

오벌기어의 피치곡선 곡률에 따른 치형 설계

이성철[†]

인하공업전문대학 기계과

Tooth Profile Design of an Oval Gear According to the Curvature of the Pitch Curve

Sungchul Lee[†]

Dept. of Mechanical Engineering, Inha Technical College

(Received January 2, 2012; Revised January 25, 2012; Accepted January 26, 2012)

Abstract – Oval gears are typical kinds of non-circular gears and are widely used in flow meters. This paper presents a tooth profile design of an oval gear according to the curvature of the pitch curve. The length of the pitch oval is divided by the number of teeth and the curvature of the divided points is obtained. The tooth profile is designed on the circle of the curvature as if it is the pitch circle of a gear. The teeth of the oval gear have the same module and pressure angle, but the pitch circle of each tooth differs in size. Thus, the teeth on the divided points of the pitch oval are different in shape. This type of oval gear will improve the meshing properties.

Keywords – oval gears(오벌기어), non-circular gears(비원형기어), pitch oval(피치오벌), curvature(곡률), tooth profile(치형형상)

1. 서론

오벌기어는 비원형 기어의 대표적인 예로 용적식 유량계에 널리 사용되고 있다. 오벌기어의 피치곡선 형상은 타원과 유사하나 약간의 차이가 있으며 이를 고차 타원이라고 한다. 타원형기어는 타원인 피치곡선의 초점을 중심축으로 회전하는데 비하여 오벌기어는 피치곡선의 도심을 중심으로 회전한다. 따라서 오벌기어의 한쪽 부분에 압이 걸리면 회전력의 불균형으로 오벌기어가 회전하게 되며, 회전수를 계수하면 유량이 측정된다.

오벌기어를 위시한 비원형 기어의 가공에는 CNC 밀링, CNC 치차형 선반 및 와이어 방전가공 등이 사용되고 있으며[1], 셰이퍼커터나 래크커터에 의한 가공에 따른 설계기술이 발표되어 있다[2,3].

비원형 기어를 창성가공하는 경우에는 공구와 공작물의 상대운동에 의하여 치형이 가공되기 때문에 피치

곡선의 곡률이 상대운동 과정 중에 반영되어 치형 가공이 이루어진다. 한편, 비원형 기어의 수량이 적거나 또는 사출성형이나 분말야금으로 비원형 기어를 제작하기 위한 캐비티를 가공해야 하는 경우에는 와이어 방전가공이 주로 사용되고 있는데, 와이어 방전가공은 치형의 성형가공으로 치형의 설계 단계에서 피치곡선의 곡률을 고려해 주어야 한다.

비원형 기어의 와이어 방전가공에 대해서는 피치곡선의 길이를 잇수로 등분하고 피치곡선의 평균 곡률로 기준치형을 설계해서 등분점에 기준치형을 매핑하여 설계하는 방법이 발표되어 있다[4,5]. 그러나 오벌기어에서 장반경과 단반경의 차이가 너무 큰 경우 모든 치형을 동일한 형상으로 설계하면 물림이 원활하게 이루어지기 어렵게 된다. 본 논문에서는 오벌기어의 피치곡선의 곡률에 따라서 치형의 형상을 설계하는 방법을 제시한다.

[†]주저자 · 책임저자 : sclee@intatc.ac.kr

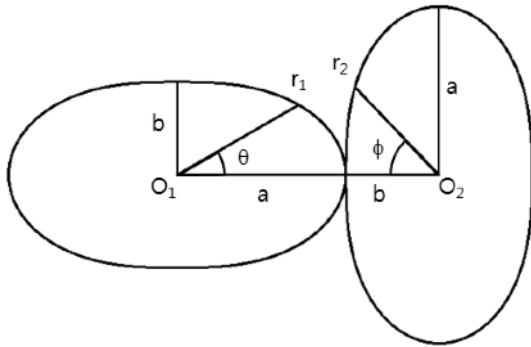


Fig. 1. Pitch curves of oval gears in mesh.

2. 오벌기어의 치형설계

비원형 기어에서는 피니언의 피치곡선이 주어지면 이와 상대운동을 하는 기어의 피치곡선이 정해지는데 오벌기어는 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 피니언과 기어의 피치곡선이 동일한 형상이다[6].

본 논문에서는 오벌 형상의 피치곡선 특성을 해석하고 피치곡선의 곡률을 고려해서 치형을 설계하고 이를 피치곡선 등분점에 매핑하여 오벌기어를 설계하고자 한다.

2.1. 피치곡선의 설계

오벌기어는 회전중심이 단면의 도심으로 피니언의 피치곡선은 다음과 같다[7,8].

$$r_1 = f(\theta) = \frac{2ab}{(a+b) - (a-b)\cos 2\theta} \quad (1)$$

여기서 a 와 b 는 오벌의 장반경과 단반경의 길이이다. 비원형 기어에서도 중심거리는 일정해야 하므로 피니언 피치곡선에 대해 기어의 피치곡선은 다음 식을 만족해야 한다.

$$r_2 = c - f(\theta) \quad (2)$$

여기서 $c = a + b$ 로 오벌기어의 중심거리이다.

식(1)의 피니언의 피치곡선과 이에 대응하는 식(2)의 기어의 피치곡선은 물립 초기상태에서 90도 위상차의 동일한 형상이 된다.

오벌기어에서 피니언의 회전각 θ 와 기어의 회전각 ϕ 는 다음의 식으로 구속된다.

$$\phi = -\theta + c \int_0^\theta \frac{dt}{c - f(t)} \quad (3)$$

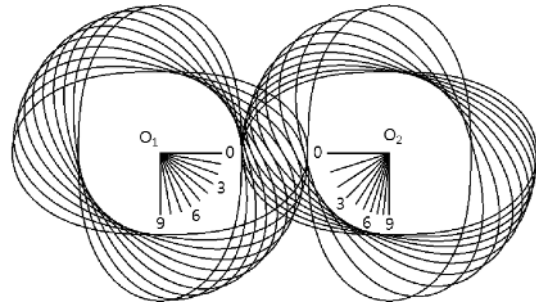


Fig. 2. Rolling of pitch curves.

식(1)을 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} \tan \theta \right] \quad (4)$$

Fig. 2는 식(4)에 의해 피니언이 일정한 각속도로 회전할 때 피치곡선의 물립을 시뮬레이션한 것으로 피니언과 기어의 피치곡선이 올바르게 설계되어 있음을 확인할 수 있다.

2.2. 피치곡선의 특성해석

오벌기어에서는 피니언과 기어가 동일한 형상이기 때문에 피니언 즉, $r(\theta) = r_1(\theta)$ 에 대해서만 치형설계를 하면 된다. Fig. 1의 피니언에서 각도 θ 에 대한 피치곡선의 길이는 다음과 같이 구해진다[9].

$$s_\theta = \int_0^\theta \sqrt{(r')^2 + (r)^2} d\theta \quad (5)$$

피치곡선의 전체길이 s_p 는 $\theta = 2\pi$ 에 대해 계산하면 구해진다. 피치곡선의 전체길이는 원형기어에서 피치원의 원둘레에 해당하므로 비원형 기어에서도 기어의 모듈(m), 잇수(z), 원주피치(c_p)는 다음 식을 만족하는 것으로 간주한다.

$$c_p = \pi m = \frac{s_p}{z} \quad (6)$$

여기서 원주피치는 피치곡선을 잇수로 등분한 길이를 의미한다.

피치곡선을 잇수로 등분할 때 k 번째 등분점의 각 ζ_k 는 다음 식을 만족해야 한다.

$$g(\zeta) = \int_0^{\zeta} \sqrt{(r')^2 + (r)^2} d\theta - kc_p = 0 \quad (7)$$

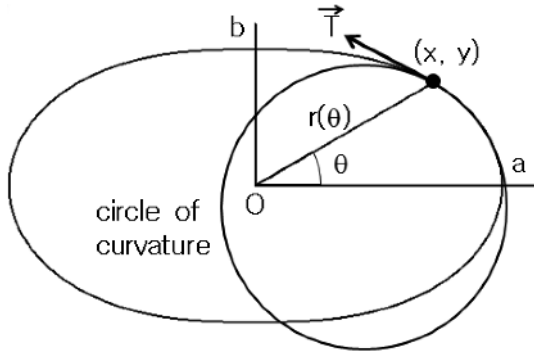


Fig. 3. Tangent vector and circle of the curvature.

이 식의 수치해는 다음과 같이 Newton-Raphson 법을 이용하여 10^{-5} 의 오차 이내에서 계산한다.

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i - \frac{g(\zeta_i)}{g'(\zeta_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

피치곡선을 등분한 점에 치형을 설계하기 위해서는 등분점에서의 접선벡터가 필요하며, 이는 다음과 같이 계산된다.

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}} (x'(\theta)\vec{i} + y'(\theta)\vec{j}) \quad (9)$$

여기서 $x(\theta)$, $y(\theta)$ 는 Fig. 3에 나타낸 바와 같이 피치곡선 $r(\theta)$ 의 x , y 방향 성분이다.

비원형 기어에 대한 선행 연구[5]에서는 식(6)의 모듈과 잇수로 기준 치형을 설계하고 이를 피치곡선 등분점에 매핑해서 치형을 설계하는 방법을 제시하였다. 그러나 오벌기어와 같이 피치곡선의 곡률 차이가 큰 경우에는 등분점에 동일한 형상의 치형을 사용하여 기어를 설계하였을때 치의 물림이 원활하게 이루어지기 어렵기 때문에 여기서는 피치곡선 각 등분점에서의 곡률을 고려해서 치형을 설계하고자 한다.

피치곡선에서의 곡률은 다음과 같이 계산되고

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (10)$$

곡률원 반경은 곡률의 역수로 구해진다.

2.3. 곡률에 따른 치형설계

기어설계에서는 모듈, 압력각, 잇수, 전위계수, 틈새계수, 백래시 등이 주요 변수이다. 두 기어가 물리기

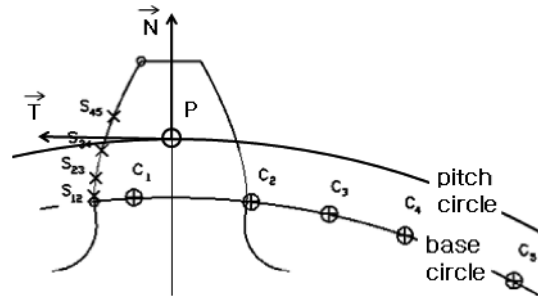


Fig. 4. Circular arcs which represent an involute tooth.

위해서 모듈과 압력각은 동일해야 한다. 모듈과 잇수의 곱에 의해 피치원이 결정되는데, 두 개의 치가 서로 물리는 관점에서 보면 원형 기어에서의 피치원은 비원형 기어에서 곡률원에 해당된다.

따라서 오벌기어의 피치곡선 등분점에서의 곡률을 구하고 이때의 곡률원을 해당 등분점에 있는 치의 가상 피치원으로 간주하여 치형을 설계하고자 한다. 이 경우 같은 모듈과 압력각의 치형이라도 피치곡선 등분점의 곡률에 따라 피치원의 크기가 달라지기 때문에 치형의 형상이 다르게 된다. 또한 각각의 치형을 독립적으로 설계하므로 곡률이 커서 간섭이 우려되는 경우에는 치형을 수정해서 설계할 수 있다.

등분점에서의 치형은 참고문헌[10]에서의 방법을 사용하여 Fig. 4에 보인 바와 같이 원호조합곡선으로 설계하며, 치형의 중심선과 피치원이 만나는 점에서의 접선벡터가 오벌 피치곡선의 등분점의 접선벡터에 일치하도록 매핑시킨다. Fig. 4에서 인벌류트 구간은 5개의 원호의 조합으로 구성되어 있는데 S_{ij} 는 각 원호의 구간, C_k 는 원호의 중심을 나타낸다.

3. 오벌기어의 설계 예

피치곡선의 장반경 $a=16.75$, 단반경 $b=9.25$ 인 오벌 기어를 대상으로 설계한다. 오벌 피치곡선의 길이는 식(5)에 의해 $s_p=84.886$ 로 계산되며, 오벌기어의 잇수를 $z=30$ 으로 하면 모듈은 $m=0.9$, 원주피치는 $c_p=2.830$ 이 된다.

피치곡선의 등분점은 식(7)에 의해 구해지며, 등분점에서 접선벡터와 곡률은 식(9)와 (10)으로 계산한다. Fig. 5는 피치곡선의 등분점과 각 등분점에서의 곡률원을 나타낸 것이다. 등분점은 장반경에 치의 이끝부분, 단반경에 이뿌리 부분이 형성되도록 장반경을

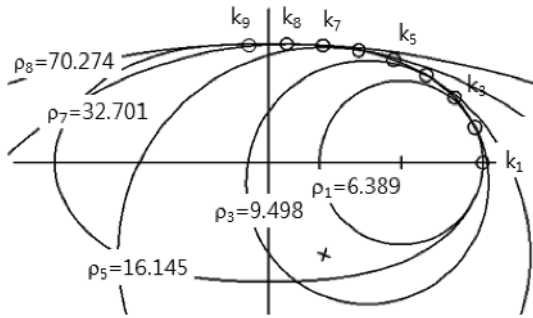


Fig. 5. Circles of the curvature of the oval pitch curve.

Table 1. Number of teeth at the virtual pitch circles

Divided points	Angle (deg)	Curvature	Diameter of curvature (d)	Number of teeth (d/m)
1	0	0.15651	12.779	14(14.2)
2	9.640	0.13802	14.491	16(16.1)
3	19.179	0.10528	18.997	21(21.1)
4	28.895	0.07969	25.097	28(27.9)
5	39.327	0.06194	32.289	36(35.9)
6	51.143	0.04716	42.409	47(47.1)
7	65.043	0.03058	65.402	73(72.7)
8	81.294	0.01423	140.548	156(156.2)

첫 번째 등분점으로 정하고 단반경은 등분점의 중간에 위치하도록 하였다. 장반경의 등분점 k_1 에서의 곡률원 반경은 $\rho_1 = 6.389$, 단반경 부근의 등분점 k_8 에서의 곡률원 반경은 $\rho_8 = 70.274$ 로 곡률원의 크기는 큰 차이가 있다.

Table 1은 곡률원을 가상피치원으로 간주하고 잇수를 계산한 결과이다. 곡률원 직경을 모듈로 나누어 반올림한 정수값을 해당 등분점에서의 잇수로 사용하여 치형을 설계한다.

Fig. 6은 등분점 k_1 과 k_5 에서의 잇수를 대상으로 치형을 설계한 결과를 나타낸 것이다. 등분점 k_1 에서의 치형은 잇수 14의 경우로 피치원경은 12.6이며, 등분점 k_5 의 치형은 잇수 21, 피치원경 18.9로 피치원경은 Table 1의 곡률원 직경과는 근소한 차이가 있다. 비원형 기어에서는 치가 물리는 과정 중에 중심거리가 변하기 때문에 정확한 치 물림이 이루어지지 않으므로 충분한 백래시가 확보되어야 한다. 설계시 치형의 이두께는 표준 이두께에서 백래시 크기만큼 작게 설계해

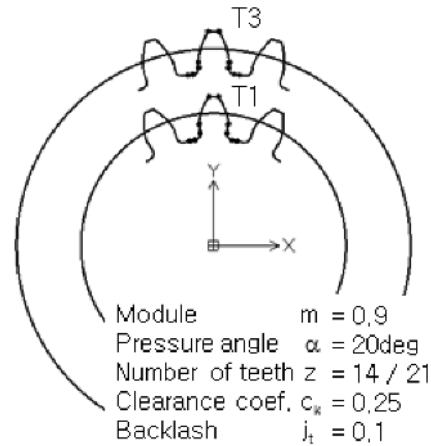


Fig. 6. Gear design at the divided pitch points k_1 and k_5 .

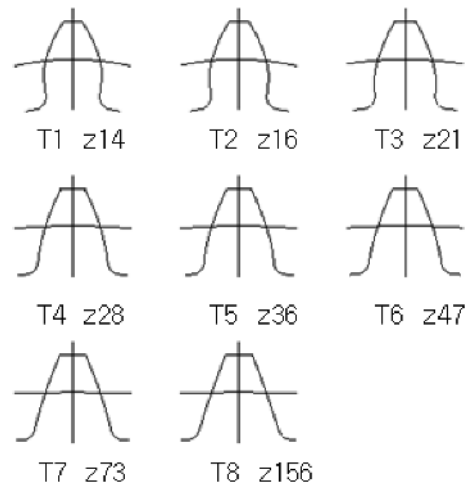


Fig. 7. Tooth profiles at the divided pitch points.

서 이에 대한 대비를 하였다.

Fig. 7은 오벌 피치곡선 각 등분점에서의 치형으로 가상피치원의 크기에 따라 치형이 설계되어 있다. 치형의 모듈, 압력각은 동일하지만 잇수가 달라져서 피치원의 크기가 작을 때는 치형의 곡률이 크고 피치원이 커짐에 따라 곡률은 완만한 형상이 된다.

Fig. 8은 치형을 등분점에 매핑하는 과정을 나타낸 것이다. Fig. 7에서 설계한 치형을 해당 등분점의 위치로 이동시키고 치형의 접선벡터가 등분점의 접선벡터에 일치하도록 회전시켜 치형을 구성하였다. 치형의 매핑은 T1을 기점으로 순차적으로 진행하였는데 치형의 이뿌리 부분은 서로 접합하지는 않지만 거의 근접한

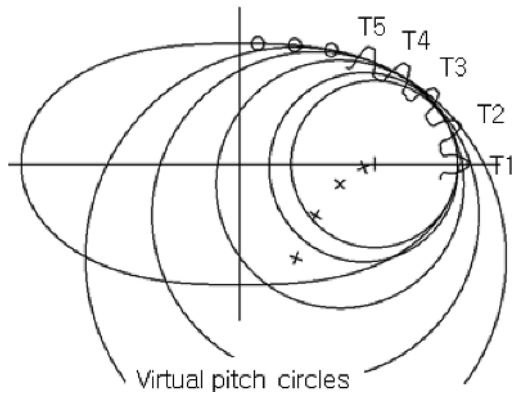


Fig. 8. Tooth profiles at the divided pitch points.

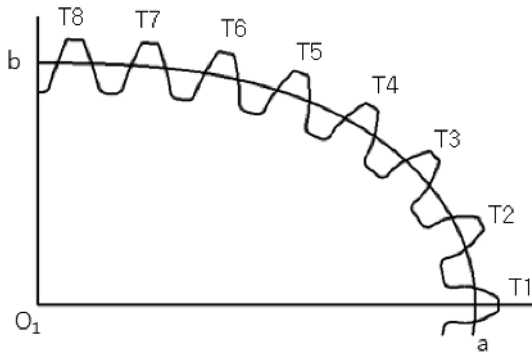


Fig. 9. Oval gear configuration.

위치에 있기 때문에 전 단계 치형의 이뿌리 부분 종료 위치를 매핑하는 치형의 이뿌리 부분 시작 위치로 수정하여 이뿌리 부분이 접합되도록 하였다. Fig. 9는 1 사분면의 오벌 피치곡선에 대해 치형을 설계한 결과이며, 형상 전체를 원호의 조합곡선으로 구성한 것이다.

Fig. 10과 11은 피니언의 시계방향 회전에 대해 오벌 기어의 물림을 시뮬레이션 한 것이다. Fig. 10은 피니언의 장반경에 있는 치 T1과 기어의 단반경에 있는 치 T8의 물림을 나타낸 것이며, Fig. 11은 피니언의 내반경 치 T4의 접촉상태를 나타낸 것이다. 피치곡선의 곡률이 치형 설계에 반영되어 등분점에서 동일한 형상의 치형을 사용한 오벌기어보다 물림이 원활하게 이루어진다.

4. 결 론

오벌기어의 피치곡선 곡률에 따라 치형의 형상을 설계하는 방법을 제시하였다. 오벌 피치곡선의 등분점을

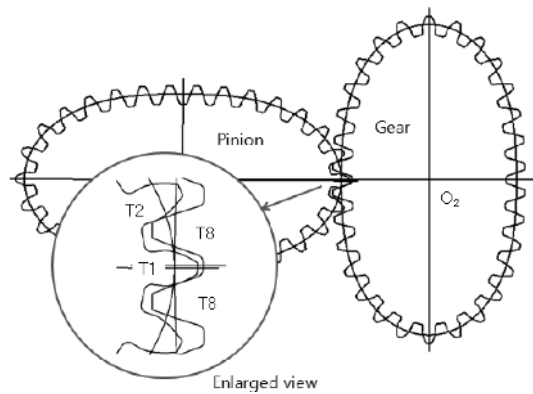


Fig. 10. Oval gear in mesh at the tooth T1.

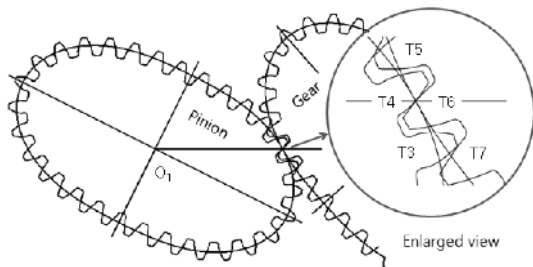


Fig. 11. Oval gear in mesh at the tooth T4.

구하고 각 등분점에서 곡률원을 가상피치원으로 간주하여 해당 등분점에서 기어의 잇수를 구하여 치형을 설계하였다. 따라서 피치곡선의 곡률이 큰 등분점에서는 치형 곡선의 곡률도 커지고 곡률이 작아지면 치형 곡선이 완만하게 설계된다.

본 연구에서의 오벌기어는, 등분점에서 치를 동일한 형상으로 제작한 오벌기어보다 물림특성이 더 양호할 것으로 평가된다. 치를 동일한 형상으로 설계할 경우 잇수를 많이 해주어야 물림이 원활하게 이루어지는데 본 연구의 설계에서는 잇수를 적게 할 수 있어서 큰 모듈의 치형을 사용할 수 있기 때문에 치의 강성을 크게 해주고 가공비를 저감할 수 있다.

그리고 오벌기어 전체의 형상이 원호의 조합곡선으로 설계되어 있기 때문에 NC코드를 용이하게 작성할 수 있고 와이어 방전가공 등으로 쉽게 제작할 수 있다.

기호설명

α : 압력각

θ : 피니언의 회전각
 κ : 곡률
 ρ : 곡률원 반경
 ϕ : 기어의 회전각
 a : 오벌의 장반경
 b : 오벌의 단반경
 c : 오벌기어의 중심거리
 c_p : 원주피치
 d : 가상 피치원경
 k_f : 피치곡선의 등분점
 m : 모듈
 r_1 : 피니언의 피치곡선
 r_2 : 기어의 피치곡선
 s_g : 피치곡선의 길이
 T : 등분점의 접선벡터
 x : 피치곡선의 x좌표
 y : 피치곡선의 y좌표
 z : 잇수

참고문헌

1. 香取英男, 非円形齒車, 日刊工業新聞社, 2001.
2. Bair B., "Computer Aided Design of Elliptical Gears," *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 124, pp. 787-793, 2002.
3. Figliolini G. and Angeles J., "The Synthesis of Elliptical Gears Generated by Shaper-cutters," *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 125, pp. 793-801, 2003.
4. 이성철, "타원형 기어의 와이어커팅을 위한 설계," *한국윤활학회지*, 제23권, 제4호, pp. 149-155, 2007.
5. 이성철, "비원형 기어의 와이어 방전가공을 위한 설계," *한국윤활학회지*, 제24권, 제5호, pp. 221-227, 2008.
6. Chironis, N. P. and Sclater, N, *Mechanisms and Mechanical Devices Sourcebook*, Second Edition, pp. 267-270, McGraw-Hill, 1996.
7. Maitra, G. M., *Handbook of Gear Design*, Chap. 7, pp.324-328, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1985.
8. Tong, S. W. and Yang, D., "Generation of Identical Noncircular Pitch Curves," *Power Transmission and Gearing Conference, ASME*, DE-Vol. 88, pp.781-787, 1996.
9. Rutter J., *Geometry of curves*, Chapman & Hall/CRC, 2000.
10. 이성철, 권오관, "NC가공을 위한 인벌류트 곡선의 원호 근사화에 대한 연구," *대한기계학회논문집*, 제19권, 제10호, pp.2475-2483, 1995.