Transformationsinvariante Matrizen

Von ANNA LEE (Budapest)

Zusammenfassung. Wir betrachten Rechtecksmatrizen, welche gegenüber zweiseitiger Multiplikation mit geeigneten Matrizen invariant sind. Es wird gezeigt, daß solche Matrizen bei bestimmten Bedingungen in mehrere Diagonalblöcke zerlegt werden können. Die permutationsinvarianten Matrizen bilden einen oft auftretenden Spezialfall dieser Art von Matrizen.

Der bewiesene Satz findet eine Anwendung bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme.

1. Bezeichnen wir mit $\mathbf{C}$ aus m Zeilen und n Spalten bestehende Rechtecksmatrizen über einem Körper K, die die folgende Bedingung erfüllen. Es gibt zwei nichtsinguläre Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ m-ter Ordnung bzw. n-ter Ordnung, mit welchen die Matrix die Relation

$$\mathbf{PC}=\mathbf{CQ} \tag{1}$$

erfüllt. Eine solche Matrix $\mathbf{C}$ wird *transformationsinvariant* genannt.

Als Beispiel für transformationsinvariante Matrizen dienen die *permutationsinvarianten* Matrizen [1]. Diese erfüllen (1) mit Permutationsmatrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$, d. h. sie sind gegenüber bestimmter Permutation der Zeilen und Spalten invariant. Die zentrosymmetrischen Matrizen sind z. B. gegenüber der orthogonalen Transformation mit der Permutationsmatrix

$$\mathbf{I}=[\delta_{i,\,n-j+1}] \qquad \delta_{pq}=\begin{cases}1, & p=q\\ 0, & p\neq q\end{cases}$$

invariant, d. h.

$$\mathbf{IC}=\mathbf{CI} \qquad \mathbf{ICI}=\mathbf{C}$$

(siehe [2]). A. R. Collar hat gezeigt [3], daß jede zentrosymmetrische Matrix *in zwei Diagonalblöcke zerlegbar ist.* Diese Eigenschaft — nämlich, daß sie in mehrere Diagonalblöcke zerlegbar sind — besitzen aber auch allgemeinere transformationsinvariante Matrizen.

Folgender Satz gibt eine hinreichende Bedingung unter welcher eine transformationsinvariante Matrix $\mathbf{C}$ durch geeignete zweiseitige Multiplikation in mehrere Diagonalblöcke zerlegt werden kann.

Satz. *Sind in der Identität* (1) $\mathbf{P}$ *und* $\mathbf{Q}$ *Matrizen einfacher Struktur — d. h. existiert ihre Spektralzerlegung — und besitzen sie nur gemeinsame Eigenwerte, dann zerfällt die Matrix* $\mathbf{C}$ *durch zweiseitige Multiplikation in so viele Diagonal-*

blöcke, wie viele verschiedene Eigenwerte die Matrix **P** *(und so auch* **Q***) besitzt. Die Matrizen, mit denen sich diese Zerlegung durch Multiplikation ergibt, bestehen aus den Eigenvektoren der Matrix* **P** *bzw.* **Q**.

BEWEIS. Bezeichnet $\lambda(\mathbf{P})$ bzw. $\lambda(\mathbf{Q})$ die Gesamtheit der Eigenwerte der Matrix **P** bzw. **Q**, dann ist nach der Voraussetzung

$$\lambda(\mathbf{P}) = \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{i_1}; \quad \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{i_2}; \quad \ldots; \quad \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{i_r} \quad \left(\sum_{\nu=1}^{r} i_\nu = m\right)$$

$$\lambda(\mathbf{Q}) = \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{j_1}; \quad \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{j_2}; \quad \ldots; \quad \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{j_r} \quad \left(\sum_{\nu=1}^{r} j_\nu = n\right).$$

Die Spektralzerlegung der Matrix **P** bzw. **Q** sei

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}_m\mathbf{U}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_n\mathbf{V}^{-1}, \tag{2}$$

wo die Diagonalmatrizen $\boldsymbol{\Lambda}_m$ bzw. $\boldsymbol{\Lambda}_n$, welche aus den Eigenwerten bestehen, die partitionerte Form

$$\boldsymbol{\Lambda}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{E}_{i_1} & & & \\ & \lambda_2 \mathbf{E}_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \mathbf{E}_{i_r} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Lambda}_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{E}_{j_1} & & & \\ & \lambda_2 \mathbf{E}_{j_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \mathbf{E}_{j_r} \end{bmatrix}$$

haben. Setzen wir die Form (2) der Matrizen **P** und **Q** in die Identität ein, dann ergibt sich einfach die Relation

$$\boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_n,$$

oder mit der Bezeichnung

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} = \mathbf{C}_0$$

die Relation

$$\boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\Lambda}_n. \tag{3}$$

Schreiben wir die Matrix $\mathbf{C}_0$ in partitionierter Form auf:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc:c:c} \mathbf{C}^0_{11} & \mathbf{C}^0_{12} & & \mathbf{C}^0_{1r} \\ \hdashline \mathbf{C}^0_{21} & \mathbf{C}^0_{22} & & \mathbf{C}^0_{2r} \\ \hdashline & & & \\ \hdashline \mathbf{C}^0_{r1} & \mathbf{C}^0_{r2} & & \mathbf{C}^0_{rr} \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow i_1 \\ \updownarrow i_2 \\ \\ \updownarrow i_r \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \overleftrightarrow{\ j_1\ } & \overleftrightarrow{\ j_2\ } & \qquad & \overleftrightarrow{\ j_r\ } \end{array} \end{array}.$$

Wenn jetzt in (3) die Multiplikation auf beiden Seiten durchgeführt wird, dann erhält man

$$\lambda_\nu \mathbf{C}^0_{\nu\mu} = \mathbf{C}^0_{\nu\mu}\lambda_\mu \qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots, r,$$

wo

$$\lambda_\nu \neq \lambda_\mu, \quad \text{wenn} \quad \nu \neq \mu$$

gilt. Daraus folgt aber

$$\mathbf{C}^0_{\nu\mu} = 0, \quad \text{wenn} \quad \nu \neq \mu.$$

Das bedeutet, dass die Matrix

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{C}\mathbf{V}$$

aus r Diagonalblöcken besteht. Damit ist der Satz bewiesen.

2. *Anwendung*. Der jetzt bewiesene Satz findet im folgenden eine Anwendung. Betrachten wir ein lineares Differentialgleichungssystem in der vektoriellen Form geschrieben:

$$\sum_{i=0}^{k} \mathbf{C}_i(t)\,\mathbf{x}^{(i)}(t) + \mathbf{f}(t) = 0$$

(4)

$$\mathbf{x}^{(i)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Hier besteht der Vektor $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ aus den i-ten Ableitungen der unbekannten Funktionen, $\mathbf{f}(t)$ aus den gegebenen Funktionen, $\mathbf{C}_i(t)$ ist die zum i-ten Ableitungsvektor $\mathbf{x}^{(i)}(t)$ gehörige Koeffizientenmatrix vom Typ $m \times n$ ($i = 0, 1, \ldots, k$). Wenn alle Koeffizientenmatrizen $\mathbf{C}_i(t)$ gegenüber denselben Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ transformationsvariant sind,

$$\mathbf{P}\mathbf{C}_i(t)\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{C}_i(t) \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

und die Matrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ die Bedingung des vorigen Satzes erfüllen, d. h.

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}_m\mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}_n\mathbf{V}^{-1}$$

gilt, dann *zerfällt das Gleichungssystem* (4) *durch Multiplikation von links mit der Matrix* $\mathbf{U}^{-1}$ *in mehrere, von einander unabhängige Gleichungssysteme*. Nach Multiplikation kann (4) nämlich in der Form

$$\sum_{i=0}^{k} \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{C}_i(t)\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{x}^{(i)}(t) + \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{f}(t) = 0$$

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{x}_0^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1$$

geschrieben werden. Führt man die Bezeichnung

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{x}^{(i)}(t) = \mathbf{y}^{(i)}(t) \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

$$\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$$

$$\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{C}_i(t)\mathbf{V} = \langle \mathbf{D}_i(t) \rangle \qquad i = 0, 1, \ldots, k$$

ein, so geht (4) in das lineare Differentialgleichungssystem bezüglich dem neuen unbekannten Funktionsvektor $\mathbf{y}(t)$ über:

$$\sum_{i=0}^{k} \langle \mathbf{D}_i(t) \rangle\,\mathbf{x}^{(i)}(t) + \mathbf{g}(t) = 0$$

$$\mathbf{y}^{(i)}(t_0) = \mathbf{y}_0^{(i)} \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Die Koeffizientenmatrizen $\langle \mathbf{D}_i(t) \rangle$ zerfallen nach dem Satz in so viele Diagonalblöcke, wie viele verschiedene Eigenwerte die Matrizen **P** und **Q** besitzten, und so zerfällt (4) in mehrere vollständig unabhängige Differentialgleichungssysteme.

Literatur

[1] A. Lee, Über permutationsinvariante Matrizen. *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 44—58.
[2] A. C. Aitken, Determinants and matrices, *Edinburgh,* 1956.
[3] A. R. Collar, On centrosymmetric and centroskew matrices, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **15** (1962), 265—282.

(Eingegangen am 15. Oktober 1965.)