

539.215 : 539.374

粉末焼結体の塑性基礎式*

大矢根守哉**, 島 進**, 鴻野雄一郎***

1. まえがき

金属粉末成形法は最近各種の機械部品の製造法の一つとして注目されている。これは金属粉末を型の中で成形して固め、焼結し、さらにこの焼結体を再成形して所定の精密な寸法に仕上げる加工法である。このプロセスの中で成形体および焼結体の見かけの密度は変化するので、加工力などの解析には従来の塑性力学を適用することはできない。たとえば圧粉体または焼結体を鍛造したり、押出したりするときの圧縮力、ダイスへの内応力、圧粉体・焼結体の密度変化などを求めることはできないのである。金属粉末および焼結体に関する塑性力学の基礎式を求める必要がある。ここでは粉末成形体よりもむしろ粉末焼結体のほうを扱うこととする。

焼結体は実質部と空げきとからなっているが、ここでは実質部の塑性変形は Levy-Mises の塑性力学法則に従うとの仮定から焼結体全体の塑性法則を導いた。

2. 塑性基礎式

2.1 ひずみ 以下で述べるひずみはすべて塑性ひずみとし弾性ひずみは考えない。

さて、焼結体は図1のようなユニットセルの集合体と考える。このユニットセルは立方体であって、その中央に立方体状の空げきがあるものとする。ユニットセルの実質部の密度を ρ_0 、その体積を v_0 、みかけの密度を ρ 、みかけの体積（ユニットセル全体の体積）を v とする。相対密度 γ と体積ひずみ ε_v を次式によって定義する。

$$\gamma = \rho / \rho_0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\varepsilon_v = \ln \frac{v}{v_0} = -\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\ln \gamma \quad \dots \dots \dots (2)$$

体積ひずみとは式(2)によれば、空げきのない場合に比べてみかけ上膨張した程度を示す体積対数ひずみであり、したがって塑性変形前に空げきを含む材料（多

孔質体）はすでに体積ひずみをもっていることになる。式(2)より

$$d\varepsilon_v = \frac{dv}{v} = -\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\gamma}{\gamma} \quad \dots \dots \dots (3)$$

となる。

図1に示すように主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の方向に座標軸1, 2, 3をとる。主ひずみ増分を $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ とすると $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$ あるいは

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - (\varepsilon_v - \varepsilon_{v0}) = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

となる。ここに ε_{v0} は初期体積ひずみである。ユニットセルの変形を考えるためにあたり、これを図2のように2成分に分け、第1成分は相似形への体積変化、第2成分は体積一定のままの形状変化とする。まず図1のユニットセルのA表面層の実質部のひずみ増分をみると、第1成分は主軸1, 2の方向へそれぞれ $d\varepsilon_v/3, d\varepsilon_v/3$ だけの膨張であり、第1成分と第2成分の合計ひずみ増分は1, 2の方向へそれぞれ $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2$ であるから、第2成分は差引きしてそれぞれ $d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3, d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3$ となる。主軸3の方向のひずみ増分は、3主軸

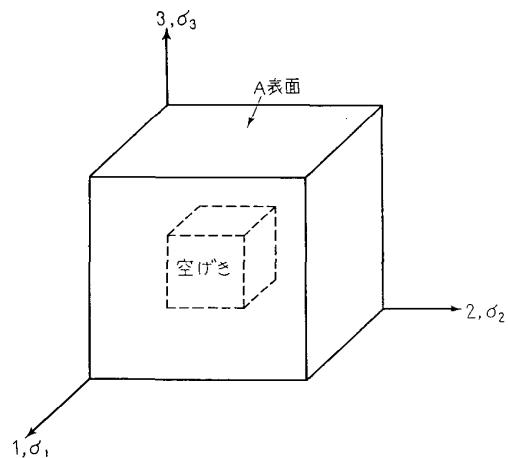


図1 ユニットセル

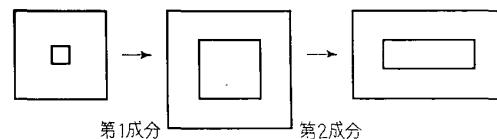


図2 ユニットセルの変形

* 昭和46年3月19日 関西支部第46期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和46年7月19日。

** 正員、京都大学工学部（京都市左京区吉田本町）。

*** 学生員、京都大学大学院。

方向のひずみ増分の和は実質部では零という条件から決められ、式(4)をも用いて主軸3方向のひずみ増分を表わすと表1のようになる。

つぎにユニットセルの実質部の内部の座標(a, b, c)の点でのひずみ増分を考える。第2成分は空げき内に体積不変であり、変形抵抗零の媒体が充満しているとみなすと、一般の金属材料の均一変形と同様に考えられ、したがって表面層の第2成分と等しくなる(表2参照)。第1成分は点の座標によって異なるのでこれを $d\varepsilon_a, d\varepsilon_b, d\varepsilon_c$ とする。したがって表2をうる。

2.2 相当ひずみ増分 点(a, b, c)での実質部の相当ひずみ増分 $d\varepsilon_{eq\ abc}$ は表2より次のようになる。

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_{eq\ abc})^2 &= \frac{2}{9} \left[\left\{ \left(d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_a \right) - \left(d\varepsilon_2 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_b \right) \right\}^2 \right. \\ &\quad + \left\{ \left(d\varepsilon_2 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_b \right) - \left(d\varepsilon_3 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_c \right) \right\}^2 \\ &\quad \left. + \left\{ \left(d\varepsilon_3 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_c \right) - \left(d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_v}{3} + d\varepsilon_a \right) \right\}^2 \right] \\ &= \frac{2}{9} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2] \\ &\quad + \frac{2}{9} [(d\varepsilon_a - d\varepsilon_b)^2 + (d\varepsilon_b - d\varepsilon_c)^2 + (d\varepsilon_c - d\varepsilon_a)^2] \\ &\quad + \frac{4}{9} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)(d\varepsilon_a - d\varepsilon_b) + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)(d\varepsilon_b - d\varepsilon_c) \\ &\quad + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)(d\varepsilon_c - d\varepsilon_a)] \end{aligned} \quad (6)$$

ユニットセルの座標軸に関する対称性から、ユニットセルの実質部全体で相当ひずみ増分の平方を平均すると式(6)の最後の項 $(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)(d\varepsilon_a - d\varepsilon_b) + \dots$ は消滅する。したがってユニットセル実質部全体での相当ひずみ増分の平均値は

$$(d\varepsilon_{eq})^2 = (\overline{d\varepsilon_{eq}})^2 + (d\varepsilon_{eq\ 2})^2 \quad (7)$$

の形式をうる。ただし $\overline{d\varepsilon_{eq\ 1}}, d\varepsilon_{eq\ 2}$ はそれぞれ第1成分、第2成分での相当ひずみ増分である。そして第1成分 $\overline{d\varepsilon_{eq\ 1}}$ は

$$\overline{d\varepsilon_{eq\ 1}} = f d\varepsilon_v \quad (8)$$

とおくことができる。すなわち $\overline{d\varepsilon_{eq\ 1}}$ は体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v$ に比例する項である。ここに f は相対密度 γ の

表1 表面層Aのひずみ増分

方 向	第1成分	第2成分	第1, 第2合計
1	$d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_1$
2	$d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_2$
3	$-2d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v$

表2 点(a, b, c)でのひずみ増分

方向	第1成分	第2成分	第1, 第2合計
1	$d\varepsilon_a$	$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_a$
2	$d\varepsilon_b$	$d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_b$
3	$d\varepsilon_c$	$d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v/3$	$d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_c$

みの関数である。また

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_{eq\ 2})^2 &= \frac{2}{9} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 \\ &\quad + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2] \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_{eq})^2 &= \frac{2}{9} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 \\ &\quad + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2] + (f d\varepsilon_v)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 応力とひずみ増分の関係 主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はユニットセルの表面に作用するみかけの応力であって実質部に作用する実応力は平均的に $\sigma_1/\gamma, \sigma_2/\gamma, \sigma_3/\gamma$ と考えられる。空げきの体積率は $(1-\gamma)$ であるが、今空げきの分布を一様とすると任意の断面内の空げきの面積率もまた $(1-\gamma)$ である。したがって平均的に考えれば実応力は σ/γ で与えられるとしてよい。ただし空げきの切欠き形状効果は考慮していない。

実質部の塑性変形は Levy-Mises の法則に従うのだから、点(a, b, c)について Levy-Mises の式をかくと

$$\begin{aligned} &\frac{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_a) - (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_b)}{(\sigma_1 - \sigma_2)/\gamma} \\ &= \frac{(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_b) - (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_c)}{(\sigma_2 - \sigma_3)/\gamma} \\ &= \frac{(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_c) - (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_v/3 + d\varepsilon_a)}{(\sigma_3 - \sigma_1)/\gamma} \\ &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq\ abc}}{\sigma_{eq}} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに σ_{eq} は実質部のうける相当応力である。さてこの関係式についてもユニットセル実質部全体で平均的なものを考えると $d\varepsilon_a, d\varepsilon_b, d\varepsilon_c$ の項は消滅し、結局

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)/\gamma} &= \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{(\sigma_2 - \sigma_3)/\gamma} = \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1}{(\sigma_3 - \sigma_1)/\gamma} \\ &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

ユニットセルに加えられる単位体積あたりの変形仕事 dW は

$$dW = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3$$

であり、これは実質部の変形仕事にも等しいから

$$dW = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 = \gamma \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (12)$$

ただし、右辺の γ は単位体積あたりの実質部の体積割合として必要である。さてここでまず次のように書きかえる。

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma \sigma_{eq}} &= \frac{(9/2)d\varepsilon_{eq}^2}{3\gamma\sigma_{eq}d\varepsilon_{eq}} \\ \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} &= \frac{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)} \\ \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} &= \frac{(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)} \\ \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} &= \frac{(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)} \end{aligned}$$

上の変形を式(11)にあてはめると

$$\frac{3d\varepsilon_{eq}}{2\gamma\sigma_{eq}} = \frac{(9/2)d\varepsilon_{eq}^2}{3\gamma\sigma_{eq}d\varepsilon_{eq}} = \frac{(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)^2}{(\sigma_1-\sigma_2)(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)} = \frac{(d\varepsilon_2-d\varepsilon_3)^2}{(\sigma_2-\sigma_3)(d\varepsilon_2-d\varepsilon_3)} = \frac{(d\varepsilon_3-d\varepsilon_1)^2}{(\sigma_3-\sigma_1)(d\varepsilon_3-d\varepsilon_1)}$$

$$\frac{3d\varepsilon_{eq}}{2\gamma\sigma_{eq}} = \frac{(9/2)d\varepsilon_{eq}^2 - (d\varepsilon_1-d\varepsilon_2)^2 - (d\varepsilon_2-d\varepsilon_3)^2 - (d\varepsilon_3-d\varepsilon_1)^2}{3\gamma\sigma_{eq}d\varepsilon_{eq} - (\sigma_1-\sigma_2)(d\varepsilon_1-d\varepsilon_2) - (\sigma_2-\sigma_3)(d\varepsilon_2-d\varepsilon_3) - (\sigma_3-\sigma_1)(d\varepsilon_3-d\varepsilon_1)}$$

ここで式(9)により $d\varepsilon_{eq}^2$ の項を $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3, d\varepsilon_v$ でかき、また $\tau\varepsilon_{eq}d\varepsilon_{eq}$ も式(12)を使ってかきなおすと上式は

$$\frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} = -\frac{(9/2)f^2 d\varepsilon_v^2}{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)d\varepsilon_v} = \frac{3fd\varepsilon_v}{2\sigma_m/f}$$

となり次式が求まる.

式(11), (13)から

$$\frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{fd\varepsilon_v}{(2/3)(\sigma_v/f)} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\sigma_v} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

さらに式(14)より

とかいてよい。式(14)は次のようにも表現される。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 - \frac{d\varepsilon_v}{3} &= \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_3}{2} \right), & d\varepsilon_2 - \frac{d\varepsilon_v}{3} &= \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1}{2} \right) \\ d\varepsilon_3 - \frac{d\varepsilon_v}{3} &= \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \right), & d\varepsilon_v &= \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left(\frac{\sigma_m}{f^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left\{ \sigma_1 - \left(1 - \frac{2}{9f^2}\right) \sigma_m \right\}, & d\varepsilon_2 &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left\{ \sigma_2 - \left(1 - \frac{2}{9f^2}\right) \sigma_m \right\} \\ d\varepsilon_3 &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left\{ \sigma_3 - \left(1 - \frac{2}{9f^2}\right) \sigma_m \right\}, & \frac{d\varepsilon_v}{3} &= \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}}{\gamma\sigma_{eq}} \left(\frac{2}{9f^2} \sigma_m \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3. 降伏曲面, 相当応力曲面, 相当ひずみ増分曲面

降伏条件は実質部の材質が非加工硬化性で実質部の降伏応力 $\sigma_e = \sigma_0$ (一定) であるときには式(15)より

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} + \left(\frac{\sigma_m}{f} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (18)$$

となる。6章で述べるように密度比 γ が小さいほど f の値は小さくなる。 $\gamma=1$ のときには $f=\infty$ となる。このときには式(18)の表わす降伏曲面は σ_m 軸 (σ_1 ,

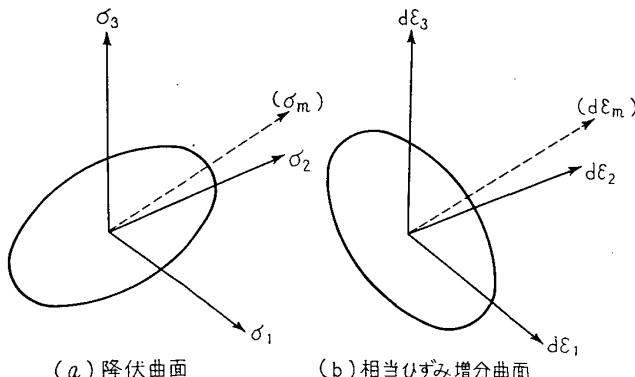


図3 降伏曲面および相当ひずみ増分曲面

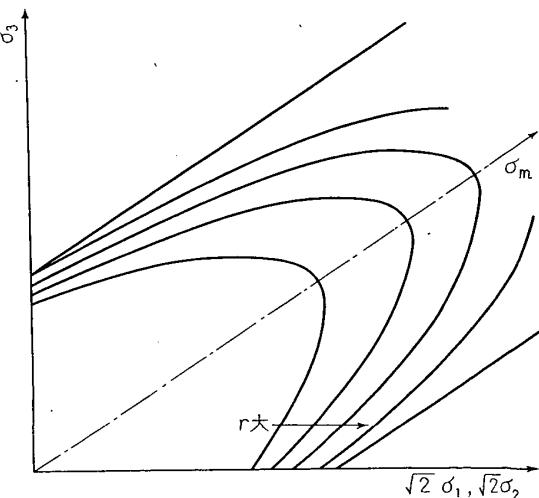


図 4 降伏曲面の変化

$$\sigma_0^2 = (3/2\gamma^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

となり、これは原点を中心をもつ球面である。一般には回転だ円体の主軸の比は $f/(\sqrt{2}/3)$ である。

以上は非硬化材料につき述べたが、加工硬化材料の場合には σ_0 を σ_{eq} におきかえて相当応力面を考えることができる。

同様にして相当ひずみ増分の式(9)を図3(b)のような座標軸に表示すると、3主軸に等しい傾きの方向 $d\varepsilon_m$ を軸とする回転だ円体の面となり、だ円体の主軸の比は $(\sqrt{2}/3)/f$ であってこれは相当応力曲面の場合の主軸の比の逆数である。したがって式(14)を満足する応力とひずみ増分の間にはつきの関係がある。

点 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ を示す応力ベクトル $\sigma(\overrightarrow{OP})$ と $(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ を示すひずみ増分ベクトル $d\varepsilon$ を図5のように描くと、 $d\varepsilon$ の方向は点Pでの相当応力曲面の法線と同じ方向である。これは5章で述べる塑性ポテンシャルの概念からも証明することができる。

図6(a)に示すように相当応力だ円体を σ_m 軸の方向に $(\sqrt{2}/3)/f$ 倍に伸縮すると球形になるが、この球の半径は $\sqrt{2}/3\gamma\sigma_{eq}$ である。回転だ円体面上の点 $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ が伸縮の後点 P' に移ったとき $\overrightarrow{OP'}$ を相当応力ベクトルと呼ぶ。同様に相当ひずみ増分のだ円体を上の逆比 $f/(\sqrt{2}/3)$ 倍に伸縮すると球形になり[図6(b)], だ円体面上の点 $Q(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ が点 Q' に移ったとすると、 $\overrightarrow{OQ'}$ を相当ひずみ増分ベクトルと呼ぶ。

$$|\overrightarrow{OQ'}| = \sqrt{3/2} d\varepsilon_{eq}$$

式(14)を満足する応力とひずみ増分を考えるとき、それらの相当応力ベクトルと相当ひずみ増分ベクトルとは同一の方向を向き

$$dW = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \\ = \gamma \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} = \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'} \quad (19)$$

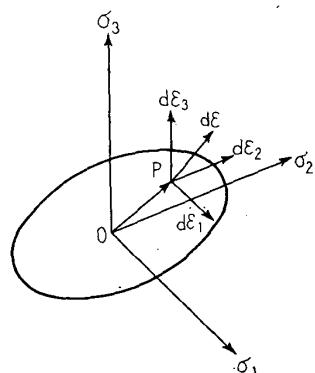


図5 応力ベクトルとひずみ増分ベクトル

4. 塑性基礎式の修正の一例

空げき・介在物などの存在が変形応力に及ぼす効果は引張応力と圧縮応力とでは異なる場合がある。たとえば鉄は内部に存在するグラファイトのため圧縮と引張りでその力学的挙動が異なる。さて先の降伏条件で考えたとき、この引張りと圧縮での挙動の差異が降伏曲面を、その形を変えずに σ_m 軸にそって移動させたものとして表わされるような場合には先の基礎式を次のように修正できる。

$$\frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \\ = \frac{f d\varepsilon_v}{(2/3)f(\sigma_m + a)} = \frac{3 d\varepsilon_{eq}}{2\gamma\sigma_{eq}} \quad (20)$$

ただし、 a は定数である。また、相当応力式(18)は次のようになる。

$$\sigma_{eq}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left[\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \right. \\ \left. + \left(\frac{\sigma_m + a}{f} \right)^2 \right] \quad (21)$$

5. 塑性ポテンシャル

式(15)で $g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\sigma_{eq}^2$ とおくと

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{2}{\gamma^2} \left[\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \right. \\ \left. + \left(\frac{\sigma_m}{f} \right)^2 \right] \quad (22)$$

をうる。関数 g を用いるならば式(17)における3主ひずみ増分を次式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\gamma d\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}}, & d\varepsilon_2 &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} \frac{\gamma d\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} \\ d\varepsilon_3 &= \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \frac{\gamma d\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

したがって関数 g は式(14)の応力-ひずみ方程式の塑性ポテンシャルとなっている。

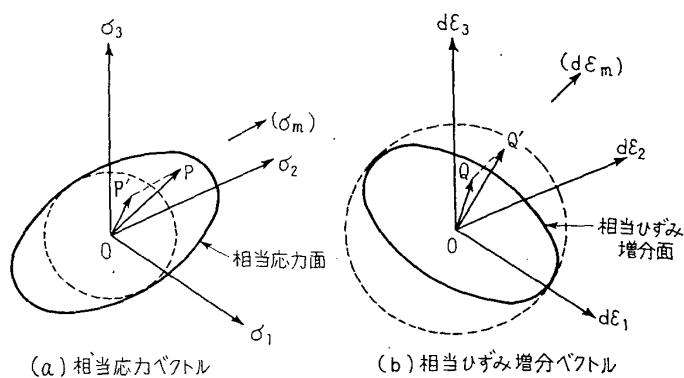


図6 相当応力ベクトルおよび相当ひずみ増分ベクトル

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 - (2/9f^2)}{1 + (4/9f^2)} = \frac{9f^2 - 2}{9f^2 + 4} \quad (29)$$

$$\frac{|\sigma_1|}{\sigma_{eq}} = \frac{\gamma}{3} \sqrt{4 + 9f^2} \quad (30)$$

7.2 実験方法

7.2.1 試料および密度測定法 試料として用いた電解銅粉の諸性質を表3に示す。焼結温度は850°C、時間は2時間である。焼結体の密度は表面をパラフィンでおおった後、アルキメデスの原理を利用して測定した。

7.2.2 ねじり試験 あらかじめ密度の違った数種の角柱状圧粉体をつくり、その焼結体より平行部径7mmの丸棒試験片をきり出してねじり試験を行なった。そして試験前には試料全体の、試験後には試料平行部のみの密度を測定した。

7.2.3 引張試験 ねじり試験片と同一の試験片を用いて行なった。密度測定もねじり試験と同様に行なった。

7.2.4 密閉形内圧縮 大きさ20×20×30mmの角柱状試験片を用意し、その密度を測定した後、テフロンシートで包み密閉形内に装置してポンチによって圧縮した後、とり出してその密度を測定するという操作を繰返した。またひずみは試料の各辺の長さを圧縮前後に測定して求めた。

7.2.5 さらにこれらのはか、島ら⁽¹⁾の次の実験結果も採用した。いずれの実験も、試料、実験条件とも本実験と同じである。

- (1) 単軸圧縮
- (2) 密閉形内圧縮を行なった試験片をとり出してその単軸圧縮降伏点を調べたもの。
- (3) 静水圧圧縮を行なった試料をとり出して、その単軸圧縮降伏点を調べたもの。

7.3 実験値と基礎式の比較

7.3.1 ねじり試験 図8はねじり試験でのせん断ひずみに対して密度変化(最初の密度に対する百分率)をプロットしたものである。先に示したようにねじりの場合密度変化はないといふことが実験的に確かめら

表3 電解銅粉(CE5)の諸性質

見掛け密度 g/cm ³	2.0~2.6
充てん度 g/cm ³	2.4~2.8
流動度 s/50g	40~55
Cu純度 %	min 99.5
還元減量 %	max 0.2
粒度分布 %	
メッシュ 80	100
20~35	35~45
150	5~15
200	5~15
250	max 10
325	max 10
+-	

れた。

7.3.2 単軸圧縮、張引り 関数 $f(\gamma)$ の形は理論的に求まっているが、ここでさらに比較のため単軸圧縮の実験結果より f の実験式を定め、その形 f_e を採用した基礎式が他の実験結果ともよく一致するかどうか調べる。さて単軸圧縮の場合、先の式(26)より

$$f^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2} \right) \quad (31)$$

となる。図9は実験値より求めた上式の右辺の値を γ に対してプロットしたもので、図中の破線が f_e 、実線は f_1 を採用した場合の基礎式による計算値である。ここで f_e は

$$f_e = \frac{1}{3} \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \right) \quad (32)$$

とした。このあと、図中 f_e を採用した計算値は破線で、 f_1 を採用した場合は実線に f_1 をつけて示す。ま

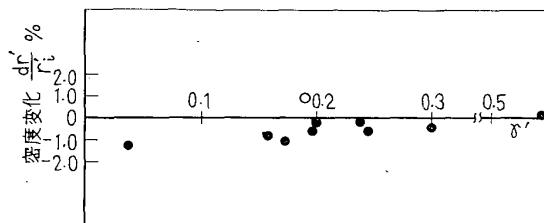


図8 ねじり試験でのせん断ひずみと密度変化の関係

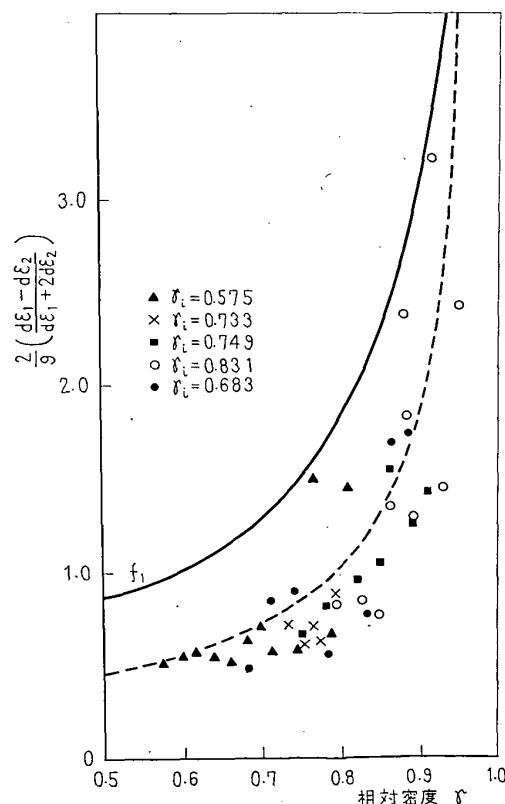


図9 単軸圧縮の場合の $(2/9) \left(\frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2} \right)$ と相対密度 γ の関係

た図中 γ_i とあるのは試料の初期相対密度である。さて、式(3), (4), (26) より

がえられる。図 10 は圧縮実験値より求めた上式の左辺を γ に対してプロットしたものである。また、表 4 に引張試験での密度変化の実験値と式 (33) による計算値とを示す。

7・3・3 密閉形内圧縮 図 11 は先に示した式(29)の左辺 σ_2/σ_1 を γ に対してプロットしたものである。

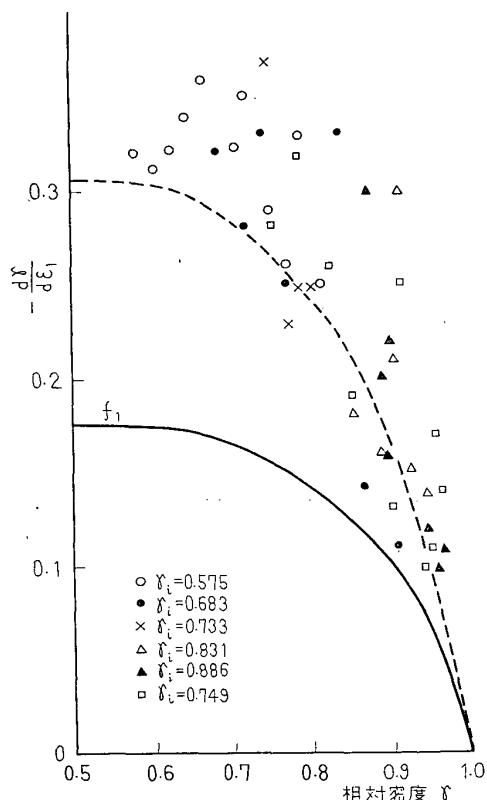


図 10 単軸圧縮の場合の $-d\gamma/d\varepsilon_1$ と相対密度 γ の関係

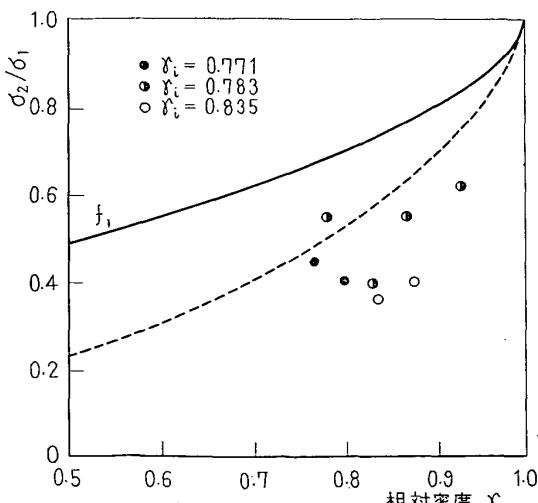


図 11 密閉形内圧縮での σ_2/σ_1 と相対密度 γ の関係

また、この場合の圧縮方向応力 σ_{1c} と実質部の降伏応力 σ_{eq} とは先の式(30)の関係がある。

また、単軸圧縮での圧縮方向応力 σ_{1s} と σ_{eq} とは

$$\frac{|\sigma_{1s}|}{\sigma_{eq}} = \frac{\gamma}{\sqrt{1+1/9f^2}}. \quad \dots \dots \dots \quad (25)$$

の関係があった。したがって同密度でしかも同じ相当ひずみを受けている試料については式(30), (25)の σ_{eq} を消去できて

$$\left| \frac{\sigma_{1c}}{\sigma_{1s}} \right| = \frac{1}{3} \sqrt{(4+9f^2) \left(1 + \frac{1}{9f^2} \right)} \dots \dots \dots (34)$$

が得られる。これは先の実験の中で7.2.5項の(2)の場合にあたる。図12は $|\sigma_{1c}/\sigma_{1s}|$ の値を γ に対してプロットしたものである。

7・3・4 静水圧圧縮 この場合の圧縮圧力 σ_m と実質部の降伏応力との関係は式(28)で与えられている。先と同様に式(25)と式(28)とから σ_{eq} を消去して

表 4 単軸引張りでの密度変化

初期相対密度	ひずみ	引張試験後の相対密度	f_1 を使った基礎式による計算値	f_0 を使った基礎式による計算値
γ_i	$d\varepsilon_i$	γ	γ	γ
0.877	0.1035	0.852	0.866	0.858
0.875	0.0129	0.879	0.874	0.873
0.864	0.1115	0.840	0.851	0.842
0.863	0.0602	0.847	0.856	0.851
0.844	0.0119	0.837	0.843	0.842
0.838	0.0109	0.838	0.837	0.836
0.835	0.0040	0.831	0.835	0.834
0.805	0.0373	0.791	0.800	0.796
0.796	0.0149	0.797	0.794	0.792
0.805	0.0611	0.786	0.797	0.791
0.801	0.0149	0.794	0.799	0.797

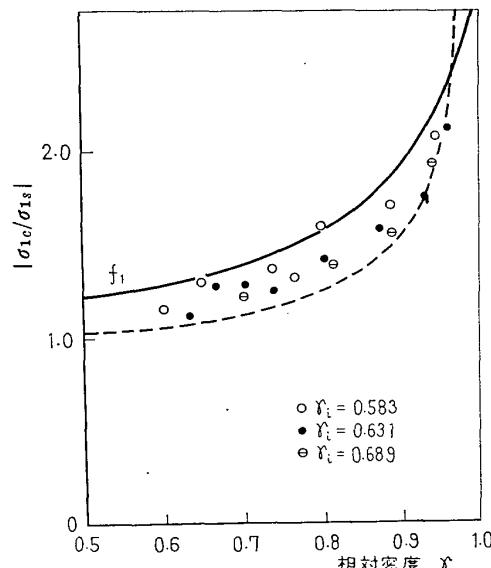


図 12 密閉形内圧縮での $|\sigma_{1c}/\sigma_{1s}|$ と相対密度 γ の関係

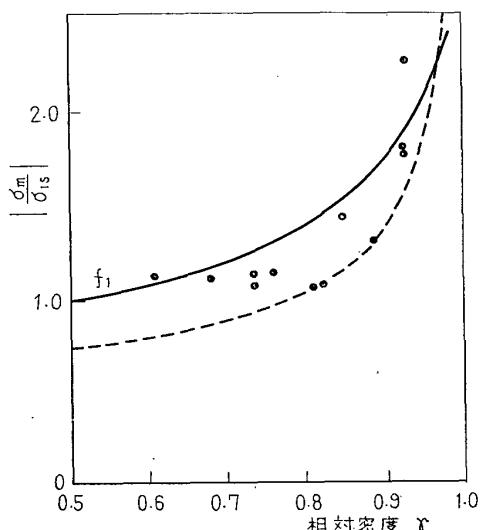


図 13 静水圧圧縮の場合の $|\sigma_m/\sigma_{1s}|$ と相対密度 γ の関係

$$\left| \frac{\sigma_m}{\sigma_{1s}} \right| = f_1 \sqrt{1 + \frac{1}{9f^2}} \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

これもまた、先の7・2・5項の(3)の実験の場合にあたる。図13は実験値をプロットしたものである。

以上の実験結果との比較をまとめると、各応力、ひずみ状態で実験値と基礎式による計算値はよく一致している。特に単軸圧縮状態でその形を決めた実験式 f_1 。

を採用した場合には他の応力状態でも γ の広い領域で実験値とよく合い、理論的に求めた f_1 を採用した場合には、全体的に実験値より大きい値をとっている。

なお、いずれの実験値もかなりのばらつきを示しているがこれは、ひずみの値がいずれも微小量であり、さらにその微小量をお互いに乗除しているのでひずみ値の少しの誤差が大きくひびいてくるからである。したがって実験値の平均的な値と基礎式による計算値が一致していれば、その基礎式がよく成り立っているとしてよい。

8. むすび

焼結体などその内部に空げきを含んでいるために塑性変形によってその密度が変化する材料に対して、実質部が一様で非圧縮であってしかも Levy-Mises の式に従う材料であるという条件のもとで、立方体空げきを有するモデルを利用してその塑性基礎式を導いた。そして導いた密度変化の項を含む基礎式はその密度変化の項 $f(\gamma)$ の形を適当に決めてやることによってよく成り立つことがわかった。

文 献

(1) 島・大矢根、機講論、No. 704-4 (昭45-3), 75.

討 論

[質問] 神馬 敬 (東京工業大学)

(1) 単軸圧縮の図9において実験点の近似式(32)より f_0 を求め、これを基準にして他の応力状態の実験を理論と比較されているが、むしろ図13について f_0 を求めるほうが自然ではないか。

(2) 静水圧圧縮の実験方法について説明していくいただきたい。

(3) 式(24)で導かれた f_1 を使うと理論と実験の一致がよくない理由の一つとして、単軸圧縮、密閉形圧縮では摩擦により試料の密度が一様でなくなることもあげられると思うが、ご意見を伺いたい。

[回答] (1) ご質問の「自然ではないか」という意味はモデルを使って静水圧圧縮の状態で f_1 を決めたことからいわれているのだと思う。確かに議論を首尾一貫したものにするためにはご指摘のようにしたほうがよいと思うが。

(i) 図13の関係式は $|\sigma_m/\sigma_{1s}| = f_1 \sqrt{1 + 1/9f^2}$ で右辺が f の複雑な形であるのに比べ、図9では $(2/9)((d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)/(d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_2)) = f^2$ となっており、図9のほうが f_0 を決めやすい。

(ii) 図13の場合に比べて図9の場合実験値を数多くとった。

この二つの理由によって、図9で f_0 を求めた。なお、単軸圧縮では両端面の摩擦の影響による変形の不均一という問題があるが、今回の実験の場合(3)の項でお答えするように、摩擦の影響はできるだけとり除くようにした。

(2) 実験の順序によって説明する。

(i) 圧粉体を焼結して試料をつくる。

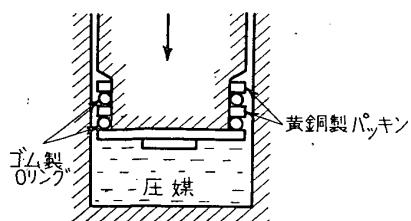
(ii) 試料をゴム膜でおおう。

(iii) 真空ポンプでゴム膜内の空気をぬく。

(iv) ゴム膜でおおった試料を圧力容器中に入れ、圧力をかける。目的の圧力を一定時間保持した後、圧力を下げ試料をとり出して密度を測定する。

圧力容器は付図1のようなもので、圧媒をポンチで圧縮することによって圧力を発生させる。

(3) 単軸圧縮の場合は両端面にテフロンをしき、さらに潤滑油をぬって圧縮しており、バルジもほとんどなく一様な変形を受けており、密度もかなり一様であると思われる。密閉形内圧縮の場合はご指摘のとお



付図 1

り、型壁との摩擦により試料内の密度は一様でなくなる。

焼結体を密度一様としてモデルで代表させて式(24)を導いたわけだから、試料の密度が一様でないことは理論と実験の不一致の原因の一つとして考えられる。

ただし、密閉形内圧縮の場合は型壁との摩擦力が非常に大きいため、試料の密度が一様であっても理論と実験はあわないと予想される（理論式は壁との摩擦を考慮していないので）。