МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.4
БКК 65.012

ДВУХФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ НОРМОЙ ЗАМЕЩЕНИЯ

Г. А. Хацкевич
Khatskevich@sbmt.by
доктор экономических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Бизнес-администрирования»
Институт бизнеса Белорусского государственного университета
г. Минск, Республика Беларусь

А. Ф. Проневич
pranevich@grsu.by
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Математического и информационного обеспечения экономических систем»
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
г. Гродно, Республика Беларусь

М. В. Чайковский
tchaikovski@belstu.by
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры «Высшей математики»
Белорусский государственный технологический университет
г. Минск, Республика Беларусь

В работе рассмотрены обратные задачи восстановления двухфакторных производственных функций исходя из заданной предельной нормы технического замещения факторов производства. Указаны аналитические виды двухфакторных производственных функций, обладающих заданной дробно-линейной предельной нормой технического замещения труда капиталом. Выделены классы двухфакторных производственных функций, соответствующие заданной (постоянной, линейной, дробно-линейной, степенной и др.) предельной норме технического замещения. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов.

***Ключевые слова**: производственный процесс, производственная функция, обратная задача, предельная норма технического замещения, эластичность замещения.*

Введение.Рассмотрим двухфакторную производственную функцию (ПФ), описывающую некоторый производственный процесс P, где K – капитал, L – труд, Y – объем выпущенной продукции, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на области G из $\mathbf{R}_+^2 = \{(K,L): K \geq 0, L \geq 0\}$.

$$Y = F(K,L) \quad \forall (K,L) \in G, \tag{1}$$

Понятие ПФ, описывающей зависимость между количеством используемых факторов производства и максимально возможным при этом выпуском продукции, сформировалось на рубеже XIX и XX вв. В экономическую теорию термин «производственная функция» был введен в 1891 году [1] А.Берри, помогавшим А. Маршаллу при подготовке математического приложения к его монографии «Принципы экономической науки» [2]. Однако попытки установить зависимость выпуска продукции от количества используемых ресурсов и придать этой зависимости некоторую аналитическую форму имели место задолго до этого (исторический обзор по становлению теории ПФ смотри, например, в работах [3 –6], а современное состояние и обзор литературы по этому направлению приведены в монографиях [7– 9]).

Ввиду большого разнообразия производственных процессовP одной из основных проблем при их моделировании становиться задача выбора аналитической формы ПФ (1). Прежде всего, этот выбор обусловливается теоретическими соображениями, которые должны учитывать особенности взаимосвязей между конкретными ресурсами и результативными признаками. Необходимо также учитывать особенности реальных или статистических данных, по которым оцениваются параметры ПФ.

В процессе развития теории ПФ определился набор стандартных ПФ, обладающих заранее определенными свойствами (например, однородности и заданной эластичности замещения). Укажем некоторые наиболее распространенные двухфакторные ПФ, широко используемые в практике моделирования производственных процессов.

В 1928 году в статье [10] Ч.У. Коббом и П.Х. Дугласом для описания влияния величины затрачиваемого капитала и труда на объем продукции в обрабатывающей промышленности США за 1899 – 1922 гг. была использована функция (ПФ Кобба−Дугласа).

$$F(K,L)= AK^{\alpha}L^{\beta} \ \forall (K,L)\in \mathbf{R}^2_+, \ A>0, \ \alpha,\beta\in(0;1), \quad \alpha+\beta=1. \tag{2}$$

В своей более поздней работе [11] П.Х. Дуглас снял предположения об условиях, накладываемых на показатели степеней α и β степенной функции (2).

Большое применение в экономическом анализе получила CES-функция

$$F(K,L)= A\left(b K^{-\gamma} + (1-b)\, L^{-\gamma}\right)^{-\mu/\gamma} \ \forall (K,L)\in G, \quad A>0,\ \mu>0,\ b\in[0;1],\ \gamma\in[-1;0)\cup(0;+\infty), \tag{3}$$

которая была предложена в Р.М. Солоу в 1956 году в статье [12]. Функция (3) была исследована и использована для анализа реальных национальных экономик в работе [13] учеными-экономистами К.Д. Эрроу, Х.Чинери, Б.С. Минхас и Р.М. Солоу, после чего она стала широко использоваться как модель производства, более адекватная реальности, чем ПФ Кобба−Дугласа (2). Отметим, что если $\mu=1$, то из CES-функции (3) при $\gamma=-1$ получаем линейную однородную ПФ

$$F(K,L)= cK + dL \ \forall (K,L)\in \mathbf{R}^2_+, \ c=Ab, \ d=A(1-b); \tag{4}$$

при $\gamma\to 0$ имеем ПФ Кобба−Дугласа с параметрами $\alpha=b$, $\beta=1-b$; а при $\gamma\to+\infty$ предельной для CES-функции (3) является ПФ Леонтьева

$$F(K,L) = A \cdot \min(K;L)\ \forall (K,L) \in \mathbf{R}_+^2, \quad A > 0. \tag{5}$$

Важнейшими характеристиками ПФ (1) являются показатели эффективности процесса замещения факторов производства. Количественные меры замещения были впервые введены [14] в 1932 году английским экономистом Д.Р.Хиксом для двухфакторных ПФ (1) как *предельная норма технического замещения MRTS* (marginal rate of technical substitution) труда капиталом

$$MRTS_{LK}(K,L) = \frac{F_L(K,L)}{F_K(K,L)}\ \forall (K,L) \in G' \subset G \tag{6}$$

и эластичность замещения труда капиталом

$$\sigma(K,L) = \frac{F_K F_L (K F_K + L F_L)}{KL(2F_K F_L F_{KL} - F_K^2 F_{LL} - F_L^2 F_{KK})}\ \forall (K,L) \in G' \subset G, \tag{7}$$

где для частных производных первого и второго порядков ПФ (1) введены для удобства записи следующие обозначения: $\partial_K F = F_K$, $\partial_L F = F_L$, $\partial_{KK}^2 F = F_{KK}$, $\partial_{LL}^2 F = F_{LL}$, $\partial_{KL}^2 F = F_{KL}$.

Отметим также и то, что в практике экономико-математического анализа применяются и другие определения эластичности замещения: по Аллену [15; 16], по Михалевскому [17], по Мак-Фаддену [18], обратная и прямая эластичности замены [7, с. 63 – 78]).

Показатель *MRTS*(6) является для ПФ характеристикой первого порядка (относительно производных) и на языке процентов приближенно показывает на сколько процентов нужно увеличить или уменьшить использование капитала *K*при уменьшении или увеличении труда *L*на 1%. Графически же характеристика *MRTS* представляется тангенсом угла наклона касательной к изокванте ПФ в точке, указывающей необходимые объемы труда и капитала для производства заданного объема продукции.

Например, линейная ПФ (4) имеет постоянную предельную норму замещения $MRTS_{LK}(K,L) = \frac{c}{d}$, для ПФ Кобба -Дугласа (2) характеристика $MRTS_{LK}(K,L) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$ является линейной функцией относительно фондовооруженности труда $k = K/L$, а у CES-функции (3) показатель $MRTS_{LK}(K,L) = \frac{1-b}{b}\left(\frac{K}{L}\right)^{\gamma+1}$. Предельные нормы замещения труда капиталом (6) основных двухфакторных ПФ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Предельные нормы технического замещения основных ПФ

№	**ПФ** $F(K,L)$	**Предельная норма технического замещения труда капиталом** $MRTS_{LK}(K,L)$
1.	*Линейная* ПФ $F(K,L)=\alpha K+\beta L+\gamma$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}$
2.	ПФ *Кобба–Дугласа* (*Викселля*) [10] $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$, $A>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}$
3.	ПФ *CES* [13] $F(K,L)=A\left(\nu K^{-\rho}+(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}$, $A>0,\ \mu\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in(0;1],\ \rho\in[-1;0)\cup(0;+\infty)$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{1-\nu}{\nu}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\rho+1}$
4.	ПФ *Солоу*[12] $F(K,L)=A\left(\nu K^{\alpha}+(1-\nu)L^{\beta}\right)^{\gamma}$, $A>0,\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in(0;1]$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta(1-\nu)}{\alpha\nu}\dfrac{K^{1-\alpha}}{L^{1-\beta}}$
5.	ПФ Джири [19] $F(K,L)=A(K-K^{*})^{\alpha}(L-L^{*})^{\beta}$, $G=\{(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2}:K>K^{*},L>L^{*}\}$, $A>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K-K^{*}}{L-L^{*}}$
6.	*Логарифмическая* ПФ $F(K,L)=A\left(\alpha\ln(1+\delta K)+\beta\ln(1+\gamma L)\right)$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha\delta}\dfrac{1+\delta K}{1+\gamma L}$
7.	ПФ *Реванкара* (*с линейной эластичностью замещения, LES*) [20] $F(K,L)=AK^{\alpha}(\nu K+L)^{\beta}$, $A>0,\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\},\ \nu\in\mathbf{R}_{+}$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta K}{\nu(\alpha+\beta)K+\alpha L}$
8.	ПФ *Сато* (произведение ПФ Кобба–Дугласа и CES) $F(K,L)=A\left(\nu K^{-\rho}+(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-\mu/\rho}K^{\alpha}L^{\beta}$	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{K}{L}\cdot$ $\cdot\left(\beta\nu K^{-\rho}+(\beta+\mu)(1-\nu)L^{-\rho}\right)\cdot$ $\cdot\left((\alpha+\beta)\nu K^{-\rho}+\alpha(1-\nu)L^{-\rho}\right)^{-1}$
9.	ПФ *Лу–Флетчера*[21] $F(K,L)=A\left(aK^{\rho}+(1-a)b\left(\dfrac{K}{L}\right)^{-\nu(1-\rho)}L^{\rho}\right)^{\mu/\rho}$	$MRTS_{LK}(K,L)=$ $=\dfrac{(1-a)b(\nu+\rho-\nu\rho)\dfrac{K}{L}}{a\rho\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\nu+\rho-\nu\rho}-\nu(1-a)(1-\rho)}$
10.	ПФ *Лиу–Хильдебранда*[22] $F(K,L)=A((1-b)K^{\rho}+bK^{\nu\rho}L^{(1-\nu)\rho})^{\mu/\rho}$	$MRTS_{LK}(K,L)=$ $=\dfrac{b(1-\nu)\dfrac{K}{L}}{(1-b)\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\rho(1-\nu)}+b\nu}$

Окончание таблицы 1

11.	ПФ *Кадияла*[23] $F(K,L)=A(a_1K^{\alpha+\beta}+2b_1K^{\alpha}L^{\beta}+c_1L^{\alpha+\beta})^{\mu/(\alpha+\beta)}$, $A>0,\ a_1+2b_1+c_1=1,\ a_1,b_1,c_1\ge 0,$ $\alpha(\alpha+\beta)>0,\ \beta(\alpha+\beta)>0$	$MRTS_{LK}(K,L)=\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha-\beta}\cdot$ $\cdot\frac{2b_1\beta\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}+(\alpha+\beta)c_1}{2b_1\alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{-\beta}+(\alpha+\beta)a_1}$
12.	ПФ *Бруно*[24; 25] $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}-\gamma L$	$MRTS_{LK}(K,L)=$ $=\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}-\frac{\gamma}{\alpha A}K^{1-\alpha}L^{-\beta}$
13.	ПФ Сато – Гофмана (*линейно-однородные* ПФ *с переменной* $\sigma\left(\frac{K}{L}\right)$ *эластичностью замещения*) [20; 26] $F(K,L)=A\exp\int\frac{dk}{k+B\exp\int\frac{d\ln k}{\sigma(k)}}\Big\vert_{k=\frac{K}{L}}$, $A,B>0$	$MRTS_{LK}(K,L)=$ $=B\exp\int\frac{d\ln k}{\sigma(k)}\Big\vert_{k=\frac{K}{L}}$

Источник: собственная разработка автора.

Эластичность замещения (7) является характеристикой ПФ второго порядка, так как она зависит и от вторых производных ПФ. Она (характеристика) представляет связь фондовооруженности $k=K/L$ спредельной нормой замещения, показывая, на сколько процентов должна измениться фондовооруженность при изменении *MRTS* на 1%.

ПФ (2) − (5) являются примерами однородных функций постоянной эластичности замещения факторов производства: функция Кобба–Дугласа (2) имеет единичную эластичность замещения, т.е. $\sigma(K,L)=1$; для CES-функции (3) эластичность замещения равна $\sigma(K,L)=1/(1+\gamma)$; у линейной функции (4) эластичность замещения факторов бесконечна, а для функции Леонтьева (5) эластичность замещения факторов равна нулю. В общем случае, класс *однородных* двухфакторных ПФ (1) с *постоянной эластичностью замещения*описывается следующим утверждением (см., например, [27; 28])

Теорема 1.*Пусть двухфакторная ПФ* (1) *является однородной степени* $q\neq 0$ *и имеет постоянную эластичность замещения факторов производства* $\sigma\neq 0$.*Тогда двухфакторная ПФ* (1) *имеет следующий аналитический вид*

$$F(K,L)=\left[\begin{array}{ll}\beta K^{\alpha}L^{q-\alpha} & \text{при } \sigma=1;\\ \left(\beta_1K^{\gamma}+\beta_2L^{\gamma}\right)^{q/\gamma} & \text{при } \sigma\neq 1,\end{array}\right. \qquad (8)$$

где действительное число $\alpha\neq 0$ *и* $\alpha\neq q$, *числа* $\beta,\beta_1,\beta_2>0$, *а* $\gamma=(\sigma-1)/\sigma$.

Основной класс ПФ, используемых при моделировании производственных процессовP – однородные ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов производства (теорема 1). Однако этот класс ПФ в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его расширения в разных направлениях (см., например, работы [7−9; 27−34]).Аналитическое описание класса однородных ПФ с переменной эластичностью замещения для двух факторов впервые найдено [20] американским экономистом индийского происхождения Н. Реванкаром для частного случая линейной зависимости эластичности замещения от пропорции факторов

$$F(K,L)= AK^{\alpha}(\nu K+L)^{\beta}\ \forall(K,L)\in G,\ A>0,\ \nu\in\mathbf{R}_{+},\ \alpha,\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}, \tag{9}$$

и в общем (двухфакторном) случае получено Р. Сато и Р.Ф. Гофманом [26]

$$F(K,L)=A\exp\int\frac{dk}{k+B\exp\int\frac{d\ln k}{\sigma(k)}}\Big|_{k=\frac{K}{L}},\quad A,B>0. \tag{10}$$

Формульно-параметрическое представление класса положительно однородных вогнутых функций произвольной размерности через вогнутые функции, заданные на стандартном симплексе, было получено профессором В.К. Горбуновым в работе [29].

В данной статье получены новые виды ПФ, что расширяет возможности для моделирования реальных производственных процессов*P*. А именно решена одна из *обратных задач* теории ПФ: восстановить двухфакторную ПФ исходя из заданной предельной нормы технического замещения. Способ построения ПФ основан на нахождении решений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Результаты и их обсуждение.Основные результаты данной работы выражают следующие утверждения (теорема 2 и таблица 2).

Теорема 2.*Пусть для некоторого производственного процесса P предельная норма технического замещения* (*труда капиталом*) *задана дробно-линейной функцией*

$$MRTS_{LK}(K,L)=\frac{a_1K+b_1L+c_1}{a_2K+b_2L+c_2}\ \forall(K,L)\in G,\ a_j,b_j,c_j\in\mathbf{R},\ j=1,2,3,\quad |a_2|+|b_2|+|c_2|\neq 0, \tag{11}$$

где экономическая область G *из множества* $\{(K,L)\in\mathbf{R}_{+}^{2}:a_2K+b_2L+c_2\neq 0\}$ *пространства затрат* $\mathbf{R}_{+}^{2}=\{(K,L)\in\mathbf{R}^{2}:K\geq 0,\ L\geq 0\}$. *Тогда верны утверждения*:

1. *Пусть* $\lambda_1=0$ *есть собственное число матрицы* $A=\begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ b_1 & -b_2\end{pmatrix}$, *которому соответствует вещественный собственный вектор* $v^1=(\alpha_1,\beta_1)$ *при* $\gamma_1=\alpha_1c_1-\beta_1c_2=0$. *Тогда производственный процесс Pописывается одной из ПФ вида*

$$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha_1K+\beta_1L)\ \forall(K,L)\in G.$$

Здесь и далее φ *– произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция на открытом числовом луче* $(0;+\infty)$.

2. *Пусть* $\lambda_1 = 0$ *и* $\lambda_2 \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ *есть собственные числа матрицы* A, *которым соответствуют вещественные собственные векторы* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *при* $\gamma_1 = \alpha_1 c_1 - \beta_1 c_2 \neq 0$ *и* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2)$. *Тогда производственный процесс P описывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L) = \varphi\left((\alpha_2 K + \beta_2 L + \gamma_2)\exp\left(-\frac{\lambda_2}{\gamma_1}(\alpha_1 K + \beta_1 L)\right)\right) \ \forall (K,L) \in G.$$

где вещественное число $\gamma_2 = (\alpha_2 c_1 - \beta_2 c_2)/\lambda_2$.

3. *Пусть* $\lambda_1 = 0$ *есть двукратное собственное число матрицы* A, *которому соответствуют два вещественных линейно независимых собственных вектора* $v^1 = (1,0)$ *и* $v^2 = (0,1)$ *при условии, что вещественные числа* $c_1 \neq 0$ *и* $c_2 \neq 0$. *Тогда производственный процесс P описывается одной из ПФ вида* $F_\varphi(K,L) = \varphi\left(c_2 K + c_1 L\right) \ \forall (K,L) \in G$.

4. *Если* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ *– собственные числа матрицы A, которым соответствуют линейно независимые вещественные собственные векторы* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *и* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2)$, *то производственный процесс P описывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L) = \varphi\left((\alpha_1 K + \beta_1 L + \gamma_1)^{\lambda_2}(\alpha_2 K + \beta_2 L + \gamma_2)^{-\lambda_1}\right) \ \forall (K,L) \in G,$$

где вещественные числа $\gamma_k = (\alpha_k c_1 - \beta_k c_2)/\lambda_k$, $k = 1,2$.

5. *Если* $\lambda_1 = \hat{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_1 i$ *– существенно комплексное* $(\tilde{\lambda}_1 \neq 0)$ *собственное число матрицы A, которому соответствует собственный вектор* $v^1 = (\hat{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_1 i, \hat{\beta}_1 + \tilde{\beta}_1 i)$, *то производственный процесс P на экономической области G описывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L) = \varphi\left(\left((\hat{\alpha}_1 K + \hat{\beta}_1 L + \hat{\gamma}_1)^2 + (\tilde{\alpha}_1 K + \tilde{\beta}_1 L + \tilde{\gamma}_1)^2\right)\exp\left(-2\frac{\hat{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_1}\operatorname{arctg}\frac{\tilde{\alpha}_1 K + \tilde{\beta}_1 L + \tilde{\gamma}_1}{\hat{\alpha}_1 K + \hat{\beta}_1 L + \hat{\gamma}_1}\right)\right),$$

где вещественные числа

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{(\hat{\lambda}_1\hat{\alpha}_1 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\alpha}_1)c_1 - (\hat{\lambda}_1\hat{\beta}_1 + \tilde{\lambda}_1\tilde{\beta}_1)c_2}{\hat{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_1^2}, \ \tilde{\gamma}_1 = \frac{(\hat{\lambda}_1\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\lambda}_1\hat{\alpha}_1)c_1 - (\hat{\lambda}_1\tilde{\beta}_1 - \tilde{\lambda}_1\hat{\beta}_1)c_2}{\hat{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_1^2}.$$

6. *Если* $\lambda_1 \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ *–двукратное собственное число матрицы A, которому соответствуют вещественные собственныйвектор* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *и первый присоединенный вектор* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2)$, *то производственный процесс Pописывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L) = \varphi\left((\alpha_1 K + \beta_1 L + \gamma_1)\exp\left(-\lambda_1 \cdot \frac{\alpha_2 K + \beta_2 L + \gamma_2}{\alpha_1 K + \beta_1 L + \gamma_1} \right) \right) \ \forall (K,L) \in G,$$

где вещественные числа $\gamma_1 = (\alpha_1 c_1 - \beta_1 c_2)/\lambda_1,\ \gamma_2 = (\alpha_2 c_1 - \beta_2 c_2 - \gamma_1)/\lambda_1.$

7. *Пусть* $\lambda_1 = 0$ *есть двукратное собственное число матрицы* A, *которому соответствуют вещественные собственный* $v^1 = (\alpha_1, \beta_1)$ *при* $\gamma_1 = \alpha_1 c_1 - \beta_1 c_2 \neq 0$ *и первый присоединенный* $v^2 = (\alpha_2, \beta_2)$ *векторы. Тогда процесс Pописывается одной из ПФ вида*

$$F_\varphi(K,L) = \varphi\big((\alpha_1 K + \beta_1 L)^2 - 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(c_2 K + c_1 L) \big) \ \forall (K,L) \in G,$$

где вещественное число $\gamma_2 = (\alpha_2 c_1 - \beta_2 c_2)/\lambda_2.$

Доказательство каждого из утверждений теоремы основано на интегрировании дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$(a_1 K + b_1 L + c_1)\partial_K F(K,L) - (a_2 K + b_2 L + c_2)\partial_L F(K,L) = 0$$

спектральным методом построения первых интегралов линейных однородных систем уравнений в частных производных первого порядка [35; 36]. □

Используя метод характеристик решения линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка и справочник [37] по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка для некоторых заданных предельных норм замещения труда капиталом, вычислим соответствующие им классы ПФ (таблица 2).

Таблица 2 – Вид ПФ, соответствующий заданной предельной норме замещения

№	**Предельная норма технического замещения труда капиталом** $MRTS_{LK}(K,L)$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R},\ f, g \in C(G))$	**Аналитический вид ПФ** $F_\varphi(K,L)$ $(\varphi \in C^1(\mathbf{R}_+))$
1.	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}\ (\alpha \in \mathbf{R}\backslash\{0\})$	$F_\varphi(K,L) = \varphi(\alpha K + \beta L)$
2.	$MRTS_{LK}(K,L) = \alpha K + \beta L + \gamma$	$F_\varphi(K,L) = \varphi\big((\alpha^2 K + \alpha\beta L + \alpha\gamma - \beta)e^{\alpha L} \big)$
3.	$MRTS_{LK}(K,L) = \dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}\ (\alpha, \beta \neq 0)$	$F_\varphi(K,L) = \varphi(K^\alpha L^\beta)$

Окончние таблицы 2

№	Предельная норма технического замещения труда капиталом $MRTS_{LK}(K,L)$ $\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R},\ f,g\in C(G)\right)$	Аналитический вид ПФ $F_{\varphi}(K,L)$ $(\varphi\in C^1(\mathbf{R}_+))$
4.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K}{L}+\gamma\ (\alpha,\beta\neq 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(((\alpha+\beta)K+\alpha\gamma L)^{\alpha}L^{\beta}\right)$
5.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K-\gamma}{L-\delta}\ (\alpha,\beta\neq 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi((K-\gamma)^{\alpha}(L-\delta)^{\beta})$
6.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\alpha K+\beta}{\gamma L+\delta}\ (\lvert\gamma\rvert+\lvert\delta\rvert\neq 0)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi((\alpha K+\beta)^{\gamma}(\gamma L+\delta)^{\alpha})$
7.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{K}{L}\right)^{\gamma}\ (\alpha\neq 0,\gamma\neq 1)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha K^{1-\gamma}+\beta L^{1-\gamma})$
8.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{K^{\gamma}}{L^{\delta}}$ $(\alpha,\beta\neq 0,\ (\gamma,\delta)\neq(1,1))$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi(\alpha(1-\delta)K^{1-\gamma}+\beta(1-\gamma)L^{1-\delta})$
9.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{f(K)}{g(L)}$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\dfrac{dK}{f(K)}+\int\dfrac{dL}{g(L)}\right)$
10.	$MRTS_{LK}(K,L)=f(\alpha K+\beta L+\gamma)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\dfrac{d\xi}{\beta-\alpha f(\xi)}_{\lvert\xi=\alpha K+\beta L+\gamma}-L\right)$
11.	$MRTS_{LK}(K,L)=f\left(\dfrac{K}{L}\right)$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\dfrac{d\xi}{f(\xi)+\xi}_{\lvert\xi=K/L}+\ln L\right)$
12.	$MRTS_{LK}(K,L)=\dfrac{K}{L}f(K^{\alpha}L^{\beta})$	$F_{\varphi}(K,L)=\varphi\left(\int\dfrac{d\xi}{\xi(\beta-\alpha f(\xi))}_{\lvert\xi=K^{\alpha}L^{\beta}}-\ln L\right)$

Источник: собственная разработка авторов.

Из таблицы 2 следует, например, что класс № 3 содержит ПФ Кобба–Дугласа (2), класс № 5 – ПФ Джири, класс № 6 – ПФ Реванкара и логарифмическую, класс № 7 – CES-функцию (3), класс № 8 – ПФ Солоу, а класс № 11 – ПФ Бруно.

Выводы. В работе решены обратные задачи восстановления двухфакторных ПФ исходя из заданной предельной нормы технического замещения труда капиталом. Указаны аналитические виды двухфакторных ПФ, обладающих заданной дробно-линейной предельной нормой замещения труда капиталом (теорема 2). Построено все множество двухфакторных ПФ, соответствующие заданной (постоянной, линейной, степенной и др.) предельной норме технического замещения труда капиталом (таблица 2).

Полученные теоретические результаты (теорема2 и таблица2) могут быть использованы при моделировании реальных производственных процессов, которые имеют известные предельной нормы технического замещения труда капиталом.

Список использованных источников

1. Berry, A. The pure theory of distribution / A. Berry // British Association of Advancement of Science: Report of the 60th Meeting. – 1891. – P. 923 – 924.

2. Маршал, А. Принципы экономической науки / А. Маршал. – М.: Прогресс, 1993. – 594 с.

3. Humphrey, T.M. Algebraic production functions and their uses before Cobb-Douglas / T.M. Humphrey // Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly. – 1997. – Vol. 83/1. – P.51 – 83.

4. Mishra, S.K. A brief history of production functions / S.K. Mishra // The IUP Journal of Managerial Economics. – 2010. – Vol. 8(4). – P. 6 – 34.

5. Тарасевич, Л.С. 50 лекций по микроэкономике / Л.С. Тарасевич, В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – 862 с.

6. Симонов, П.М. Экономико-математическое моделирование / П.М. Симонов. – Пермь: Пермский гос. ун-т., 2009. – Ч. 1. – 338 с.

7. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

8. Клейнер, Г.Б. Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды / Г.Б. Клейнер. – М.: ЦЭМИ РАН, 2016. – 856 с.

9. Горбунов, В.К. Производственные функции: теория и построение / В.К. Горбунов. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с.

10. Cobb, C.W. A theory of production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – Vol. 18. – P. 139 – 165.

11. Douglas, P.H. The Cobb-Douglas production function once again: its history, its testing, and some new empirical values // P.H. Douglas // Journal of Political Economy. – 1976. – Vol. 84, No. 5. – P. 903 – 916.

12. Solow, R.M. A contribution to the theory of economic growth / R.M. Solow // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70, No. 1. – P. 65 – 94.

13. Arrow, K.J. Capital-labor substitution and economic efficiency / K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas, R.M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, No. 3. – P. 225 – 250.

14. Hicks, J.R. The theory of wages / J.R. Hicks. – London: Macmillan, 1932. – 247 p.

15. Allen, R.G. Mathematical analysis for economists / R.G. Allen. – London: Macmillan, 1938. – 560 p.

16. Uzawa, H. Production functions with constant elasticities of substitution / H. Uzawa // The Review of Economic Studies. – 1962. – Vol. 29, No. 4. – P. 291 – 299.

17. Михалевский, Б.Н. Система моделей среднесрочного народнохозяйственного планирования / Б.Н. Михалевский. – М.: Наука, 1972. – 476 с.

18. McFadden, D. Constant elasticities of substitution production functions / D. McFadden // Review of Economic Studies. – 1963. – Vol. 30. – P. 73 – 83.

19. Geary, R.C. A note on “A constant-utility index of the cost of living” / R.C. Geary // The Review of Economic Studies. – 1950. – Vol. 18, No. 1. – P. 65 – 66.

20. Revankar, N.S. A class of variable elasticity of substitution production functions / N.S. Revankar // Econometrica. – 1971. – Vol. 39, No. 1. – P. 61–71.

21. Lu, Y.C. A Generalization of the CES production function / Y.C. Lu, L.B. Fletcher // Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 449 – 452.

22. Liu, T.C. Manufacturing production functions in the United States / T.C. Liu, G.H. Hildebrand. – Ithaca: Cornell University Press, 1965.

23. Kadiyala, K.R. Production functions and elasticity of substitution / K.R. Kadiyala // Southern Economic Journal. – 1972. – Vol. 38. – P. 281 – 284.

24. Bruno, M. A Note on the implications of an empirical relationship between output per unit of labor, the wage rate and the capital-labour ratio / M. Bruno // Unpub. mimeo, Stanford, 1962.

25. Bruno, M. Estimation of factor contribution to growth under structural disequilibrium / M. Bruno // International Economic Review. – 1968. – Vol. 9. – P. 49–62.

26. Sato, R. Production function with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing / R. Sato, R.F. Hoffman // The Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 453–460.

27. Losonczi, L. Production functions having the CES property / L. Losonczi // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 2010. – Vol. 26(1). – P. 113 – 125.

28. Chen, B.-Y. Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution / B.-Y. Chen // Tamkang journal of mathematics. – 2012. – Vol. 43, No. 2. – P. 321 – 328.

29. Горбунов, В.К. О представлении линейно-однородных функций полезности / В.К. Горбунов // Ученые записки Ульяновского гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – 1999. – Вып. 1(6). – С. 70 – 75.

30. Khatskevich, G.A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of

factors substitution / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – No. 1. – P. 46 – 50.

31. Хацкевич, Г.А. Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу / Г.А.Хацкевич, А.Ф.Проневич // Экономика, моделирование, прогнозирование: сб. науч. тр. / [редкол.: М.К. Кравцов (гл. ред.) и др.]. – Минск: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь, 2017. – Вып. 11. – С. 135 – 140.

32. Хацкевич, Г.А. Двухфакторные производственные функции с заданными эластичностями выпуска и производства / Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич, В.Ю. Медведева // Бизнес. Инновации. Экономика. – 2017. – Вып. 1. – С. 110 – 119.

33. Khatskevich, G.A. Production functions with given elasticities of output and production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – No. 2. – P. 13 – 21.

34. Khatskevich, G.A. Analyticalformsofproductionsfunctionswithgiventotalelasticityofproduction / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich, Yu. Yu. Karaleu // AdvancesinIntelligentSystemsandComputing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276 – 285.

35. Горбузов, В.Н. Спектральныйметодпостроенияинтегральногобазисаякобиевойсистемывчастныхпроизводных / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич// Дифференц. уравненияипроцессыуправл. – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

36. Проневич, А.Ф. Интегралыякобиевыхсистемуравненийвчастныхпроизводных / А.Ф.Проневич. – Saarbruchen (Germany): LAPLAMBERTAcademicPublishing, 2012. – 97 с.

37. Зайцев, В.Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 416 с.

Статья поступила в редакцию 19сентября 2019 года

TWO-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS WITH GIVEN MARGINAL RATE OF SUBSTITUTION

G.A.Khatskevich
Doctor of Economics, Professor,
Head of the Department of "Business Aadministration"
School of Business of Belarusian State University
Minsk, Republic of Belarus

A.F.Pranevich
PhD in Mathematics, Associate Professor,
Department of "Mathematic and Software Support for Economic Systems"
Yanka Kupala State University of Grodno
Grodno, Republic of Belarus

M. V. Chajkovskij
PhD in Mathematics, Associate Professor,
Department of "Higher Mathematics"
Belarusian National Technical University
Minsk, Republic of Belarus

The article is devoted to the study of inverse problems of identifying two-factor production functions from given marginal rate of technical substitution. The analytical forms of two-factor production functions with given linear-fractionalmarginal rate of technical substitution of labor by capital. Classes of two-factor production functions that correspond to given (constant, linear, linear-fractional, exponential, etc.) marginal rate of technical substitution areindicated. The obtained results can be applied in modeling of production processes.

Keywords:*production process, production function, inverse problem, marginal rate of technical substitution, elasticity of substitution.*

References

1. Berry, A. The pure theory of distribution / A. Berry // British Association of Advancement of Science: Report of the 60th Meeting. – 1891. – P. 923 – 924.

2. Marshal, A. Principy ekonomicheskoj nauki/A.Marshal. – M.: Progress, 1993. – 594 s.

3. Humphrey, T.M. Algebraic production functions and their uses before Cobb-Douglas / T.M. Humphrey // Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly. – 1997. – Vol. 83/1. – P. 51 – 83.

4. Mishra, S.K. A brief history of production functions / S.K. Mishra // The IUP Journal of Managerial Economics. – 2010. – Vol. 8(4). – P. 6 – 34.

5. Tarasevich, L.S. 50 lekcij po mikroekonomike / L.S. Tarasevich, V.M. Gal'perin, S.M. Ignat'ev. – SPb.: Ekonomicheskaya shkola, 2000. – 862 s.

6. Simonov, P.M. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie / P.M. Simonov. – Perm': Permskij gos. un-t., 2009. – CH. 1. – 338 s.

7. Klejner, G.B. Proizvodstvennye funkcii: teoriya, metody, primenenie / G.B. Klejner. – M.: Finansy i statistika, 1986. – 239 s.

8. Klejner, G.B. Ekonomika. Modelirovanie. Matematika. Izbrannye trudy / G.B. Klejner. – M.: CEMI RAN, 2016. – 856 s.

9. Gorbunov, V.K. Proizvodstvennye funk-cii: teoriya i postroenie / V.K. Gorbunov. – Ul'yanovsk: UlGU, 2013. – 84 s.

10. Cobb, C.W. A theory of production / C.W. Cobb, P.H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – Vol. 18. – P. 139 – 165.

11. Douglas, P.H. The Cobb-Douglas production function once again: its history, its testing, and some new empirical values // P.H. Douglas // Journal of Political Economy. – 1976. – Vol. 84, No. 5. – P. 903 – 916.

12. Solow, R.M. A contribution to the theory of economic growth / R.M. Solow // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70, No. 1. – P. 65 – 94.

13. Arrow, K.J. Capital-labor substitution and economic efficiency / K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas, R.M. Solow // The Review of Economics and Statistics. – 1961. – Vol. 43, No. 3. – P. 225 – 250.

14. Hicks, J.R. The theory of wages / J.R. Hicks. – London: Macmillan, 1932. – 247 p.

15. Allen, R.G. Mathematical analysis for economists / R.G. Allen. – London: Macmillan, 1938. – 560 p.

16.Uzawa, H. Production functions with constant elasticities of substitution / H. Uzawa // The Review of Economic Studies. – 1962. – Vol. 29, No. 4. – P. 291 – 299.

17.Mihalevskij, B.N. Sistema modelej srednesrochnogo narodnohozyajstvennogo planirovaniya / B.N. Mihalevskij. – M.: Nauka, 1972. – 476 s.

18. McFadden, D. Constant elasticities of substitution production functions / D. McFadden // Review of Economic Studies. – 1963. – Vol. 30. – P. 73 – 83.

19. Geary, R.C. A note on “A constant-utility index of the cost of living” / R.C. Geary // The Review of Economic Studies. – 1950. – Vol. 18, No. 1. – P. 65 – 66.

20. Revankar, N.S. A class of variable elasticity of substitution production functions / N.S. Revankar // Econometrica. – 1971. – Vol. 39, No. 1. – P. 61–71.

21. Lu, Y.C. A Generalization of the CES production function / Y.C. Lu, L.B. Fletcher // Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 449 – 452.

22. Liu, T.C. Manufacturing production functions in the United States / T.C. Liu, G.H. Hildebrand. – Ithaca: Cornell University Press, 1965.

23. Kadiyala, K.R. Production functions and elasticity of substitution / K.R. Kadiyala // Southern Economic Journal. – 1972. – Vol. 38. – P. 281 – 284.

24. Bruno, M. A Note on the implications of an empirical relationship between output per unit of labor, the wage rate and the capital-labour ratio / M. Bruno // Unpub. mimeo, Stanford, 1962.

25. Bruno, M. Estimation of factor contribution to growth under structural disequilibrium / M. Bruno // International Economic Review. – 1968. – Vol. 9. – P. 49 – 62.

26.Sato, R. Production function with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing / R. Sato, R.F. Hoffman // The Review of Economics and Statistics. – 1968. – Vol. 50. – P. 453–460.

27. Losonczi, L. Production functions having the CES property / L. Losonczi // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. – 2010. – Vol. 26(1). – P. 113 – 125.

28. Chen, B.-Y. Classification of h-homogeneous production functions with constant elasticity of substitution / B.-Y. Chen // Tamkang journal of mathematics. – 2012. – Vol. 43, No. 2. – P. 321 – 328.

29. Gorbunov, V.K. O predstavlenii linejno-odnorodnyh funkcij poleznosti / V.K. Gorbunov // Uchenye zapiski Ul'yanovskogo gos. un-ta. Ser. «Fundamental'nye problemy matematiki i mekhaniki». – 1999. – Vyp. 1(6). – S. 70 – 75.

30. Khatskevich, G.A. On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2017. – No. 1. – P. 46 50.

31. Hackevich, G.A. Kvaziodnorodnye proizvodstvennye funkcii edinichnoj elastichnosti zameshcheniya faktorov po Hiksu / G.A. Hackevich, A. F. Pronevich // Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie: sb. nauch. tr. / [redkol.: M.K. Kravcov (gl. red.) i dr.]. – Minsk: NIEI Minva ekonomiki Resp. Belarus', 2017. – Vyp. 11. – S. 135 – 140.

32. Hackevich, G.A. Dvuhfaktornye proizvodstvennye funkcii s zadannymi elastichnostyami vypuska i proizvodstva / G.A. Hackevich, A.F. Pronevich, V.Yu. Medvedeva // Biznes. Innovacii. Ekonomika. – 2017. – Vyp. 1. – S. 110 – 119.33. Khatskevich, G.A. Production functions with given elasticities of output and production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich // Journal of Belarussian State University. Economics. – 2018. – No. 2. – P. 13 – 21.

34. Khatskevich, G.A. Analytical forms of productions functions with given total elasticity of production / G.A. Khatskevich, A.F. Pranevich, Yu. Yu. Karaleu // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 1052. – P. 276 – 285.

35. Gorbuzov, V.N. Spektpal'nyj metod postpoeniya integpal'nogo bazisa yakobievoj sistemy v chastnyh ppoizvodnyh / V.N. Gor-buzov, A.F. Pronevich// Differenc. uravneniya i processy upravl. – 2001. – № 3. – S. 17 – 45.

36. Pronevich, A.F. Integraly yakobievyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh / A.F.Pronevich. – Saarbruchen (Germany): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 97 s.

37. Zajcev, V.F. Spravochnik po differencial'nym uravneniyam s chastnymi proizvod-nymi pervogo poryadka / V.F. Zajcev, A.D. Polyanin. – M.: FIZMATLIT, 2003. – 416 s.