

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Орсингер, А. Колесник, Точное распределение в модели случайного движения на плоскости, управляемого гиперболическим уравнением четвертого порядка, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 451–459

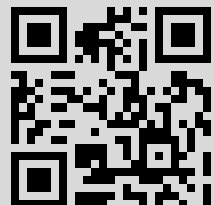
DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 106.51.226.7

16 августа 2022 г., 22:00:50



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pickands J.*, III. Upcrossing probabilities for stationary Gaussian process. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, v. 145, p. 51–73.
2. *Путербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: Московский гос. ун-т, 1988, 175 с.
3. *Музалева Т. Л.* Вероятности больших отклонений двумерных гауссовских процессов с разнораспределенными независимыми компонентами. — *Вестник МГУ*, сер. 1, матем., мех., 1991, № 3, с. 82–84.
4. *Piterbarg V., Tyurin Yu.* Homogeneity testing of two samples: Gaussian field on a sphere. — *Math. Methods Statist.*, 1993, v. 2, p. 147–164.
5. *Lindgren G.* Extreme values and crossings for the χ^2 process and other functions of multidimensional Gaussian processes, with reliability applications. — *Adv. Appl. Probab.*, 1980, v. 12, № 3, p. 746–774.
6. *Lindgren G.* Point processes of exits by bivariate Gaussian processes and extremal theory for the χ^2 -process and its concomitants. — *J. Multivar. Anal.*, 1980, v. 10, № 2, p. 181–206.
7. *Lindgren G.* Slepian model for χ^2 -processes with dependent components with application to envelope upcrossings. — *J. Appl. Probab.*, 1989, v. 26, № 1, p. 36–49.
8. *Piterbarg V.* High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent coordinates. — *Univ. of Lund and Lund Inst. of Technology, Dept. of Math. Statistics. Report 1991: 6*, 34 pp.
9. *Беляев Ю. К., Путербарг В. И.* Асимптотика среднего числа A -точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень. — *Докл. АН СССР*, 1972, т. 203, № 1, с. 9–12.
10. *Borell C.* The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space. — *Invent. Math.*, 1975, v. 30, № 2, p. 207–216.
11. *Slepian D.* The one-sided barrier problem for the Gaussian noise. — *Bell System Tech. J.*, 1962, v. 41, p. 463–501.

Поступила в редакцию
17.II.1994

© 1996 г.

ОРСИНГЕР Э.*, КОЛЕСНИК А.**

**ТОЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В МОДЕЛИ
СЛУЧАЙНОГО ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ,
УПРАВЛЯЕМОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ
УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА¹⁾**

Рассматривается модель случайного движения на плоскости, описывающая эволюцию частицы с постоянной скоростью по четырем направлениям, управляемую гиперболическим уравнением четвертого порядка с постоянными коэффици-

*Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma «La Sapienza», P. le Aldo Moro, 5, 00185 Roma, Italia.

**Институт математики АН Молдовы, ул. Академии, 5, 277028 Кишинев, Молдова.

¹⁾Эта статья была написана во время пребывания одного из авторов в Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università di Roma «La Sapienza».

ентами. Получено точное распределение плотности вероятности местоположения частицы в произвольный момент времени.

Ключевые слова и фразы: случайные движения, случайные эволюции, точное распределение, гиперболические уравнения высокого порядка, функции Бесселя.

1. Введение. Случайные движения с постоянной скоростью на плоскости, управляемые гиперболическими уравнениями, изучались в статьях [1]–[4]. Рассмотренные модели различаются по числу возможных направлений движения, которые однозначно определяют порядок полученных уравнений.

Насколько известно авторам, несмотря на разнообразие рассмотренных моделей, ни один из случаев не был исследован настолько, чтобы стало возможно получить точное вероятностное распределение. Это в значительной степени было связано с тем, что в таких моделях приходилось иметь дело со сложными гиперболическими уравнениями высоких порядков с постоянными коэффициентами.

Теперь мы можем представить точное распределение случайного движения с постоянной скоростью на плоскости по четырем направлениям, и его относительно простая структура определяется симметрией рассматриваемой модели.

Перейдем к краткому описанию нашей модели и укажем ее отличие от случайного движения на плоскости, рассмотренного в [1].

2. Случайное движение на плоскости и основные аналитические результаты. Предположим, что частица начинает свое движение с постоянной скоростью c из точки $(0, 0)$ в момент времени $t = 0$. С равной вероятностью она может выбрать одну из четырех возможных начальных полярностей движения, которые мы будем обозначать символами $(++)$, $(+-)$, $(-+)$, $(--)$.

Если выбрана, например, полярность $(++)$, то частица за интервал времени Δt может делать либо горизонтальный шаг длины $c\Delta t$ параллельно оси абсцисс в положительном направлении, либо вертикальный шаг высоты $c\Delta t$ также в положительном направлении параллельно оси ординат. При фиксированной полярности выбор горизонтального либо вертикального направления на каждом шаге осуществляется с равной вероятностью $\frac{1}{2}$.

Изменения полярностей движения управляются однородным процессом Пуассона на $N(t)$ с параметром λ . В моменты наступления пуассоновских событий текущее направление полярности меняется. Если, например, частица имела на интервале времени $[t, t + \Delta t)$ полярность движения $(++)$ и в момент наступления пуассоновского события двигалась горизонтально, то она приобретет полярность движения $(-+)$, а если движение происходило по вертикали, то новой полярностью будет $(+-)$. Отметим, что изменение полярности движения на противоположное (по обеим координатам) может происходить с вероятностями, которыми можно пренебречь. Случайное движение, полученное из вышеописанного при $\Delta t \rightarrow 0$, имеет траектории, представляющие собой ломаные, каждый сегмент которых параллелен одной из биссектрис системы координат и направлен под прямым углом к предыдущему сегменту, причем длина таких сегментов есть случайная величина, распределенная экспоненциально с параметром λ .

Пусть

$$\{X(t), Y(t), t > 0\}$$

есть местоположение движущейся частицы на плоскости, а $\{D(t), t > 0\}$ обозначает полярность ее движения в момент времени t . Для вероятностного анализа вышеописанного движения введем следующие функции, представляющие собой плотности совместного распределения координат частицы и полярности ее движения:

$$f_{ab}(x, y, t) dx dy = P\{x \leq X(t) < x + dx, y \leq Y(t) < y + dy, D(t) = (a, b)\}, \quad (2.1)$$

где a и b — формальные символы, принимающие значения полярностей $+$ и $-$.

Заметим, что из непрерывности рассматриваемой модели следует, что сумма плотностей (2.1), являющаяся плотностью распределения местоположения частицы, содержит абсолютно непрерывную компоненту, которая и является основной целью нашего исследования. Ее существование вытекает как из физического смысла рассматриваемой модели, так и из корректности задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами, которой она удовлетворяет (см. уравнение (3.3) ниже). Наличие же сингулярной компоненты определяется начальной концентрацией плотности в одной точке $x = y = 0$ и конечной скоростью распространения. Подробнее мы будем обсуждать этот вопрос по ходу нашего исследования.

Вероятности (2.1) удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{++}}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial f_{++}}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial f_{++}}{\partial y} + \frac{\lambda}{2} (f_{-+} + f_{+-} - 2f_{++}), \\ \frac{\partial f_{+-}}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial f_{+-}}{\partial x} + \frac{c}{2} \frac{\partial f_{+-}}{\partial y} + \frac{\lambda}{2} (f_{--} + f_{++} - 2f_{+-}), \\ \frac{\partial f_{-+}}{\partial t} &= \frac{c}{2} \frac{\partial f_{-+}}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial f_{-+}}{\partial y} + \frac{\lambda}{2} (f_{++} + f_{--} - 2f_{-+}), \\ \frac{\partial f_{--}}{\partial t} &= \frac{c}{2} \frac{\partial f_{--}}{\partial x} + \frac{c}{2} \frac{\partial f_{--}}{\partial y} + \frac{\lambda}{2} (f_{+-} + f_{-+} - 2f_{--}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Читателю для вывода уравнений (2.2) следует заметить, что точка (x, y) достижима частицей, имеющей полярность движения $(++)$, в момент времени $t + \Delta t$, если в момент времени t частица находилась либо в точке $(x - c\Delta t, y)$, либо в точке $(x, y - c\Delta t)$, и сделала шаг горизонтально вправо либо вертикально вверх соответственно, причем на интервале времени $[t, t + \Delta t)$ не произошло ни одного пуассоновского события. Понятно, что если в момент времени t частица имела полярность движения $(-+)$ или $(+-)$, то в момент времени $t + \Delta t$ она может иметь полярность $(++)$, только если на интервале $[t, t + \Delta t)$ произошло одно пуассоновское событие, поменявшее полярность на $(++)$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Для строгого обоснования вывода уравнений (2.2) читателю следует обратиться к работе [1].

Для описания вероятностного поведения описанного движения мы введем следующие функции:

$$\begin{aligned} p &= f_{++} + f_{+-} + f_{-+} + f_{--}, & w &= f_{++} + f_{+-} - f_{-+} - f_{--}, \\ z &= f_{++} - f_{+-} + f_{-+} + f_{--}, & u &= f_{++} - f_{+-} - f_{-+} + f_{--}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теорема 1. *Функции p, w, z, u удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial z}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda w, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial p}{\partial y} - \lambda z, & \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{c}{2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{c}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - 2\lambda u. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно сложить и вычесть соответствующим образом уравнения системы (2.2).

Замечание. Заметим, что в работе [1] исследовано поведение такого случайного движения при условиях, означающих, что в системе (2.4) функция $u(x, y, t)$ всюду равна нулю.

3. Уравнение для плотности вероятности. Совокупность точек плоскости, в которых частица может побывать к моменту времени t после старта из начала

координат $x = y = 0$, представляет собой квадрат

$$Q = \left\{ (x, y): x \leq \frac{ct}{2}, |y| \leq \frac{ct}{2} \right\}. \quad (3.1)$$

Каждая вершина этого квадрата достижима за время t после старта с вероятностью $\frac{1}{4} e^{-\lambda t}$, что соответствует событию, что на интервале $[0, t)$ не произошло ни одного пуассоновского события. Другие точки границы ∂Q квадрата Q достижимы в том и только том случае, когда на этом интервале времени произошло только одно пуассоновское событие. В этом случае вероятность местоположения частицы распределена равномерно на границе ∂Q .

Наш анализ начинается выводом уравнения для абсолютно непрерывной компоненты $p(x, y, t)$ плотности распределения

$$F(x, y, t) = \mathbf{P} \left\{ X(t) \leq x, Y(t) \leq y \right\}. \quad (3.2)$$

Это потребует определенных преобразований, основанных на свойствах системы (2.4).

Теорема 2. Абсолютно непрерывная компонента $p = p(x, y, t)$ плотности распределения (3.2) для $(x, y) \in Q - \partial Q$ удовлетворяет гиперболическому уравнению в частных производных четвертого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \right) u + \frac{c^4}{2^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = 0. \quad (3.3)$$

Доказательство. Уравнение (3.3) может быть получено из системы (2.4) следующим образом.

Шаг 1. Дифференцируя первое уравнение системы (2.4) по времени t и затем подставляя в него второе уравнение этой системы, продифференцированное по x , и третье, продифференцированное по y , мы получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{2^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} p - \lambda \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (3.4)$$

Шаг 2. Дифференцируя (3.4) по времени t и затем подставляя в него четвертое уравнение системы (2.4), продифференцированное по x и по y , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} = & \frac{c^2}{2^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} p - 3\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\lambda c^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} p \\ & - 2\lambda^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{c^3}{2^2} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Шаг 3. Дифференцируя теперь (3.5) по t и воспользовавшись формулами (3.5) и (3.4), после несложных преобразований получаем уравнение (3.3).

Замечание 1. Уравнение (3.3) может быть получено и другим способом, а именно, вычислением формального определителя системы (2.4), как это доказано в [5].

Замечание 2. Уравнение (3.3) может быть несколько упрощено преобразованием вращения

$$\xi = y + x, \quad \eta = y - x.$$

В этих новых переменных траектории движения частицы имеют вид, изображенный на рис. 1.

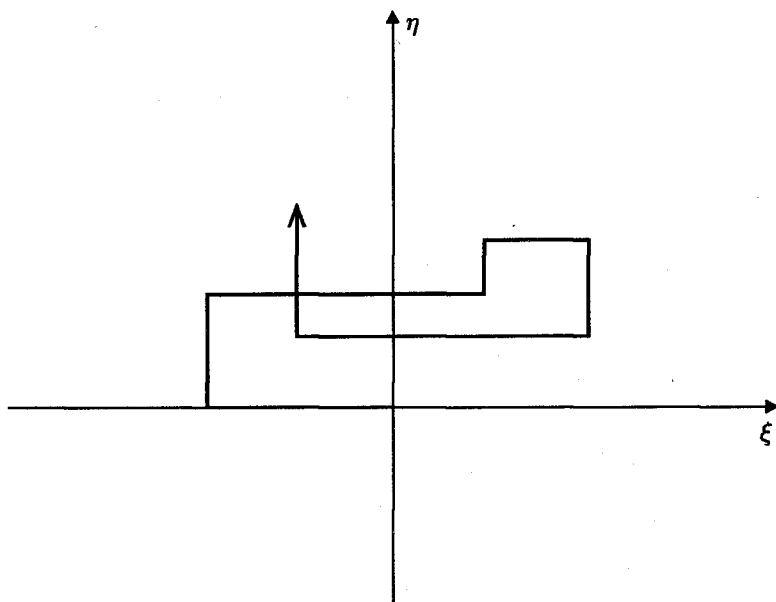


Рис. 1.

Легко проверить, что уравнение (3.3) в терминах новых переменных (ξ, η) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\}\right) u + c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0. \quad (3.6)$$

В этих новых переменных (ξ, η) множество точек достижимости будет

$$Q' = \{(\xi, \eta): |\xi + \eta| \leq ct, |\xi - \eta| \leq ct\}. \quad (3.7)$$

Для дальнейшего анализа в уравнении (3.6) удобно сделать экспоненциальную замену вида

$$u(\xi, \eta, t) = e^{-\lambda t} w(\xi, \eta, t). \quad (3.8)$$

В этом случае функция $w = w(\xi, \eta, t)$ должна быть решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda^2 - c^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \right) w + c^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) удобно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) w - \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) станет основным объектом нашего дальнейшего исследования.

З а м е ч а н и е 3. Следуя [7], заметим, что если $\lambda \rightarrow \infty$, $c \rightarrow \infty$ таким образом, что $(c^2/\lambda) \rightarrow 1$, то уравнение (3.3) в пределе обращается в двумерное параболическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\},$$

или, в терминах переменных (ξ, η) ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\}.$$

Это легко может быть доказано, если разделить обе части уравнения (3.3) на λ^3 и затем перейти к пределу при указанных условиях.

Этот факт означает, что случайное движение, описанное в п. 2, является асимптотически винеровским процессом на плоскости, когда скорость частицы стремится к бесконечности, а изменения направления ее движения происходят с бесконечной интенсивностью.

4. Точное распределение положения частицы в произвольный момент времени. Для того чтобы оперировать как можно более простыми формулами, мы представим точное распределение в повернутой системе координат (ξ, η) . Поскольку, как мы покажем ниже, линии $v = \pm(\xi + \eta)$, $v = (\eta - \xi)$, где $0 < v < ct$, образуют эквивалентные (равных вероятностей) кривые для распределения $(X(t), Y(t), t > 0)$, мы ограничимся анализом функции $p = p(v, t)$ (для $0 \leq v < ct$). Таким образом, если

$$S_u = \{(\xi, \eta): |\eta + \xi| < u, |\eta - \xi| < u\},$$

то интеграл

$$\int_u^w p(v, t) dv = P\{(X(t), Y(t)) \in S_w - S_u\} \quad (4.1)$$

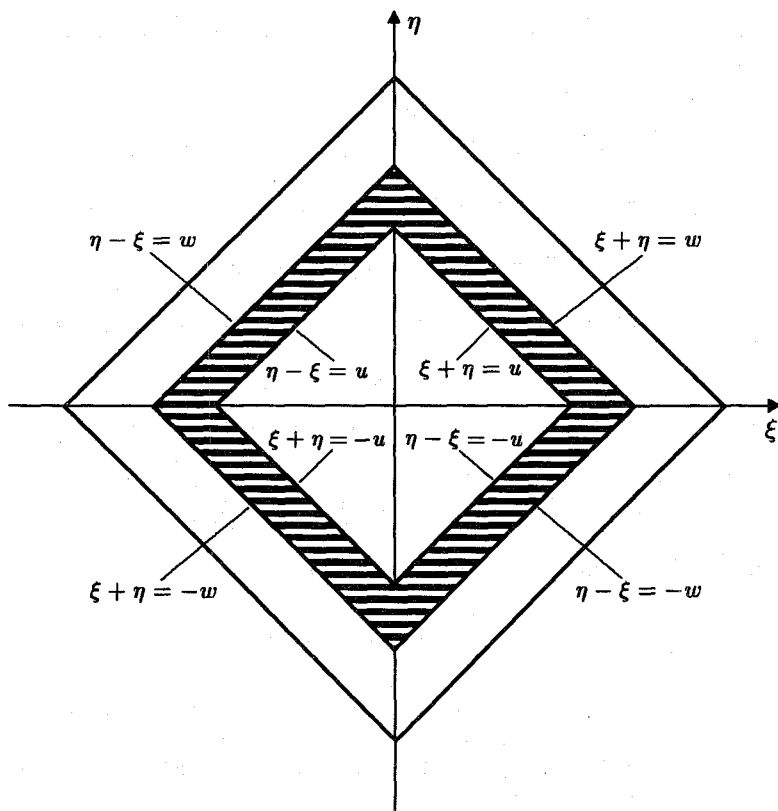


Рис. 2.

представляет собой вероятность того, что частица находится в заштрихованной полосе на рис. 2. Понятно, что внутри каждой инфинитезимальной полосы вероятность местоположения частицы распределена равномерно.

Равномерное распределение имеет место также на границе волнового фронта, которая достижима частицей за время t после старта с вероятностью $\lambda t e^{-\lambda t}$, что соответствует случаю, когда на интервале $[0, t]$ произошло только одно пуассоновское событие.

Теорема 3. Точное распределение $p = p(v, t)$ для $0 \leq v < ct$ дается формулой

$$p(v, t) = \frac{\lambda}{2c} e^{-\lambda t} \left[\left(e^{\lambda t/2} - e^{-\lambda t/2} \right) I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) + \lambda \int_0^t \left(e^{\lambda s/2} - e^{-\lambda s/2} \right) I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 s^2 - v^2} \right) \chi_{\{0 \leq v \leq cs\}} ds \right], \quad (4.2)$$

где $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-2} (x/2)^{2k}$ есть функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента, и $\chi_{\{*\}}$ есть индикатор множества.

Понятно,

$$P\{X(t) = \pm ct, Y(t) = 0\} = P\{X(t) = 0, Y(t) = \pm ct\} = \frac{1}{4} e^{-\lambda t}. \quad (4.3)$$

Вероятность частице находиться в момент времени t после старта на границе $\partial Q'$ (без углов) распределена равномерно и равна

$$P\left\{ (X(t), Y(t)) \in \partial Q' - \text{углы} \right\} = P\{N(t) = 1\} = \lambda t e^{-\lambda t}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Мы начнем доказательство, заметив, что все преобразования $v = \eta \pm \xi$, $v = \pm(\eta + \xi)$ сводят уравнение (3.10) к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda^2 - 2c^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) w + c^4 \frac{\partial^4 w}{\partial v^4} = 0. \quad (4.5)$$

Решения уравнения (4.5) вдоль четырех сегментов прямых $v = \eta \pm \xi$, $v = \pm(\eta + \xi)$, составляющих периметр квадрата Q' , совпадают. Таким образом, поскольку для всех точек (ξ, η) , принадлежащих периметру квадрата, распределение плотности не меняется, то мы заключаем, что $v = \eta \pm \xi$, $v = \pm(\eta + \xi)$ есть эквивероятностная кривая.

Уравнение (4.5) может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) w = 0, \quad (4.6)$$

в котором присутствуют два оператора телеграфного типа.

Поскольку функция

$$g(v, t) = e^{-\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right), \quad 0 \leq v < ct,$$

есть решение (функция Грина задачи Коши) уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) w = 0,$$

и функция

$$h(v, t) = e^{\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right), \quad 0 \leq v < ct,$$

есть решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) w = 0,$$

то их линейная комбинация

$$w(v, t) = A \left\{ e^{-\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) \right\} + B \left\{ e^{\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) \right\} \quad (4.7)$$

для $0 \leq v < ct$ есть фундаментальное решение уравнения (4.6) при любом выборе констант A и B .

Линейность и однородность уравнения (4.6) позволяет нам утверждать, что и интегралы от (4.7) также являются решениями. Таким образом, мы приходим к рассмотрению решений вида

$$\begin{aligned} w(v, t) = & A \left\{ e^{-\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) \right\} + B \left\{ e^{\lambda t/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) \right\} \\ & + C \int_0^t e^{-\lambda s/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 s^2 - v^2} \right) \chi_{\{0 \leq v < cs\}} ds \\ & + D \int_0^t e^{\lambda s/2} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 s^2 - v^2} \right) \chi_{\{0 \leq v < cs\}} ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Коэффициенты A, B, C, D должны быть выбраны таким образом, чтобы $w \geq 0$ для $0 \leq v < ct$ и было выполнено условие

$$\begin{aligned} \int_0^{ct} p(v, t) dv &= e^{-\lambda t} \int_0^{ct} w(v, t) dv = 1 - P\{(X(t), Y(t)) \in \partial Q^t\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} - (\lambda t) e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Поскольку [6]

$$\int_0^{ct} I_0 \left(\frac{\lambda}{2c} \sqrt{c^2 t^2 - v^2} \right) dv = \frac{c}{\lambda} (e^{\lambda t/2} - e^{-\lambda t/2}), \quad (4.10)$$

мы легко получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{ct} p(v, t) dv &= \frac{c}{\lambda} e^{-\lambda t} \left\{ A (1 - e^{-\lambda t}) + B (e^{\lambda t} - 1) \right. \\ & \quad \left. + C \int_0^t (1 - e^{-\lambda s}) ds + D \int_0^t (e^{\lambda s} - 1) ds \right\} \\ &= \frac{c}{\lambda} \left\{ A (e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) + B (1 - e^{-\lambda t}) \right. \\ & \quad \left. + C \left(te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-2\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) + D \left(-te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \right\} \\ &= \left(\text{при } A = -\frac{\lambda}{2c}, B = \frac{\lambda}{2c}, C = -\frac{\lambda^2}{2c}, D = \frac{\lambda^2}{2c} \right) = 1 - e^{-\lambda t} - (\lambda t) e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство нашей теоремы.

З а м е ч а н и е. По нашему мнению, тот факт, что при каждом столкновении (происходящем в пуассоновский момент времени), частица изменяет направление своего движения под прямым углом (вправо или влево), есть основное объяснение того замечательного обстоятельства, что распределение вероятностей удалось получить в

явном виде (из гиперболического уравнения четвертого порядка), и что оно обладает относительно простой формой. Читатель может легко переписать результат (4.2) в исходных переменных (x, y) , в которых эквивероятностные кривые есть $x = \pm v$, $y = \pm v$, $0 \leq v \leq (ct/2)$.

Авторы признательны рецензенту за квалифицированные замечания, позволившие внести улучшения в первоначальный вариант статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orsingher E. A planar random motion governed by the two-dimensional telegraph equation. — J. Appl. Probab., 1986, v. 23, p. 385–397.
2. Колесник А. Д. Об одной модели марковской случайной эволюции на плоскости. — Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1989, с. 55–61.
3. Колесник А. Д., Турбин А. Ф. Симметричные марковские случайные эволюции на плоскости. Препринт 90.12. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1990, 39 с.
4. Колесник А. Д., Турбин А. Ф. Симметричные случайные эволюции в \mathbf{R}^2 . — Докл. АН Украины, 1990, № 2, с. 10–11.
5. Колесник А. Д., Турбин А. Ф. Инфинитезимальный гиперболический оператор марковских случайных эволюций в \mathbf{R}^n . — Докл. АН Украины, 1991, № 1, с. 11–14.
6. Orsingher E. Probability law, flow function, maximum distribution of wave-governed random motions and their connections with Kirchoff's laws. — Stoch. Process. Appl., 1990, v. 34, p. 49–66.
7. Кас М. A stochastic model related to the telegrapher's equation. — Rocky Mount. J. Math., 1974, v. 4, p. 497–509.

Поступила в редакцию
22.IV.1994

© 1996 г.

РОЗАНОВ Ю. А.*

О МЕТОДЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ¹⁾

Рассматриваются так называемые псевдо-наилучшие оценки среднего, применимые к общим бесконечномерным моделям. Устанавливаются свойства несмещенности, состоятельности, асимптотической эффективности.

Ключевые слова и фразы: псевдо-наилучшие оценки, несмещенные, состоятельные, асимптотически эффективные оценки.

Метод гильбертова (евклидова) пространства для оценивания средних значений в его наиболее классическом варианте дает известные оценки наименьших квадратов, различные обобщения которых занимают важное место в приложениях математической статистики. Одним из таких обобщений были так называемые псевдо-

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия; CNR-IAMI, Milan, Italy.

¹⁾Работа выполнена при поддержке CNR-IAMI (Милан) и Международного научного фонда, грант № JF9100.