme, nous calculons d'abord

$$\begin{aligned} \Delta\delta\gamma_2^A &= \varphi_{,\xi_2}^A \cdot [\mathbf{a}_3^A \times \mathbf{I}]^T \Delta\mathbf{w}^A + \delta\mathbf{w}^A \cdot [\mathbf{a}_3^A \times \mathbf{I}] \Delta\varphi_{,\xi_2}^A \\ &\quad + \delta\mathbf{w}^A \cdot [(\mathbf{a}_3^A \otimes \varphi_{,\xi_2}^A) - (\mathbf{a}_3^A \cdot \varphi_{,\xi_2}^A)\mathbf{I}] \Delta\mathbf{w}^A, \end{aligned} \quad (172)$$

où nous avons utilisé l'identité vectorielle

$$((\Delta\mathbf{w}^A \times \mathbf{a}_3^A) \times \varphi_{,\xi_2}^A) \cdot \delta\mathbf{w}^A = \delta\mathbf{w}^A \cdot [(\mathbf{a}_3^A \otimes \varphi_{,\xi_2}^A) - (\mathbf{a}_3^A \cdot \varphi_{,\xi_2}^A)\mathbf{I}] \Delta\mathbf{w}^A.$$

Le même calcul est fait pour d'autres composantes de cisaillement et cela conduit finalement à la représentation suivante des contributions des efforts de cisaillement à la matrice de rigidité géométrique.

$$\int_{\mathcal{A}^h} \{\Delta\delta\tilde{\gamma}_\alpha^h \tilde{q}^{\alpha h}\} dA = \delta\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E} \Delta\mathbf{u}_w + \delta\mathbf{u}_w \cdot \mathbf{E}^T \Delta\mathbf{u}_\varphi + \delta\mathbf{u}_w \cdot \mathbf{H} \Delta\mathbf{u}_w, \quad (173)$$

où la forme explicite des matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  peut facilement être déduite (voir [SFR90] ou [Ibr95b]).

Après avoir calculé les incréments de déplacements  $\Delta\varphi^h$  et de rotations  $\Delta\mathbf{w}^h$ , nous devons actualiser leurs valeurs précédentes. L'actualisation des déplacements est additive, tandis que celle des rotations est multiplicative, accomplie tant que l'orthogonalité de la matrice de rotation est préservée. Pour la représentation des rotations finies par quaternions (voir section 2), le tableau 1, donne la démarche utilisée.

En accord avec la discussion donnée dans la section 2, on peut aussi utiliser le vecteur de rotation pour paramétriser les rotations finies. La procédure du calcul n'est plus la même et l'opérateur tangent change significativement par rapport à celui utilisé pour les quaternions. Une discussion détaillée de toutes ces questions est présentée dans [Ibr95b]. Dans la suite, nous donnons seulement une description courte. En utilisant l'interpolation isoparamétrique pour le vecteur de rotation

$$\boldsymbol{\theta}^h \Big|_{A^e} = \sum_{I=1}^{N_{en}} N_I(\xi_1, \xi_2) \boldsymbol{\theta}_I, \quad (174)$$

on peut directement calculer sa valeur pour chaque point d'approximation indépendante du cisaillement, qui peut être utilisée dans (13) pour calculer directement les valeurs correspondantes de la matrice de rotation  $\mathbf{A}^A$ , le vecteur directeur  $\mathbf{a}_3^A$  et les déformations de cisaillement  $\tilde{\gamma}_2^A$  dans (149).

La déformation virtuelle de cisaillement au point  $A$  prend alors la forme

$$\delta\gamma_2^A = \mathbf{a}_3^A \cdot \delta\varphi_{,\xi_2}^A + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}^A) (\mathbf{a}_3^A \times \varphi_{,\xi_2}^A) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}^A, \quad (175)$$

et une expression similaire peut être obtenue pour les autres points de cisaillement  $B, C$  et  $D$  (voir figure 17). Cela peut alors être réécrit en notation



matricielle comme dans (163), mais avec une forme un peu plus lourde de la matrice  $\mathbf{B}_w$  et avec  $\mathbf{u}_\theta = \langle \delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3, \delta\theta_4 \rangle^T$  remplaçant  $\delta\mathbf{u}_w$ .

La linéarisation cohérente est à présent réalisée suivant

$$\begin{aligned} L[G(\varphi^h, \theta^h, \delta\varphi^h, \delta\theta^h)] &= G(\varphi^h, \theta^h, \delta\varphi^h, \delta\theta^h) \\ &+ \left. \frac{d}{d\alpha} \left[ G(\varphi^h + \alpha \Delta\varphi^h, \theta^h + \alpha \Delta\theta^h, \delta\varphi^h, \delta\theta^h) \right] \right|_{\alpha=0} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (176)$$

où  $\Delta\theta^h$  est l'incrément du vecteur de rotation. La matrice de rigidité tangente prends une forme beaucoup plus complexe (voir [Ibr95b]) que pour le choix précédent des paramètres de rotation incrémentale. Cependant, cela simplifie la procédure d'actualisation de rotation puisque les paramètres des rotations sont directement additifs (voir tableau 2).

- calculer les paramètres de rotation incrémentales

$$\Delta\theta^A = \frac{1}{2}(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_4)$$

- actualiser le vecteur rotation

$$\theta^A \leftarrow \theta^A + \Delta\theta^A$$

- calculer la matrice orthogonale correspondante

$$\mathbf{A}^A = \cos\theta^A \mathbf{I} + \frac{\sin\theta^A}{\theta^A} \mathbf{\Theta}^A + \frac{1 - \cos\theta^A}{(\theta^A)^2} \theta^A \otimes \theta^A$$

- actualiser la rotation initiale

$$\mathbf{a}_3^A = \mathbf{A}^A \mathbf{g}_3^A$$

Tableau 2. Actualisation additive de rotation au point A

## 6. Exemples numériques

### 6.1. Problèmes illustratifs sur les grandes rotations

Nous commençons par considérer trois problèmes représentatifs qui mettent en évidence la capacité de la formulation pour modéliser les coques subissant

de grandes rotations. Une attention spéciale est donnée pour démontrer la robustesse de nouveaux éléments de coques.

### 6.1.1. Enroulement d'une poutre encastrée

Une coque initialement plate encastrée à une extrémité, est soumise à un moment de flexion à l'autre extrémité. La solution exacte pour la configuration déformée correspond à un cercle (ou une partie du cercle), dont le rayon  $\rho$  est donné par la formule classique d'Euler :

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M}{EI}$$

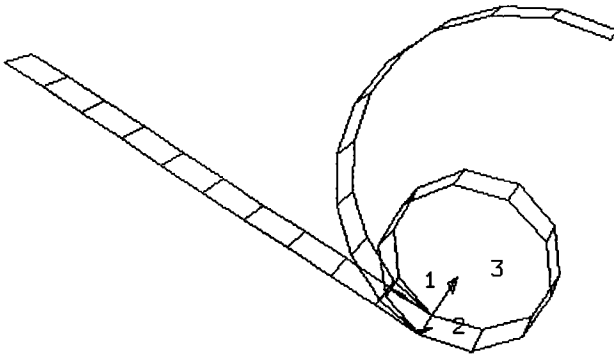
où  $M$  est le moment appliqué. Nous supposons (d'après [SFR90]) que la valeur de ce moment est  $M = 879.646$ , le module d'Young  $E = 21000$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0$ , la longueur  $l = 100$ , la largeur  $b = 1$  et l'épaisseur  $h = 2$ , ce qui, en accord avec la formule d'Euler, correspond à l'enroulement de la coque et une rotation d'angle  $360^\circ$  de l'extrémité libre. La solution éléments finis pour dix éléments de coque à quatre nœuds basée sur les déformations dans (77) à (79), correspond en effet à la valeur exacte de la rotation de l'extrémité libre et elle donne l'allure déformée circulaire (voir figure 18).

La solution éléments finis obtenue pour le même maillage, mais avec éléments de coques employant les mesures de déformations dans (80) et (82), conduit à des valeurs un peu différentes de la rotation de l'extrémité libre, donnée comme  $361.94^\circ$  (voir [BR92]), bien que l'allure circulaire générale soit bien maintenue (voir [SFR90]).

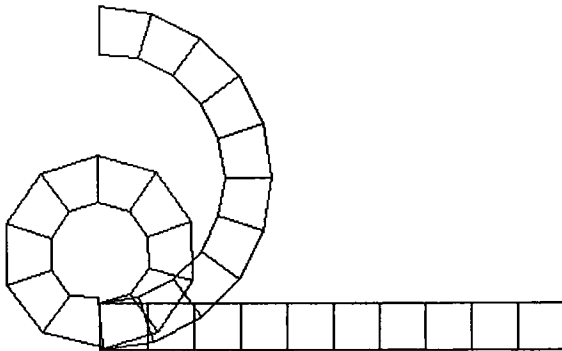
Le même cantilever a été mis dans l'état de contrainte plane produit par une flexion dans le plan avec des moments tournant autour de la normale appliqués à l'extrémité libre (d'après [Ibr94]). Pour la valeur correspondante du moment, nous calculons la forme circulaire déformée en deux pas de charges. Bien que la forme déformée générale soit très bien représentée, la valeur de la rotation de l'extrémité libre n'est pas calculée avec la même précision. Cela est dû au fait que le moment n'est pas une charge consistante, ce qui introduit des perturbations locales. Cet effet, en accord avec le principe de St. Venant, diminue assez rapidement (voir figure 19).

Le même exemple est utilisé comme test pour vérifier la robustesse des éléments. Seulement la première partie du test est répétée avec les nouvelles caractéristiques choisies et un maillage de trois éléments d'après [DB84]. Les résultats numériques sont calculés aussi bien pour le maillage régulier que pour le maillage distordu (voir figure 20).

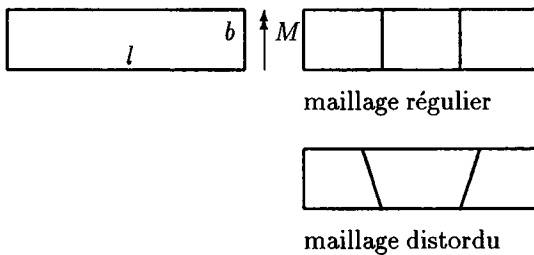
Dans la figure 21, les résultats obtenus pour le maillage régulier sont comparés avec la solution analytique exacte (voir [Ibr95b]) et aussi avec le résultat numérique de [DB84]. Il est évident que nos résultats numériques sont essentiellement exacts pour ce cas test, tandis que les résultats de [DB84] ont une déviation. On trouve la même amélioration pour les résultats obtenus avec le maillage distordu (voir tableau 3).



**Figure 18.** Déformée pour l'enroulement d'une poutre encastrée. Solution pour le modèle plaque



**Figure 19.** Déformée pour l'enroulement d'une poutre encastrée. Solution pour le modèle en contrainte plane



**Figure 20.** Poutre cantilever avec moment à l'extrémité libre. Maillage régulier et distordu à trois éléments

Résultat / Comp. Dépl.	Hor.	Ver.	Rot.
Dvorkin et Bathe [1984]	0.813	3.849	37.8°
Ibrahimbegović [1995]	1.154	4.287	43.4°
Analytique	1.196	4.475	45.0°

Tableau 3. Déplacement de l'extrémité libre pour un maillage distordu

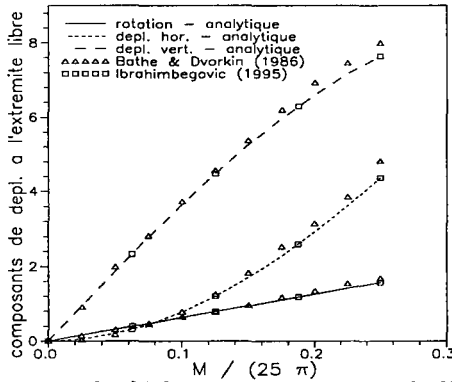


Figure 21. Composantes de déplacement et rotation de l'extrémité libre pour la poutre cantilever obtenues avec un maillage régulier à trois éléments

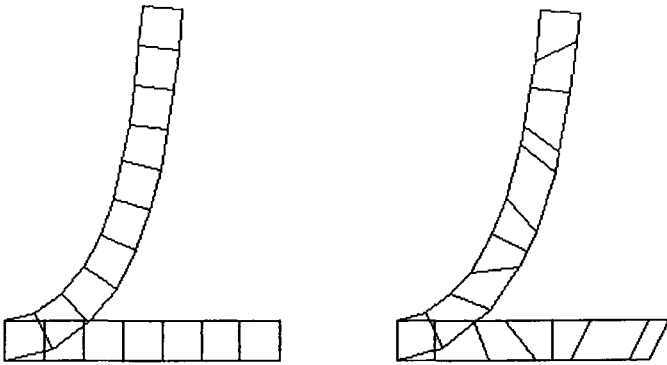
En considérant que les deux éléments coques, celui de [Ibr95b] et celui de [DB84], utilisent la même approximation pour les déformations de cisaillement, cet écart des résultats numériques peut seulement provenir du type de formulation théorique que l'on utilise.

6.1.2. Flexion dans le plan de la poutre : maillage distordu

Ce problème sert à illustrer les performances des interpolations spéciales en membranes (mixtes-hybrides de [SFR90] et modes incompatibles de [IF93]) et leurs insensibilités à un maillage distordu. Une poutre cantilever est soumise à son extrémité à une charge latérale. Nous utilisons premièrement un maillage régulier et un maillage distordu à dix éléments pour obtenir des solutions éléments finis (voir figure 22).

Les propriétés matérielles utilisées pour ce calcul sont : module d'Young  $E = 120000$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0$  et force à l'extrémité  $F = 100$ . Le cantilever est d'une unité de longueur, avec épaisseur et largeur égales  $h = b = 0.1$ .

Les configurations initiales et déformées, présentées sur la figure 22, indiquent que les résultats sont essentiellement les mêmes pour les deux maillages et ne font pas preuve de sensibilité à la distorsion de maillage.



**Figure 22.** Configuration initiale et déformée utilisant des éléments carrés et arbitrairement déformés pour discrétiser un problème de flexion de poutre dans le plan

### 6.1.3. Plaque sous forme d'anneau

Cet exemple présente de grandes rotations, pour une plaque sous forme d'anneau ouvert, encasté à une extrémité et à l'autre chargé avec des charges verticales réparties uniformément  $p = 0.1$ . Les caractéristiques mécaniques choisies sont : module d'Young  $E = 2.1 \cdot 10^7$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0$ . La plaque a pour rayon intérieur  $R_i = 6$ , et pour rayon extérieur  $R_o = 10$ , et son épaisseur est  $h = 0.03$ . Cet exemple, proposé par [BD92a] et, [BR92], est un très bon test de la capacité des éléments à tenir compte des grandes rotations.

L'analyse est accomplie avec un maillage de  $32 \times 4$  éléments, pour la charge augmentée soixante fois par rapport à la charge initiale. Le résultat obtenu pour l'allure déformée finale est dessiné sur la figure 23. Le diagramme charge-déplacement est présenté sur la figure 24, ainsi que les résultats obtenus avec le même nombre d'éléments par [JF86], et les résultats de [BR92] obtenus avec un maillage composé de  $16 \times 2$  éléments de coque à seize nœuds.

### 6.1.4. Taux de convergence pour la méthode de Newton

Dans ce travail, une attention considérable a été apportée à fournir une matrice de rigidité tangente cohérente. Puisque la méthode de Newton est utilisée pour tous les exemples que nous avons résolu, un taux de convergence asymptotiquement quadratique est en effet constaté. Il est intéressant de noter que les deux types de paramétrisation des rotations finies, présentés en section 2, conduisent à des propriétés de convergence presque identiques. Les taux typiques de convergence pour ces exemples sont présentés dans les tableaux 4, 5 et 6 suivants.

## 6.2. Flambement linéaire

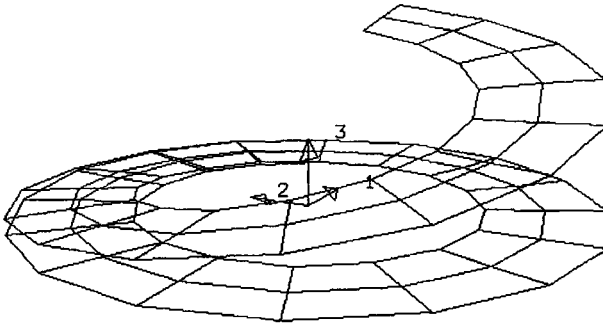


Figure 23. Configuration initiale et déformée d'une plaque en forme d'anneau soumise à un chargement vertical à son extrémité libre

No. d'itération	norme du résidu	norme d'énergie
0	$2.221 \times 10^1$	$1.028 \times 10^2$
1	$1.301 \times 10^4$	$7.855 \times 10^4$
2	$5.455 \times 10^0$	$6.061 \times 10^{-1}$
3	$1.886 \times 10^0$	$4.411 \times 10^{-3}$
4	$6.869 \times 10^{-3}$	$5.193 \times 10^{-6}$
5	$5.948 \times 10^{-4}$	$2.831 \times 10^{-10}$
6	$3.935 \times 10^{-10}$	$3.963 \times 10^{-20}$

Tableau 4. Taux de convergence pour un cantilever enroulé

Nous présentons deux problèmes de l'analyse classique de flambement. Dans l'analyse de la stabilité deux approches peuvent être suivies : l'analyse classique en flambement dit linéaire dans le cas où on trouve de petits déplacements en pré-flambement et l'analyse en flambement dit non-linéaire où il faut tracer la réponse (en général) non-linéaire jusqu'au point de bifurcation et au-delà.

Dans le premier cas, le problème se conduit linéairement jusqu'au point de bifurcation. La rigidité géométrique est donc une fonction linéaire du niveau de charge, ce qui conduit à une forme spéciale de la matrice de rigidité tangente

$$\left[ \mathbf{K}_m \Big|_{\phi=idem} + \lambda \mathbf{K}_g \Big|_{\phi=idem} \right] \phi = \mathbf{o} .$$

Cette dernière expression n'est que le problème aux valeurs propres, dont la solution  $\lambda$  est la charge de bifurcation.

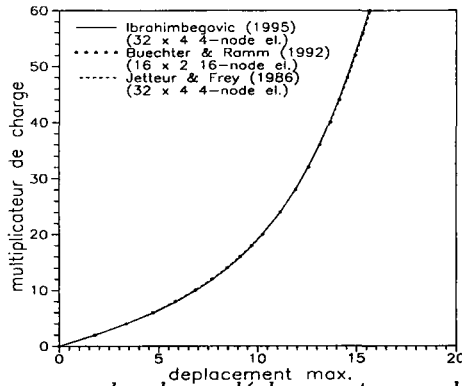


Figure 24. Diagramme de charge-déplacement pour la plaque en forme d'anneau soumise à un chargement vertical à son extrémité libre

No. d'itération	norme du résidu	norme d'énergie
0	$1.768 \times 10^1$	$2.313 \times 10^0$
1	$8.728 \times 10^2$	$6.341 \times 10^0$
2	$1.959 \times 10^0$	$1.189 \times 10^{-1}$
3	$3.984 \times 10^{-1}$	$1.318 \times 10^{-2}$
4	$6.032 \times 10^{-3}$	$8.773 \times 10^{-7}$
5	$3.150 \times 10^{-4}$	$8.238 \times 10^{-13}$
6	$4.902 \times 10^{-11}$	$2.568 \times 10^{-26}$

Tableau 5. Taux de convergence pour un cantilever sous l'action d'une force à l'extrémité libre

### 6.2.1. Charge dans le plan d'une plaque simplement appuyée

Une plaque carrée simplement appuyée est soumise aux bords à une charge compressive dans le plan.

Les propriétés matérielles utilisées dans l'analyse sont : module d'Young  $E = 10 \times 10^6$  et coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La longueur de chaque côté est  $a = 10$ , et l'épaisseur  $h = 0.1$ . Le modèle est choisi et les conditions aux limites sont imposées en exploitant la symétrie du modèle pour un quart de la plaque (voir figure 25). L'analyse en flambement linéaire est effectuée pour différents nombres d'éléments dans un maillage régulier. Les résultats calculés pour la charge critique sont dessinés sur la figure 26 et comparés avec le résultat analytique ( $n_{cr} = 4\pi^2 D/a^2$ ).

### 6.2.2. Cylindre en compression axiale

Le flambement d'un cylindre en compression axiale est un problème classique, étudié dans la littérature par les méthodes analytiques, expérimentales et

No. d'itération	norme du résidu	norme d'énergie
0	$2.451 \times 10^1$	$6.286 \times 10^1$
1	$4.979 \times 10^3$	$1.423 \times 10^2$
2	$4.378 \times 10^1$	$1.188 \times 10^{-2}$
3	$3.431 \times 10^1$	$3.084 \times 10^{-3}$
4	$1.815 \times 10^1$	$9.814 \times 10^{-4}$
5	$2.695 \times 10^0$	$1.703 \times 10^{-5}$
6	$6.854 \times 10^{-2}$	$1.653 \times 10^{-8}$
7	$1.290 \times 10^{-4}$	$5.092 \times 10^{-14}$
8	$3.363 \times 10^{-8}$	$4.556 \times 10^{-20}$

**Tableau 6.** Taux de convergence pour la plaque cantilever en forme d'anneau

numériques. Il est déjà bien connu que la charge de flambement soit largement insensible aux conditions aux limites au sommet (sauf pour les bords libres), pourvu que le cylindre soit suffisamment long, c'est-à-dire  $l/R > 2$ , avec  $l$  la longueur et  $R$  le rayon de ce cylindre. La solution analytique est donnée par

$$p_{cr} = Eh/R\sqrt{3(1-\nu^2)}$$

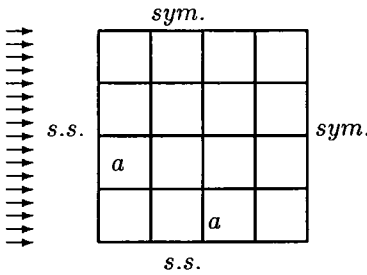
où  $h$  est l'épaisseur de la coque cylindrique.

D'autre part, pour des valeurs extrêmement petites du rapport  $l/R$ , le comportement de la coque ressemble à celui d'un ensemble de petites bandes méridiennes, et la charge de flambement tend vers la formule classique d'Euler pour une colonne. Dans ce cas, les effets des conditions aux limites deviennent cruciaux, et la charge de flambement du cylindre avec des appuis simples sera beaucoup plus petite que celle du même cylindre encasté.

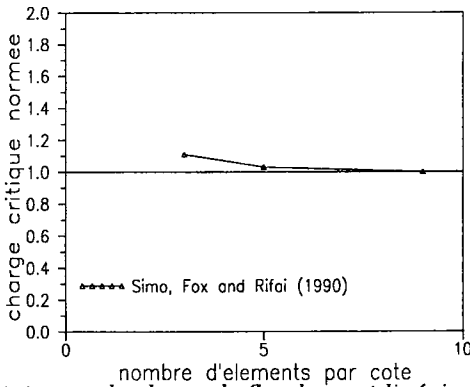
Dans les simulations numériques de [SFR90], un cylindre mince ( $R/h \approx 400$ ) est considéré dans l'étude des effets qu'ont sur la charge critique, les différentes valeurs de  $l/R$  et les différentes conditions aux limites. Un maillage de  $20 \times 20$  éléments à quatre nœuds est utilisé pour modéliser un huitième du cylindre, en utilisant les conditions de symétries appropriées. Les caractéristiques de la coque sont : module d'Young  $E = 567$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , le rayon du cylindre  $R = 100$  et l'épaisseur  $h = 0.247$ . Les résultats obtenus pour la charge critique normée par la valeur classique de  $p_{cr}$  sont présentés sur la figure 27 pour plusieurs valeurs du rapport  $l/R$ .

Il est évident que ces simulations numériques donnent la charge critique plus grande pour les cylindres courts encastés que pour les cylindres courts avec des appuis simples. Pour de longs cylindres, le résultat numérique pour les charges critiques, dans les deux cas, converge vers le résultat analytique. Par conséquent, tous ces résultats sont en parfait accord avec le comportement classique des coques cylindriques, comme décrit précédemment.





**Figure 25.** Définition du problème pour le flambement d'une plaque simplement appuyée



**Figure 26.** Résultats pour la charge de flambement linéaire d'une plaque carrée avec des appuis simples

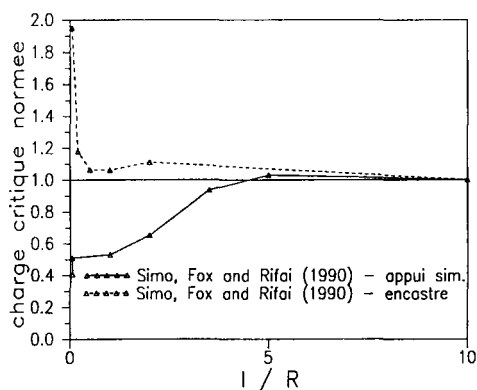
### 6.3. Flambement non-linéaire, claquement et post-flambement

Quand les déplacements en pré-flambement ne sont pas petits, l'analyse du flambement linéaire ne s'applique plus, parce que les hypothèses fondamentales s'écroulent. Dans ce cas, le chemin complet de déformations doit être tracé jusqu'à ce que le point limite ou le point de bifurcation soit détecté. En arrivant sur ce point, la matrice de rigidité tangente  $K_t$  devient singulière et le problème suivant aux valeurs propres

$$\left[ K_t \Big|_{\phi} + \lambda I \right] \psi = 0$$

a  $\lambda = 0$  comme solution. Dans le calcul pratique, le point de singularité de la matrice de rigidité tangente est signalé par un changement de signe de son déterminant.

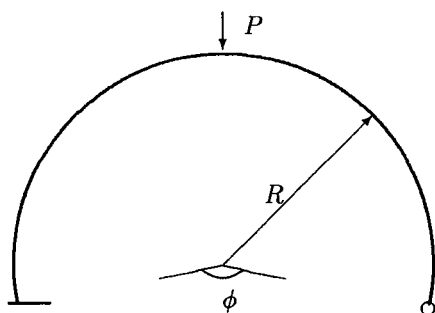
Dans la suite, nous nous intéressons aux calculs de flambement non-linéaire et des réponses post-flambement des coques.



**Figure 27.** Résultats pour la charge de flambement linéaire d'un cylindre en compression axiale

### 6.3.1. Analyse de post-flambement d'un arc circulaire

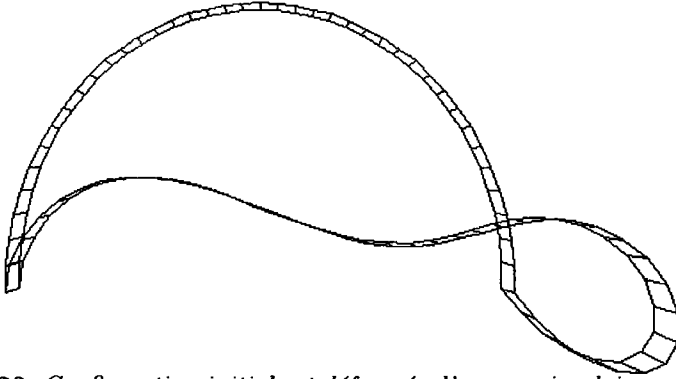
L'analyse de flambement et post-flambement d'un arc circulaire (voir figure 28), avec un appui simple à une extrémité et l'encastrement à l'autre, est effectuée pour une force verticale appliquée au milieu. Les caractéristiques choisies sont : module d'Young  $E = 9.6 \times 10^7$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0$ , rayon  $R = 100$ , épaisseur  $h = 0.5$ , largeur  $b = 1$  et angle central  $\phi = 145^\circ$ .



**Figure 28.** Arc circulaire avec force verticale appliquée au milieu : une extrémité simplement appuyée l'autre encastree

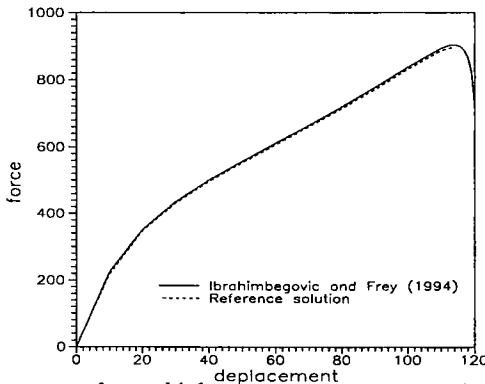
Le résultat numérique pour la charge critique est obtenue comme  $P_{cr} = 904$ , pour un maillage de quarante éléments de coques à quatre nœuds (voir figure 29), ce qui correspond bien à la solution de référence de [DS75],  $P_{ref} = 897$ . Le diagramme charge-déplacement calculé pour le point où la charge est appliquée, est dessiné sur la figure 30 avec le résultat de référence. Il

est évident qu'un très bon accord de ces deux résultats est obtenu non seulement pour la valeur de la charge critique, mais aussi pour tout le diagramme charge-déplacement.



**Figure 29.** Configuration initiale et déformée d'un arc circulaire soumis à une charge verticale au milieu

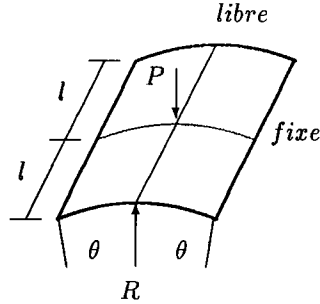
Par la figure 30, il est également évident que de très larges déplacements précèdent l'état critique. Ainsi, ce problème doit être traité comme un problème de flambement non-linéaire.



**Figure 30.** Diagramme force-déplacement pour un arc circulaire pour le point où la charge est appliquée

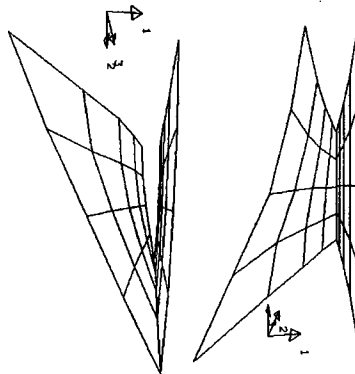
### 6.3.2. Claquement d'une coque cylindrique avec appuis simples

Le problème de l'analyse non-linéaire d'une coque cylindrique avec appuis simples (voir figure 31) est un autre exemple de problème de flambement non-linéaire. La coque peu profonde est soumise à une charge centrale, dont la valeur augmente, ce qui conduit, éventuellement, à un claquement de la coque et au renversement de sa courbure.



**Figure 31.** Définition du problème de cloquage d'une coque cylindrique avec appuis simples

Les caractéristiques choisies sont : module d'Young  $E = 3102.75N/mm^2$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , rayon de la coque  $R = 2540mm$ , longueur  $l = 254mm$ , épaisseur  $h = 12.7mm$  et angle central  $\theta = 0.1rad$ . Ce problème est simulé en utilisant un maillage de  $4 \times 4$  éléments à quatre nœuds sur un quart de la coque en appliquant des conditions de symétrie appropriées (voir déformée sur la figure 32).



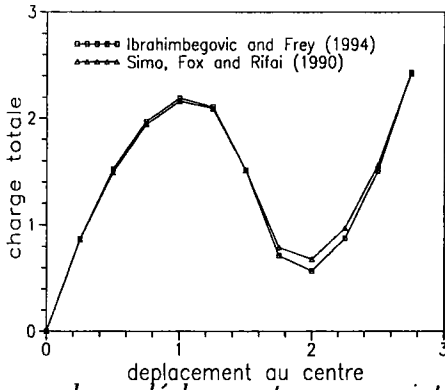
**Figure 32.** Configuration initiale et déformée de coque peu profonde

Les diagrammes charge-déplacement obtenus pour les deux formulations de coque présentées dans la section 3, sont dessinés sur la figure 33.

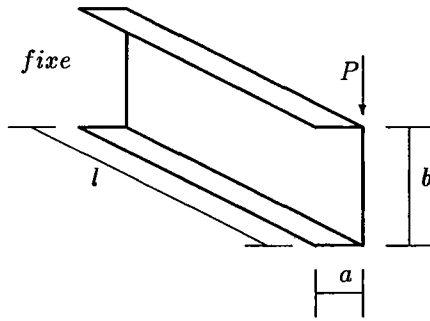
L'analyse a été effectuée par le contrôle en déplacements. La procédure de résolution se montre très solide même si l'on utilise de très grands incréments de déplacements.

### 6.3.3. Analyse de post-flambement d'une plaque plissée

Une plaque plissée (figure 34) est un problème représentatif de beaucoup de cas pratiques où on a besoin de traiter des coques dont la surface moyenne est non lisse. La théorie des coques avec rotation autour de la normale [Ibr94] peut directement être utilisée pour obtenir la solution de ce problème. De plus,



**Figure 33.** Diagramme charge-déplacement pour un point central de coque peu profonde



**Figure 34.** Plaque cantilever plissée

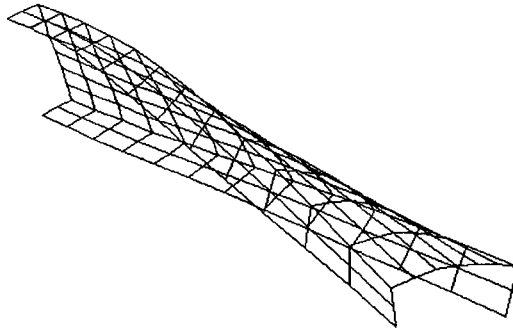
la présence de rotation autour de la normale est très importante pour coupler proprement des effets de flexion dans les ailes et de membrane dans l'âme.

Les caractéristiques choisies sont : module d'Young  $E = 10^7 N/cm^2$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0.333$ , longueur  $l = 36cm$ , largeur  $a = 2cm$ , hauteur  $b = 6cm$  et épaisseur  $h = 0.05cm$ .

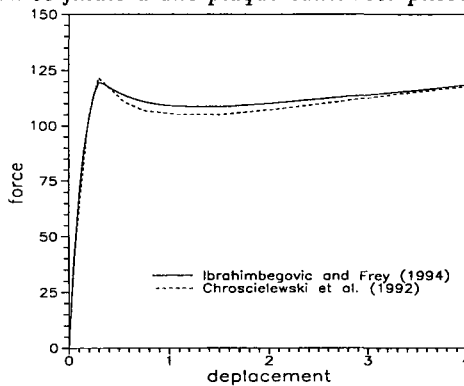
L'analyse est effectuée sous contrôle des déplacements jusqu'à la valeur finale de 4 cm. La déformée résultante est montrée sur la figure 35 et le diagramme de charge-déplacement est dessiné sur la figure 36.

Il est intéressant de noter que seulement l'aile supérieure subit de grands déplacements latéraux, tandis que les déplacements dans l'aile inférieure restent plutôt petits.

## 7. Remarques finales



**Figure 35.** Déformée finale d'une plaque cantilever plissée



**Figure 36.** Diagramme de charge-déplacement pour la plaque cantilever plissée

### 7.1. Aperçu de différents progrès

Dans cet article, nous avons attiré l'attention seulement sur les très récents progrès en formulation et en implantation numérique concernant la théorie des coques, capables de manier les rotations finies. Plusieurs points méritent une attention particulière :

- (i) La théorie classique des coques est reformulée afin de devenir capable de manier les rotations finies tridimensionnelles. Cette vertue particulière est en contraste avec les développements classiques sur ce sujet (e.g., voir [Bud68, Nag72, Rei74]), où on utilise toujours une restriction sur la rotation (linéaire, second ordre, etc.).
- (ii) Une paramétrisation optimale des rotations finies est étudiée en détail, avec l'examen de plusieurs possibilités. Une possibilité qui correspond à la théorie classique des coques, conduit à une représentation à deux

paramètres construite en exploitant l'équivalence entre la sphère unité et un sous-groupe de tenseurs orthogonaux. Une autre possibilité qui fait intervenir la paramétrisation intrinsèque des rotations en termes de tenseur orthogonal, est utilisée pour construire une théorie non classique des coques avec la rotation autour de la normale. La paramétrisation des rotations finies par tenseur orthogonal peut aussi être remplacée par la paramétrisation utilisant le vecteur de rotation.

- (iii) Plusieurs travaux récents ont été proposés pour améliorer l'interpolation éléments finis pour les éléments de coques. Même si quelques-unes d'entre elles, telles que les interpolations hybrides-mixtes, méthode de substitution de déformation ou sous-intégration avec stabilisation ont eu un succès considérable, les questions liées aux schémas d'interpolations optimales pour les coques n'ont pas été définitivement traitées jusqu'à présent. Ce qui a été démontré, toutefois, est qu'une interpolation éléments finis bien performante peut être rendue même plus puissante si elle est placée dans une structure théorique rigoureuse, et quand l'attention est portée à préserver les aspects fondamentaux de la formulation théorique.

Nous notons aussi qu'il est possible de simplifier la formulation théorique des coques en prenant en compte certains aspects de l'approximation éléments finis subséquente ; un exemple évoqué dans cet article est l'usage des bases cartésiennes locales.

- (iv) La procédure de linéarisation cohérente dans la théorie des coques géométriquement exacte est liée au choix des paramètres adoptés pour les rotations finies tridimensionnelles. Dans le cas de paramétrisation intrinsèque avec un tenseur orthogonal, la démarche de la linéarisation consistante devient assez subtile puisque nous avons à traiter une variété différentielle (le groupe  $SO(3)$ ) dans l'espace de configuration de la coque. Pour la paramétrisation de rotation basée sur le vecteur de rotation, la linéarisation cohérente peut être simplifiée par rapport au cas précédent, et elle peut être accomplie par la dérivée directionnelle.
- (v) La théorie de coque géométriquement exacte montre des performances rehaussées dans l'analyse de flambement et de post-flambement de coques, et une amélioration de la précision du résultat.
- (vi) Un sous-produit de ce travail est fourni en termes d'une théorie linéaire des coques, qui est obtenue simplement par la linéarisation cohérente de la théorie gouvernante non-linéaire sur la configuration de référence. En utilisant cette théorie linéaire avec le choix optimal des interpolations éléments finis, on obtient d'excellents résultats dans tous les problèmes tests standards.

## 7.2. Directions possibles pour les recherches futures

Ce qui a été largement recherché au cours des dix dernières années et présenté dans cet article est, en essence, la version rotation finie de la théorie classique des coques (ou surface de Cosserat avec un vecteur directeur) et sa modification qui peut supporter la troisième composante de rotation. On a seulement considéré le modèle constitutif élastique linéaire. A tous ceux qui voudraient continuer ces recherches, nous pouvons indiquer plusieurs axes qui apparaissent dignes d'explorations futures :

- (i) En généralisant, dans le cadre de la cinématique non-linéaire, les équations constitutives de coque en efforts résultants aux autres cas, plus généraux que le cas élastique linéaire. Quelques travaux dans cette direction sont déjà initiés par [SK92] et, [CP92] sur le modèle constitutif élastoplastique en efforts résultants, mais avec la limitation cruciale sur de petites déformations élastiques. Cette limitation est supprimée dans un récent travail de [IF94], qui considère le modèle constitutif en efforts résultants pour des déformations finies élastoplastiques, basé sur la décomposition multiplicative du gradient de la déformation, où aussi bien les déformations élastiques que les déformations plastiques peuvent être grandes. Cela, cependant, a été réalisé seulement pour la théorie des coques membranaires, et il n'est en aucune manière trivial de fournir une extension qui sera aussi valable pour les grandes déformations de flexion.
- (ii) Un autre modèle constitutif en efforts résultants, qui tient compte de grandes déformations élastiques, a été fourni pour les coques en caoutchouc (e.g., voir [HC83] et, [SK92]). Dans ce cas on ne peut plus justifier l'hypothèse d'inextensibilité d'un vecteur directeur, et on devrait plutôt tenir compte du changement dans l'épaisseur de la coque. Une conséquence immédiate de l'introduction d'un allongement en travers de l'épaisseur est une sensibilité numérique dans le cas limite de coques minces, qui se manifeste comme un phénomène de verrouillage. Ce problème a été déjà abordé dans plusieurs travaux. Une stratégie, préconisée par [HC83], est de différer l'actualisation de l'épaisseur à l'itération suivante, ce qui simplifie l'implantation mais augmente le nombre d'itérations. [SK92] proposent une décomposition multiplicative du champ de vecteur directeur avec une actualisation exponentielle pour l'allongement en travers de l'épaisseur, stratégie bien appropriée pour les cas limites de coques minces bien qu'elle augmente l'effort du calcul par rapport à la procédure d'actualisation standard. D'autre part, [BR94] ont simplement ajouté les modes de déformations dans la direction au travers de l'épaisseur, ce qui apparaît être suffisant pour alléger les phénomènes de verrouillage pertinents dans la procédure d'actualisation standard.

Nous notons aussi que la cinématique enrichie de la coque, où on tient compte de l'allongement en travers de l'épaisseur, est spécialement bien adaptée à l'analyse des coques constituées de matériaux composites. Quel-



ques-uns des récents travaux traitant de ce problème sont : [RC85, DR90, BDS93, GWMW94, BBR94, MDK94] et, [GKW95], entre autres.

- (iii) Plus de travail est nécessaire pour se munir d'interpolations éléments finis robustes. Un domaine qui est certainement encore flou concerne la recherche pour les éléments coque à trois nœuds de haute performance en rotation finie. Quelques tentatives dans cette direction sont représentées par les travaux de [BN85], qui font confiance à une formulation corotationnelle, par les travaux de Felippa et de ses collaborateurs (e.g., voir [FM89] et les références en dedans) en fournissant des substitutions des interpolations éléments finis pour un triangle et par le travail récent de [CLJ95].

De plus, même pour un élément coque à quatre nœuds qui est, comme montré dans cet article, déjà assez bien perfectionné, il y a toujours quelques points faibles. Un exemple dans ce sens est l'oscillation de la force de cisaillement, qui apparaît lorsque l'élément prend une forme fortement irrégulière (voir [LSV93]).

Les interpolations éléments finis d'ordre plus élevé pour les éléments coques en rotation finie n'ont pas été beaucoup recherchées, bien qu'il apparaisse que l'on devrait être capable de profiter des développements précédents sur des sujets pertinents (voir [HW86, PS88, BWS89] et, [BB93]).

- (iv) L'analyse mathématique complète des espaces éléments finis pour le problème de coque non-linéaire, n'est pas fournie jusqu'à présent. Des résultats partiels qui sont très utiles pour le traitement de cas spéciaux (e.g. explication de verrouillage), sont donnés dans [BBF89], et [Ste94] pour les plaques, et [LP94] pour les coques en membrane.

Un autre but important de l'analyse mathématique, est de fournir les estimations d'erreurs pour le problème de coque non-linéaire, afin que le raffinement de maillage adaptatif puisse être utilisé d'une manière plus rigoureuse. (Le profit de ceci est brièvement illustré dans cet article pour les problèmes de coque linéaire). Ce domaine de recherche semble être fermement lié avec et devrait certainement profiter de la recherche menée sur une définition propre de problème de coque non-linéaire par le moyen de l'analyse asymptotique de milieu continu tridimensionnel (e.g., voir [Cia91] et les références dedans).

- (v) L'analyse dynamique des coques est le cadre naturel pour beaucoup de problèmes non-linéaires, notamment la dynamique des systèmes multi-corps et le claquement de coques. L'obstacle principal pour aborder ce problème, la dynamique du groupe des rotations finies, a déjà été enlevé (e.g., voir [SK92]). Nous comptons, donc, sur plus de travaux à suivre qui vont aborder la dynamique de coques, en rotations finies.

On peut se demander si la théorie des coques, dotée des fruits des recherches futures, perdra son identité distincte et fusionnera dans une théorie générale de milieu continu tridimensionnel, laissant cela aux estimateurs d'erreurs pour proposer quand c'est approprié de profiter des hypothèses pour les structures minces. Un travail très récent de [OC19] indique qu'un tel objectif n'est pas nécessairement très loin à atteindre. Finalement, nous notons que le travail le plus récent sur la théorie des coques a été motivé par les développements en mécanique numérique et que nous espérons que la communauté des mécaniciens numériques continuera à nourrir de nouveaux développements à venir.

### Remerciements

J'aimerais remercier les professeurs J.L. Batoz, F. Frey et R. Valid pour leurs commentaires utiles et le « Pôle modélisation de Picardie » pour leur support financier. Je tiens à remercier M. P. Courtois pour son aide dans la préparation de cet article.

### 8. Bibliographie

- [ABD<sup>+</sup>79] J.H. Argyris, H. Balmer, J.St. Doltsinis, P.C. Dunne, M. Haase, G.A. Malejannakis, H.P. Mlejnek, and D.W. Scharp. Finite element method - the natural approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 17/18:1-106, 1979.
- [AIZ70] S. Ahmad, B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, int. j. numer. *Methods Eng.*, 2:419-451, 1970.
- [AMR83] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Ant76] S.S. Antman. Ordinary differential equations of nonlinear elasticity. part i: Foundations of the theories of non-linearly elastic rods and shells. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 61:307-351, 1976.
- [Ant95] S.S. Antman. *Nonlinear Problems in Elasticity*. Springer, Berlin, 1995.
- [AP93] J.H. Argyris and V.F. Poterasu. Large rotations revisited: Application of lie algebra. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 103:11-42, 1993.
- [Arg82] J.H. Argyris. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 32:85-155, 1982.
- [Atl83] S.N. Atluri. Alternate stress and conjugate strain measures and mixed variational formulations involving rigid rotations for computational analyses of finitely deformed solids with application to plates and shells. *Comput. Struc.*, 18:93-116, 1983.
- [Bat95] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [BB93] M.L. Buclelem and K.J. Bathe. Higher order mitc general shell elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:3729-3754, 1993.

- [BBF89] F. Brezzi, K.J. Bathe, and M. Fortin. Mixed-interpolated elements for reissner-mindlin plates. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28:1787–1801, 1989.
- [BBH80] J.L. Batoz, K.J. Bathe, and L.W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15:1771–1812, 1980.
- [BBR94] M. Braun, M. Bischoff, and E. Ramm. Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates. *Comp. Mech.*, 15:1–18, 1994.
- [BD85] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A four-node plate bending element based on mindlin-reissner plate theory and a mixed interpolation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21:367–383, 1985.
- [BD86] K.J. Bathe and E.N. Dvorkin. A formulation of general shell element - the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22:697–722, 1986.
- [BD92a] Y. Bařar and Y. Ding. Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34:165–169, 1992.
- [BD92b] J.L. Batoz and G. Dhatt. *Modeling of Structures with Finite Elements. Vol 3: Shells, (in French)*. Hermes, Paris, 1992.
- [BDS93] Y. Bařar, Y. Ding, and R. Schultz. Refined shear deformation models for composite laminates with finite rotations. *Int. J. Solids Struct.*, 30:2611–2638, 1993.
- [BK89] Y. Bařar and W.B. Krätzig. A consistent shell theory for finite deformations. *Acta Mech.*, 76:73–87, 1989.
- [BL89] J.L. Batoz and P. Lardeur. A discrete shear triangle nine dof element for the analysis of thick to very thin plates. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 328:533–560, 1989.
- [BL94] T. Belytschko and I. Leviathan. Projection schemes for one-point quadrature shell elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 115:277–286, 1994.
- [BN85] P.G. Bergan and M.K. Nygard. *Nonlinear Shell Analysis Using Free Formulation Finite Elements, in Finite Element Method for Nonlinear Problems*, pages 317–338. eds. P.G. Bergan et al. Springer-Verlag, 1985.
- [BR92] N. Buechter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34:39–59, 1992.
- [BRR94] N. Buechter, E. Ramm, and D. Roehl. Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37:2551–2568, 1994.
- [BSL<sup>+</sup>85] T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter, and J.S. Ong. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 51:221–258, 1985.
- [Bud68] B. Budiansky. Notes on nonlinear shell theory. *J. Appl. Mech.*, 35:393–401, 1968.

- [BWC92] T. Belytschko, B.L. Wong, and H.Y. Chiang. Advances in one-point quadrature shell elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 98:93–107, 1992.
- [BWS89] T. Belytschko, B.L. Wong, and H. Stolarski. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrangian shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28:385–414, 1989.
- [CC09] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie de corps déformables, en Traité de physique*, pages 953–1173. ed. Chwolson, 1909.
- [CD87] Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette. *Analysis, Manifolds and Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [CG89] H. Cheng and K.C Gupta. An historical note on finite rotations. *ASME J. Appl. Mech.*, 56:139–145, 1989.
- [Cia91] Ph.G. Ciarlet. *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis*. Masson, Paris, 1991.
- [CLJ95] M. Carrive-Bedouani, P. Le Tallec, and Mouro J. Finite element approximation of a geometrically exact shell model. *European J. Finite Elem. - special issue*, (eds. A. Ibrahimbegović and M. Géradin), 4:633–662, 1995.
- [CMS92] J. Chroscielewski, J. Makowski, and H. Stumpf. Genuinely resultant shell finite elements for geometric and material nonlinearity. *Int. J. Numer Methods Eng.*, 35:63–94, 1992.
- [CN72] M.M. Carroll and P.M. Naghdi. The influence of the reference geometry on the response of elastic shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 48:302–318, 1972.
- [CP92] M.A. Crisfield and X. Peng. *Stress Resultant Plasticity Criterion, in Proceedings COMPLAS III*, pages 2035–2046. Pineridge Press. (eds. D.R.J. Owen et al.), 1992.
- [Cri91] M.A. Crisfield. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. vol I: Essentials*. John Wiley, London, 1991.
- [CS60] H.C. Corben and P. Stehle. *Classical Mechanics*. John Wiley, New York, 1960.
- [DB84] E.N. Dvorkin and K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Eng. Computations*, 1:77–88, 1984.
- [DR90] K. Dörninger and F. Rammerstorfer. A layered composite shell element for elastic and thermoelastic stress and stability analysis at large deformation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30:833–858, 1990.
- [DS75] D.A. DaDeppo and R. Schmidt. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *J. Appl. Mech.*, 97:894–896, 1975.
- [ET58] J.L. Ericksen and C. Truesdell. Exact theory of stress and strain in rods in shells. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1:295–323, 1958.
- [FC73] G. Fonder and R.W. Clough. Explicit addition of rigid body motion in curved finite elements. *AIAA J.*, 11:305–315, 1973.

- [FM89] C.A. Felippa and C. Militello. *Developments in Variational Methods for High Performance Plate and Shell Elements, in Analytical and Computational Models of Shells*, pages CED-vol 3, 191–215. ASME Publ. (eds. A.K. Noor et al.), 1989.
- [FS92] D.D. Fox and J.C. Simo. A drill rotation formulation for geometrically exact shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 36:287–302, 1992.
- [GEW89] F. Gruttmann, Stein E., and P. Wriggers. Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations. *Ing. Archives*, 59:54–67, 1989.
- [GK93] H. Gebhardt and Schweizerhof K. Interpolation of curved shell geometries by low order finite elements - errors and modifications. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:287–302, 1993.
- [GKW95] F. Gruttmann, S. Klinkel, and W. Wagner. A finite rotation shell theory with application to composite structures, european j. finite elem. - special issue. (eds. A. Ibrahimbegović and M. Géradin), 4:597–632, 1995.
- [Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [GWMW94] F. Gruttmann, W. Wagner, L. Meyer, and P. Wriggers. A nonlinear composite shell element with continuous interlaminar shear stresses. *Comput. Mech.*, in press:–, 1994.
- [GWW92] F. Gruttmann, W. Wagner, and P. Wriggers. A nonlinear quadrilateral shells with drilling degrees of freedom. *Archives Appl. Mech.*, 62:1–13, 1992.
- [GZ68] A.E. Green and W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, Oxford, 1968.
- [HC83] T.J.R. Hughes and E. Carnoy. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 39:69–82, 1983.
- [HL81] T.J.R. Hughes and W.K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 26:331–362, 1981.
- [HW86] H.C. Huang and W. Wagner. A new 9-node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22:73–92, 1986.
- [Ibr94] A. Ibrahimbegović. Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations-part i: A consistent formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 118:265–284, 1994.
- [Ibr95a] A. Ibrahimbegović. A fe implementation of reissner's geometrically nonlinear beam theory: Three-dimensional curved beam finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 122:10–26, 1995.
- [Ibr95b] A. Ibrahimbegović. On assumed shear strain in finite rotation shell analysis. *Eng. Comput.*, 12:425–438, 1995.
- [Ide81] S. Idelsohn. On the use of deep, shallow or flat shell finite elements for the analysis of thin shell structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 26:321–330, 1981.

- [IF93] A. Ibrahimbegović and F. Frey. Geometrically nonlinear method of incompatible modes in application to finite elasticity with independent rotations. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:4185–4200, 1993.
- [IF94] A. Ibrahimbegović and F. Frey. Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations-part ii: Computational aspects. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 118:285–308, 1994.
- [ITW90] A. Ibrahimbegović, R.L. Taylor, and E.L. Wilson. A robust membrane quadrilateral element with drilling degrees of freedom. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30:445–457, 1990.
- [IW91] A. Ibrahimbegović and E.L. Wilson. A modified method of incompatible modes. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 7:187–194, 1991.
- [JF86] Ph. Jetteur and F. Frey. A four node marguerre element for nonlinear shell analysis. *Eng. Comput.*, 3:276–282, 1986.
- [Koi66] W.T. Koiter. On the nonlinear shell theory of thin elastic shells. *Konink. Ned. Acad., Wentensch.*, B73:1–54, 1966.
- [Kra93] W.B. Kratzig. Best nonlinear shell theory including transverse shearing and stretching. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 103:119–130, 1993.
- [Lan95] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [LP94] Y. Leino and J. Pitkaranta. On the membrane locking of  $h - p$  finite elements in a cylindrical shell problem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 37:1053–1070, 1994.
- [LSV93] M. Lyly, R. Stenberg, and T. Vihinen. A stable bilinear element for the reissner-mindlin plate model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 110:343–357, 1993.
- [Mac83] R. MacNeal. Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distribution. *Nucl. Eng. Des.*, 70:3–12, 1983.
- [Mar38] K. Marguerre. *Zur Theorie der Gekrümmten Platte Grosser Formänderung*, pages 93–101. Proceedings 5th Int. Conference Appl. Mech., 1938.
- [MDK94] J. Merk, D. Dinkler, and B. Kröplin. A comparison of higher order shell theories. *preprint*, pages –, 1994.
- [MH83] J.E. Marsden and T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1983.
- [MH85] R. MacNeal and R.L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elem. Anal. Design*, 1:3–20, 1985.
- [Min51] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18:31–38, 1951.
- [MP89] j. Makowski and W. Pietraszkiewicz. Work-conjugate boundary conditions in the nonlinear theory of thin shells. *ASME J. Appl. Mech.*, 56:395–402, 1989.
- [Nag72] P.M. Naghdi. *The Theory of Shells and Plates*. Encyclopedia of Physics (ed. S. Flugge), Springer-Verlag, Berlin, 1972.

- [NBS89] A.K. Noor, T. Belytschko, and J.C. Simo. *Analytical and Computational Models for Shells*. ASME Publication CED-vol. 3, 1989.
- [Nio85] F.I. Niordson. *Shell Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [OC19] J.T. Oden and J.R. Cho. *Adaptive hpq finite element method of hierarchical models for plate- and shell-like structures*. Proceedings USCCM III, (ed. J.N. Reddy) vol. 67, Dallas, Texas,, 19.
- [Par91] H. Parish. An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 31:127–150, 1991.
- [PB83] W. Pietraszkiewicz and J. Badur. Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Eng. Science*, 21:1097–1115, 1983.
- [PC92] X. Peng and M.A. Crisfield. A consistent co-rotational formulation for shells: Using the constant stress/constant moment triangle. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 35:1829–1847, 1992.
- [Pie84] W. Pietraszkiewicz. Lagrangian description and incremental formulation in the nonlinear theory of thin shells. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 19:115–140, 1984.
- [Pie86] W. Pietraszkiewicz. *Finite Rotations in Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Pie93] W. Pietraszkiewicz. Work-conjugate boundary conditions associated with the total rotation angle of the shell boundary. *ASME J. Appl. Mech.*, 60:785–786, 1993.
- [PS84] T.H.H. Pian and K. Sumihara. Rational approach for assumed stress finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3:575–586, 1984.
- [PS88] K.C. Park and G. Stanley. A curved  $c^0$  shell element based on assumed natural-coordinate strain. *J. Appl. Mech.*, 108:278–290, 1988.
- [RC85] J.N. Reddy and K. Chandrashekhara. Nonlinear analysis of laminated shells including transverse shear strains. *AIAA J.*, 23:440–441, 1985.
- [Rei45] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12:69–76, 1945.
- [Rei72] E. Reissner. On one-dimensional finite strain beam theory: The plane problem. *J. Appl. Math. Phys.*, 23:795–804, 1972.
- [Rei74] E. Reissner. *Theory, Experiment and Design*, chapter Linear and Non-linear Theory of Shells, in *Thin Shell Structures*, pages 29–44. (eds. Y.C. Fung and E.E. Sechler). Prentice-Hall, 1974.
- [Rei82] E. Reissner. A note on two-dimensional finite-deformation theories of shells. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 17:217–221, 1982.
- [RM86] E. Ramm and A. Matzenmiller. *Large Deformation Shell Analysis Based on the Degenerate Concept, in Finite Element Method for Plates and Shells*, pages 365–393. (eds. T.J.R. Hughes and E. Hinton). Pineridge Press, 1986.
- [SB92] C. Sansour and H. Buefler. An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34:73–115, 1992.

- [SBCK84] H. Stolarski, T. Belytschko, N. Carpenter, and J.M. Kennedy. A simple triangular curved shell element. *Eng. Comput.*, 1:210–218, 1984.
- [SD72] J.G. Simmonds and D.A. Danielson. Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. *J. Appl. Mech.*, 39:1085–1090, 1972.
- [SF89] J.C. Simo and D.D. Fox. On a stress resultants geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parameterization. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72:267–304, 1989.
- [SFR90] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultants geometrically exact shell model. part iii: The computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 79:21–70, 1990.
- [Sim82] J.G. Simmonds. *A Brief on Tensor Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [SK92] J.C. Simo and J.G. Kenedy. On a stress resultants geometrically exact shell model. part v: Nonlinear plasticity, formulation and integration algorithms. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 96:133–171, 1992.
- [SMR89] N. Stander, A. Matzenmiller, and E. Ramm. An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Eng. Comput.*, 6:58–66, 1989.
- [Sok64] I.S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis: Theory and Application to Geometry and Mechanics of Continua*. John Wiley, London, 1964.
- [Spr86] K.W. Spring. Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations: A review. *Mechanism Mach. Theory*, 21:365–373, 1986.
- [Ste94] R. Stenberg. A new finite element formulation for the plate bending problem. *preprint*, pages –, 1994.
- [Stu64] J. Stuelpnagel. On the parameterization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 6:422–430, 1964.
- [SV86] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain model. part ii: Computational aspects. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 58:79–116, 1986.
- [Tes86] A. Tessler. Curved beam elements with penalty relaxation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 23:2245–2262, 1986.
- [Val95] R. Valid. *The Nonlinear Theory of Shells through Variational Principles*. John Wiley, London, 1995.
- [Wem69] G. Wempner. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. *Int. J. Solids Struct.*, 5:117–153, 1969.
- [WG93] P. Wrigger and F. Gruttmann. Thin shells with finite rotations in biot stresses: Theory and fe implementation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36:2049–2072, 1993.
- [Wun92] W. Wunderlich. *EUROMECH 292: Modelling of Shells with Nonlinear Behavior*. TU München, 1992.
- [Zie91] O.C. Zienkiewicz. *Selected Papers from WCCM II: Modelling of Plates and Shells*, page vol. 34. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1991.



- [ZTPO90] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, P. Papadopoulos, and E. Onate. Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements. *Comput. Struct.*, 35:505–522, 1990.
- [ZTT71] O.C. Zienkiewicz, J. Too, and R.L. Taylor. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3:275–290, 1971.

Article soumis le 25 janvier 1997

Version révisée le 15 juillet 1997