Tôhoku Math. J.
40 (1988), 549-590.

ÜBER DIE ANALYTISCHE FORTSETZUNG GEWISSER POINCARÉ'SCHER REIHEN ZU ELLIPTISCHEN MODULGRUPPEN

ULRICH CHRISTIAN

(Received May 22, 1987)

0. Einleitung. Es sei Ψ eine Kongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe. Für $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{R})$ und $z = x + iy$ aus der oberen Halbebene $\mathfrak{Z}(1)$ werde

$$N\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d} = x_N + iy_N;\ N\{z\} = cz + d$$

gesetzt. Dabei sind x, y der Real- und Imaginärteil von z und x_N, y_N das Entsprechende von $N\langle z \rangle$.

Mit einer weiteren Variablen $w = u + iv \in \mathfrak{Z}(1)$ und $k, g \in \boldsymbol{Z}$; $s_1, s_2 \in \boldsymbol{C}$ bilden wir die Poincaré'sche Reihe

$$K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2) = \sum_{N \in \Psi} (-\bar{w} + N\langle z \rangle)^{-k} (N\{z\})^{-g} |-\bar{w} + N\langle z \rangle|^{-s_1} |N\{z\}|^{-s_2} ,$$

welche für $\operatorname{Re} s_1 > 1 - k$, $\operatorname{Re} s_2 > 2 - g$ absolut konvergiert. In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß sich diese Reihe als Funktion von (s_1, s_2) meromorph auf $\boldsymbol{C}^2$ fortsetzen läßt, und wir werden auch Aussagen machen, wo Singularitäten liegen können.

Diese Reihe ist von besonderem Interesse, weil $K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0)$ für $g \geqq 3$ bis auf eine Konstante der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen vom Gewicht g ist. Wir werden zeigen, daß dieses auch noch für $g = 2$ richtig bleibt. Für $g = 1$ beweisen wir, daß $K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ bei $s = 0$ einen Pol erster Ordnung besitzt, und daß der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen vom Gewicht 1 bis auf eine Konstante durch $\operatorname{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ gegeben wird.

Zum Beweis betrachten wir den Differentialoperator

$$\Delta_g = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - igy\frac{\partial}{\partial x} ,$$

welcher in einem passenden Hilbertraum wesentlich selbstadjungiert ist und sich zu einem selbstadjungierten Operator $\tilde{\Delta}_g$ fortsetzen läßt. Der Resolventenkern von $-\tilde{\Delta}_g$ ist eine Poincaré'sche Reihe $G(\Psi, g, w, z, s)$, welche bei $w = z$ eine logarithmische Singularität besitzt. In der Literatur ist die meromorphe Fortsetzbarkeit von $G(\Psi, g, w, z, s)$ auf alle $s \in \boldsymbol{C}$ bereits untersucht.

$$(vy)^{-g/2} \operatorname*{Res}_{s=0} G(\Psi, g, w, z, s)$$

ist bis auf eine Konstante der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen vom Gewicht g, sofern man $g \geqq 2$ voraussetzt. Für $g = 1$ ist die Polordnung um eins höher, das heißt, der Kern der Integralgleichung der Spitzenformen wird bis auf eine Konstante durch

$$(vy)^{-1/2} \lim_{s \to 0} (s^2 G(\Psi, 1, w, z, s))$$

gegeben. Wir werden eine Beziehung zwischen $K(\Psi, g, g, w, z, s, s)$ und $G(\Psi, g, w, z, s)$ herleiten, welche unter anderem auch die gewünschten Aussagen über den Kern der Integralgleichung der Spitzenformen liefert.

Neben $K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2)$ und $G(\Psi, g, w, z, s)$ müssen wir auch die Eisenstein'schen Reihen zu Ψ untersuchen, weil diese das kontinuierliche Spektrum von $-\tilde{\Delta}_g$ beschreiben. Die nullten Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen werden mit den Dirichlet'schen L-Reihen in Verbindung gebracht.

Dadurch können wir zeigen, daß die Eisensteinreihen in einem gewissen Bereich keine Pole besitzen.

Schließlich werden wir gewisse Poincaré'sche Reihen noch mit Hilfe der Kloosterman'schen Summen untersuchen. Auf diese Weise finden wir einen neuen Beweis für die bereits bekannte Tatsache, daß der kleinste exzeptionelle Eigenwert von $-\tilde{\Delta}_g$ nicht unterhalb 3/16 liegt.

1. Grundbegriffe. Es sei $\mathfrak{Z}(1) = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ die in $\boldsymbol{C}$ gelegene obere Halbebene. Für $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{R})$ setze man

$$(1) \qquad N\langle z\rangle = \frac{az + b}{cz + d} = x_N + iy_N\ , \quad N\{z\} = cz + d\ ,$$

wobei x_N, y_N Real- und Imaginärteil von $N\langle z\rangle$ bezeichnen. Ferner sei

$$(2) \qquad j_N(g; z) = \left(\frac{N\{z\}}{|N\{z\}|}\right)^g = e^{ig \arg N\{z\}} = \frac{(N\{z\})^{g/2}}{(N\{\bar{z}\})^{g/2}}\ ;$$

dabei ist $g \in \boldsymbol{Z}$. Durch die Zuordnung $z \to N\langle z\rangle$ wird $\mathfrak{Z}(1)$ bijektiv auf sich abgebildet. Mit $w, z \in \mathfrak{Z}(1)$ setze man

$$(3) \qquad \left|\frac{w - z}{w - \bar{z}}\right| = \tanh \frac{1}{2} r(w, z)\ .$$

Die nicht-negative Zahl $r(w, z)$ heißt der "nicht-euklidische Abstand" von

w und z. Es gilt

$$(4)\qquad \frac{N\langle w\rangle - N\langle z\rangle}{N\langle w\rangle - N\langle \bar{z}\rangle} = j_N^{-1}(2;\, z)\frac{w-z}{w-\bar{z}} \quad (N \in SL(2,\, \boldsymbol{R}))\,.$$

Aus (3), (4) folgt

$$(5)\qquad r(w,\, z) = r(z,\, w) = r(N\langle w\rangle,\, N\langle z\rangle) \quad (N \in SL(2,\, \boldsymbol{R}))\,;$$

insbesondere ist also $r(w, z)$ eine Punktpaarinvariante im Sinne von Selberg [43], [44]. Zu der Metrik $r(w, z)$ gehört das unter $SL(2, \boldsymbol{R})$ invariante Volumenelement

$$(6)\qquad d\omega_z = \frac{dxdy}{y^2}\,.$$

Für eine Funktion $f(z)$ und $N \in SL(2, \boldsymbol{R})$ werde

$$(7)\qquad f_N(z) = (f|[N,\, g])(z) = j_N^{-1}(g;\, z) f(N\langle z\rangle)$$

gesetzt. Bei der Bezeichnung $f_N(z)$ ersieht man das Gewicht g aus dem Zusammenhang. Wir haben aber auch Funktionen $f(w, z)$ mit $w, z \in \mathfrak{Z}(1)$ zu betrachten. Durch die Bezeichnung f_{M_w, N_z} deuten wir an, daß die Transformation (7) bezüglich der Variablen w mit M und bezüglich z mit N auszuführen ist.

Man setze

$$(8)\qquad \Delta_g = y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) - igy\frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Dann gilt

$$(9)\qquad \Delta_g = \bar{\Delta}_{-g}\,,$$

$$(10)\qquad (\Delta_g f)|[N,\, g] = \Delta_g(f|[N,\, g]) \quad (N \in SL(2,\, \boldsymbol{R}))\,.$$

Es seien $q \in N$ und $\mathrm{M}(q) = \left\{N \in SL(2, \boldsymbol{Z}),\ N \equiv I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \bmod q\right\}$ die "Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe" zur elliptischen Modulgruppe $\mathrm{M}(1) = SL(2, \boldsymbol{Z})$. Eine "Kongruenzgruppe q-ter Stufe" Ψ wird durch $\mathrm{M}(q) \subset \Psi \subset SL(2, \boldsymbol{R})$ und $[\Psi : \mathrm{M}(q)] < \infty$ erklärt. Eine "Kongruenzgruppe" ist eine Kongruenzgruppe q-ter Stufe zu passendem q.

Definition 1. Für $g \in \boldsymbol{Z}$ und eine diskrete Untergruppe $\Phi \subset SL(2, \boldsymbol{R})$ sei $\mathfrak{A}(\Phi, g)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathfrak{Z}(1) \to \boldsymbol{C}$ mit

$$(11)\qquad f|[N,\, g] = f \quad (N \in \Phi)\,.$$

Für $\iota = 0, 1, 2, \cdots, \infty$ bezeichne $\mathfrak{A}^{\iota}(\Phi, g)$ die Menge der $f(z) \in \mathfrak{A}(\Phi, g)$ mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ι nach x und y. Schließlich sei $\mathfrak{A}^a(\Phi, g)\subset\mathfrak{A}^\infty(\Phi, g)$ die Menge der Funktionen, die bezüglich x und y reell analytisch sind. Weiter werde $\mathfrak{B}(q, g)=\mathfrak{A}(\mathrm{M}(q), g)$; $\mathfrak{B}^\iota(q, g)=\mathfrak{A}^\iota(\mathrm{M}(q), g)$, $(\iota = 0, 1, \cdots, \infty, a)$ gesetzt.

Man kann sich eine Funktion aus $\mathfrak{A}(\Phi, g)$ wie folgt verschaffen. Es sei Φ_0 eine Untergruppe von Φ (dabei kann $\Phi_0 = \{I\}$ sein). Für $h \in \mathfrak{A}(\Phi_0, g)$ bilde man die Poincaré'sche Reihe

$$f(\Phi, z)=\sum_{N\in\Phi_0\backslash\Phi}(h\,|\,[N, g])(z) = \sum_{N\in\Phi_0\backslash\Phi} h_N(z)\,, \tag{12}$$

wobei über alle rechtsseitigen Nebenklassen von Φ bezüglich Φ_0 zu summieren ist. Falls die Reihe (12) absolut konvergiert, stellt sie eine Funktion aus $\mathfrak{A}(\Phi, g)$ dar. Es sei Φ^* eine Zwischengruppe: $\Phi_0\subset\Phi^*\subset\Phi$. Aus (12) folgt dann

$$f(\Phi, z) = \sum_{N\in\Phi^*\backslash\Phi}(f(\Phi^*)\,|\,[N, g])(z) = \sum_{N\in\Phi^*\backslash\Phi} f_N(\Phi^*, z)\,. \tag{13}$$

In dieser Arbeit wollen wir die analytische Fortsetzung Poincaré'scher Reihen zu einer Kongruenzgruppe Ψ untersuchen. Es sei $\Psi\supset\mathrm{M}(q)$. Mit $\Phi = \Psi$, $\Phi^* = \mathrm{M}(q)$ ist die Summe (13) endlich. Daher genügt es, die analytische Fortsetzbarkeit für Hauptkongruenzgruppen $\mathrm{M}(q)$ $(q \in N)$ zu untersuchen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir noch

$$q \geqq 3 \tag{14}$$

voraussetzen. Dann hat $\mathrm{M}(q)$ keine elliptischen Fixpunkte, und es gilt $-I\notin\mathrm{M}(q)$. Ist $\mathfrak{F}(q)$ ein Fundamentalbereich von $\mathrm{M}(q)$, so kann man jede Spitze desselben durch eine Transformation aus $\mathrm{M}(1)$ nach ∞ bringen. Daher ist es im folgenden wichtig, zu einer Funktion $f(z)$ auch die Funktionen $f_R(z)$ $(R\in\mathrm{M}(1))$ zu betrachten. Es seien $\xi_1 = \infty$, ξ_2, $\cdots$, $\xi_{p(q)}$ die bezüglich $\mathrm{M}(q)$ inäquivalenten Spitzen von $\mathfrak{F}(q)$. Aus Christian [5], S. 59, (17) folgt

$$p(q) = \frac{1}{2}q^2\prod_{p^*|q}(1 - p^{*-2}) \quad (q \geqq 3)\,. \tag{15}$$

Das Produkt ist über alle in q steckenden Primzahlen p^* zu erstrecken. Wir wählen Matrizen $R_1 = I$, R_2, $\cdots$, $R_{p(q)}\in\mathrm{M}(1)$ mit

$$R_\iota\langle\xi_\iota\rangle = \infty\,, \quad (\iota = 1, \cdots, p(q))\,. \tag{16}$$

Man setze

$$R_{\iota\kappa} = R_\iota R_\kappa^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha_{\iota\kappa} & \beta_{\iota\kappa}\\ \gamma_{\iota\kappa} & \delta_{\iota\kappa}\end{pmatrix} \quad (\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))\,. \tag{17}$$

Schließlich sei $\mathrm{M}_\infty(q)$ die durch $N = \begin{pmatrix}1 & qa\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(a \in \boldsymbol{Z})$ gegebene Untergruppe von $\mathrm{M}(q)$.

HILFSSATZ 1. *Es gilt*

(18) $$\mathrm{M}(q)R_{\iota\kappa} \cap \mathrm{M}_\infty(1) = R_\iota \mathrm{M}(q) R_\kappa^{-1} \cap \mathrm{M}_\infty(1) \neq \emptyset$$

genau dann, wenn $\iota = \kappa$ *ist.*

BEWEIS. Da $\mathrm{M}(q)$ Normalteiler von $\mathrm{M}(1)$ ist, gilt $\mathrm{M}(q)R_{\iota\kappa} = R_\iota \mathrm{M}(q) R_\kappa^{-1}$. Der Rest folgt aus Neunhöffer [31], S. 22, Mitte.

DEFINITION 2. Für $\lambda \in C$ bedeute $\hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$ die Menge der $f \in \mathfrak{B}^a(q, g)$ mit folgenden Eigenschaften: Es gilt

(19) $$-\Delta_g f = \lambda f .$$

Es gibt ein $\kappa \in R$, so daß gleichmäßg in x gilt

(20) $$f_R(z) = 0(y^\kappa) \quad (y \to \infty) \quad (R \in \mathrm{M}(1)) .$$

Die Funktionen aus $\hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$ heißen "automorphe Formen zur Gruppe $\mathrm{M}(q)$, zum Gewicht g und zur Kennzahl λ".

Nun ist $\mathrm{M}(q)$ Normalteiler von $\mathrm{M}(1)$. Aus (10) ersieht man daher, daß mit f auch f_R $(R \in \mathrm{M}(1))$ in $\mathfrak{B}(q, g)$ bzw. $\mathfrak{B}^\iota(q, g)$ $(\iota = 0, 1, \cdots, \infty, a)$ bzw. $\hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$ liegt. Ist in der Poincaré'schen Reihe (12) die Gleichung $-\Delta_g h = \lambda h$ erfüllt, so gilt auch $-\Delta_g f(\Phi, z) = \lambda f(\Phi, z)$.

ANMERKUNG 1. Da der Operator $-\Delta_g$ elliptisch ist und reell analytische Koeffizienten hat, ist bereits jede zweimal stetig differenzierbare Lösung von (19) reell analytisch in x, y.

Siehe hierzu Roelcke [39], Teil 1, S. 297, Mitte.

Mit $s \in C$ setze man noch

(21) $$\lambda(g, s) = \frac{g+s}{2}\left(1 - \frac{g+s}{2}\right),$$

(22) $$\mathfrak{B}(q, g, s) = \hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda(g, s)) .$$

Diese Ausdrücke sind bei der Substitution $s \to 2 - 2g - s$ invariant.

HILFSSATZ 2. *Es seien* $R \in \mathrm{M}(1)$ *und* $f \in \mathfrak{B}(q, g, s)$. *Dann besteht die Fourierentwicklung*

(23) $$f_R(z) = A(R, z) + B(R, z)$$

mit

(24) $$A(R, z) = \begin{Bmatrix} b_0(R)y^{(g+s)/2} + c_0(R)y^{1-(g+s)/2} & (s \neq 1 - g) \\ b_0(R)y^{1/2} + c_0(R)y^{1/2}\log y & (s = 1 - g) \end{Bmatrix}$$

(25) $$B(R, z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} b_n(R)\, W_{(g\,\mathrm{sign}\, n)/2,\,(g+s-1)/2}\left(\frac{4\pi |n|}{q} y\right) e^{2\pi i n x/q} .$$

Die $W_{\dots}(\cdots)$ sind Whittaker'sche Funktionen. Man siehe z. B. Whittaker-Watson [57], *S.* 339, 16.12. *Die Absolutreihe von* (25) *hängt von x nicht ab und strebt für $y \to \infty$ exponentiell gegen* 0.

BEWEIS. Die Fourierentwicklung (23), (24), (25) folgt aus Roelcke [39], Teil I, Seite 301 und 302, Lemma 2.1. Aus Whittaker-Watson [57], S. 343.16.31 oder Roelcke [39], Teil I, (2.14) erhält man die asymptotische Aussage

$$W_{\beta,\gamma}(z) \sim z^{\beta} e^{-z/2} \quad \left(|z| \to \infty,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right). \tag{26}$$

Daraus folgt der Rest von Hilfssatz 2.

DEFINITION 3. Für eine diskontinuierliche Gruppe Φ sei $\mathfrak{B}(\Phi, g)$ die Menge der meßbaren Funktionen $f \in \mathfrak{A}(\Phi, g)$ mit

$$\|f\|^2 = \int_{\tilde{\mathfrak{F}}(\Phi)} |f(z)|^2 d\omega_z < \infty\ . \tag{27}$$

Dabei ist $\tilde{\mathfrak{F}}(\Phi)$ ein Fundamentalbereich von Φ. Führt man noch das skalare Produkt

$$(f, h) = \int_{\tilde{\mathfrak{F}}(\Phi)} \bar{f}(z) h(z) d\omega_z \tag{28}$$

ein, so wird $\mathfrak{B}(\Phi, g)$ zum Hilbertraum. Man setze $\mathfrak{H}(q, g) = \mathfrak{B}(M(q), g)$, $\hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda) = \mathfrak{H}(q, g) \cap \hat{\mathfrak{B}}(q, g, \lambda)$, $\mathfrak{H}(q, g, s) = \mathfrak{H}(q, g) \cap \mathfrak{B}(q, g, s)$. Letzteres ist wieder unter der Substitution $s \to 2 - 2g - s$ invariant.

In $\mathfrak{H}(q, g)$ betrachten wir $-\Delta_g$ auf folgenden Definitionsbereichen:

$$\mathfrak{D}^2(q, g) = \{f;\ f \in \mathfrak{H}(q, g) \cap \mathfrak{B}^2(q, g);\ -\Delta_g f \in \mathfrak{H}(q, g)\}\ , \tag{29}$$

$$\mathfrak{D}^\infty(q, q) = \{f;\ f \in \mathfrak{B}^\infty(q, g);\ f \text{ hat } \operatorname{mod} \mathrm{M}(q) \text{ kompakten Träger}\}\ . \tag{30}$$

Die Einschränkungen von $-\Delta_g$ auf $\mathfrak{D}^2(q, g)$ bzw. $\mathfrak{D}^\infty(q, g)$ mögen mit $-\Delta_g^2$ bzw. $-\Delta_g^\infty$ bezeichnet werden. Man siehe hierzu Roelcke [39], Teil I, S. 303. Offenbar ist $\mathfrak{D}^\infty(q, g) \subset \mathfrak{D}^2(q, g)$.

HILFSSATZ 3. *Es sei $g \in N$. Genau dann ist $f(z) \in \mathfrak{H}(q, g, 0)$, wenn $F(z) = y^{-g/2} f(z)$ eine klassische (holomorphe) Spitzenform zu* $\mathrm{M}(q)$ *vom Gewicht g ist.*

BEWEIS. Ist $F(z)$ eine klassische Spitzenform, so gilt $f(z) \in \mathfrak{H}(q, g, 0)$. Nun sei $f(z) \in \mathfrak{H}(q, g, 0)$. Dann ist also $-\Delta_g f(g) = g/2(1 - g/2) f(z)$. Vermöge Roelcke [39], Teil I, Seite 319, Satz 5.2, ist $F(z) = y^{-g/2} f(z)$ eine klassische Modulform zu $\mathrm{M}(q)$ vom Gewicht g. Wegen der Konvergenz des Integrals (27) und $g \in N$ muß $F(z)$ eine klassische Spitzenform sein. Hilfssatz 3 ist bewiesen.

SATZ 1. *Die Bereiche* $\mathfrak{D}^2(q, g)$ *und* $\mathfrak{D}^\infty(q, g)$ *liegen in* $\mathfrak{H}(q, g)$ *dicht.* $-\Delta_g^2$ *und* $-\Delta_g^\infty$ *sind in* $\mathfrak{H}(q, g)$ *wesentlich selbstadjungiert und haben dieselbe selbstadjungierte Fortsetzung* $-\widetilde{\Delta}_g$ *mit dem Definitionsbereich* $\widetilde{\mathfrak{D}}(q, g)$. *Es gilt* $\mathfrak{D}^2(q, g) = \widetilde{\mathfrak{D}}(q, g) \cap \mathfrak{B}^2(q, g)$. *Der Operator* $-\widetilde{\Delta}_g$ *hat ein kontinuierliches Spektrum und ein Punktspektrum. Die Eigenfunktionen und Eigenpakete von* $-\widetilde{\Delta}_g$ *sind mit denjenigen von* $-\Delta_g^2$ *identisch. Das kontinuierliche Spektrum liegt in der Halbgeraden* $[1/4, \infty\rangle \subset \boldsymbol{R}$. *In jedem Punkt dieses Intervalls hat es die Vielfachheit* $p(q)$.

Das Punktspektrum liegt in der Halbgeraden $[(|g|/2)(1-|g|/2), \infty\rangle \subset \boldsymbol{R}$. *Es ist abzählbar und häuft sich nur bei* ∞. *Es seien*

$$(31) \qquad \lambda_{-\tau(q,g)} = \frac{|g|}{2}\left(1 - \frac{|g|}{2}\right) < \lambda_{1-\tau(q,g)} < \cdots < \lambda_{-\rho(q,g)-1}$$
$$\leqq 0 < \lambda_{-\rho(q,g)} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 = \frac{1}{4} < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

die verschiedenen Eigenwerte von $-\widetilde{\Delta}_g$. *Jedes* λ_ν *hat endliche Vielfachheit* μ_ν. *Die Werte* $\lambda_{-\tau(q,g)} = (|g|/2)(1-|g|/2)$ *und* $\lambda_0 = 1/4$ *werden formal immer als Eigenwerte gezählt. Es darf aber* $\mu_{-\tau(q,g)} = 0$ *und* $\mu_0 = 0$ *sein. Es gilt*

$$(32) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_\nu \lambda_\nu^{-2} < \infty .$$

Die Operatoren $-\widetilde{\Delta}_g$ *und* $-\widetilde{\Delta}_{-g}$ *haben die gleichen Eigenwerte mit denselben Vielfachheiten. Ist* $g_1 \equiv g_2 \bmod 2$, *so stimmen für die Operatoren* $-\widetilde{\Delta}_{g_1}$ *und* $-\widetilde{\Delta}_{g_2}$ *die Eigenwerte* λ_ι $(\iota = -\rho(q, g), 1-\rho(q, g), \cdots, 0, 1, 2, \cdots)$ *und ihre Vielfachheiten* μ_ι *überein. Die Eigenwerte* $\lambda_{-\rho(q,g)}, \cdots, \lambda_{-1}$ *heißen "exzeptionell". Für* $g \equiv 1 \bmod 2$ *treten diese nicht auf. Für* $\iota \leqq 0$ *bilde man die reellen Zahlen*

$$(33) \qquad \sigma_\iota^+ = 1-g+2\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_\iota},\ \sigma_\iota^- = 1-g-2\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_\iota} \quad (\iota = -\tau(q, g), \cdots, 0) ,$$

wobei die Wurzeln positiv auszuziehen sind. Es gilt

$$(34) \qquad \sigma_{-\tau(q,g)}^+ = ||g|-1| + 1 - g > \sigma_{1-\tau(q,g)}^+ > \cdots > \sigma_0^+ = 1 - g$$
$$= \sigma_0^- > \cdots > \sigma_{1-\tau(q,g)}^- > \sigma_{-\tau(q,g)}^- = 1 - g - ||g|-1| ;$$

sowie

$$(35) \qquad \sigma_\iota^+, \sigma_\iota^- \notin \boldsymbol{Z} \qquad (\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1) ,$$

$$(36) \qquad \sigma_\iota^+ \equiv \sigma_\iota^- \equiv 0 \bmod 2 \quad (\iota = -\tau(q, g), \cdots, -\rho(q, g) - 1) .$$

BEWEIS. Der erste Teil des Satzes,, in welchem nicht speziell vom Punktspektrum die Rede ist, folgt aus Roelcke [39], Teil I, Seite 309, Satz 3.2; Seite 310, Lemma 3.5; Seite 325, Satz 5.7; Teil II, Seite 319, Satz 12.4. Nach Roelcke [39] Teil I, Seite 323, Satz 5.5 liegt das Punktspektrum im Intervall $[(|g|/2)(1-|g|/2), \infty\rangle$.

Die Aussage, daß es absählbar viele Eigenwerte gibt, daß diese sich nur bei ∞ häufen, daß sie endliche Vielfachheit besitzen, und daß die Summe (32) konvergiert, wird für $g=0$ bei Hejhal [18], Seite 188, Proposition 13.6, (b) bewiesen. Dieser Beweis überträgt sich auf den Fall beliebiger $g \in \boldsymbol{Z}$.

Es sei l eine Eigenfunktion zu $-\widetilde{\Delta}_g$, also $-\widetilde{\Delta}_g l = \lambda l$. Wie schon gesagt, gilt dann $-\Delta_g^2 l = \lambda l$. Wir gehen zum konjugiert-Komplexen über und beachten (9) und $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Es folgt $-\Delta_{-g}^2 \bar{l} = \lambda \bar{l}$, d.h., $-\widetilde{\Delta}_{-g}\bar{l} = \lambda \bar{l}$. Also haben $-\widetilde{\Delta}_g$ und $-\widetilde{\Delta}_{-g}$ die gleichen Eigenwerte mit denselben Vielfachheiten. Hieraus und aus Roelcke [39], Teil I, Seite 306, Lemma 3.1. γ), folgt, daß die Eigenwerte $\lambda_\iota(-\rho(q, g) \leqq \iota)$ und ihre Vielfachheiten μ_ι für die Operatoren $-\widetilde{\Delta}_{g_1}$ und $-\widetilde{\Delta}_{g_2}$ übereinstimmen, sofern $g_1 \equiv g_2 \bmod 2$ ist. Im Falle $g=1$ folgt aus (31), daß $\tau(q, 1) = 0$ ist. Der Operator $-\widetilde{\Delta}_1$ besitzt somit keine exzeptionellen Eigenwerte. Nach dem vorher Bewiesenen gilt das dann für alle Operatoren $-\widetilde{\Delta}_g$ mit $g \equiv 1 \bmod 2$.

Es sei λ_ι ein exzeptioneller Eigenwert, also $0 < \lambda_\iota < 1/4$. Dann ist $0 < 2\sqrt{1/4 - \lambda_\iota} < 1$. Hieraus und aus (33) folgt (35). Da $-\widetilde{\Delta}_g$ and $-\widetilde{\Delta}_{-g}$ dieselben Eigenwerte haben, brauchen wir die Aussage (36) nur für $g \geqq 0$ zu beweisen. Wegen (33) gilt

$$\sigma_\iota^+ = -2l_\iota,\ l_\iota = \frac{g}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_\iota}\,.$$

Nach Roelcke [39], Teil I, Satz 5.4.a) ist dann $l_\iota \in 0 \cup \boldsymbol{N}$. Also $\sigma_\iota^+ \equiv 0 \bmod 2$. Hieraus und aus $g \in \boldsymbol{Z}$ folgt $\sigma_\iota^- \equiv 0 \bmod 2$. Satz 1 ist bewiesen.

HILFSSATZ 4. *Es seien $q \in \boldsymbol{N}$; $k \in \boldsymbol{Z}$; $s \in \boldsymbol{C}$;* $\operatorname{Re} s > 1-k$; $z \in \mathfrak{Z}(1)$,

$$(37)\qquad b_n(q, k, y, s) = \left(\frac{\pi}{qy}\right)^{(k+s)/2} e^{-\pi i k/2} \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right)} n^{(k+s)/2-1} W_{k/2,(k+s-1)/2}\left(\frac{4\pi n y}{q}\right) \qquad (n>0)\,,$$

$$(38)\qquad b_{-n}(q, k, y, s) = \left(\frac{\pi}{qy}\right)^{(k+s)/2} e^{-\pi i k/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} n^{(k+s)/2-1} W_{-k/2,(k+s-1)/2}\left(\frac{4\pi n y}{q}\right) \qquad (n>0)\,,$$

(39) $$b_0(q, k, y, s) = e^{-\pi i k/2} \frac{2^{2-k-s}\pi\Gamma(k+s-1)}{q\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} y^{1-k-s} .$$

Dann gilt

(40) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z+qn)^{-k}|z+qn|^{-s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(q, k, y, s)e^{2\pi i n x/q} .$$

Der Differentialoperator $-\Delta_k - (k+s)y\partial/\partial y$ *annulliert jeden Summanden der linken und rechten Seite von* (40).

BEWEIS. Siehe Maass [30], chapter IV, § 2 und § 3, insbesondere Seite 207 unten.

2. **Eisenstein'sche Reihen.** Die nicht-analytische Eisenstein'sche Reihe zu $\mathrm{M}(q)$ vom Gewicht g wird durch

(41) $$E(q, g, z, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)} j_N^{-1}(g; z)y_N^{(g+s)/2} = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)} y^{(g+s)/2}|[N, g]$$

gegeben.

SATZ 2. *Die Eisenstein'sche Reihe* (41) *konvergiert für* $\mathrm{Re}\, s > 2 - g$ *absolut und stellt eine holomorphe Funktion von* s *dar. Diese Funktion läßt sich meromorph auf* $\boldsymbol{C}$ *fortsetzen. Und zwar gibt es eine ganze, von* z *unabhängige, nicht-identisch verschwindende Funktion* $\eta(q, g, s)$, *so daß* $\eta(q, g, s)E(q, g, z, s)$ *für alle* $z \in \mathfrak{Z}(1)$ *eine ganze Funktion von* s *ist. Es sei* $s \in \boldsymbol{C}$, s *keine Polstelle von* $E(q, g, z, s)$; *dann ist* $E(q, g, z, s) \in \mathfrak{B}(q, g, s)$.

BEWEIS. Die Konvergenzaussage ist bekannt. Der Rest wird für $g = 0$ bei Hejahl [18], chapter 6, § 11 oder Neunhöffer [31], § 5 oder Selberg [43] bewiesen. Für $g \in \boldsymbol{Z}$ übertragen sich diese Beweise wörtlich.

DEFINITION 4. Gegeben sei eine Funktion $f(Z, s)$ einer Variablenzeile Z, die in einem Definitionsgebiet Ω variiert, und die meromorph von der komplexen Variablen s abhängt. Wir sagen, $f(Z, s)$ hat bei $s = s_0$ einen Pol l-ter Ordnung, wenn $f(Z, s)$ für jedes $Z \in \Omega$ bei s_0 einen Pol von höchstens l-ter Ordnung besitzt, wenn es aber ein $Z \in \Omega$ gibt, für das die Polordnung genau l ist.

Im Sinne dieser Definition ist es also zu verstehen, wenn wir bei den im folgenden betrachteten Funktionen von Polen sprechen.

Es sei $R \in \mathrm{M}(1)$. Aus (7), (41) folgt dann für $\mathrm{Re}\, s > 2 - g$

(42) $$E_R(q, g, z, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)} j_{NR}^{-1}(g, z)y_{NR}^{(g+s)/2} = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)} y^{(g+s)/2}|[NR, g] .$$

Wegen (7) und Satz 2 läßt sich $E_R(q, g, z, s)$ meromorph auf die s-Ebene fortsetzen; die Polstellen und -ordnungen stimmen mit denen von $E(q,g,z,s)$ überein. Sofern s keine Polstelle ist, gilt $E_R(q, g, z, s) \in \mathfrak{B}(q, g, s)$. Entsprechend Hilfssatz 2 kann man $E_R(q, g, z, s)$ in eine Fourierreihe entwickeln.

HILFSSATZ 5. *Der nullte Fourierkoeffizient von* $E_{R_{\iota\kappa}}(q, g, z, s)$ $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$ *hat die Gestalt*

$$\delta^*_{\iota\kappa} y^{(g+s)/2} + \phi_{\iota\kappa}(q, g, s) y^{1-(g+s)/2} \quad (\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q)) . \tag{43}$$

Hierbei ist $\delta^*_{\iota\iota} = 1$ *und* $\delta^*_{\iota\kappa} = 0$ $(\iota \neq \kappa)$. *Für* $\operatorname{Re} s > 2 - g$ *gilt*

$$\phi_{\iota\kappa}(q, g, s) = e^{-\pi i g/2} \frac{2^{2-g-s}\pi\Gamma(g+s-1)}{q\Gamma\left(g+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} L(q, g, \iota, \kappa, s) \tag{44}$$

mit

$$L(q, g, \iota, \kappa, s) = \sum_{\substack{c=-\infty \\ c\neq 0 \\ (cd) \equiv (\gamma_{\iota\kappa}\delta_{\iota\kappa}) \bmod q \\ \langle c,d\rangle = 1 \\ 0 \leq d/c < q}}^{\infty} c^{-g}|c|^{-s} \quad (\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q)) . \tag{45}$$

Dabei sind die $\gamma_{\iota\kappa}$, $\delta_{\iota\kappa}$ *durch* (17) *erklärt,* $\langle\ \rangle$ *bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler. Als Funktion von s lassen sich die* $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ *und* $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$ *meromorph auf* $\boldsymbol{C}$ *fortsetzen.*

BEWEIS. Die Formeln (43), (44), (45) folgen aus Maass [30], Seiten 207-215 oder Roelcke [39], Teil, II, Seite 294, Lemma 10.2. Im Falle $g = 0$ stehen sie auch bei Neunhöffer [31], Seite 24, (4.17) oder Hejhal [18], Seite 65, proposition 8.6 sowie Seite 76. Da (43) der nullte Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe ist, gilt

$$\delta_{\iota\kappa} y^{(g+s)/2} + \phi_{\iota\kappa}(q, g, s) y^{1-(g+s)/2} = \frac{1}{q}\int_0^q E_{R_{\iota\kappa}}(q, g, z, s)dx \quad (\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q)) . \tag{46}$$

Die rechte Seite ist für $s \in \boldsymbol{C}$ meromorph, somit sind es auch die $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ und wegen (44) die $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$.

Man bilde die $p(q) \times p(q)$ Matrizen

$$\mathfrak{E}(q, g, z, s) = (E_{R_{\iota\kappa}}(q, g, z, s)),\ \Phi(q, g, s) = (\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)) , \tag{47}$$

wobei ι Zeilen- und κ Spaltenindex ist. Da die Polstellen von $E_R(q, g, z, s)$ und deren Ordnungen nicht von R abhängen, haben alle Matrixelemente von $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$ an den gleichen Stellen Pole derselben Ordnung. Wir können daher von Polen von $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$ und deren Ordnungen sprechen.

DEFINITION 5. Eine Polstelle s_0 von $\Phi(q, g, s)$ ist ein Punkt, in dem mindestens ein $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$ einen Pol hat. Die Polordnung von $\Phi(q, g, s)$ bei s_0 ist das Maximum der Polordnungen der $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ bei

s_0 $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$.

SATZ 3. *Es gelten die Gleichungen*

(48) $$\Phi(q, g, s)\Phi(q, g, 2-2g-s) = I\,,$$

(49) $$\mathfrak{E}(q, g, z, 2-2g-s) = \Phi(q, g, 2-2g-s)\mathfrak{E}(q, g, z, s)\,,$$

sowie die folgenden Aussagen:

(α) *Auf der Geraden* $\operatorname{Re} s = 1-g$ *sind* $\Phi(q, g, s)$ *und* $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$ *holomorph.*

(β) $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$ *und* $\Phi(q, g, s)$ *besitzen dieselben Polstellen mit den gleichen Polordnungen.*

(γ) *Ist* s_0 *eine Polstelle von* $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$ *und liegt* s_0 *in dem reellen Intervall* $\langle 1-g, 2-g]$, *so ist der Pol von erster Ordnung und* s_0 *ist auch eine Polstelle erster Ordnung von* $\phi_{11}(q, g, s)$.

BEWEIS. Aus (17) folgt $R_{\iota\iota} = I$, also $\phi_{\iota\iota}(q, g, s) = \phi_{11}(q, g, s)$ $(\iota = 1, \cdots, p(q))$. Nun folgt die Behauptung aus Roelcke [39], Teil II, Seite 296, (10.19), (10.23) und Seite 299, Satz 10.4.

DEFINITION 6. Für $a \in \boldsymbol{R}$ und $t = \operatorname{Im} s$ sei $\mathfrak{h}(a)$ das Gebiet

(50) $$\mathfrak{h}(a) = \left\{\operatorname{Re} s \geqq 1 - a - \frac{1}{20\log(3+|t|)}\right\} - \{b_1 - a, \cdots, b_n - a\}$$

mit gewissen Punkten $b_1, \cdots, b_n \in \boldsymbol{R}$ aus dem offenen Intervall $\langle 0, 1\rangle$, welche in Satz 4 erklärt werden. Ferner bezeichne $\mathfrak{a}(a)$ die Punktmenge

(51) $$\mathfrak{a}(a) = \{s \in \boldsymbol{C}; \operatorname{Re} s > 1-a\} \cup \{1-a\}\,.$$

SATZ 4. *Die Reihen* $L(1, g, \iota, \kappa, s)$ *lassen sich meromorph auf* $\boldsymbol{C}$ *fortsetzen. Wählt man die in Definition* 6 *genannten Punkte* $b_1, \cdots, b_n$ *passend, so gilt: Für* $g \equiv 1 \bmod 2$ *sind* $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ *holomorph in* $\mathfrak{h}(g)$, *und es gilt*

(52) $$L(q, g, \iota, \iota, s) = 0 \quad (\iota = 1, \cdots, p(q))\,; \quad (g \equiv 1 \bmod 2)\,.$$

Für $g \equiv 0 \bmod 2$ *sind* $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ *holomorph in* $\mathfrak{h}(g) - \{2-g\}$. *Bei* $s = 2-g$ *liegt ein Pol erster Ordnung* $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$. *Bei den* $b_1, \cdots, b_n$ *können die* $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ *Pole erster Ordnung haben.*

BEWEIS. Für $c \in \boldsymbol{Z} - 0$ sei $V(q, c, \delta)$ die Anzahl der $d \in \boldsymbol{Z}$ mit

(53) $$d \equiv \delta \bmod q\,; \quad \langle d, c\rangle = 1\,; \quad 0 \leqq \frac{d}{c} < q\,.$$

Offenbar gilt

(54) $$V(q, c, \delta) = V(q, -c, -\delta)\,.$$

Es sei $\gamma \in \boldsymbol{Z}$,

(55) $$\langle\gamma, \delta\rangle = 1 .$$

Man setze

(56) $$\zeta(q, \gamma, \delta, s) = \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv\gamma \bmod q}}^{\infty} V(q, c, \delta)c^{-s}$$

Diese Reihe ist für $\operatorname{Re} s > 2$ absolut konvergent und holomorph in s. Aus (45) folgt

(57) $$L(q, g, \iota, \kappa, s) = \zeta(q, \gamma_{\iota\kappa}, \delta_{\iota\kappa}, g + s) + (-1)^g\zeta(q, -\gamma_{\iota\kappa}, -\delta_{\iota\kappa}, g + s) .$$

Wir wollen jetzt die Reihen $\zeta(q, \gamma, \delta, s)$ und $\zeta(q, -\gamma, -\delta, s)$ gemeinsam untersuchen. Dazu beginnen wir mit $V(q, c, \delta)$ und $V(q, c, -\delta)$. Wir bilden den größten gemeinsamen Teiler

(58) $$\eta = \langle|\delta|, q\rangle \geqq 1 .$$

Aus (66) folgt $\eta|d$. Wir setzen also

(59) $$q = \eta q_1 , \quad \delta = \eta\delta_1 , \quad d = \eta d_1 .$$

Aus (53), (55), (58), (59) ergibt sich

(60) $$\langle c, \eta\rangle = \langle\gamma, \eta\rangle = \langle\delta_1, q_1\rangle = \langle d_1, q_1\rangle = 1 .$$

Wegen (53) ist also $V(q, c, \delta)$ die Anzahl der $d_1 \in \boldsymbol{Z}$ mit $0 \leqq d_1 < q_1c$; $\langle d_1, q_1c\rangle = 1$, $d_1 \equiv \delta_1 \bmod q_1$. Somit ist $V(q, c, \delta)$ gleich der Anzahl der primen Restklassen $d_1 \bmod q_1c$ mit $d_1 \equiv \delta_1 \bmod q_1$. Durch die Zuordnung

(61) $$d_1 \bmod q_1c \to d_1 \bmod q_1$$

wird ein Homomorphismus der primen Restklassengruppe $\mathfrak{G}(q_1c)$ von q_1c auf die prime Restklassengruppe $\mathfrak{G}(q_1)$ von q_1 definiert. Ist $\mathfrak{K}$ der Kern dieses Homomorphismus, so gilt

(62) $$\mathfrak{G}(q_1c)/\mathfrak{K} \simeq \mathfrak{G}(q_1) .$$

Offenbar ist $V(q, c, \delta)$ gleich der Ordnung von $\mathfrak{K}$, wegen (62) also

(63) $$V(q, c, \delta) = \frac{\phi^*(q_1c)}{\phi^*(q_1)} ,$$

wobei $\phi^*(m)$ die Anzahl der primen Restklassen mod m bezeichnet. Vermöge (58) bleibt η beim Übergang $\delta \to -\delta$ unverändert. Wegen (59) gilt das auch für q_1. Somit auch

(64) $$V(q, c, -\delta) = \frac{\phi^*(q_1c)}{\phi^*(q_1)} .$$

Es gilt also

(65) $$\zeta(q, \gamma, \pm\delta, s) = \frac{1}{\phi^*(q_1)} \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv\gamma \bmod \eta q_1}}^{\infty} \phi^*(q_1 c)c^{-s} .$$

Wir untersuchen jetzt die Reihe (65), wobei wir wieder auf γ und $-\gamma$ gleichzeitig unser Augenmerk haben. Wir setzen

(66) $$\alpha = \langle|\gamma|, q_1\rangle \geqq 1 ,$$

(67) $$q_1 = \alpha q_2 , \quad \gamma = \alpha\gamma_2 , \quad c = \alpha n .$$

Dabei ist zu beachten, daß c wegen $c \equiv \gamma \bmod \eta q_1$ durch α teilbar ist. Der übergang $\gamma \to -\gamma$ ist mit $\gamma_2 \to -\gamma_2$ gleichbedeutend. α und q_2 ändern sich dabei nicht. Aus (55), (60) folgt

(68) $$\langle\alpha, \eta\rangle = \langle\gamma_2, \eta q_2\rangle = 1 .$$

Schließlich bekommen wir

(69) $$\zeta(q, \gamma, \pm\delta, s) = \frac{\alpha^{-s}}{\phi^*(q_1)}\hat{\zeta}(\eta q_2, \alpha^2 q_2, \gamma_2, s) ,$$

mit

(70) $$\hat{\zeta}(m, l, \gamma_2, s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv\gamma_2 \bmod m}}^{\infty} \phi^*(ln)n^{-s} .$$

Dabei gilt $l \in N$ und

(71) $$\langle\gamma_2, m\rangle = 1 .$$

Der primen Restklassengruppe $\mathfrak{G}(m)$ ordnen wir die Charaktergruppe $X(m)$ zu, wie es etwa bei Landau [26], §§ 99–101 geschieht. Die Charaktere, also die Elemente von $X(m)$, werden mit $\chi(n)$ bezeichnet; dabei gelte $\chi(n) = 0$, $(\langle n, m\rangle > 1)$. Wir betrachten weiterhin die Funktion

(72) $$\check{\zeta}(m, l, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\phi^*(ln)n^{-s} = \sum_{\substack{a \bmod m \\ \langle a, m\rangle=1}} \chi(a)\hat{\zeta}(m, l, a, s) .$$

Aus Landau [26], Seite 408, Satz 4 entnimmt man

(73) $$\sum_{\chi \in X(m)} \chi(n) = \begin{Bmatrix} \phi^*(m) & (n \equiv 1 \bmod m) \\ 0 & (n \not\equiv 1 \bmod m) \end{Bmatrix} .$$

Die Relationen (72), (73) liefern

(74) $$\hat{\zeta}(m, l, \gamma_2, s) = \frac{1}{\phi^*(m)} \sum_{\chi \in X(m)} \chi^{-1}(\gamma_2)\check{\zeta}(m, l, \chi, s) .$$

Es sei

(75) $$n = \prod_{p^*} p^{*\omega(n, p^*)}$$

die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n. Aus (72), (75) folgt

$$\check{\zeta}(m, l, \chi, s) = \prod_{p^*} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\chi(p^*))^\nu \phi^*(p^{*\omega(l,p^*)+\nu}) p^{*-\nu s},$$

also

$$\check{\zeta}(m, l, \chi, s) = \rho^*(m, l, \chi, s) \prod_{p^*} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\chi(p^*))^\nu \phi^*(p^{*\nu}) p^{*-\nu s} \tag{76}$$

mit

$$\begin{aligned}
\rho^*(m, l, \chi, s) &= \prod_{p^*|l} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} (\chi(p^*))^\nu \phi^*(p^{*\omega(l,p^*)}) p^{*\nu} p^{*-\nu s}}{\sum_{\nu=0}^{\infty} (\chi(p^*))^\nu \phi^*(p^{*\nu}) p^{*-\nu s}} \\
&= \prod_{p^*|l} \frac{\phi^*(p^{*\omega(l,p^*)})}{(1 - \chi(p^*) p^{*1-s}) \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p^*}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\chi(p^*) p^{*1-s})^\nu \right)} \\
&= \prod_{p^*|l} \frac{\left(1 - \frac{1}{p^*}\right) p^{*\omega(l,p^*)}}{(1 - \chi(p^*) p^{*1-s}) \left(\frac{1}{p^*} + \frac{1 - \frac{1}{p^*}}{1 - \chi(p^*) p^{*1-s}} \right)}
\end{aligned}$$

$$\rho^*(m, l, \chi, s) = \prod_{p^*|l} \frac{\left(1 - \frac{1}{p^*}\right) p^{*\omega(l,p^*)}}{1 - \chi(p^*) p^{*-s}} . \tag{77}$$

Aus (76) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\check{\zeta}(m, l, \chi, s) &= \rho^*(m, l, \chi, s) \prod_{p^*} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p^*}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} (\chi(p^*) p^{*1-s})^\nu \right) \\
&= \rho^*(m, l, \chi, s) \prod_{p^*} \left(\frac{1}{p^*} + \frac{1 - \frac{1}{p^*}}{1 - \chi(p^*) p^{*1-s}} \right) \\
&= \rho^*(m, l, \chi, s) \prod_{p^*} \frac{1}{1 - \chi(p^*) p^{*1-s}} \left(\prod_{p^*} \frac{1}{1 - \chi(p^*) p^{*-s}} \right)^{-1} .
\end{aligned}$$

Somit

$$\check{\zeta}(m, l, \chi, s) = \frac{\rho^*(m, l, \chi, s) L^*(m, \chi, s-1)}{L^*(m, \chi, s)} . \tag{78}$$

Dabei ist $L^*(m, \chi, s)$ die Dirichlet'sche L-Reihe, wie sie etwa bei Landau [26], 23. Kapitel, erklärt ist. Zur Formel (78) siehe man auch Hejhal [18], Seite 547, Lemma 5.11 und Seite 593, Bemerkung 44.

Es sei χ ein eigentlicher Charakter bezüglich $d|m$. Dann gilt

$$L^*(m, \chi, s) = L^*(d, \chi, s) \prod_{\substack{p^*|m \\ p^* \nmid d}} (1 - \chi(p^*)p^{*^{-s}}) . \tag{79}$$

Aus Landau [26], insbesondere 15. und 17. Kapitel, Seite 321 oben, § 79; § 115; 30. Kapitel; Seite 514 oben u. Davenport [60], S. 93, Theorem folgt, daß $L^*(d, \chi, s)$ eine ganze Funktion in s darstellt, sofern χ nicht der Hauptcharakter ist. Für den Hauptcharakter hat die Funktion genau einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$. Für jedes $\chi \in \mathrm{X}(m)$ besitzt $L^*(d, \chi, s)$ in $\operatorname{Re} s \geqq 1 - 1/(20 \log(3 + |t|))$ höchstens eine reelle Nullstelle erster Ordnung im offenen Intervall $\langle 0, 1\rangle$. Die Nullstellen des Produktes auf der rechten Seite von (79) liegen alle auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 0$. Daher gelten die für $L^*(d, \chi, s)$ gemachten Aussagen auch für $L^*(m, \chi, s)$. Die Polstellen von $\rho^*(m, l, \chi, s)$ liegen auch alle auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 0$. Wir sehen also, daß sich die Reihe $\hat{\zeta}(m, l, \chi, s)$ meromorph auf die ganze s-Ebene fortsetzen läßt. Sie ist im Gebiet $\operatorname{Re} s \geqq 1 - 1/(20 \log(3 + |t|))$ holomorph mit Ausnahme höchstens eines Punktes im reellen Intervall $\langle 0, 1\rangle$, sofern χ reell und nicht ber Hauptcharakter ist. In dem Ausnahmepunkt kann ein Pol erster Ordnung liegen. Ist χ der Hauptcharakter, so liegt ein Pol erster Ordnung bei $s = 2$. Hieraus und aus (74) folgt, daß $\hat{\zeta}(m, l, \gamma_2, s)$ in C meromorph ist. In $\operatorname{Re} s \geqq 1 - 1/(20 \log(3 + |t|))$ liegt ein Pol erster Ordnung bei $s = 2$. Ferner können endlich viele Pole erster Ordnung im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ liegen. Der Pol bei $s = 2$ kommt in (74) durch den Anteil des Hauptcharakters hinein. Dieser ändert sich nicht, wenn man γ_2 durch $-\gamma_2$ ersetzt. Also

$$\operatorname*{Res}_{s=2} \hat{\zeta}(m, l, \gamma_2, s) = \operatorname*{Res}_{s=2} \hat{\zeta}(m, l, -\gamma_2, s) . \tag{80}$$

Aus (69), (80) erhalten wir

$$\operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(q, \gamma, \pm\delta, s) = \operatorname*{Res}_{s=2} \zeta(q, -\gamma, \pm\delta, s) . \tag{81}$$

Wegen (57) ist nun klar, daß $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ für $s \in C$ meromorph ist. Die in Definition 6 genannten Punkte $b_1, \cdots, b_n$ kann man also so wählen, daß folgendes gilt. Es sei $g \equiv 1 \bmod 2$. Vermöge (57), (81) und dem früher Gesagten, ist $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ in $\mathfrak{h}(g)$ holomorph. Für $\iota = \kappa$ ist $\gamma_{\iota\iota} = 0$. Da $\zeta(q, 0, \delta, s)$ sich nicht ändert, wenn man δ durch $-\delta$ ersetzt, folgt (52) aus (57). Ist $g \equiv 0 \bmod 2$, so sind $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ in $\mathfrak{h}(g) - \{2 - g\}$ holomorph. Bei $s = 2 - g$ liegt ein Pol erster Ordnung. Satz 4 ist bewiesen.

SATZ 5. *Die Funktionen $E_R(q, g, z, s)$ $(R \in \mathrm{M}(1))$, $\mathfrak{E}(q, g, z, s)$, $\Phi(q, g, s)$, $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ $(\iota, \kappa = 1, \cdots, p(q))$ lassen sich meromorph auf die s-Ebene fortsetzen. Für $g \neq 0$ sind diese Funktionen in $\mathfrak{h}(g)$ holomorph. Für $g = 0$*

sind sie in $\mathfrak{h}(0)-\{2\}$ *holomorph. Bei* $s=2$ *liegt ein Pol erster Ordnung.*

BEWEIS. Die meromorphe Fortsetzbarkeit folgt aus Satz 2. Wegen Satz 3, (β) brauchen wir den Rest nur für die $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ zu beweisen. Vermöge (57) und Satz 4 können in $\mathfrak{h}(g)$ höchstens ein Pol erster Ordnung bei $s=1-g$ und im Falle $g\equiv 0 \bmod 2$ ein Pol erster Ordnung bei $s=2-g$ auftreten. Aus Satz 3, (α) ersieht man, daß bei $s=1-g$ kein Pol sein kann. Für $g\equiv 1 \bmod 2$ sind die $\phi_{\iota\kappa}(q, g, s)$ also holomorph in $\mathfrak{h}(g)$. Jetzt sei $g\equiv 0 \bmod 2$. Nach Satz 4 hat dann $L(q, g, \iota, \kappa, s)$ einen Pol erster Ordnung bei $s=2-g$. Weiter hat $\Gamma(g+s/2)\Gamma(s/2)$ genau dann einen Pol erster Ordnung bei $s=2-g$, wenn $g\neq 0$ ist. Hieraus und aus (44) folgt die Behauptung. Satz 5 ist bewiesen.

3. Der Resolventenkern. Wir wollen jetzt den Resolventenkern zum Differentialoperator $-\widetilde{\Delta}_g$ konstruieren. Für $\alpha\in \boldsymbol{C}$, $\nu\in \boldsymbol{N}$ setze man

$$(\alpha)_0 = 1\,,\quad (\alpha)_\nu = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1) = \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)} \tag{82}$$

und bilde die hypergeometrische Reihe

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_\nu(\alpha_2)_\nu}{(\beta)_\nu\cdot\nu!} z^\nu\,. \tag{83}$$

Entsprechend Fay [13], Seite 147, (13) setze man

$$Q_{(s+g)/2,g/2}(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+g\right)}{4\pi\Gamma(s+g)}\left(1-\tanh^2\frac{r}{2}\right)^{(s+g)/2} \times {}_2F_1\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}+g; s+g; 1-\tanh^2\frac{r}{2}\right)\,. \tag{84}$$

HILFSSATZ 6. *Die Funktion* $Q_{(s+g)/2,g/2}(r)+1/(2\pi)\log r$ *ist bei* $r=0$ *stetig.*

BEWEIS. Wie bei Fay [13], Seite 148, (17).

Man definiere den nichteuklidischen Abstand $r(w, z)$ durch (3). Mit $w, z\in \mathfrak{Z}(1)$ setze man

$$\begin{aligned} G(q, g, w, z, s) &= \sum_{N\in \mathbf{M}(q)} j_N^{-1}(g, z)\left(\frac{w-N\langle\bar{z}\rangle}{N\langle z\rangle-\bar{w}}\right)^{g/2} Q_{(g+s)/2,g/2}(r(w, N\langle z\rangle)) \\ &= \sum_{N\in \mathbf{M}(q)} \left(\frac{w-\bar{z}}{z-\bar{w}}\right)^{g/2} Q_{(g+s)/2,g/2}(r(w, z))\,|\,[N_z, g]\,. \end{aligned} \tag{85}$$

HILFSSATZ 7. *Die Reihe* (85) *konvergiert für* $\operatorname{Re} s>2-g$ *absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s dar. Bezüglich z liegt sie in* $\mathfrak{H}(q, g, s)$

und bezüglich w in $\mathfrak{H}(q, -g, s+2g)$. Es gilt

$$G(q, g, w, z, s) = \overline{G(q, g, z, w, \bar{s})} \,. \tag{86}$$

Für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Max}(2-g, |g|-g)$ *hat man*

$$(-\tilde{\Delta}_g - \lambda(g, s))^{-1} f(w) = \int_{\mathfrak{F}(q)} \overline{G(q, g, w, z, \bar{s})} f(z) d\omega_z ; \; (f(z) \in \mathfrak{H}(q, g)) \,. \tag{87}$$

Daher ist also $G(q, g, w, z, s)$ der Resolventenkern von $-\tilde{\Delta}_g$.

BEWEIS. Die Konvergenzaussage ist klar; daß $G(q, g, w, z, s)$ bezüglich z in $\mathfrak{B}(q, g, s)$ liegt, folgt aus Fay [13], Seite 158, theorem 2.1 oder aus Roelcke [39], Teil II, § 7. Daß $G(q, g, w, z, s)$ bezüglich z sogar in $\mathfrak{H}(q, g, s)$ liegt, ersieht man aus Roelcke [39], Teil II, Seite 268, Lemma 7.1. Die Aussage (86) bekommt man aus Fay [13], Seite 159; (48). Mittels (86) lassen sich alle Aussagen bezüglich w auf solche bezüglich z zurückführen. (87) folgt aus Roelcke [39], Teil II, Seite 270, Satz 7.1. Hilfssatz 7 ist bewiesen.

SATZ 6. *Es sei $a \in \boldsymbol{C}$ eine feste Zahl mit* $\operatorname{Re} a > 2 - g$ *und* $\lambda(g, a) \neq \lambda_\iota$ $(\iota = -\tau(q, g), 1 - \tau(q, g), \cdots)$. *Die Differenz*

$$\begin{aligned} &G(q, g, w, z, s) - G(q, g, w, z, a) \\ &\quad = Y_1(q, g, w, z, a, s) + Y_2(q, g, w, z, a, s) + Y_3(q, g, w, z, a, s) \end{aligned} \tag{88}$$

ist für $(w, z) \in \mathfrak{Z}(1) \times \mathfrak{Z}(1)$ stetig.

Sie läßt sich bezüglich z nach Eigenwerten und Eigenpaketen des Operators $-\tilde{\Delta}_g$ entwickeln. Dabei beschreiben

$$Y_1(q, g, w, z, a, s) = \sum_{\iota=-\tau(q,g)}^{0} J_\iota(q, g, w, z) \left(\frac{1}{\lambda_\iota - \lambda(g, s)} - \frac{1}{\lambda_\iota - \lambda(g, a)} \right) , \tag{89}$$

$$Y_2(q, g, w, z, a, s) = \sum_{\iota=1}^{\infty} J_\iota(q, g, w, z) \left(\frac{1}{\lambda_\iota - \lambda(g, s)} - \frac{1}{\lambda_\iota - \lambda(g, a)} \right) \tag{90}$$

den Anteil des diskreten Spektrums von $-\tilde{\Delta}_g$, $Y_3(q, g, w, z, a, s)$ den des kontinuierlichen Spektrums. $J_\iota(q, g, w, z)$ ist der reproduzierende Kern des Raumes $\hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda_\iota)$, d.h., es gilt:

$$\begin{aligned} f(w) = \int_{\mathfrak{F}(q)} \overline{J_\iota(q, g, w, z)} f(z) d\omega_z (f(z) \in \hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda_\iota)) \\ (\iota = -\tau(q, g), 1 - \tau(q, g), \cdots) \,. \end{aligned} \tag{91}$$

Die Reihen (89), (90) *konvergieren für alle $s \in \boldsymbol{C}$ mit Ausnahme der Nullstellen der Nenner. $Y_1(q, g, w, z, a, s)$ ist eine meromorphe Funktion für $s \in \boldsymbol{C}$, welche unter der Substitution $s \to 2 - 2g - s$ invariant bleibt. Die Pole liegen auf der reellen Achse im Intervall* $[1 - g + ||g| - 1|,$

$1-g-||g|-1|]$, *symmetrisch zum Punkt* $1-g$. *Der Pol bei* $s=1-g$ *besitzt zweite Ordnung, alle anderen Pole sind von erster Ordnung.* $Y_2(q, g, w, z, a, s)$ *ist eine meromorphe Funktion für* $s \in \boldsymbol{C}$, *welche unter der Substitution* $s \to 2-2g-s$ *invariant bleibt. Die Polstellen sind nicht reell. Sie liegen symmetrisch zum Punkt* $1-g$ *auf der Achse* $\operatorname{Re} s = 1-g$.

Die Funktion $Y_3(q, g, w, z, a, s)$ *ist meromorph für* $s \in \boldsymbol{C}$. *In* $\mathfrak{h}(g) - \{1-g\}$ *ist sie holomorph. Bei* $s=1-g$ *liegt ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum* $(1/2)C(q, g, w, z, 1-g)$, *wobei*

$$C(q, g, w, z, s) = \frac{1}{2}\sum_{\iota=1}^{p(q)} \left(\overline{E_{R_\iota}(q, g, w, 2-2g-\bar{s})} E_{R_\iota}(q, g, z, s) + \overline{E_{R_\iota}(q, g, w, \bar{s})} E_{R_\iota}(q, g, z, 2-2g-s)\right) \tag{92}$$

gesetzt wurde. Ferner ist

$$Y_3(q, g, w, z, a, s) - Y_3(q, g, w, z, a, 2-2g-s) = \frac{C(q, g, w, z, s)}{s+g-1}\,. \tag{93}$$

Ist $w \neq N\langle z\rangle$ $(N \in \mathrm{M}(q))$ *und* s *keine Polstelle, so sind* $Y_\nu(q, g, w, z, a, s)$ *reell analytisch in* $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$, x, y $(\nu = 1, 2, 3)$; *ferner gilt*

$$Y_\nu(q, g, w, z, a, s) = \overline{Y_\nu(q, g, z, w, \bar{a}, \bar{s})} \quad (\nu = 1, 2, 3)\,, \tag{94}$$

$$C(q, g, w, z, s) = \overline{C(q, g, z, w, \bar{s})}\,, \tag{95}$$

$$J_\iota(q, g, w, z) = \overline{J_\iota(q, g, z, w)} \quad (\iota = -\tau(q, g), 1-\tau(q, g), \cdots)\,. \tag{96}$$

BEWEIS. Für $g \equiv 0$ steht fast alles bei Hejhal [18], chapter 7, §3, insbesondere Seite 250, theorem 3.5. Diese Überlegungen lassen sich wörtlich auf den Fall beliebiger $g \in \boldsymbol{Z}$ übertragen. Wir müssen uns nur zusätzlich das Folgende überlegen. Statt der $J_\iota(q, g, w, z)$ treten bei Hejhal [18], Seite 250, theorem 3.5 zunächst Ausdrücke der Art $\overline{l_\kappa(w)} l_\kappa(z)$ auf, mit $l_\kappa \in \hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda_\iota)$. Nun sei λ_ι ein μ_ι-facher Eigenwert. Dann ist

$$J_\iota(q, g, w, z) = \sum_{\kappa=1}^{\mu_\iota} \overline{l_\kappa(w)} l_\kappa(z) \tag{97}$$

der reproduzierende Kern von $\hat{\mathfrak{H}}(q, g, \lambda_\iota)$. So kommt man zu den Formeln (89), (90). Aus (97) ergibt sich (96).

Aus Hejhal folgt zunächst nur, daß $Y_3(q, g, w, a, s)$ in $\operatorname{Re} s \geqq 1-g$ holomorph ist, außer bei $s = 1-g$. Dort liegt ein Pol erster Ordnung mit dem oben angegebenen Residuum. Daß $Y_3(q, g, w, z, a, s)$ sogar in $\mathfrak{h}(g) - \{1-g\}$ holomorph ist, folgt mittels (92), (93) aus Satz 5. Satz 6 ist bewiesen.

Aus Satz 6 ersehen wir noch, daß der Resolventenkern der Funktionalgleichung

$$(98)\qquad G(q,\,g,\,w,\,z,\,s)-G(q,\,g,\,w,\,z,\,2-2g-s)=\frac{C(q,\,g,\,w,\,z,\,s)}{s+g-1}$$

genügt.

Es sei $\mathfrak{a}(a)$ durch Definition 6, (51) erklärt.

HILFSSATZ 8. *Es sei*

$$(99)\qquad X(q,\,g,\,w,\,z,\,s)=\sum_{\iota=-\tau(q,g)}^{-1}\frac{J_\iota(q,\,g,\,w,\,z)}{(s-\sigma_\iota^+)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_\iota}}+\frac{4J_0(q,\,g,\,w,\,z)}{(s+g-1)^2}$$
$$+\frac{C(q,\,g,\,w,\,,\,z,\,1-g)}{2(s+g-1)}\,.$$

Dann ist

$$(100)\qquad G(q,\,g,\,w,\,z,\,s)=X(q,\,g,\,w,\,z,\,s)+H(q,\,g,\,w,\,z,\,s)\,.$$

Dabei ist $H(q, g, w, z, s)$ meromorph in der s-Ebene. In $\mathfrak{a}(g)$ ist es holomorph.

BEWEIS. Man benutze Satz 6.

Es seien $R\in \mathrm{M}(1)$, $\mathrm{Re}\,s>2-g$. Aus (85) folgt

$$(101)\qquad G_{R_z}(q,\,g,\,w,\,z,\,s)$$
$$=\sum_{N\in\mathrm{M}(q)} j_{NR}^{-1}(g,\,z)\Big(\frac{w-(NR)\langle\bar z\rangle}{(NR)\langle z\rangle-\bar w}\Big)^{g/2}Q_{(g+s)/2,g/2}(r(w,\,(NR)\langle z\rangle))$$
$$=\sum_{N\in\mathrm{M}(q)}\Big(\frac{w-\bar z}{z-\bar w}\Big)^{g/2}Q_{(g+s)/2,g/2}(r(w,\,z))\,|\,[NR_z,\,g]\,.$$

Wir setzen wieder $w=u+iv$; $u, v\in \boldsymbol{R}$; $v>0$. Wir wollen $G_{R_z}(q, g, w, z, s)$ in eine Fourierreihe entwickeln. Da $G_{R_z}(q, g, w, z, s)$ bei $(NR)\langle z\rangle=w$ $(N\in\mathrm{M}(q))$ eine Singularität besitzt, müssen wir

$$(102)\qquad y_{NR}<v\quad (N\in\mathrm{M}(q))$$

voraussetzen. Zunächst führen wir gewisse Poincaré'sche Reihen ein, die bei der Fourierentwicklung auftreten.

Entsprechend (83) definieren wir die konfluente hypergeometrische Reihe

$$(103)\qquad {}_1F_1(\alpha;\,\beta;\,z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_\nu}{(\beta)_\nu\nu!}z^\nu=\Gamma(\beta)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_\nu}{\Gamma(\beta+\nu)\nu!}z^\nu\,.$$

HILFSSATZ 9. *Als Funktion von α, β, z ist $(1/\Gamma(\beta))\,{}_1F_1(\alpha;\beta;z)$ holomorph im $\boldsymbol{C}^3$.*

BEWEIS. Klar.

Wir setzen

$$(104)\quad f_1(g,\, z,\, s)=e^{-z/2}{}_1F_1\Big(\frac{s}{2},\, s+g,\, z\Big);\ f_{-1}(g,\, z,\, s)=e^{-z/2}{}_1F_1\Big(\frac{s}{2}+g,\, s+g,\, z\Big)\,.$$

Dann sind

$$(105)\qquad M_{\varepsilon g/2,\,(g+s-1)/2}(z) = z^{(g+s)/2}f_\varepsilon(g,\, z,\, s)\quad (\varepsilon = \pm 1)$$

diejenigen Lösungen der Whittaker'schen Differentialgleichung, welche etwa bei Buchholz [2], Seite 11 oder Whittaker-Watson [57], Seite 346 unten eingeführt werden. Man setze

$$(106)\quad U_R(q,\, g,\, n,\, z,\, s) = \sum_{N\in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} j_{NR}^{-1}(g,\, z)M_{g\,\mathrm{sign}\, n/2,\,(g+s-1)/2}\Big(\frac{4\pi|n|}{q}y_{NR}\Big)e^{2\pi i n x_{NR}/q}$$

$$= \sum_{N\in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} M_{g\,\mathrm{sign}\, n/2,\,(g+s-1)/2}\Big(\frac{4\pi|n|}{q}y\Big)e^{2\pi i n x/q}\,|[NR,\, g]$$

$$(n\in \boldsymbol{Z}-0;\ R\in \mathrm{M}(1))$$

Aus (104), (105) ersieht man

$$(107)\qquad M_{\pm g/2,\,(g+s-1)/2}(z) = 0(|z|^{(g+\mathrm{Re}\, s)/2})\quad (|z|\to 0)\,.$$

Daher konvergieren die Reihen (106) für $\mathrm{Re}\, s > 2-g$ absolut und sind in s holomorph. Bezüglich z stellen sie Funktionen aus $\mathfrak{B}(q,\, g,\, s)$ dar. Weiter setzen wir für $R\in \mathrm{M}(1)$:

$$(108)\quad U_R^*(q,\, g,\, n,\, z,\, s) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)}{4\pi|n|\Gamma(s+g)}U_R(q,\, g,\, n,\, z,\, s) & (n>0) \\[2ex] \dfrac{\Gamma\big(\frac{s}{2}+g\big)}{4\pi|n|\Gamma(s+g)}U_R(q,\, g,\, n,\, z,\, s) & (n<0) \end{matrix}\right\}.$$

HILFSSATZ 10. *Unter der Voraussetzung* (102) *gilt die Fourierentwicklung*

$$(109)\quad G_{R_z}(q,\, g,\, w,\, z,\, s) = \frac{1}{q(s+g-1)}v^{1-(g+s)/2}E_R(q,\, g,\, z,\, s)$$

$$+ \sum_{\substack{n\neq -\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} U_R^*(q,\, g,\, n,\, z,\, s)W_{g\,\mathrm{sign}\, n/2,\,(g+s-1)/2}\Big(\frac{4\pi|n|}{q}v\Big)e^{-2\pi i n u/q}\,.$$

BEWEIS. Fay [13], Seite 173, theorem 3.1. Man beachte, daß Fay die Spitzenbreite auf 1 normiert hat. Unsere Spitzenbreite ist q !

SATZ 7. *Es sei $n\in \boldsymbol{Z}-0$. Die Funktionen $U(g,\, n,\, z,\, s)$ und $U^*(q,\, g,\, n,\, z,\, s)$ lassen sich meromorph auf die s-Ebene fortsetzen, Polstellen von $U^*(q,\, g,\, n,\, z,\, s)$ liegen höchstens dort, wo $G(q,\, g,\, w,\, z,\, s)$ Pole hat, und die* *jeweiligen Polordnungen von* $U^*(q, g, n, z, s)$ *sind nicht größer als die Polordnungen von* $G(q, g, w, z, s)$. *Ist* s *keine Polstelle, so gilt* $U^*(q, g, n, z, s)$, $U(q, g, n, z, s) \in \mathfrak{B}(q, g, s)$. *Bezeichnet* $\mathfrak{K} \subset C$ *ein Kompaktum, das keine Polstellen enthält, so gilt für* $s \in \mathfrak{K}$ *und festes* $z \in \mathfrak{Z}(1)$ *die Abschätzung*

$$(110) \qquad U_R^*(q, g, n, z, s),\ U_R(q, g, n, z, s) = 0(e^{2\pi|n|v^*/q}) \quad (|n| \to \infty)$$

für alle v^* *mit*

$$(111) \qquad y_{NR} < v^* \quad (N \in \mathrm{M}(q)) .$$

Beweis. Läuft N über $\mathrm{M}_\infty(q) \backslash \mathrm{M}(q)$, so strebt y_{NR} gegen 0. Ist also (111) erfüllt, so gibt es ein v mit $y_{NR} < v < v^*$ $(N \in \mathrm{M}(q))$. Aus (109) folgt

$$(112) \qquad U_R^*(q, g, n, z, s) \\ = \left(W_{g\,\mathrm{sign}\,n/2,\,(g+s-1)/2}\left(\frac{4\pi|n|v}{q}\right)\right)^{-1} \frac{1}{q}\int_0^q G_{R_z}(q, g, w, z, s) e^{2\pi i n u/q} du .$$

Nun folgen alle Aussagen aus (26), Satz 6, (108), (112). Satz 7 ist bewiesen.

Im folgenden seien die $b_n(\cdots)$ durch (37), (38), (39) erklärt.

Satz 8. *Es seien* $k, g \in \boldsymbol{Z}$; $w, z \in \mathfrak{Z}(1)$; $s_1, s_2 \in \boldsymbol{C}$; $R \in \mathrm{M}(1)$. *Unter der Voraussetzung* (102) *bilde man die Reihe*

$$(113) \qquad T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = \frac{(2\pi/q)^{g-k+s_2-s_1}}{q(s_1 + k - 1)} v^{1-(k+s_1)/2} E_R(q, g, z, s_2)$$
$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right)}{4\pi\Gamma(k + s_1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-g+s_1-s_2)/2-1} U_R(q, g, n, z, s_2)\, W_{k/2,\,(k+s_1-1)/2}\left(\frac{4\pi n v}{q}\right) e^{-2\pi i n u/q}$$
$$+ \frac{\Gamma\left(k + \frac{s_1}{2}\right)}{4\pi\Gamma(k + s_1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-g+s_1-s_2)/2-1} U_R(q, g, -n, z, s_2) W_{-k/2,\,(k+s_1-1)/2}\left(\frac{4\pi n v}{q}\right) e^{2\pi i n u/q}$$
$$= v^{(k+s_1)/2} e^{\pi i k/2} \frac{\Gamma\left(k + \frac{s_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right)}{4\pi\Gamma(k + s_1)} \left(\frac{\pi}{q}\right)^{(g-k+s_2-s_1)/2} 2^{g+s_2}$$
$$\times \left\{\left(\frac{\pi}{q}\right)^{(g-k+s_2-s_1)/2} b_0(q, k, v, s_1) E_R(q, g, z, s_2) + \left(\frac{4\pi}{q}\right)^{-(g+s_2)/2}\right.$$
$$\left. \times \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} |n|^{-(g+s_2)/2} b_n(q, k, v, s_1) U_R(q, g, n, z, s_2) e^{-2\pi i n u/q}\right\} .$$

Es sei $s_1 \neq 1 - k$, s_1 *keine Polstelle von* $\Gamma(s_1/2)$ *oder* $\Gamma(k + s_1/2)$; s_2 *keine Polstelle der* $U_R(q, g, n, z, s_2)$ $(n \neq 0)$ *oder von* $E_R(q, g, z, s_2)$. *Dann ist die Reihe* (113) *absolut konvergent und stellt eine holomorphe Funktion in*

s_1, s_2 dar. Bezüglich z liegt sie in $\mathfrak{B}(q, g, s_2)$. Sie ist in u und v reell-analytisch und genügt der Differentialgleichung

$$(114)\qquad (-\Delta_{-k} - \lambda(k, s_1))T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = 0 .$$

Für $(s_1, s_2) \in \boldsymbol{C}^2$ ist $T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ eine meromorphe Funktion in s_1, s_2. Die Pole bezüglich s_1 werden durch die Pole von $\Gamma(s_1/2)$, $\Gamma(k+s_1/2)$ und durch den Pol bei $s = 1 - k$ gegeben, der durch den ersten Term hineinkommt. Die Pole bezüglich s_2 werden durch die Pole von $E_R(q, g, z, s_2)$ und $U_R(q, g, n, z, s_2)$ $(n \neq 0)$ gegeben.

Beweis. Man wähle s_1, s_2 aus Kompakta, die Polstellen vermeiden. Dann folgt die absolute Konvergenz aus (26), (110), indem man $y_{NR} < v^* < v$ $(N \in \mathrm{M}(q))$ wählt. Daraus folgt, daß die Funktion in $\boldsymbol{C}^2$ meromorph ist, mit den angegebenen Polstellen. Wie in den Beweisen von Hilfssatz 7 und Satz 6 sieht man, daß $T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ bezüglich z in $\mathfrak{B}(q, g, s_2)$ liegt. Entsprechend Hejhal [18] zeigt man, daß $T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar von u und v abhängt, und daß man unter der Summe differenzieren darf. Dann gilt (114), weil die Aussage für jeden Summanden richtig ist. Wegen (114) und Anmerkung 1 ist $T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ reell analytisch in u und v. Satz 8 ist bewiesen.

Aus (108), (109), (113) folgt

$$(115)\qquad T_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s) = G_{R_z}(q, g, w, z, s) \quad (R \in \mathrm{M}(1)) .$$

4. **Poincare'sche Reihen.** Es seien Ψ eine Kongruenzgruppe, $k, g \in \boldsymbol{Z}$, $w, z \in \mathfrak{Z}(1)$; $s_1, s_2 \in \boldsymbol{C}$. Nach Christian [4], Seite 350, theorem 6, konvergiert die Reihe

$$(116)\quad K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2) = \sum_{N \in \Psi} (-\bar{w} + N\langle z\rangle)^{-1}(N\{z\})^{-g}|-\bar{w} + N\langle z\rangle|^{-s_1}|N\{z\}|^{-s_2}$$

für $\mathrm{Re}\, s_1 > 1 - k$, $\mathrm{Re}\, s_2 > 2 - g$ absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s_1, s_2 dar. Es gilt

$$(117)\quad K(\Psi, k, g, w, N\langle z\rangle, s_1, s_2) = (N\{s\})^{g}|N\{z\}|^{s_2}K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2) \quad (N \in \Psi) .$$

Wegen (13) genügt es, zunächst den Fall $\Psi = \mathrm{M}(q)$ zu betrachten. Wir setzen

$$(118)\qquad \check{K}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2}y^{(g+s_2)/2}K(\mathrm{M}(q), k, g, w, z, s_1, s_2) .$$

Für $R \in \mathrm{M}(1)$ gilt dann

$$(119)\quad \check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \sum_{N \in \mathrm{M}(q)} j_{NR}^{-1}(g, z)(-\bar{w} + (NR)\langle z\rangle)^{-k}|-\bar{w} + (NR)\langle z\rangle|^{-s_1}y_{NR}^{(g+s_2)/2} .$$

Also

$$(120)\quad \check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \cdot \sum_{N \in M_\infty(q)\backslash M(q)} j_{NR}^{-1}(g, z) y_{NR}^{(g+s_2)/2} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\bar{w} + (NR)\langle z\rangle + qn)^{-k} |-\bar{w} + (NR)\langle z\rangle + qn|^{-s_1} .$$

Auf die innere Summe wenden wir (40) an. Es folgt

$$(121)\quad \check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{N \in M_\infty(q)\backslash M(q)} b_n(q, k, v+y_{NR}, s_1) j_{NR}^{-1}(g, z) y_{NR}^{(g+s_2)/2} e^{2\pi i n(x_{NR}-u)/q} .$$

Daß die obigen Umformungen erlaubt sind, ersieht man z. B. aus Christian [6], Seite 404, Satz 5.47.

Wir zeigen:

$$(122)\quad b_n^{(\nu)}(q, k, y, s) = 0(e^{-2\pi(y-\delta)|n|/q}) \quad (|n| \to \infty) , \quad (0 < \delta < y) ;$$

dabei bezeichnet (ν) die ν-te Ableitung. Für $\nu = 0$ folgt das aus (26), (37), (38). Daraus bekommt man die Abschätzung für beliebige ν, indem man die Cauchysche Integralformel für höhere Ableitungen anwendet, und über einen kleinen Kreis um y integriert.

HILFSSATZ 11. *Die Doppelsumme* (121) *konvergiert für* $s_1 \in C$ *und* $\operatorname{Re} s_2 > 2 - g$ *absolut. Sie ist in* s_2 *holomorph. Bezüglich* s_1 *können höchstens dort Pole auftreten, wo* $b_0(q, k, v, s_1)$ *Pole besitzt.*

BEWEIS. Man benutze (122) und die Tatsache, daß $b_n(q, k, v, s_1)$ $(n \neq 0)$ ganze Funktionen in s_1 sind.

Um die Reihe $\check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ auch bezüglich s_2 meromorph auf C fortzusetzen, stellen wir einen Zusammenhang mit $T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ her. Da diese Reihe nur unter der Voraussetzung (102) definiert ist, setzen wir dieses voraus. Wir bestimmen Zahlen $\check{v}$, $\hat{v}$ mit

$$(123)\quad y_{NR} < \check{v} < \hat{v} < v \quad (N \in M(q)) .$$

HILFSSATZ 12. *Es sei* $m \in 0 \cup N$, $\varepsilon = \pm 1$, $t > 0$. *Dann besteht eine Relation*

$$(124)\quad 1 = \sum_{\iota=0}^{m} \alpha_\iota^\varepsilon(g, s_2) t^\iota f_\varepsilon(g, t, s_2 + 2\iota) + t^{m+1} \Phi_m^\varepsilon(g, t, s_2)$$

mit

$$(125)\quad \alpha_0^\varepsilon(g, s_2) = 1 .$$

Dabei sind $\alpha_\iota^\varepsilon(g, s_2)$ $(\iota = 0, \cdots, m)$, $\Phi_m^\varepsilon(g, t, s_2)$ *für alle* $s_2 \in C$ *meromorph und reellanalytisch in* t. *Für* $t \to 0$ *bleibt* $\Phi_m^\varepsilon(g, t, s_2)$ *beschränkt. Schließlich gilt für* s_2 *in einem Kompaktum*

(126) $$\Phi^{\varepsilon}_{m}(g,\, t,\, s_2) = 0(e^{(1/2+\delta)t}) \quad (t \to \infty)\,, \quad (0 < \delta)\,.$$

BEWEIS. Die Taylors'sche Formel ergibt

(127) $$f_{\varepsilon}(g,\, t,\, s_2) = 1 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f_{\varepsilon}^{(\nu)}(g,\, 0,\, s_2)}{\nu!} t^{\nu} + t^{m+1} \Xi^{\varepsilon}_{m}(g,\, t,\, s_2)$$

mit

(128) $$\Xi^{\varepsilon}_{m}(g,\, t,\, s_2) = \frac{f_{\varepsilon}^{(m+1)}(g,\, \vartheta t,\, s_2)}{(m+1)!} \quad (0 < \vartheta < 1)\,.$$

Also

(129) $$1 = f_{\varepsilon}(g,\, t,\, s_2) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{f_{\varepsilon}^{(\nu)}(g,\, 0,\, s_2)}{\nu!} t^{\nu} - t^{m+1} \Xi^{\varepsilon}_{m}(g,\, t,\, s_2)\,.$$

Man substituiere $m \to m - \mu$, $s_2 \to s_2 + 2\mu$ und multipliziere mit t^{μ}. Es folgt

(130) $$t^{\mu} = t^{\mu} f_{\varepsilon}(g,\, t,\, s_2+2\mu) - \sum_{\nu=\mu+1}^{m} \frac{f_{\varepsilon}^{(\nu-\mu)}(g,\, 0,\, s_2+2\mu)}{(\nu-\mu)!} t^{\nu} - t^{m+1} \Xi^{\varepsilon}_{m-\mu}(g,\, t,\, s_2+2\mu)$$
$$(\mu = 0,\, 1,\, \cdots,\, m)\,.$$

In der Summe von (129) drücke man für $\nu = 1$ zunächst t durch (130) mit $\mu = 1$ aus. In der so entstehenden Summe drücke man t^2 durch (130) mit $\mu = 2$ aus. So fortfahrend erhält man (124), wobei $\Phi^{\varepsilon}_{m}(g, t, s_2)$ eine Summe von $\Xi^{\varepsilon}_{m-\mu}(g, t, s_2 + 2\mu)$ ist. Wegen Hilfssatz 9, (104) sind die $f_{\varepsilon}^{(\nu)}(g, 0, s_2)$ meromorph in s_2, also sind es auch die $\alpha^{\varepsilon}_{\iota}(g, s_2)$. Wegen Hilfssatz 9, (104) sind weiter die $f_{\varepsilon}(g, t, s_2+2\iota)$ meromorph in s_2. Wegen (124) ist auch $\Phi^{\varepsilon}_{m}(g, t, s_2)$ meromorph in s_2 und rellanalytisch in t. Aus der Herleitung folgt weiter, daß $\Phi^{\varepsilon}_{m}(g, t, s_2)$ für kleine t beschränkt bleibt. Die Formel (125) ergibt sich aus (129) und der nachfolgenden Konstruktion.

Nach Whittaker-Watson [57], Seite 346 unten, ist $M_{\beta,\gamma}(z)$ eine Linearkombination von $W_{-\beta,\gamma}(-z)$ und $W_{\beta,\gamma}(z)$. Vermöge (26) also

(131) $$M_{\beta,\gamma}(z) = 0(e^{(1/2+\delta)\mathrm{Re}\, z}) \quad (|z| \to \infty) \quad (0 < \delta)\,.$$

Hieraus und aus (105) schließen wir

(132) $$f_{\varepsilon}^{(\nu)}(g,\, z,\, s_2) = 0(e^{(1/2+\delta)\mathrm{Re}\, z}) \quad (|z| \to \infty) \quad (0 < \delta)$$

zunächst für $\nu = 0$. Wir wenden die Cauchysche Integralformel für höhere Ableitungen an, indem wir über einen kleinen Kreis um z integrieren. Dann folgt (132). Hieraus und aus (128) bekommen wir (126). Hilfssatz 12 ist bewiesen.

Die Taylor'sche Formel liefert weiter

(133) $$b_n(q, k, v+t, s_1) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{b_n^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!} t^\nu + t^{m+1} \Lambda_m(q, n, k, v, t, s_1)$$

mit

(134) $$\Lambda_m(q, n, k, v, t, s_1) = \frac{b_n^{(m+1)}(q, k, v+\vartheta t, s_1)}{(m+1)!} \quad (0 < \vartheta < 1)\,.$$

Aus (122), (123), (134) schließen wir

(135) $$\Lambda_m(q, n, k, v, t, s_1) = 0(e^{-2\pi\hat{v}|n|/q}) \quad (|n| \to \infty)\,.$$

HILFSSATZ 13. *Es seien* $m \in 0 \cup \boldsymbol{N}$; $n \in \boldsymbol{Z} - 0$, $t > 0$. *Dann gilt*

(136) $$b_n(q, k, v+t, s_1) = \sum_{\nu=0}^{m} \beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2) \times \left(\frac{4\pi|n|t}{q}\right)^\nu f_{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|t}{q}, s_2+2\nu\right) + t^{m+1}\gamma_m(q, n, k, g, v, t, s_1, s_2)$$

mit

(137) $$\beta_0(q, n, k, g, v, s_1, s_2) = b_n(q, k, v, s_1)\,.$$

Dabei sind $\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)$, $\gamma_m(q, n, k, g, v, t, s_1, s_2)$ *für* $s_1 \in \boldsymbol{C}$ *holomorph und für* $s_2 \in \boldsymbol{C}$ *meromorph. Sie sind reell analytisch in* v, t. *Für*

(138) $$t < \check{v} < \hat{v} < v$$

gelten die Abschätzungen

(139) $$\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2) = 0(e^{-2\pi\hat{v}|n|/q}) \quad (|n| \to \infty)\,,$$

(140) $$\gamma_m(q, n, k, g, v, t, s_1, s_2) = 0(e^{-2\pi(\hat{v}-\check{v})|n|/q}) \quad (|n| \to \infty)\,.$$

BEWEIS. Aus (124) folgt

(141) $$1 = \sum_{\iota=0}^{m} \alpha_\iota^\varepsilon(g, s_2)\left(\frac{4\pi|n|t}{q}\right)^\iota f_\varepsilon\left(g, \frac{4\pi|n|t}{q}, s_2+2\iota\right) + \left(\frac{4\pi|n|t}{q}\right)^{m+1} \Phi_m^\varepsilon\left(g, \frac{4\pi|n|t}{q}, s_2\right).$$

Andererseits liefert (133)

(142) $$\begin{aligned} b_n(q, k, v+t, s_1) &= \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-\nu} \frac{b_n^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!} \left(\frac{4\pi|n|t}{q}\right)^\nu + t^{m+1}\Lambda_m(q, n, k, v, t, s_1) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\iota=0}^{m-\nu} \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-\nu} \frac{b_n^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!} \alpha_\iota^{\operatorname{sign} n}(g, s_2+2\nu)\left(\frac{4\pi|n|t}{q}\right)^{\nu+\iota} \\ &\quad \times f_{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|t}{q}, s_2+2(\nu+\iota)\right) + t^{m+1}\gamma_m(q, n, k, v, t, s_1, s_2)\,, \end{aligned}$$

mit

$$(143)\quad \gamma_m(q, n, k, g, v, t, s_1, s_2) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{m+1-\nu} \frac{b_n^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!} \Phi_{m-\nu}^{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|t}{q}, s_2 + 2\nu\right) + \Lambda_m(q, n, k, v, t, s_1) .$$

Hieraus folgt leicht die Darstellung (136).

Die Aussage (137) ergibt sich aus (125) und (142). Wegen (37), (38) sind die $b_n^{(\nu)}(q, k, v, s_1)$ $(n \neq 0)$ ganze Funktionen in s_1. Nach Hilfssatz 12 sind die $\alpha_\zeta^{\operatorname{sign} n}(g, s_2 + 2\nu)$ meromorph für $s_2 \in \boldsymbol{C}$. Daraus folgen die entsprechenden Aussagen für die $\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)$. Aus der Gleichung (136) folgt dann, daß $\gamma_m(q, n, k, g, v, t, s_1, s_2)$ für $s_1 \in \boldsymbol{C}$ holomorph und für $s_2 \in \boldsymbol{C}$ meromorph ist. Die Abschätzung (139) ergibt sich aus (122). Weiter folgt (140) aus (122), (126), (135), (138). Hilfssatz 13 ist bewiesen.

HILFSSATZ 14. *Es gelte* (102); $s_1, s_2 \in \boldsymbol{C}$;

$$(144)\qquad \operatorname{Re} s_2 > -g - 2m .$$

Dann ist die Reihe

$$(145)\quad Z_{R_z}(q, m, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2}\left\{ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \sum_{N \in M_\infty(q)\backslash M(q)} \gamma_m(q, n, k, g, v, y_{NR}, s_1, s_2) j_{NR}^{-1}(g, z) \cdot y_{NR}^{(g+s_2+2m+2)/2} e^{2\pi i n(x_{NR}-u)/q} + \sum_{N \in M_\infty(q)\backslash M(q)} \Lambda_m(q, 0, k, v, y_{NR}, s_1) j_{NR}^{-1}(g, z) y_{NR}^{(g+s_2+2m+2)/2} \right\}$$

absolut konvergent. Sie ist meromorph für $s_1 \in \boldsymbol{C}$ *und in* s_2 *sowie reell-analytisch in* u, v, x, y.

BEWEIS. Wegen Hilfssatz 13 sind alle Summanden für $(s_1, s_2) \in \boldsymbol{C}^2$ meromorph und in u, v, x, y reell-analytisch. Man nehme (s_1, s_2) in einem Kompaktum, das Singularitäten vermeidet. Wegen (102) gibt es $\check{v}$, $\hat{v}$ mit (123). Vermöge (140) ist dann die Absolutreihe von (145) konvergent. Hilfssatz 14 ist bewiesen.

HILFSSATZ 15. *Es gelte* (102), (144); $R \in \mathrm{M}(1)$. *Dann ist*

$$(146)\quad \check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = \sum_{\nu=0}^{m} S_{\nu R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) + Z_{R_z}(q, m, k, g, w, z, s_1, s_2)$$

mit

$$(147)\quad S_{\nu R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$$
$$= v^{(k+s_1)/2}\cdot\Big\{\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)\Big(\frac{4\pi|n|}{q}\Big)^{-(g+s_2)/2}$$
$$\times U_R(q, g, n, z, s_2+2\nu)e^{-2\pi i n u/q}+\frac{b_0^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!}E_R(q, g, z, s_2+2\nu)\Big\}\ .$$

Die Funktionen $S_{\nu R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ sind für alle $(s_1, s_2)\in C^2$ meromorph und außerhalb von Singularitäten reell-analytisch in u, v, x, y. Es gilt

$$(148)\quad S_{0R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$$
$$= e^{-\pi i k/2}\frac{4\pi\Gamma(k+s_1)}{\Gamma\Big(k+\frac{s_1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s_1}{2}\Big)}\Big(\frac{q}{\pi}\Big)^{(g-k+s_2-s_1)/2}2^{-g-s_2}T_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$$
$$+\Big(1-\Big(\frac{\pi}{q}\Big)^{(g-k+s_2-s_1)/2}\Big)v^{(k+s_1)/2}b_0(q, k, v, s_1)E_R(q, g, z, s_2)\ .$$

BEWEIS. Zunächst sei $\operatorname{Re} s_2>2-g$. Aus (105), (106), (121), (133), (136) folgt

$$\check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)=\sum_{\nu=0}^{m}v^{(k+s_1)/2}\cdot\Big\{\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)\Big(\frac{4\pi|n|}{q}\Big)^{-(g+s_2)/2}$$
$$\times\sum_{N\in\mathbf{M}_\infty(q)\backslash\mathbf{M}(q)}j_{NR}^{-1}(g, z)\Big(\frac{4\pi|n|}{q}y_{NR}\Big)^{(g+s_2+2\nu)/2}f_{\operatorname{sign} n}\Big(g, \frac{4\pi|n|}{q}y_{NR}, s_2+2\nu\Big)e^{2\pi i n(x_{NR}-u)/q}$$
$$+\frac{b_0^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!}\sum_{N\in\mathbf{M}_\infty(q)\backslash\mathbf{M}(q)}j_{NR}^{-1}(g, z)y_{NR}^{(g+s_2+2\nu)/2}\Big\}+Z_{R_z}(q, m, k, g, w, z, s_1, s_2)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m}v^{(k+s_1)/2}\Big\{\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)\Big(\frac{4\pi|n|}{q}\Big)^{-(g+s_2)/2}$$
$$\times\sum_{N\in\mathbf{M}_\infty(q)\backslash\mathbf{M}(q)}j_{NR}^{-1}(g, z)M_{g\operatorname{sign} n/2, (g+s_2+2\nu-1)/2}\Big(\frac{4\pi|n|}{q}y_{NR}\Big)e^{2\pi i n(x_{NR}-u)/q}$$
$$+\frac{b_0^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!}E_R(q, g, z, s_2+2\nu)\Big\}+Z_{R_z}(q, m, k, g, w, z, s_1, s_2)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{m}v^{(k+s_1)/2}\Big\{\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\beta_\nu(q, n, k, g, v, s_1, s_2)\Big(\frac{4\pi|n|}{q}\Big)^{-(g+s_2)/2}\cdot U_R(q, g, n, z, s_2+2\nu)e^{-2\pi i n u/q}$$
$$+\frac{b_0^{(\nu)}(q, k, v, s_1)}{\nu!}E_R(q, g, z, s_2+2\nu)\Big\}+Z_{R_z}(q, m, k, g, w, z, s_1, s_2)\ .$$

Damit hat man (146), (147).

Nun gelte (123); weiter sei s_2 beliebig aus C. Die $U_R(q, g, n, z, s_2+2\nu)$ schätze man durch (110) ab mit $v^*=\check{v}$. Wegen (139) ist dann (147) absolut konvergent. Also sind die Funktionen $S_{\nu R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ für alle $(s_1, s_2)\in C^2$ meromorph und außerhalb von Singularitäten reell-analytisch in u, v, x, y. Aus (137), (147) folgt

$$(149) \quad S_{0R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \cdot \Big\{ b_0(q, k, v, s_1) E_R(q, g, z, s_2) + \left(\frac{4\pi}{q}\right)^{-(g+s_2)/2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} |n|^{-(g+s_2)/2} b_n(q, k, v, s_1) U_R(q, g, n, z, s_2) e^{-2\pi i n u/q} \Big\} .$$

Vergleich mit (113) liefert (148). Hilfssatz 15 ist bewiesen.

SATZ 9. *Die Summe $\check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ läßt sich als Funktion von s_1, s_2 meromorph auf den C^2 fortsetzen. Außerhalb der Singularitäten ist sie reell analytisch in u, v, x, y.*

BEWEIS. Zunächst gelte (102). Aus den Hilfssätzen 14, 15 folgt die Behauptung für $\operatorname{Re} s_2 > -g - 2m$. Dieses gilt für alle $m \in N$, also für alle $s_2 \in C$. Aus (7) folgt: Gilt die Meromorphie für ein $R \in \mathrm{M}(1)$, so auch für jedes andere. Setzt man also

$$(150) \qquad j_1(q) = \sup_{z \in \mathfrak{Z}(1)} \big(\inf_{R \in \mathrm{M}(1)} (\sup_{N \in \mathrm{M}(q)} y_{NR})\big) ,$$

so ist die Behauptung für

$$(151) \qquad v > j_1(q)$$

richtig. Jetzt sei $l \in N$. Man benutze (13) mit $\Phi^* = \mathrm{M}(ql)$, $\Phi = \mathrm{M}(q)$. Dann sieht man, daß $\check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ immer dann meromorph ist, wenn $\check{K}_{R_z}(ql, k, g, w, z, s_1, s_2)$ diese Eigenschaft hat. Setzt man also

$$(152) \qquad j_2(q) = \inf_{l \in N} j_1(ql) ,$$

so ist $\check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ immer dann meromorph, wenn

$$(153) \qquad v > j_2(q)$$

ist. Können wir noch

$$(154) \qquad j_2(q) = 0$$

zeigen, so ist Satz 9 bewiesen.

Es sei $\delta > 0$ und $\mathfrak{S}(\delta)$ der Streifen $0 < y < \delta$ der oberen Halbebene. Ist $\mathfrak{F}(1)$ der bekannte Fundamentalbereich von $\mathrm{M}(1)$, so gibt es nur endlich viele Restklassen $\mathrm{M}_\infty(1)\backslash\mathrm{M}(1)$, etwa $\mathrm{M}_\infty(1)R_1, \cdots, \mathrm{M}_\infty(1)R_\kappa$ mit $R_\iota\langle\mathfrak{F}(1)\rangle \not\subset \mathfrak{S}(\delta)$, $(\iota = 1, \cdots, \kappa)$.

Es sei

$$R_\iota = \begin{bmatrix} a_\iota & b_\iota \\ c_\iota & d_\iota \end{bmatrix} \quad (\iota = 1, \cdots, \kappa) .$$

Für genügend großes l kann man $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ so wählen, daß

$$(155) \qquad (cd) \not\equiv (c_\iota d_\iota) \bmod ql \quad (\iota = 1, \cdots, \kappa)$$

gilt. Dann ist

$$(156) \qquad \mathrm{M}_\infty(1)NR \neq \mathrm{M}_\infty(1)R_1, \cdots, \mathrm{M}_\infty(1)R_\kappa \quad (N \in \mathrm{M}(ql)) .$$

Somit

$$(157) \qquad (NR)\langle\mathfrak{F}(1)\rangle \subset \mathfrak{S}(\delta) \quad (N \in \mathrm{M}(ql)) .$$

Folglich $j_1(ql) < \delta$ für hinreichend großes l. Daraus folgt (154). Satz 9 ist bewiesen.

SATZ 10. *Es gelte* (102) *und* $k, g \in \boldsymbol{N}$. *Die Differenz*

$$(158) \qquad D_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = \check{K}_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) - S_{0R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$$

ist im Bereich

$$(159) \qquad \operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Min}(1 - k, -1) , \quad \operatorname{Re} s_2 > -g$$

holomorph. Ferner gilt

$$(160) \qquad D_{R_z}(q, k, g, w, z, 0, 0) = 0 \quad (k \geqq 2) .$$

BEWEIS. Aus (42), (106), (121), (149) folgt

$$(161) \qquad D_{R_z}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} d_n(q, k, g, v, y_{NR}, s_1, s_2) j_{NR}^{-1}(g, z) e^{2\pi i n(x_{NR} - u)/q}$$

mit

$$(162) \qquad d_0(q, k, g, v, y, s_1, s_2) = (b_0(q, k, v + y, s_1) - b_0(q, k, v, s_1)) y^{(g+s_2)/2} ,$$

$$(163) \qquad d_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2) = b_n(q, k, v + y, s_1) y^{(g+s_2)/2} - b_n(q, k, v, s_1)\left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-(g+s_2)/2} M_{g \operatorname{sign} n/2, (g+s_2-1)/2}\left(\frac{4\pi|n|}{q} y\right) \quad (n \neq 0) .$$

Die Formeln (105), (163) ergeben

$$(164) \qquad d_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2) = \Big\{(b_n(q, k, v + y, s_1)) - b_n(q, k, v, s_1)) + b_n(q, k, v, s_1)\Big(1 - f_{\operatorname{sign} n}\Big(g, \frac{4\pi|n|}{q} y, s_2\Big)\Big)\Big\} y^{(g+s_2)/2} \quad (n \neq 0) .$$

Wendet man auf die in (162), (164) auftretenden Differenzen den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so folgt

$$(165) \qquad d_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2) = c_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2) y^{(g+s_2+2)/2} \quad (n \in \boldsymbol{Z}) ,$$

wobei $c_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2)$ für $y \to 0$ beschränkt bleiben. (122), (132), (162), (164) liefern

$$(166)\qquad c_n(q, k, g, v, y, s_1, s_2) = 0(e^{-2\pi(\hat{v}-\check{v})|n|/q}) \quad (|n| \to \infty)$$

für $y < \check{v} < \hat{v} < v$. Vermöge (37), (38), (39), (104), sind die $b_n(q, k, v, s_1)$ und $f_{\pm 1}(g, z, s_2)$, also auch die $c_n(q, k, v, y, s_1, s_2)$ im Gebiet (159) holomorph. Wegen (165), (166) konvergiert die Reihe (161) im Gebiet (159) absolut. Sie ist daher holomorph in s_1 und s_2.

Jetzt sei $k \geqq 2$. Aus (38), (39) folgt $b_n(q, k, y, 0) = 0$ $(n \leqq 0)$, wegen (162), (163) also

$$(167)\qquad d_n(q, k, g, v, y, 0, s_2) = 0 \quad (n \leqq 0)\,.$$

Aus Fay [13], Seite 172, (70) folgt

$$(168)\qquad M_{g/2,(g-1)/2}(z) = W_{g/2,(g-1)/2}(z) = z^{g/2}e^{-z/2}\,.$$

Trägt man dieses in (37), (163) ein, so folgt

$$(169)\qquad d_n(p, k, g, v, y, 0, 0) = 0 \quad (n > 0)\,.$$

Die Aussagen (161), (167), (169) liefern (160). Satz 10 ist bewiesen.

ANMERKUNG 2. In dem Gebiet (159) haben $\check{K}(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ und $S_0(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ dieselben Singularitäten. Wegen (149) liegen die Singularitäten von $S_0(q, k, g, w, z, s_1, s_2)$ genau dort, wo $b_0(q, k, v, s_1)$, $E(q, g, z, s_2)$, $U(q, g, n, z, s_2)$ Pole haben. Über die Polstellen von $E(q, g, z, s_2)$ macht Satz 5 eine Aussage. Mittels (108) werden Aussagen über die Polstellen von $U(q, g, n, z, s_2)$ mit Aussagen über die Polstellen von $U^*(q, g, n, z, s_2)$ verknüpft. Hierüber machen Satz 6, Hilfssatz 8, Satz 7, eine Aussage.

Wir setzen wieder (102) voraus und betrachten den Fall $k = g$, $s_1 = s_2 = s$. Aus (115), (148) (158) folgt

$$(170)\qquad \check{K}_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s) = D_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s) + e^{-\pi i g/2}\frac{\pi\Gamma(g+s)}{\Gamma\left(g+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}2^{2-g-s}G_{R_z}(q, g, w, z, s)\,.$$

SATZ 11. *Es sei* $g \geqq 2$. *Dann hat die Funktion* $\check{K}(q, g, g, w, z, s, s)$ *in der Halbebene* $\operatorname{Re} s > 1 - g$ *nur bei* $s = \delta_\iota^+$ $(\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1)$ *Pole. Diese sind von erster Ordnung, und es gilt*

$$(171)\qquad \operatorname*{Res}_{s=\sigma_\iota^+}\check{K}(q, g, g, w, z, s, s) = \frac{(-i)^g\pi\Gamma(g+\sigma_\iota^+)2^{2-g-\sigma_\iota^+}}{\Gamma\left(g+\frac{\sigma_\iota^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma_\iota^+}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_\iota}}J_\iota(q, g, w, z) \qquad (\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1)\,.$$

Diese Pole rühren also von den exzeptionellen Eigenwerten von $-\tilde{\Delta}_g$ *her.*

Sie können daher nur für $g \equiv 0 \bmod 2$ *auftreten.* $J_\iota(q, g, w, z)$ *ist der reproduzierende Kern des Raumes* $\mathfrak{H}(q, g, \sigma_\iota^+)$. *Bei* $s=0$ *ist* $\check{K}(q, g, g, w, z, s, s)$ *holomorph. Es gilt*

$$J_{-\tau(q,g)}(q, g, w, z) = 2^{g-2}\frac{i^g}{\pi}(g-1)\check{K}(q, g, g, w, z, 0, 0)\,, \tag{172}$$

wobei $J_{-\tau(q,g)}(q, g, w, z)$ *den reproduzierenden Kern des Raumes* $\mathfrak{H}(q, g, 0)$ *bezeichnet.*

Für $g = 1$ *ist* $\check{K}(q, g, g, w, z, s, s)$ *in* $\operatorname{Re} s > 0$ *holomorph. Bei* $s = 0$ *liegt höchstens ein Pol erster Ordnung. Es gilt*

$$J_0(q, 1, w, z) = \frac{i}{4\pi}\operatorname*{Res}_{s=0}\check{K}(q, 1, 1, w, z, s, s)\,. \tag{173}$$

Dabei ist $J_0(q, 1, w, z)$ *der reproduzierende Kern des Raumes* $\mathfrak{H}(q, 1, 0)$.

BEWEIS. Zunächst gelte (102). Aus Hilfssatz 8 und (170) folgt

$$\begin{aligned}\check{K}_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s) &= Z_{R_z}(q, g, w, z, s)\\ &+ \frac{(-i)^g\pi\Gamma(g+s)}{\Gamma\left(g+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}2^{2-g-s}\Bigg(\sum_{\iota=-\tau(q,g)}^{-1}\frac{J_{\iota R_z}(q, g, w, z)}{(s-\sigma_\iota^+)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda_\iota}}\\ &+ \frac{4J_{0R_z}(q, g, w, z)}{(s+g-1)^2} + \frac{C_{R_z}(q, g, w, z, , 1-g)}{2(s+g-1)}\Bigg) \quad (R \in \mathrm{M}(1))\,.\end{aligned} \tag{174}$$

mit

$$\begin{aligned} &Z_{R_z}(q, g, w, z, s)\\ &= D_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s) + \frac{(-i)^g\pi\Gamma(g+s)}{\Gamma\left(g+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}2^{2-g-s}H_{R_z}(q, g, w, z, s)\,.\end{aligned} \tag{175}$$

Es sei $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda < 1/4$. Zur Abkürzung setzen wir

$$\sigma^+ = 1 - g + 2\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\,, \tag{176}$$

$$\omega(\sigma^+) = \frac{(-i)^g\pi\Gamma(g+\sigma^+)2^{2-g-\sigma^+}}{\Gamma\left(g+\frac{\sigma^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma^+}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}}\,. \tag{177}$$

Dabei ist die Wurzel positiv auszuziehen.

Es sei nun $g \geqq 2$. Wegen Hilfssatz 8 und Satz 10 ist $Z_{R_z}(q, g, w, z, s)$ in $\operatorname{Re} s > 1 - g$ holomorph, und es gilt

$$Z_{R_z}(q, g, w, z, 0) = 0\,. \tag{178}$$

Aus (35), (36), (174) folgt, daß $\check{K}_{R_z}(q, g, g, w, z, s, s)$ in $\operatorname{Re} s > 1 - g$ nur bei $s = \sigma_\iota^+$ $(\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1)$ Pole erster Ordnung mit dem Residuum

$$\omega(\sigma_\iota^+) J_{\iota R_z}(q, g, w, z) \quad (\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1) \tag{179}$$

besitzt. Es gilt $\sigma^{\pm}_{-\tau(q,g)} = 0$, $\lambda_{-\tau(q,g)} = (g/2)(1 - g/2)$, $\sqrt{1/4 - \lambda_{-\tau(q,g)}} = (g-1)/2$. In (174) lasse man s gegen 0 streben. Es folgt

$$J_{-\tau(q,g)R_z}(q, g, w, z) = 2^{g-2} \frac{i^g}{\pi} (g - 1) \check{K}_{R_z}(q, g, g, w, z, 0, 0) . \tag{180}$$

Für $g \geqq 2$ ist damit alles bewiesen, falls (102) gilt. Dieser Bedingung entledigen wir uns jetzt.

Wenn die vorher gemachten Aussagen für ein $R \in \mathrm{M}(1)$ gelten, so gelten sie wegen (7) für jedes $R \in \mathrm{M}(1)$. Alle Aussagen sind also unter der Voraussetzung (151) richtig. Es sei $l \in N$. Wir zeigen, daß alle Aussagen für $\mathrm{M}(q)$ gelten, wenn sie für $\mathrm{M}(ql)$ richtig sind. Aus (13) erhält man

$$\check{K}(q, g, g, w, z, s, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)} \check{K}_{N_z}(ql, g, g, w, z, s, s) . \tag{181}$$

Ist $\mathfrak{F}(q)$ ein Fundamentalbereich von $\mathrm{M}(q)$, so stellt

$$\mathfrak{F}(ql) = \bigcup_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)} N\langle \mathfrak{F}(q) \rangle \tag{182}$$

einen Fundamentalbereich von $\mathrm{M}(ql)$ dar. Wir betrachten zunächst den Punkt $s = 0$. Unter der Voraussetzung

$$v > j_1(ql) \tag{183}$$

ist die rechte Seite von (181) bei $s = 0$ holomorph, also auch die linke. Wendet man (180) für ql statt q an, folgt aus (181)

$$J^*(q, g, w, z) = 2^{g-2} \frac{i^g}{\pi} (g - 1) \check{K}(q, g, g, w, z, 0, 0) \tag{184}$$

mit

$$J^*(q, g, w, z) = \sum_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)} J_{-\tau(ql,g)N_z}(ql, g, w, z) . \tag{185}$$

Jetzt sei $f(z) \in \mathfrak{H}(q, g, 0) \subset \mathfrak{H}(ql, g, 0)$. Wegen (91) also

$$f(w) = \int_{\mathfrak{F}(ql)} \overline{J_{-\tau(ql,g)}(ql, g, w, z)} f(z) d\omega_z . \tag{186}$$

Wir benutzen (182) und $f_N(z) = f(z)$ $(N \in \mathrm{M}(q))$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)} \int_{N\langle \mathfrak{F}(q) \rangle} \overline{J_{-\tau(ql,g)}(ql, g, w, z)} f(z) d\omega_z \\ &= \int_{\mathfrak{F}(q)} \overline{\sum_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)}' J_{-\tau(ql,g)N_z}(ql, g, w, z)} f(z) d\omega_z . \end{aligned}$$

Wegen (185) also

$$f(w) = \int_{\mathfrak{F}(q)} \overline{J^*(q, g, w, z)} f(z) d\omega_z \,. \tag{187}$$

Daher ist $J^*(q, g, w, z)$ der reproduzierende Kern von $\mathfrak{H}(q, g, 0)$. Dieser ist eindeutig bestimmt. Also $J^*(q, g, w, z) = J_{-\tau(q,g)}(q, g, w, z)$. Somit gilt (172) unter der Voraussetzung (183).

Wir kommen nun zu den Polstellen bei σ_ι^+ $(\iota = -\rho(q, g), \cdots, -1)$. Beim Übergang von M$(q)$ zur kleineren Gruppe M(ql) können weitere exzeptionelle Eigenwerte und daher weitere σ^+ hereinkommen. Es sei also λ ein exzeptioneller Eigenwert zu M(ql) und σ^+ durch (176) erklärt. Aus (179) folgt

$$\operatorname*{Res}_{s=\sigma^+} \check{K}_{R_z}(ql, g, g, w, z, s, s) \equiv \omega(\sigma^+) \tilde{J}_{R_z}(ql, g, w, z) \,, \tag{188}$$

wobei $\tilde{J}(ql, g, w, z)$ der reproduzierende Kern von $\mathfrak{H}(ql, g, \sigma^+)$ ist. Aus (181), (188) schließt man

$$\operatorname*{Res}_{s=\sigma^+} \check{K}(q, g, g, w, z, s, s) = \omega(\sigma^+) \tilde{J}^*(q, g, w, z) \tag{189}$$

mit

$$\tilde{J}^*(q, g, w, z) = \sum_{N \in \mathrm{M}(ql) \backslash \mathrm{M}(q)} \tilde{J}_{N_z}(ql, g, w, z) \tag{190}$$

Durch die Rechnung, die von (186) zu (187) führt, schließen wir, daß $\tilde{J}^*(q, g, w, z)$ der reproduzierende Kern von $\mathfrak{H}(q, g, \sigma^+)$ ist. Ist λ kein exzeptioneller Eigenwert bzgl. M(q), so ist $\mathfrak{H}(q, g, \sigma^+) = 0$, also $\tilde{J}^*(q, g, w, z) = 0$. Dann ist $\check{K}(q, g, g, w, z, s, s)$ bei $s = \sigma^+$ holomorph. Ist aber $\lambda = \lambda_\iota$ ein exzeptioneller Eigenwert bezüglich M(q), so besagt (189), daß (171) für (183) richtig ist.

Alle Aussagen des Satzes für $g \geqq 2$ sind also für (183) richtig. Wegen (152), (154) folgt dann die Gültigkeit für beliebige $w, z \in \mathfrak{Z}(1)$.

Wir kommen zum Fall $g = 1$. Zunächst gelte wieder (102). Aus (31) folgt $-\tau(q, g) = 0$. Wegen (174) ist $\check{K}_{R_z}(q, 1, 1, w, z, s, s)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph. Vermöge Hilfssatz 8 und Satz 10 ist $Z_{R_z}(q, g, w, z, s)$ bei $s = 0$ holomorph. Wegen (174) kann $\check{K}_{R_z}(q, 1, 1, w, z, s, s)$ bei $s = 0$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben. Man multipliziere (174) mit s und lasse s gegen 0 streben. Es folgt

$$J_{0R_z}(q, 1, w, z) = \frac{i}{4\pi} \operatorname*{Res}_{s=0} \check{K}_{R_z}(q, 1, 1, w, z, s, s) \,. \tag{191}$$

Der Bedingung (102) entledigen wir uns wie früher. Satz 11 ist bewiesen.

SATZ 12. *Für jede Kongruenzgruppe Ψ ist $K(\Psi, k, g, w, z, s_1, s_2)$ in C^2 eine meromorphe Funktion von s_1, s_2, welche außerhalb der Singularitäten reell-analytisch in u, v, x, y ist.*

Es sei $g \geqq 2$. In der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1 - g$ ist $K(\Psi, g, g, w, z, s, s)$ für $g \equiv 1 \bmod 2$ holomorph; für $g \equiv 0 \bmod 2$ liegen Pole erster Ordnung bei

$$\sigma_\iota^+ = 1 - g + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_\iota} \quad (\iota = -\rho(\Psi, g), \cdots, -1)\,. \tag{192}$$

Dabei sind $\lambda_{-\rho(\Psi,g)}, \cdots, \lambda_{-1}$ die im Intervall $\langle 0, 1/4\rangle$ gelegenen exzeptionellen Eigenwerte von $-\widetilde{\Delta}_g$ bezüglich Ψ. Es gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Res}_{s=\sigma_\iota^+} K(\Psi, g, g, w, z, s, s) \\ &= \frac{(-i)^g \pi \Gamma(g + \sigma_\iota^+) 2^{2-g-\sigma_\iota^+}}{\Gamma\left(g + \frac{\sigma_\iota^+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma_\iota^+}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_\iota}} (vy)^{-(g+\sigma_\iota^+)/2} J_\iota(\Psi, g, w, z) \\ &\qquad\qquad (\iota = -\rho(\Psi, g), \cdots, -1)\,, \end{aligned} \tag{193}$$

dabei ist $J_\iota(\Psi, g, w, z)$ der reproduzierende Kern des Eigenraumes von λ_ι im Hilbertraum $\mathfrak{V}(\Psi, g)$.

Bei $s = 0$ ist $K(\Psi, g, g, w, z, s, s)$ holomorph. Es gilt

$$K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0) = (-1)^g \overline{K(\Psi, g, g, z, w, 0, 0)}\,; \tag{194}$$

ferner ist $K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0)$ bezüglich z eine klassische (holomorphe) Spitzenform zu Ψ vom Gewicht g. Jede klassische Spitzenform $F(z)$ zu Ψ vom Gewicht g genügt der Integralgleichung

$$F(z) = 2^{g-2} \frac{i^g}{\pi}(g - 1) \int_{\mathfrak{F}(\Psi)} K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0) v^g F(w) d\omega_w\,. \tag{195}$$

Dabei ist $\widetilde{\mathfrak{F}}(\Psi)$ ein Fundamentalbereich von Ψ.

Für $g = 1$ ist $K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph. Bei $s = 0$ liegt höchstens ein Pol erster Ordnung. Es gilt

$$\operatorname*{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s) = -\overline{\operatorname*{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, z, w, s, s)}\,; \tag{196}$$

ferner ist $\operatorname{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ bezüglich z eine klassische (holomorphe) Spitzenform zu Ψ vom Gewicht 1. Jede klassische Spitzenform $F(z)$ zu Ψ vom Gewicht 1 genügt der Integralgleichung

$$F(z) = \frac{i}{4\pi} \int_{\widetilde{\mathfrak{F}}(\Psi)} \operatorname*{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s) v F(w) d\omega_w\,. \tag{197}$$

BEWEIS. Aus (13) und den im Beweis von Satz 11 durchgeführten Überlegungen ersieht man, daß es genügt, den Fall $\Psi = \mathrm{M}(q)$ zu betrachten. Dann folgt alles, was vor Formel (194) steht, aus (118), Satz 9, Satz 11.

Hieraus ersieht man weiter, daß $K(\Psi, g, g, w, z, s, s)$ für $g \geqq 2$ bei $s=0$ holomorph ist und für $g=1$ bei $s=0$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Die Formeln (96), (172), (173) liefern (194), (196). Die Funktion $J_{-\tau(q,g)}(q, g, w, z)$ liegt bezüglich z in $\mathfrak{H}(q, g, 0)$. Wegen Hilfssatz 3, (118), (172), (173) ist $K(\Psi, g, g, w, z, 0, 0)$ $(g \geqq 2)$ bzw. $\operatorname{Res}_{s=0} K(\Psi, 1, 1, w, z, s, s)$ eine klassische Spitzenform zu Ψ vom Gewicht g.

Vermöge Hilfssatz 3 ist $F(z)$ genau dann eine klassische Spitzenform zu Ψ vom Gewicht g, wenn $f(z) = y^{g/2}F(z) \in \mathfrak{H}(q, g, 0)$ ist. Aus (91), (96), (172) (173) folgen (195), (197). Satz 12 ist bewiesen.

Im konvergenten Fall $g \geqq 3$ findet man die Formel (195) bei Fay [13], Seite 174, Corollary 3.2. Man siehe auch Christian [6], Seiten 414/415 Formeln (1426), (1429).

SATZ 13. *Die Funktion $\psi(t)$ sei auf der Halbgeraden $0 \leqq t$ beliebig oft (bis in den Punkt 0 hinein) differenzierbar. Weiter sei $n \in \boldsymbol{Z}$. Dann ist die Reihe*

$$(198) \qquad P(q, g, n, \psi(t), z, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q) \backslash \mathrm{M}(q)} j_N^{-1}(g, z)\psi(y_N) y_N^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x_N/q}$$

für $\operatorname{Re} s > 2-g$ *absolut konvergent und stellt eine holomorphe Funktion in s dar. Diese läßt sich meromorph auf die s-Ebene fortsetzen. Sind $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ zwei Funktionen mit der vorher genannten Eigenschaft, so ist die Differenz*

$$(199) \qquad \psi_2(0)P(q, g, n, \psi_1(t), z, s) - \psi_1(0)P(q, g, n, \psi_2(t), z, s) \\ = P(q, g, n, \psi_2(0)\psi_1(t) - \psi_1(0)\psi_2(t), z, s)$$

für $\operatorname{Re} s > -g$ *holomorph in s.*

BEWEIS. Da y_N gegen 0 strebt, wenn N über $\mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)$ läuft, konvergiert die Reihe (198) für $\operatorname{Re} s > 2-g$ absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s dar. Um die Reihe meromorph auf die s-Ebene fortzusetzen, nehmen wir zunächst $\psi(t)=1$. Die Funktion $P(q, g, 0, 1, z, s) = E(q, g, z, s)$ läßt sich nach §2 meromorph auf die s-Ebene fortsetzen.

Jetzt sei $n \neq 0$. Aus Hilfssatz 12 folgt

$$(200) \qquad P(q, g, n, 1, z, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} j_N^{-1}(g, z) y_N^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x_N/q} \\ = \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-(g+s)/2} \sum_{\iota=0}^{m} \alpha_\iota^{\operatorname{sign} n}(g, s) \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash\mathrm{M}(q)} j_N^{-1}(g, z)\left(\frac{4\pi|n|}{q} y_N\right)^{(g+s+2\iota)/2} \\ \times f_{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|}{q} y_N, s+2\iota\right) e^{2\pi i n x_N/q} + \Theta(q, g, n, m, z, s)\,;$$

dabei konvergiert

$$(201)\quad \Theta(q, g, n, m, z, s) = \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-(g+s)/2}$$
$$\times \sum_{N\in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} \Phi_m^{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|}{q}y_N, s\right) j_N^{-1}(g, z)\left(\frac{4\pi|n|}{q}y_N\right)^{(g+s+2m+2)/2} e^{2\pi i n x_N/q}$$

für $\operatorname{Re} s > -g - 2m$ absolut und ist dort meromorph in s. Aus (105), (106), (200) folgt

$$(202)\quad P(q, g, n, 1, z, s)$$
$$= \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{-(g+s)/2} \sum_{\iota=0}^{m} \alpha_\iota^{\operatorname{sign} n}(g, s) U(q, g, n, z, s+2\iota) + \Theta(q, g, n, m, z, s) .$$

Wegen Satz 7 ist $P(q, g, n, 1, z, s)$ für $\operatorname{Re} s > -g - 2m$ meromorph. Das gilt für jedes $m \in \boldsymbol{N}$. Daher ist $P(q, g, n, 1, z, s)$ für $s \in \boldsymbol{C}$ meromorph.

Die Taylorsche Formel liefert

$$(203)\qquad \psi(t) = \sum_{\iota=0}^{m} \frac{\psi^{(\iota)}(0)}{\iota!} t^\iota + \frac{\psi^{(m+1)}(\vartheta t)}{(m+1)!} t^{m+1} \quad (0 < \vartheta < 1) .$$

Also

$$(204)\qquad P(q, g, n, \psi(t), z, s) = \sum_{\iota=0}^{m} \frac{\psi^{(\iota)}(0)}{\iota!} P(q, g, n, 1, s + 2\iota)$$
$$+ \sum_{N\in \mathrm{M}_\infty(q)\backslash \mathrm{M}(q)} \frac{\psi^{(m+1)}(\vartheta y_N)}{(m+1)!} y_N^{(g+s+2m+2)/2} e^{2\pi i n x_N/q} .$$

Daraus folgt wieder, daß $P(q, g, n, \psi(t), z, s)$ für alle $s \in \boldsymbol{C}$ meromorph ist. Gilt $\psi(0) = 0$, so ist die rechte Seite von (204) für $s > -g$ holomorph. Also ist (199) für $\operatorname{Re} s > -g$ holomorph. Satz 13 ist bewiesen.

Man siehe hierzu auch Hejhal [18], chapter 7, § 4.

Anmerkung 3. In (198) können wir noch zulassen, daß $\psi(t)$ von s abhängt, Ist $\psi(t) = \psi(t, s)$ für $s \in \boldsymbol{C}$ meromorph, so kommen in die Reihen (198) noch die Pole von $\psi(t, s)$ hinein.

Offenbar gilt für $n \in \boldsymbol{Z} - 0$:

$$(205)\quad U(q, g, n, z, s) = \left(\frac{4\pi|n|}{q}\right)^{(g+s)/2} P\left(q, g, n, f_{\operatorname{sign} n}\left(g, \frac{4\pi|n|}{q}, s\right), z, s\right) .$$

Aus (121) folgt

$$(206)\quad \check{K}(q, k, g, w, z, s_1, s_2) = v^{(k+s_1)/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(q, g, n, b_n(q, k, v+t, s_1), z, s_2) e^{-2\pi i n u/q} .$$

5. Kloosterman'sche Summen.

Satz 14. *Es sei $\psi(t, s)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ holomorph in*

s. *Dann sind die Reihen* $P(q, g, n, \psi(t, s), z, s)$ $(n \neq 0)$ *für* $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ *holomorph.*

BEWEIS. Wegen Satz 13 und Anmerkung 3 genügt es, die Behauptung für $\psi(t, s) = 1$ zu beweisen. Wegen (13) können wir uns auf den Fall $q \geqq 3$ beschränken. Wir wollen

$$P(q, g, n, 1, z, s) = \sum_{N \in \mathrm{M}_\infty(q) \backslash \mathrm{M}(q)} j_N^{-1}(g, z) y_N^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x_N / q} \tag{207}$$

in eine Fourierreihe bezüglich x entwickeln. Es gilt

$$\begin{aligned} P(q, g, n, 1, z, s) &= y^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x/q} \\ &+ y^{(g+s)/2} \sum_{\substack{\langle c,d\rangle=1 \\ c\neq 0 \\ (cd)\equiv(01)\bmod q}} (cz+d)^{-g}|cz+d|^{-s} \exp\left(2\pi i \frac{n}{q} \operatorname{Re} \frac{az+b}{cz+d}\right). \end{aligned} \tag{208}$$

Dabei sind $a, b \in \boldsymbol{Z}$ so bestimmt, daß $ad - bc = 1$ und $(ab) \equiv (10) \bmod q$ ist. $\langle\ \rangle$ bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler. Es gilt

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz+d)}.$$

Mit $\nu \in \boldsymbol{Z}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q\nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + q\nu a \\ c & d + p\nu c \end{pmatrix}.$$

Man kann also zu d Vielfache von qc addieren, ohne a abändern zu müssen. Also

$$\begin{aligned} P(q, g, n, 1, z, s) &= y^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x/q} + y^{(g+s)/2} \sum_{\substack{\langle c,d\rangle=1 \\ c\neq 0 \\ (cd)\equiv(01)\bmod q \\ 0\leqq d<q|c|}} e^{2\pi i n a/(qc)} (qc)^{-g-s} \\ &\times \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\pi i \frac{n}{(qc)^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\left(\frac{z}{q} + \frac{d}{qc} + \nu\right)}\right) \\ &\times \left(\frac{z}{q} + \frac{d}{qc} + \nu\right)^{-g} \left|\frac{z}{q} + \frac{d}{qc} + \nu\right|^{-s}. \end{aligned} \tag{209}$$

Man setze $c = q\gamma$ $(\gamma \in \boldsymbol{Z})$ und

$$\Phi(\alpha, g, z, s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\pi i \alpha \operatorname{Re} \frac{1}{z+\nu}\right)(z+\nu)^{-g}|z+\nu|^{-s}. \tag{210}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} P(q, g, n, 1, z, s) &= y^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x/q} \\ &+ y^{(g+s)/2} \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma\neq 0}} (q^2\gamma)^{-g-s} \sum_{\substack{0\leqq d<q^2|\gamma| \\ d\equiv 1 \bmod q \\ \langle q\gamma, d\rangle=1}} \exp\left(2\pi i \frac{na}{q^2\gamma}\right) \Phi\left(\frac{n}{q^4\gamma^2}, g, \frac{z}{q} + \frac{d}{q^2\gamma}, s\right). \end{aligned} \tag{211}$$

Man entwickle $\Phi(\alpha, g, z, s)$ in eine Fourierreihe nach x:

$$\Phi(\alpha, g, z, s) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} f(\alpha, \lambda, g, y, s) e^{2\pi i \lambda x} , \tag{212}$$

und führe die Kloosterman'sche Summe

$$V_q^*(\gamma, n, \lambda) = \sum_{\substack{0 \leq d < q^2|\gamma| \\ d \equiv 1 \bmod \gamma \\ \langle q\gamma, d\rangle = 1}} \exp\left(2\pi i \frac{na + \lambda d}{q^2\gamma}\right) \tag{213}$$

ein. Dann folgt

$$\begin{aligned} P(q, g, n, 1, z, s) &= y^{(g+s)/2} e^{2\pi i n x/q} \\ &+ y^{(g+s)/2} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma\neq 0}}^{\infty} (q^2\gamma)^{-g-s} V_q^*(\gamma, n, \lambda) f\left(\frac{n}{q^4\gamma^2}, \lambda, g, \frac{y}{q}, s\right) e^{2\pi i \lambda x/q} . \end{aligned} \tag{214}$$

Aus Esterman [11], Seite 92, Formeln (39), (40), Salié [40], [41], A. Weil [56], folgt

$$|V_q^*(\gamma, n, \lambda)| \leqq d\left(\frac{q^2|\gamma|}{\langle \lambda, q^2|\gamma|\rangle}\right)^{3/4} \cdot (q^2|\gamma|)^{1/2} (\langle \lambda, q^2|\gamma|\rangle)^{1/2} .$$

Dabei ist $d(x)$ die Anzahl der positiven Teiler von x. Aus Huxley [61], Seite 8, (215) folgt $d(x) = 0(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Also

$$V_q^*(\gamma, n, \lambda) = 0(|\gamma|^{1/2+\varepsilon} |\lambda|^{1/2-\varepsilon}) \quad (|\gamma|, |\lambda| \to \infty) \tag{215}$$

Aus (212) folgt

$$f(\alpha, \lambda, g, y, s) = \int_0^1 \Phi(\alpha, g, z, s) e^{-2\pi i \lambda x} dx ,$$

wegen (210) also

$$f(\alpha, \lambda, g, y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\pi i\left(\lambda x + \alpha \operatorname{Re} \frac{1}{x+iy}\right)\right)(x+iy)^{-g} |x+iy|^{-s} dx . \tag{216}$$

Wegen $\alpha = n/(q^4\gamma^2)$, $n \neq 0$ ist $\alpha \in Q - \{0\}$.

Weiter ist $\lambda \in \boldsymbol{Z}$. Es folgt

$$\begin{aligned} &f(\alpha, \lambda, g, y, s) \\ &= e^{-2\pi\lambda y} \cdot \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} \exp\left(-2\pi i\left(\lambda z + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-2iy}\right)\right)\right) z^{-g-s/2} (z-2iy)^{-s/2} dz . \end{aligned} \tag{217}$$

Das in (217) auftrentende Integral schätzt man mittels der von Gundlach [16] Seiten 340 bis 345 benutzten Methode ab. Es folgt für $y \geqq y_0 > 0$

$$f(\alpha, \lambda, g, y, s) = 0((|\lambda|^2 + 1) e^{-\pi|\lambda| y} |\alpha|^{-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0) . \tag{218}$$

Wegen (215), (218) konvergiert die Doppelsumme (214) für $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s dar. Satz 14 ist besiesen.

SATZ 15. *Es sei Ψ eine Kongruenzgruppe. Dann ist $K(\Psi, g, g, w, z, s, s)$ für $g \neq 0$ in der Halbebene* $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ *holomorph. Für $g = 0$ liegt ein Pol erster Ordnung bei $s = 2$.*

BEWEIS. Wegen (13) genügt es, die Behauptung für $\Psi = \mathrm{M}(q)$ $(q \geqq 3)$ zu beweisen. Aus Christian [59], Seite 428, Satz 3 folgt

$$
\begin{aligned}
(219)\qquad & K(\mathrm{M}(q), g, g, w, z, s, s) \\
& = (vy)^{-(g+s)/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(q, g, n, b_n(q, g, v+t, s), z, s) e^{-2\pi i n u/q} .
\end{aligned}
$$

Weiter ist $K(\mathrm{M}(q), g, g, w, z, s, s)$ überall dort holomorph, wo die $P(q, g, n, b_n(q, g, v+t, s), z, s)$ es sind, und man kann das Polstellenverhalten von $K(\mathrm{M}(q), g, g, w, z, s, s)$ aus dem Polstellenverhalten der

$$P(q, g, n, b_n(q, g, v+t, s), z, s) \quad (n \in \boldsymbol{Z})$$

ablesen.

Zunächst sei $n \neq 0$. Wegen (37), (38), (39) sind die $b_n(q, g, v+t, s)$ in $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ holomorph. Nach Satz 14 sind auch die $P(q, g, n, b_n(q, g, v+t, s), z, s)$ $(n \neq 0)$ für $\operatorname{Re} s > 3/2 - g$ holomorph.

$K(\mathrm{M}(q), g, g, w, z, s, s)$ hat also genau dort Pole, wo $P(q, g, 0, b_0(q, g, v+t, s), z, s)$ Pole hat, und dieses hat wegen Satz 13 genau dort Pole, wo

$$P(q, g, 0, 1, z, s) = E(q, g, z, s)$$

Pole hat. Aus Satz 5 folgt nun Satz 15.

SATZ 16. *Es gilt*

$$\sigma^{\pm}_{-\rho(q,g)} \leqq \frac{3}{2} - g , \tag{220}$$

also

$$\lambda_{-\rho(q,g)} \geqq \frac{3}{16} . \tag{221}$$

Die exzeptionellen Eigenwerte von $-\widetilde{\Delta}_g$ liegen also im Intervall $[3/16, 1/4\rangle$.

BEWEIS. Nach Satz 1 gibt es exzeptionelle Eigenwerte nur für $g \equiv 0 \bmod 2$. Ferner sind diese für alle $g \equiv 0 \bmod 2$ die gleichen. Wir können daher $g \geqq 2$ annehmen. Aus den Sätzen 12 und 15 folgt (220) und hieraus (221). Satz 16 ist bewiesen.

LITERATUR

[1] R. W. BRUGGEMAN, Fourier coefficients of cusp forms, Inventiones Math. 45, 1–18 (1978).
[2] H. BUCHHOLZ, The confluent hypergeometric function, Springer Verlag 1969.

[3] D. BUMP, S. FRIEDBERG AND D. GOLDFELD, Poincaré series and Kloosterman sums, Contemporary Mathematics 53 (1986), 39–49.
[4] U. CHRISTIAN, Some remarks on symplectic groups, modular groups and Poincaré's series, Amer. J. Math. 89 (1967), 319–362.
[5] U. CHRISTIAN, Über die Anzahl der Spitzen Siegel'scher Modulgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968), 55–60.
[6] U. CHRISTIAN, Siegel'sche Modulfunktionen, 2, Auflage, Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1980/81.
[7] J.-M. DESHOUILLERS AND H. IWANIEC, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, Invent. Math. 70 (1982), 219–288.
[8] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, Linear operators I, II, III. Interscience Publishers, New York.
[9] J. ELSTRODT, Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene I. Math. Ann. 203 (1973), 295–330: II. Math. Z. 132 (1973), 99–134: III. Math. Ann. 208 (1974), 99–132.
[10] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER AND F. G. TRICOMI, Higher transcendental functions I, II, III. Mc. Graw Hill Book Company, New York, Toronto, London 1953–1955.
[11] T. ESTERMANN, Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 7 (1930), 82–89.
[12] L. D. FADDEEV, Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobacevskii plane, Trans. Moscow Math. Soc. 17 (1967), 357–386.
[13] D. FAY, Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group, J. reine angew. Math. 293/294 (1977), 143–203.
[14] S. S. GELBART AND H. JACQUET, A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$, Ann. Ecole Norm. Sup. 11 (1978), 417–542.
[15] A. GOOD, Beiträge zur Theorie der Dirichletreihen, die Spitzenformen zugeordnet sind, J. of Number Theory 13 (1981), 18–65.
[16] K.-B. GUNDLACH, Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbert'schen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten, Acta mathematica 92 (1954), 309–345.
[17] E. HECKE, Mathematische Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1959.
[18] D. A. HEJHAL, The Selberg trace formula for $PSL(2, \boldsymbol{R})$, vol. 2, Springer Lecture Notes in Mathematics 1001.
[19] M. N. HUXLEY, Introduction to Kloostermania, Banach Center Puclications 17 (1985), 217–306.
[20] H. IWANIEC, Character sums and small eigenvalues for $\Gamma_0(p)$, Glasgow Math J. 27 (1985), 99–116.
[21] H. IWANIEC AND J. SZMIDT, Density theorems for exceptional eigenvalues of the Laplacian for congurence groups, Banach Center Publications 17 (1985), 317–331.
[22] D. JOHNSON, Estimates for nonanalytic cusp forms, Proc. A.M.S. 92 (1984), 1–9.
[23] T. KUBOTA, Elementary theory of Eisenstein series, Kodansha, Tokyo; John Wiley, New York, London, Sydney, Toronto.
[24] N. V. KUZNETSOV, Petersson's conjecture for cusp forms of weight zero and Linnik's conjecture, Sums of Kloosterman sums, Math. USSR Sbornik 39 (1981), 299–342.
[25] N. V. KUZNETSOV, Convolution of the Fourier coefficients of the Eisenstein-Maass series, J. Soviet Math. 29 (1985), 1131–1159.
[26] E. LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Chelsea Publ., Comp., New York.

[27] S. LANG, $SL_2(\boldsymbol{R})$, Addison-Wesley Publ. Comp.

[28] H. MAASS, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichlet'scher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 121 (1949), 141–183.

[29] H. MAASS, Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Mdoulfunktionen, Math. Ann. 125 (1953), 235–263.

[30] H. MAASS, Lectures on modular functions of one complex variable, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1964 (Revised 1983).

[31] H. NEUNHÖFFER, Über die analytische Fortsetzung von Poincaréreihen, Sitzungsberichte Heidelberger Akad. Wiss. 1973, 33–90.

[32] D. NIEBUR, A class of nonanalytic automorphic functions, Nagoya Math. J. 52 (1973), 133–145.

[33] N. NIELSEN, Die Gammafunktion, Chelsea Publ. Comp., New York.

[34] S. J. PATTERSON, A lattice-point problem in hyperbolic space, Mathematika 22 (1975), 81–88.

[35] H. PETERSSON, Darstellung der eigentlich-automorphen Formen (−2)-ter Dimension durch eine Art Poincaré'scher Reihen bei gewissen Grenzkreisgruppen, Math. Ann. 105 (1931), 206–239.

[36] N. V. PROSKURIN, Summation formulas for general Kloosterman sums, J. Soviet Math. 18 (1980), 925–950.

[37] W. ROELCKE, Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art, Sitzungsberichte Heidelberger Akad. Wiss. 1956, 161–267.

[38] W. ROELCKE, Analytische Fortsetzung der Eisensteinreihen zu den parablosischen Spitzen von Grenzkreisgruppen erster Art. Math. Ann. 132 (1956), 121–129.

[39] W. ROELCKE, Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. I.: Math. Ann. 167 (1966), 292–337; II.: Math. Ann. 168 (1967), 261–324.

[40] H. SALIÉ, Über die Kloosterman'schen Summen $S(u, v; q)$, Math. Z. 34 (1932), 91–109.

[41] H. SALIÉ, Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Math. Z. 36 (1932), 263–278.

[42] P. SARNAK, The arithmetic and geometry of some hyperbolic three manifolds, Acta Math. 151 (1983), 253–295.

[43] A. SELBERG, Harmonic analysis, 2, Teil. Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1954.

[44] A. SELBERG, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian. Math. Soc. 20 (1956), 47–87.

[45] A. SELBERG, On the Estimation of Fourier coefficients of modular forms, Proc. Sympos. Pure Math. 8 (1965), 1–15.

[46] H. SHIMIZU, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes Annals of Mathematics 77 (1963), 33–71.

[47] G. SHIMURA, On Eisenstein series, Duke Math. J. 50 (1983), 417–476.

[48] C. L. SIEGEL, Gesammelte Abhandlungen I-IV, Springer Verlag.

[49] C. L. SIEGEL, Advanced analytical number theory, Lecture Notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1961.

[50] L. J. SLATER, Generalized hypergeometric functions, Cambridge University Press 1966.

[51] F. SMITHIES, The Fredholm theory of integral equations, Duke Math. J. 8 (1941), 107–130.

[52] M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, A.M.S., Providence R.I. 1932.

[53] A. B. VENKOV, Spectral theory of automorphic functions, the Selberg zeta-function, and some problems of analytic number theory and mathematical physics, Russian Math. Surveys 34:3 (1979), 79–153.

[54] A. B. VENKOV, Spectral theory of automorphic functions, Proc. Steklov Institute of

Mathematics 153 (1981/82), 1–163.
[55] G. N. WATSON, A treaties on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press.
[56] A. WEIL, On some exponential sums, Collected papers, vol. I. 386–389.
[57] E. T. WHITTAKER AND G. N. WATSON, A course of modern analysis, Cambridge University Press 1927.
[58] P. G. ZOGRAF, Fuchsian groups and small eigenvalues of the Laplace operator, J. of Soviet Math. 26 (1984), 1618–1621.
[59] U. CHRISTIAN, Über gewisse Poincaré'sche Reihen zu elliptischen Modulgruppen, Manuscripta math. 59 (1987), 423–440.
[60] H. DAVENPORT, Multiplicative Number Theory, Second Edition, Springer-Verlag.
[61] M. N. HUXLEY, The distribution of prime numbers, Oxford Mathematical Monographs.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
BUNSENSTR. 3–5, D–3400 GÖTTINGEN
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND