Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 3 (2000), 981–993

TOPOLOGIE DU FEUILLETAGE FORTEMENT STABLE

par **Françoise DAL'BO**

Introduction.

Nous nous plaçons dans le contexte des variétés riemanniennes, connexes, simplement connexes, complètes dont la courbure sectionnelle K est normalisée par $\sup K = -1$. Une telle variété (X,d) est naturellement munie d'un bord géométrique $X(\infty)$. Soit $u = (x,\vec{u})$ un élément du fibré unitaire tangent T^1X, nous notons $u(\infty)$ l'extrémité du rayon géodésique tangent en u et $H(u)$ l'horosphère centrée en $u(\infty)$ passant par x. La relation d'équivalence donnée par "$u \sim v \Leftrightarrow H(u) = H(v)$" définit sur T^1X un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$. Soit Γ un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment librement sur X, notons π la projection de T^1X sur $T^1(\Gamma\backslash X)$ et $\mathcal{F}$ l'image par π de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Ce feuilletage image est appelé feuilletage *fortement stable*. Dans ce texte, nous analysons la topologie des feuilles de $\mathcal{F}$. Fixons un point de référence $0 \in X$, l'orbite de 0 sous Γ s'accumule sur $X(\infty)$. L'*ensemble limite*, L, de Γ est défini par $L = \overline{\Gamma 0} \cap X(\infty)$. Notons Ω^+ l'image par π des $u \in T^1X$ tels que $u(\infty) \in L$, cet ensemble est saturé par $\mathcal{F}$. On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ restreint à Ω^+, noté $\mathcal{F}_{\Omega^+}$, est *topologiquement transitif* s'il admet une feuille dense. La topologie d'une feuille $\mathcal{F}(\pi(u))$ est intimement liée à la façon dont $u(\infty)$ est approché par $\Gamma 0$. Un point $\xi \in L$ est *horosphérique* si $\Gamma 0$ rencontre l'intérieur de toutes les horosphères centrées en ξ. Si, de plus, il existe une suite $(\gamma_n(0))_{n\geqslant 1} \subset \Gamma 0$ convergeant vers ξ et restant à distance bornée du rayon géodésique $[0,\xi)$, le point ξ est *conique*. Par exemple, le point fixe d'une isométrie hyperbolique de Γ est

Mots-clés : Flot géodésique – Feuilletage.
Classification math. : 53D25 – 37C85 – 53C12.

conique. Soit γ une telle isométrie, γ laisse invariante une unique géodésique sur laquelle elle agit par translation. On dit que Γ est *arithmétique* si le groupe engendré par l'ensemble des longueurs de translation des isométries hyperboliques de Γ (c'est-à-dire, par le *spectre des longueurs* de $\Gamma\backslash X$) est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Par exemple, si l'ensemble limite de Γ est fini, Γ est arithmétique. Les conditions sous lesquelles, jusqu'à présent, il est démontré qu'un groupe Γ *non élémentaire* n'est pas arithmétique sont les suivantes (voir [D]) :

1) La courbure sectionnelle de X est constante ([GR], proposition 3);

2) L contient une composante connexe non réduite à un point ([B]);

3) Γ contient une isométrie parabolique ([DP]);

4) $\dim X = 2$ ([D]).

Dans tous les autres cas, à notre connaissance, la question est ouverte.

Soit Ω la *partie récurrente* du flot géodésique $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $T^1(\Gamma\backslash X)$. Ce flot est *topologiquement mélangeant*, si pour tous ouverts $U, V \subset \Omega$ il existe $T > 0$ tel que $g_tU \cap V \neq \emptyset$ quel que soit $|t| > T$. À l'aide du lemme de fermeture, on peut montrer que si $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est topologiquement mélangeant alors Γ n'est pas arithmétique (théorème A 3 $\Rightarrow$ 2)).

Ce texte comprend des résultats nouveaux en courbure non constante et lorsque Γ n'est pas cocompact, et des démonstrations nouvelles de résultats connus. Notre méthode s'appuie essentiellement sur l'action de Γ sur $X(\infty)$ et sur le lien entre le birapport de quatre points de L (pour une distance appropriée) et le spectre des longueurs de Γ. Le théorème suivant relie la dynamique du flot géodésique à la topologie de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME A. — *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Le feuilletage $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ est topologiquement transitif.*

2) *Le groupe Γ n'est pas arithmétique.*

3) *Le flot géodésique en restriction à Ω est topologiquement mélangeant.*

L'implication 1) $\Rightarrow$ 2) est due à P. Eberlein ([E2], theorem 4.15 et lemme de fermeture). Dans [E2] (theorem 5.1) il est également démontré que si le spectre des longueurs contient deux réels de rapport irrationnel, alors $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ admet une feuille dense. Cette condition est plus forte que la non arithméticité de Γ. Par exemple, elle n'est pas satisfaite si le groupe engendré par le spectre des longueurs est inclus dans le corps des rationnels alors que, dans ce cas, Γ n'est pas nécessairement arithmétique. Les méthodes employées par P. Eberlein sont différentes des nôtres.

PROPOSITION B. — *On suppose que $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ est topologiquement transitif. Soit $u \in T^1X$, la feuille $\mathcal{F}(\pi(u))$ est dense dans Ω^+ si, et seulement si, $u(\infty)$ est un point horosphérique de L.*

Cette proposition est connue en courbure constante ([H], [S1], [S2]) et sous l'hypothèse "$\Gamma\backslash X$ compact" ([E2]). Dans le premier cas, elle est démontrée en utilisant un argument de G. Hedlund, dans le deuxième cas, sa démonstration est dynamique et repose sur l'égalité $\Omega^+ = T^1(\Gamma\backslash X)$.

Soit $\xi \in L$, on dit que ξ est *parabolique* si ξ est fixé par une isométrie parabolique de Γ. Un tel point ne peut pas être conique ([T]). En revanche il peut être horosphérique. Voici un exemple : considérons un groupe de Schottky Γ de type infini inclus dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ construit à partir d'une suite de demi-cercles de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ dont les rayons tendent vers $+\infty$. Le point ∞ appartient à L et pour un choix adapté des demi-cercles, ce point est horosphérique (voir les exemples de Nicholls-Waterman [NW]). Soit G le sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ engendré par Γ et par la translation $t(z) = z + iN$. Pour N grand, G est discret. Le point ∞ appartient à l'ensemble limite de G et est simultanément horosphérique et parabolique. Parmi les points paraboliques de L on distingue les points *paraboliques bornés* correspondant aux $\xi \in L$ dont le stabilisateur dans Γ agit de façon cocompacte sur $L - \{\xi\}$. Si $\dim X = 2$, tous les points paraboliques sont paraboliques bornés. Ceci est faux dès la dimension 3, comme le montre l'exemple précédent.

PROPOSITION C. — *Soit $u \in T^1X$, si $u(\infty) \notin L$ ou si $u(\infty)$ est parabolique borné alors $\mathcal{F}(\pi(u))$ est fermé.*

Soulignons que la feuille $\mathcal{F}(\pi(u))$ peut être fermée dans Ω^+ sans que $u(\infty)$ ne soit parabolique borné ([DS], [S1], [S2]). On dit que Γ est *géométriquement fini* si L n'est composé que de points coniques et de points paraboliques bornés. La finitude géométrique de Γ se traduit sur $T^1(\Gamma\backslash X)$ par l'existence d'un ε-voisinage de Ω de volume fini ([Bo1], [Bo2]). Nous affaiblissons la condition sur les points coniques.

PROPOSITION D. — *Le groupe Γ est géométriquement fini si, et seulement si, tous les points de L sont horosphériques ou paraboliques* *bornés.*

On déduit facilement des résultats précédents les corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. — *Si Γ est géométriquement fini et non arithmétique, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont fermées dans $T^1(\Gamma\backslash X)$ ou denses dans Ω^+.*

Récemment, avec A. Starkov ([DS]), nous avons construit un exemple montrant que les feuilles de $\mathcal{F}$ peuvent être toutes, fermées ou denses dans Ω^+, sans que Γ ne soit géométriquement fini.

COROLLAIRE 2. — *Si $\dim X = 2$ alors Γ est géométriquement fini si, et seulement si, les orbites du flot horocyclique sur Ω^+ sont denses ou périodiques.*

Le corollaire suivant est dû à P. Eberlein ([E2]) lorsque Γ est cocompact et se trouve dans [S2] en courbure constante.

COROLLAIRE 3. — *Si Γ n'est pas arithmétique alors la partie récurrente du flot géodésique sur $T^1(\Gamma\backslash X)$ est compacte (i.e. Γ est convexe-cocompact) si, et seulement si, toutes les feuilles de $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ sont denses.*

Je remercie J.-P. Conze et Y. Guivarc'h. Les discussions que j'ai eues avec eux sur les actions linéaires sont à la source de ce travail. La démonstration de la proposition B repose sur une de leurs idées. Je remercie également P. Eberlein pour ses nombreux courriels et le rapporteur de cet article pour la référence [S].

1. Préliminaires.

Soient $\xi \in X(\infty)$, $r(t)$ un rayon géodésique d'extrémité ξ et $x, y \in X$. La limite quant t tend vers $+\infty$ de $d(x, r(t) - d(y, r(t))$ existe et est indépendante de l'origine de r, on la note $B_\xi(x,y)$. Nous renvoyons à ([B]) pour une étude détaillée de cette fonction. Retenons deux propriétés :

1) $B_\xi(x,z) = B_\xi(x,y) + B_\xi(y,z)$.

2) Soit g une isométrie, $B_{g(\xi)}(g(x), g(y)) = B_\xi(x,y)$.

Fixons un point de référence $0 \in X$ et considérons la distance D sur $X(\infty)$ définie par 0 si $\xi = \eta$ et sinon par $e^{-1/2(B_\xi(0,z)+B_\eta(0,z))}$ où z est un point quelconque de la géodésique $(\xi\eta)$ (voir [B]). Soit g une isométrie, posons $|g'(\xi)| = e^{B_\xi(0,g^{-1}(0))}$. Si g est hyperbolique de longueur de translation $\ell(g)$ et si g^+ (resp. g^-) désigne le point fixe attractif de g (resp. répulsif), on a $|g'(g^\pm)| = e^{+\ell(g)}$.

La relation de conformité suivante découle des propriétés 1) et 2) :

$$D(g(\xi),g(\eta)) = |g'(\xi)|^{1/2}|g'(\eta)|^{1/2}D(\xi,\eta).$$

Soient ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 des points distincts de $X(\infty)$. Le birapport de ces points défini par

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4] = \frac{D(\xi_1,\xi_3)}{D(\xi_1,\xi_4)}\,\frac{D(\xi_2,\xi_4)}{D(\xi_2,\xi_3)},$$

est invariant par l'action des isométries. Les deux lemmes suivants, dus respectivement à J.-P. Otal et I. Kim (voir aussi [D]), relient ce birapport à la longueur de translation des isométries hyperboliques.

1.1. LEMME ([O]). — *Si g est une isométrie hyperbolique et si $\xi \in X(\infty) - \{g^\pm\}$ alors $[\xi, g^k(\xi), g^+, g^-] = e^{k\ell(g)}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

1.2. LEMME ([K]). — *Soit Γ un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment librement sur X. Si le spectre des longueurs de $\Gamma\backslash X$ est inclus dans $a\mathbb{N}$ alors $[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4] \in a^{(a/2)\mathbb{Z}}$ pour tous $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4 \in L$ tels que $\xi_1 \neq \xi_4$ et $\xi_2 \neq \xi_3$.*

Soient $\xi \in X(\infty)$ et $t \in \mathbb{R}$, notons $H_{\xi,t}$ la préimage de t par la fonction $f(y) = B_\xi(0,y)$. Il découle des propriétés 1) et 2) que $g(H_{\xi,t}) = H_{g(\xi),t-B_\xi(0,g^{-1}(0))}$. Considérons l'application φ qui à $H_{\xi,t}$ associe le couple $(\xi, e^t) \in X(\infty) \times \mathbb{R}_*^+$. Cette application est une bijection de l'ensemble des horosphères de X sur $V = X(\infty)\times\mathbb{R}_*^+$. Elle induit une action des isométries sur V définie par

$$g(\xi,\lambda) = (g(\xi), \lambda|g'(\xi)|^{-1}).$$

Dans le cas particulier où $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur V est conjuguée à son action projective sur $\{\pm\,\mathrm{Id}\}\backslash\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

1.3. LEMME. — *Soient g_1, g_2 deux isométries hyperboliques n'ayant pas de points fixes en commun et $v = (g_1^+,\lambda) \in V$. Si $(r_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite non bornée de $\mathbb{N}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{Z}$ telles que $r_n\ell(g_2) + s_n\ell(g_1)$ converge vers 0 alors*

$$\lim_{n\to+\infty} g_2^{r_n}g_1^{s_n}(v) = \Big(g_2^+, \lambda\frac{D^2(g_1^+,g_2^-)}{D^2(g_2^+,g_2^-)}\Big).$$

Démonstration. — Soit $w = (\xi, \alpha) \in V$ posons $\|w\| = \alpha$. On a

$$g_2^{r_n} g_1^{s_n}(v) = (g_2^{r_n}(g_1^+), \lambda |(g_2^{r_n})'(g_1^+)|^{-1} e^{s_n \ell(g_1)}).$$

Or

$$|(g_2^{r_n})'(g_1^+)| = \frac{D^2(g_2^{r_n}(g_1^+), g_2^-)}{D^2(g_1^+, g_2^-)} e^{-r_n \ell(g_2)}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_2^{r_n} g_1^{s_n}(v)\| = \lim_{n\to+\infty} \lambda \frac{D^2(g_1^+, g_2^-)}{D^2(g_2^{r_n}(g_1^+), g_2^-)} e^{r_n \ell(g_2) + s_n \ell(g_1)}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} g_2^{r_n} g_1^{s_n}(v) = \Big(g_2^+, \lambda \frac{D^2(g_1^+, g_2^-)}{D^2(g_2^+, g_2^-)}\Big). \qquad \square$$

Soit $u = (x, \vec{u})$ un élément de T^1X notons v_u l'image par φ de l'horosphère centrée en $u(\infty)$ et passant par x. Remarquons que $v_u = v_{u'}$ si, et seulement si, u et u' appartiennent à la même feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Considérons à présent un groupe d'isométries Γ agissant proprement discontinûment librement sur X. Soit L son ensemble limite, posons $V_\Gamma = L \times \mathbb{R}_*^+$. Il y a une correspondance entre la topologie des feuilles de $\mathcal{F}$ et celle des orbites de Γ sur V :

$$\pi(u) \in \Omega^+ \iff v_u \in V_\Gamma$$

$$\overline{\mathcal{F}(\pi(u))} = \Omega^+ \iff \overline{\Gamma v_u} = V_\Gamma$$

$$\mathcal{F}(\pi(u)) \text{ est fermé } \iff \Gamma v_u \text{ est fermé.}$$

2. Théorème A et proposition B.

Soit $v = (\xi, \lambda)$, posons $\|v\| = \lambda$.

Démonstration du théorème A. — En termes d'action sur V, l'équivalence 1) $\Leftrightarrow$ 2) revient à montrer qu'il existe $v \in V_\Gamma$ tel que $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$ si, et seulement si, Γ n'est pas arithmétique.

2) $\Rightarrow$ 1). On suppose que Γ n'est pas arithmétique, en particulier Γ n'est pas élémentaire. Soient γ_1 une isométrie hyperbolique de Γ et $v = (\gamma_1^+, \lambda)$ un élément de V_γ. Montrons que $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$. Considérons une isométrie hyperbolique $\gamma_2 \in \Gamma - \langle \gamma_1 \rangle$. D'après le lemme 1.3, $\Big(\gamma_2^+, \lambda \frac{D^2(\gamma_1^+, \gamma_2^-)}{D^2(\gamma_2^+, \gamma_2^-)}\Big) \in \overline{\Gamma v}$. L'ensemble des couples $((\gamma^+, \gamma^-))_{\gamma \in \Gamma}$ est dense

dans $L \times L$ ([E1], theorem 3.10) donc $\left(\xi, \lambda \frac{D^2(\gamma_1^+, \eta)}{D^2(\xi, \eta)}\right) \in \overline{\Gamma v}$ pour tous $\xi, \eta \in L$ vérifiant $\xi \neq \eta$ et $\eta \neq \gamma_1^+$. Ceci montre en particulier que la projection de $\overline{\Gamma v}$ sur $X(\infty)$ est L. Pour obtenir la densité de Γv il suffit de montrer que $(\gamma_1^+, \alpha) \in \overline{\Gamma v}$ pour tout $\alpha > 0$. Soit $\eta = L - \{\gamma_1^+, \gamma_2^+\}$, on sait que $v_\eta = \left(\gamma_2^+, \lambda \frac{D^2(\gamma_1^+, \eta)}{D^2(\gamma_2^+, \eta)}\right) \in \overline{\Gamma v}$. Le lemme 1.3 appliqué cette fois à v_η (à la place de v) et à γ_1 (à la place de γ_2) entraîne que $(\gamma_1^+, \lambda[\gamma_1^+, \gamma_2^+, \eta, \eta']^2) \in \overline{\Gamma v_\eta} \subset \overline{\Gamma v}$ pour tous $\eta, \eta' \in L - \{\gamma_1^+, \gamma_2^+\}$. Soient γ une isométrie hyperbolique de $\Gamma - \langle \gamma_1 \rangle$ et $n \in \mathbb{Z}$. En remplaçant dans le birapport précédent γ_2^+ par $\gamma^n(\gamma_1^+)$, η par γ^+ et η' par γ^- et en appliquant le lemme 1.1 on obtient $(\gamma_1^+, \lambda e^{2n\ell(\gamma)}) \in \overline{\Gamma v}$.

Remarquons également que

$$\gamma_1^m(\gamma_1^+, \lambda e^{2n\ell(\gamma)}) = (\gamma_1^+, \lambda e^{2n\ell(\gamma)+m\ell(\gamma_1)}) \in \overline{\Gamma v}.$$

Notons ce dernier couple ω. Soient h une isométrie hyperbolique de $\Gamma - \langle \gamma_1 \rangle$ et $p \in \mathbb{Z}$, en remplaçant dans le raisonnement précédent v par w et γ par h on obtient $(\gamma_1^+, \lambda e^{2n\ell(\gamma)+m\ell(\gamma_1)+2p\ell(h)}) \in \overline{\Gamma w} \subset \overline{\Gamma v}$. On en déduit que $(\gamma_1^+, \lambda e^{2(\sum_{i=1}^p n_i \ell(\gamma_i))}) \in \overline{\Gamma v}$ quels que soient $n_i \in \mathbb{Z}$ et γ_i isométrie hyperbolique de Γ. Par hypothèse, le groupe engendré par les $(\ell(\gamma_i))_{i \geqslant 1}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $(\gamma_1^+, \alpha) \in \overline{\Gamma v}$ quel que soit $\alpha > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$ et montrons que Γ n'est pas arithmétique. Raisonnons par l'absurde et supposons que le spectre des longueurs de $\Gamma \backslash X$ soit inclus dans $a\mathbb{N}$. Posons $v = (\xi, \lambda)$. Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \notin \lambda e^{a\mathbb{Z}}$. Comme $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n \geqslant 1} \subset \Gamma$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n(v) = (\xi, \alpha)$. Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n(\xi) = \xi$ et $\lim_{n \to +\infty} |\gamma_n'(\xi)| = \lambda / \alpha$. Remarquons que

$$(*) \qquad |\gamma_n'(\xi)| = \frac{D^2(\gamma_n(\xi), \gamma_n^-)}{D^2(\xi, \gamma_n^-)} e^{-\ell(\gamma_n)}$$

(si γ_n est parabolique, $\ell(\gamma_n) = 0$ et γ_n^- est le point fixe de γ_n). Ainsi

$$|\gamma_n'(\xi)| = [\gamma_n^-, \eta, \gamma_n(\xi), \xi]^2 \frac{D^2(\eta, \gamma_n(\xi))}{D^2(\eta, \xi)} e^{-\ell(\gamma_n)}$$

quel que soit $\eta \in L - \{\gamma_n^-, \gamma_n(\xi), \xi\}$. On déduit de cette remarque et du lemme 1.2 que

$$|\gamma_n'(\xi)| \in \frac{D^2(\eta, \gamma_n(\xi))}{D^2(\eta, \xi)} e^{a\mathbb{Z}}.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \gamma_n(\xi) = \xi$ donc $\lambda / \alpha = \lim_{n \to +\infty} |\gamma_n'(\xi)| \in e^{a\mathbb{Z}}$ ce qui contredit le choix de α.

3) $\Rightarrow$ 2). Cette démonstration est classique. Fixons $\varepsilon > 0$ et un ouvert U_ε de diamètre ε inclus dans Ω. Puisque $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est topologiquement mélangeant, il existe t_ε tel que $g_t U_\varepsilon \cap U_\varepsilon \neq \emptyset$ quel que soit $t \geqslant t_\varepsilon$. D'après le lemme de fermeture ([E3], proposition 4.5.15), il existe T_ε tel que pour tous $t \geqslant T_\varepsilon$ et $u \in \Omega$ vérifiant $d(u, g_t(u)) \leqslant \varepsilon$, il existe $t' \in \mathbb{R}^+$ et $u' \in \Omega$ satisfaisant : $g_{t'}(u') = u'$, $|t - t'| \leqslant \varepsilon$ et $d(g_s(u), g_s(u')) \leqslant \varepsilon$ quel que soit $0 \leqslant s \leqslant t$. Soient $t \geqslant \mathrm{Max}(t_\varepsilon, T_\varepsilon)$ et $u \in U_\varepsilon$ tels que $g_t(u) \in U_\varepsilon$. Le segment géodésique $(g_s(u))_{s\in[0,t]}$ est pisté par une géodésique fermée dont la longueur appartient à $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$. Ceci montre que Γ n'est pas arithmétique.

1) $\Rightarrow$ 3). Nous adaptons ici un argument de M. Shub ([S], p. 125). Raisonnons par l'absurde et supposons que le flot géodésique ne soit pas topologiquement mélangeant. Il existe donc deux ouverts U et V dans Ω et une suite non bornée $(t_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $U \cap g_{t_n}(V) = \emptyset$. On peut supposer $\lim_{n\to+\infty} t_n = -\infty$ (sinon, on échange les rôles de U et V). L'ensemble des éléments périodiques pour le flot géodésique est dense dans Ω ([E1], theorem 3.10), donc il existe v périodique appartenant à V. Notons T sa période et posons $t_n = r_n T + s_n$ avec $-r_n \in \mathbb{N}$ et $-T < s_n \leqslant 0$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que s_n converge vers s. Par hypothèse, $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ admet une feuille dense donc, d'après la démonstration du théorème A 1) $\Leftrightarrow$ 2), si ω est périodique $\mathcal{F}(\omega)$ est dense. Ainsi $\mathcal{F}(g_s(v))$ est dense et donc il existe $u \in \mathcal{F}(g_s(v)) \cap U$. Remarquons que $g_{-r_nT}(u)$ converge vers $g_s(v)$. Par conséquent $g_{-r_nT-s}(u)$ converge vers v et à partir d'un certain rang $g_{-r_nT-s}(u) \in V$. Or $g_{-r_nT-s} = g_{-t_n} \circ g_{s_n - s}$ et $\lim_{n\to+\infty} g_{s_n-s}(u) = u$, donc pour n grand, $g_{s_n-s}(u) \in U \cap g_{t_n}(V)$ ce qui est contradictoire. $\square$

Démonstration de la proposition B. — Soit $v = (\xi, \alpha) \in V_\Gamma$, le but de cette proposition est de montrer que $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$ si, et seulement si, ξ est un point horosphérique. On rappelle que $\mathcal{F}_{\Omega^+}$ est topologiquement mélangeant. D'après le théorème A, cela revient à supposer que si γ est une isométrie hyperbolique de Γ et si $\lambda > 0$, l'orbite de (γ^+, λ) est dense dans V_Γ.

Si $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ de Γ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|\gamma_n v\| = 0$. Rappelons que $\|\gamma_n v\| = \|v\| e^{-B_\xi(0,\gamma_n^{-1}(0))}$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} B_\xi(0, \gamma_n^{-1}(0)) = +\infty$. Ceci signifie que la suite $(\gamma_n^{-1}(0))_{n\geqslant 1}$ rencontre toutes les horosphères centrées en ξ et donc que ξ est horosphérique.

Supposons à présent que ξ soit horosphérique et montrons que $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$. Si ξ est fixé par une isométrie hyperbolique de Γ, d'après la démonstration du théorème A 1) $\Leftrightarrow$ 2), $\overline{\Gamma v} = V_\Gamma$. Sinon considérons une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ de Γ telle que $\lim_{n\to+\infty}\|\gamma_n v\| = 0$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $(\gamma_n(\xi))_{n\geqslant 1}$ converge vers un point $\eta \in L$. Soit γ une isométrie hyperbolique de Γ telle que $\gamma^{\pm} \neq \eta$. Une telle isométrie existe car Γ n'est pas élémentaire. Considérons une suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(e^{r_n\ell(\gamma)}\|\gamma_n(v)\|)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Montrons que $(\gamma^{r_n}\gamma_n(v))_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément de la forme $(\gamma^+, \alpha) \in V_\Gamma$.

On a $\lim_{n\to+\infty}\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi) = \gamma^+$ car γ^{r_n} tend uniformément vers γ^+ sur les compacts de $L - \{\gamma^-\}$.

Il reste à montrer que la suite $(\|\gamma^{r_n}\gamma_n(v)\|)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}_*^+$.

On a $\|\gamma^{r_n}\gamma_n(v)\| = \|\gamma_n(v)\| \ |(\gamma^{r_n})'(\gamma_n(\xi))|^{-1}$. En utilisant l'égalité $(*)$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\|\gamma^{r_n}\gamma_n(v)\| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\|\gamma_n(v)\|e^{r_n\ell(\gamma)}D^2(\gamma_n(\xi),\gamma^-)}{D^2(\gamma^{r_n}\gamma_n(\xi),\gamma^-)}.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\|\gamma^{r_n}\gamma_n(v)\| = \lambda\frac{D^2(\eta,\gamma^-)}{D^2(\gamma^+,\gamma^-)} > 0$. □

3. Proposition C.

On rappelle que $\xi \in L$ est parabolique borné si le stabilisateur $\mathcal{P}_\xi$ de ξ dans Γ agit de façon cocompacte sur $L - \{\xi\}$.

3.1. Lemme ([Bo1], [Bo2]). — *Si ξ est parabolique borné, il existe une horoboule B_ξ, centrée en ξ, telle que $\Gamma 0 \cap B_\xi = \emptyset$.*

Un point parabolique borné n'est donc pas horosphérique.

Démonstration de la proposition C. — En termes d'action sur V, la proposition C revient à montrer : soit $v = (\xi, \lambda) \in V$, si $\xi \notin L$ ou si ξ est parabolique borné alors Γv est fermé dans V_Γ. Nous allons en fait montrer que, sous ces hypothèses, l'orbite de v est discrète, au sens où aucune suite non stationnaire de Γv n'est convergente. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(\gamma_n(v))_{n\geqslant 1}$ non stationnaire convergente. La suite $(B_\xi(0,\gamma_n^{-1}(0)))_{n\geqslant 1}$ est donc minorée, autrement dit à partir d'un certain rang, les points $(\gamma_n^{-1}(0))_{n\geqslant 1}$ appartiennent à une même horoboule centrée en ξ. Ceci est impossible si $\xi \notin L$. Il reste le cas où ξ est parabolique borné. Fixons une horoboule fermée B_ξ centrée en ξ donnée par le lemme 3.1 et choisissons un domaine fondamental $\mathcal{D}$ pour l'action de $\mathcal{P}_\xi$ sur $X(\infty) - \{\xi\}$ tel que $\mathcal{D} \cap L$ soit un compact de

$L - \{\xi\}$. Le cône $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$ issu de ξ est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}_\xi$ sur X. Soit $p_n \in \mathcal{P}_\xi$ tel que $p_n\gamma_n^{-1}(0)$ appartient à $\mathcal{C}$. La suite $(\gamma_n^{-1}(v))_{n\geqslant 1}$ n'étant pas stationnaire $(p_n\gamma_n^{-1})_{n\geqslant 1}$ n'est pas constante. Quitte à extraire une sous-suite, $(p_n\gamma_n^{-1}(0))_{n\geqslant 1}$ converge vers un point $\eta \in \mathcal{D}\cap L$. L'ensemble $\mathcal{D}\cap L$ étant un compact de $L-\{\xi\}$ et la suite $(p_n\gamma_n^{-1}(0))_{n\geqslant 1}$ appartenant à l'extérieur de B_ξ, nécessairement $\eta \neq \xi$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} B_\xi(0, p_n\gamma_n^{-1}(0)) = -\infty$. Or $B_\xi(0,p_n\gamma_n^{-1}(0) = B_\xi(0,p_n(0)) + B_\xi(0,\gamma_n^{-1}(0))$ et $B_\xi(0,p_n(0)) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} B_\xi(0,\gamma_n^{-1}(0)) = -\infty$. Ceci contredit la convergence de $(\gamma_n(v))_{n\geqslant 1}$. □

4. Domaine de Dirichlet et proposition D.

Soit D_0 l'ensemble des $x \in X$ tels que $d(x,0) \geqslant d(x,\gamma(0))$ quel que soit $\gamma \in \Gamma$. Cet ensemble est appelé *domaine de Dirichlet de* Γ *centré en* 0. Il est localement fini dans $Y = X \cup (X(\infty) - L)$ (*i.e.* soit $y \in Y$, il existe un voisinage U de y tel que $\gamma D_0 \cap U = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$), étoilé en 0 et $Y = \cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\overline{D_0}$ (voir [Bo1], p. 249). Posons $D_0(\infty) = \overline{D}_0 \cap X(\infty)$.

4.1. Lemme. — *Un point* ξ *appartient à* $D_0(\infty)$ *si, et seulement si,* $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_\xi(0,\gamma(0)) = 0$.

Démonstration. — Notons $p(t)$ le rayon géodésique $[0,\xi)$ paramétré par longueur d'arcs. On rappelle que $B_\xi(0,\gamma(0)) = \lim_{t\to+\infty} d(0,p(t)) - d(\gamma(0),p(t))$. Si $\xi \in D_0(\infty)$, le domaine D_0 étant étoilé en 0, le rayon $[0,\xi)$ est inclus dans D_0. Ainsi $d(0,p(t)) \leqslant d(\gamma(0),p(t))$ pour tous $t>0$ et $\gamma\in\Gamma$. Ceci montre que $B_\xi(0,\gamma(0)) \leqslant 0$ quel que soit $\gamma\in\Gamma$ et donc que $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_\xi(0,\gamma(0)) = 0$.

Supposons à présent que $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_\xi(0,\gamma(0)) = 0$ et montrons que ξ appartient à $D_0(\infty)$. Soit $\gamma\in\Gamma$, posons $f(t) = d(0,p(t)) \leqslant d(\gamma(0),p(t))$. Cette fonction est croissante et $\lim_{t\to+\infty} f(t) \leqslant 0$. Ainsi $f(t)\leqslant 0$ pour tout $t>0$. Donc $[0,\xi)$ est inclus dans D_0 et ξ appartient à $D_0(\infty)$.

4.2. Corollaire. — *Soit* $\xi \in X(\infty)$.

1) *Si* ξ *est horosphérique,* $\xi \notin D_0(\infty)$.

2) *Si* $\xi \notin L$ *ou si* ξ *est parabolique borné, il existe* $\gamma\in\Gamma$ *tel que* $\gamma(\xi) \in D_0(\infty)$.

Démonstration.

1) Si ξ est horosphérique, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1} \subset \Gamma$ telle que $\lim_{n\to+\infty} B_\xi(0,\gamma_n(0)) = +\infty$ donc d'après le lemme 4.1, $\xi \notin D_0(\infty)$.

2) Supposons que ξ n'appartienne pas à L ou qu'il soit parabolique borné. Soit $\lambda > 0$, on sait (voir démonstration de la proposition C) que l'orbite sous Γ de $v(\xi,\lambda) \in V$ est discrète.

Ainsi $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_\xi(0,\gamma(0)) = B_\xi(0,g(0))$ avec $g \in \Gamma$.

Comme $B_\xi(g(0),\gamma g(0)) = B_\xi(0,\gamma g(0)) - B_\xi(0,g(0))$ on a $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_\xi(g(0),\gamma g(0)) = 0$.

Ainsi $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_{g^{-1}(\xi)}(0,\gamma(0)) = 0$ et donc, d'après le lemme 4.1, $g^{-1}(\xi) \in D_0(\infty)$. □

Démonstration de la proposition D. — On rappelle que Γ est géométriquement fini si, et seulement si, les points de L sont coniques ou paraboliques bornés. Un point conique étant horosphérique, si Γ est géométriquement fini, les points de L sont horosphériques ou paraboliques bornés. Démontrons la réciproque.

Supposons donc que les points de L soient horosphériques ou paraboliques bornés et posons $\partial L = L \cap D_0(\infty)$. D'après le corollaire 4.2, cet ensemble ne contient que des points paraboliques bornés. Montrons qu'il est fini (s'il n'est pas vide). Raisonnons par l'absurde et considérons une suite infinie $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ de tels points. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\xi \in \partial L$. Soit K un compact de $L - \{\xi\}$, domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}_\xi$ sur $L - \{\xi\}$. Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe $p_n \in \mathcal{P}_\xi$ tel que $p_n(\xi_n) \in K$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(p_n(\xi_n))_{n\geqslant 1}$ converge dans K. On a $D^2(p_n(\xi_n),\xi) = |p'_n(\xi_n)| D^2(\xi_n,\xi)$ car $|p'_n(\xi_n)| = 1$. Par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} p_n(\xi_n) \neq \xi$ et $\lim_{n\to+\infty} \xi_n = \xi$ donc $\lim_{n\to+\infty} |p'_n(\xi_n)| = +\infty$. Ceci est impossible car $\xi_n \in D_0(\infty)$, et d'après le lemme 4.1, $\mathrm{Max}_{\gamma\in\Gamma} B_{\xi_n}(0,\gamma(0)) = 0$. En conclusion, $\partial L = \{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des $x \in X$ appartenant à des géodésiques dont les extrémités sont dans L. Pour montrer que Γ est géométriquement fini, nous allons montrer que $\Gamma\backslash\mathcal{G}$ admet un ε-voisinage de volume fini ([Bo1], §5). D'après le lemme 3.1, on peut associer à chaque $\xi_i \in \partial L$, une horoboule fermée B_{ξ_i} ne rencontrant pas $\Gamma 0$. L'ensemble $Z = \mathcal{G} \cap D_0$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathcal{G}$. Posons $Z' = Z - \cup_{i=1}^s Z \cup B_{\xi_i}$. Montrons que $\overline{Z}'$ est compact dans X. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(z'_n)_{n\geqslant 1}$ de Z' convergeant vers

$\eta \in \partial L$. Posons $\eta = \xi_j$. Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}_{\xi_j}$ sur $X(\infty) - \{\xi_j\}$ tel que $\mathcal{D} \cap L$ soit un compact de $X(\infty) - \{\xi_j\}$. Le cône $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{D}$ issu de ξ_j est un domaine fondamental pour l'action de $\mathcal{P}_{\xi_j}$ sur X. Il existe donc $p_n \in \mathcal{P}_{\xi_j}$ tel que $p_n(s'_n) \in \mathcal{C}$. Les points $p_n(z'_n)$ n'appartenant pas à B_{ξ_j}, quitte à extraire une sous-suite, $(p_n(z'_n))_{n \geqslant 1}$ converge vers un point $\xi \in X \cup X(\infty) - \{\xi_j\}$. Le domaine D_0 est étoilé en 0 donc le segment $[p_n(0), p_n(z'_n)]$ est inclus dans $p_n(D_0)$. Cette suite de segments converge vers la géodésique (ou le rayon géodésique) $(\xi\xi_j)$. Dans les deux cas, il existe $x_n \in [0, z'_n] \subset D_0$ tel que $(p_n(x_n))_{n \geqslant 1}$ converge vers $x \in X$. Ceci contredit la finitude locale de D_0. Par conséquent $\Gamma \backslash \mathcal{G}$ est constitué d'un compact et d'un nombre fini de bouts paraboliques bornés ([Bo1], corollaire 6.3). Ces bouts admettent un ε-voisinage de volume fini ([Bo1], proposition 4.14) donc Γ est géométriquement fini. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[B] M. BOURDON, Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace, L'Ens. Math., 41 (1995), 63–102.

[Bo1] B. BOWDITCH, Geometrical finiteness with variable negative curvature, Duke Math. Jour., Vol. 77, n° 1 (1995), 229–274.

[Bo2] B. BOWDITCH, Relatively hyperbolic groups, Preprint 1999.

[D] F. DAL'BO, Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages, Bol. Soc. Bras. Math., Vol. 30, n°2 (1999).

[DP] F. DAL'BO, M. PEIGNÉ, Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting, J. reine angew Math., 497 (1998), 141–169.

[DS] F. DAL'BO, A. STARKOV, On a classification of limit points of infinitely generated Schottky groups, Prépublication Rennes, 1999.

[E1] P. EBERLEIN, Geodesic flows on negatively curved manifolds, I, Ann. of Math., Vol. 95, n°3 (1973), 492–510.

[E2] P. EBERLEIN, Geodesic flows on negatively curved manifolds, II, Trans. of the A.M.S., Vol. 178 (1973), 57–82.

[E3] P. EBERLEIN, Geometry of Nonpositively Curved Manifolds, Chicago Lectures in Mathematics, 1996.

[GR] Y. GUIVARC'H - A. RAUGI, Products of random matrices: convergence theorem, Contemp. Math., Vol. 50 (1986), 31–53.

[H] G.A. HEDLUND, Fuchsian group and transitive horocyles, Duke Math. J., 2 (1936), 530–542.

[K] I. KIM, Rigidity of rank one symmetric spaces and their product, (à paraître dans Topology).

[NW] P. NICHOLLS, P. WATERMAN, Limit points via Schottky groups, LMS Lectures Notes, 173 (1992), 190–195.

[O] J.P. OTAL, Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative, Revista Mathematica Iber. Amer., 8, n°3 (1992).

[S] M. SHUB, Stabilité globale des systèmes dynamiques, Astérisque, 56 (1978).

[S1] A. STARKOV, Parabolic fixed points of kleinian groups and the horospherical foliation on hyperbolic manifolds, Int. Journ. of Math., Vol. 8 n°2 (1997), 289–299.

[S2] A. STARKOV, Fuchsian groups from the dynamical viewpoint, Jour. of Dyn. and Control System, 1 (1995), 427–445.

[T] P. TUKIA, Conical limit points and uniform convergence groups, J. reine angew Math., 501 (1998), 71–98.

Manuscrit reçu le 7 juillet 1999,
révisé le 6 décembre 1999,
accepté le 14 janvier 2000.

Françoise DAL'BO,
Université de Rennes 1
Institut Mathématique de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex (France).
dalbo@univ-rennes1.fr