ÜBER DIE ARITHMETISCHEN MITTEL FOURIERSCHER REIHEN.

VON

OTTO SZÁSZ

in FRANKFURT A. MAIN.

§ 1. Es sei $f(x)$ eine mod. 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion; ihre Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x);$$

ihre Partialsummen bezw. arithmetischen Mittel sind

$$s_0 = \frac{a_0}{2}, \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Genügt $f(x)$ der Lipschitzschen Bedingung

$$(L_1) \qquad |f(x) - f(u)| \leqq \lambda |x - u|, \text{ für alle } x \text{ und } u,$$

(λ eine Konstante)

so ist

$$(1) \qquad |f(x) - \sigma_n(x)| \leqq c\,\lambda \frac{\log n}{n}, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi, \; n = 2, 3, \ldots;$$

genügt $f(x)$ der Bedingung

$$(L_2) \qquad |f(x) - f(u)| \leqq \lambda |x - u|^{\alpha} \text{ für alle } x \text{ und } u,$$

wobei α eine Konstante, $0<\alpha<1$ ist, so ist

$$(2)\qquad |f(x)-\sigma_n(x)| \leqq c_\alpha \lambda \cdot \frac{1}{n^\alpha}, \quad 0 \leqq x \leqq 2\pi, \quad n=1,2,3,\ldots;$$

c ist eine absolute Konstante, c_α hängt nur von α ab.[1]

Im folgenden wird unter weitgehenden Bedingungen die Existenz und der Wert der Ausdrücke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}[\sigma_n(x)-f(x)] \text{ bezw. } \lim_{n\to\infty}[\sigma_n(x)-f(x)]\, n^\alpha$$

für gewisse Werte von x festgestellt. Daraus ergibt sich zugleich, dass die Grössenordnung der Abschätzungen (1) und (2) nicht verbessert werden kann. Ich beweise nämlich die Sätze:

Satz 1. Wenn es zu einer Stelle x zwei Grössen $s=s(x)$ und $g=g(x)$ gibt derart, dass

$$(\mathrm{I})\qquad \lim_{h\to+0} \frac{1}{h^2}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g\sin t|\, dt=0$$

ist, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}[\sigma_n(x)-s(x)] = \frac{g(x)}{2\pi}.$$[2]

Satz 2. Wenn zu einem positiven $\alpha<1$ und zu einem x-Wert zwei Grössen $s=s(x)$, $g_\alpha=g_\alpha(x)$ existieren derart, dass

$$(\mathrm{II})\qquad \lim_{h\to+0} \frac{1}{h^{1+\alpha}}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha \sin^\alpha t|\, dt=0$$

ist, so ist

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha[\sigma_n(x)-s(x)] = \frac{\gamma_\alpha}{\pi}\cdot g_\alpha(x);$$

---

[1] S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues. Acad. Roy. de Belgique, Classe des sciences. Mémoires, II. Série, t. IV. Bruxelles 1912, S. 1—104; insb. S. 88—89.

[2] Einen etwas spezielleren Satz habe ich in meiner Arbeit bewiesen: A Fourier-féle sorok számtani közepeiröl, Math. és Phys. Lapok XXXII, 1925, S. 18—25.

hier ist

$$\gamma_\alpha = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 \sin^\alpha t \, dt = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}} \, d t = \frac{\Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha \pi}{2}}{(1-\alpha)\, 2^\alpha}.$$

Diese Sätze ergeben den genauen Grad der Approximation durch die arithmetischen Mittel an einer Stelle unter weitgehenden Bedingungen.

Für $t>0$ ist offenbar $0<t-\sin t<t^3$, und hieraus folgt für $0<\alpha\leqq 1$

$$1 > \left(\frac{\sin t}{t}\right)^\alpha \geqq \frac{\sin t}{t} > 1-t^2,$$

also

$$t^\alpha > \sin^\alpha t > t^\alpha - t^{2+\alpha},$$

oder

$$0 < t^\alpha - \sin^\alpha t < t^{2+\alpha}, \quad 0<\alpha\leqq 1, \quad t>0.$$

Daher ist (für $\alpha=1$ bedeute $g_\alpha = g$)

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha \sin^\alpha t| \leqq |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha t^\alpha| + |g_\alpha|\, t^{2+\alpha}$$

und ebenso

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha t^\alpha| \leqq |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha \sin^\alpha t| + |g_\alpha|\, t^{2+\alpha}.$$

Hieraus folgt, dass die Bedingungen (I) und (II) mit den folgenden gleichbedeutend sind:

$$\text{(I')} \qquad \frac{1}{h^2} \int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g\,t| \, d t \to 0, \quad h\to +0,$$

bezw.

$$\text{(II')} \qquad \frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s-g_\alpha t^\alpha| \, d t \to 0, \quad h\to +0;$$

(I') geht aus (II') für $\alpha=1$ hervor.

Wenn die Grenzwerte

$$\frac{f(x+2t)-f(x+0)}{2\,t^\alpha} \to r_\alpha(x), \qquad \frac{f(x-2t)-f(x-0)}{-2\,t^\alpha} \to l_\alpha(x)$$

existieren, so ist offenbar (II) mit

$$s = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], \qquad g_\alpha = 2(r_\alpha - l_\alpha) \text{ erfüllt.} \qquad (0<\alpha\leqq 1).$$

Aus Satz 1. ergibt sich eine allgemeingültige Formel für den Sprung einer Funktion an einer Stelle (§ 4.).

§ 2. Ich gehe aus von der bekannten Formel

$$\sigma_n(x) - s(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \varphi(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

wobei

$$\varphi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2s(x) \text{ ist.}$$

Ferner ist offenbar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1};$$

bezeichnet man diese Zahl mit η_n, so ist $\frac{\eta_n}{\log n} \to \frac{1}{2}$;

nun wird

$$\pi n(\sigma_n - s) - \eta_n g = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 [\varphi(t) - g\sin t]\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Zur Abschätzung dieses Ausdruckes benutzt man am besten einen von Herrn Fejér herrührenden überaus einfachen Gedanken, mit dessen Hilfe Herr Fejér die Konvergenz der arithmetischen Mittel unter der bekannten Lebesgueschen Bedingung ganz kurs bewies[1] und den er mir freundlichst mitteilte. Zunächst ist

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \leqq \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^2;$$

ferner ist für $x>0$

[1] L. Fejér, Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, Nachrichten d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1925.

$$|\sin x| < x \text{ und } x\,|\sin x| \leqq x,$$

also

$$(1+x)\,|\sin x| < 2\,x \text{ oder } \frac{|\sin x|}{x} < \frac{2}{1+x};$$

hieraus folgt für $x=n\,t$

$$\left(\frac{\sin n\,t}{t}\right)^2 < \frac{4\,n^2}{(1+n\,t)^2}.$$

Somit wird

$$|\pi\,n\,(\sigma_n-s)-\eta_n\,g| \leqq \pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^2}{(1+n\,t)^2}\,|\varphi(t)-g\sin t|\,d\,t;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\int\limits_0^t |\varphi(t)-g\sin t|\,d\,t = \Phi(t),\ t \geqq 0,$$

so erhält man durch partielle Integration

$$|\pi\,n\,(\sigma_n-s)-\eta_n\,g| \leqq \frac{\pi^2\,n^2}{\left(1+n\,\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^3}{(1+n\,t)^3}\,\Phi(t)\,d\,t$$

$$\leqq 4\,\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\pi^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{1+n\,t}\cdot\frac{\Phi(t)}{t^2}\,d\,t.$$

Sei nun ε beliebig >0; nach Voraussetzung ist

$$\frac{\Phi(t)}{t^2} < \varepsilon \quad \text{für} \quad t<\delta,\ \delta=\delta(\varepsilon)<1;$$

somit wird

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n}{1+n\,t}\,\frac{\Phi(t)}{t^2}\,d\,t < \varepsilon\log(1+n\,\delta) + \frac{n}{1+n\,\delta}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2}\,\Phi(t)\,d\,t$$

$$< \varepsilon\log(1+n) + \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2}\,\Phi(t)\,d\,t.$$

Also wird

$$|\pi n(\sigma_n - s) - \eta_n g| < 30\,\varepsilon \log(n+1) \quad \text{für} \quad n > n(\delta),$$

woraus Satz 1 unmittelbar folgt.

§ 3. Aus Formel (3) folgt

$$\pi n(\sigma_n - s) - \omega_n g_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin n t}{\sin t}\right)^2 [\varphi(t) - g_\alpha \sin^\alpha t]\, dt, \tag{4}$$

wobei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 n t}{(\sin t)^{2-\alpha}}\, dt = \omega_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gesetzt ist. Aus (4) folgt ähnlich wie in § 2

$$|\pi n(\sigma_n - s) - \omega_n g_\alpha| \leqq \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^2}{(1+nt)^2} |\varphi(t) - g_\alpha \sin^\alpha t|\, dt;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^t |\varphi(t) - g_\alpha \sin^\alpha t|\, dt = \Phi_\alpha(t), \quad t \geqq 0,$$

so erhält man wiederum durch partielle Integration

$$|\pi n(\sigma_n - s) - \omega_n g_\alpha| \leqq \frac{\pi^2 n^2}{\left(1 + n\frac{\pi}{2}\right)^2} \Phi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^3}{(1+nt)^3} \Phi_\alpha(t)\, dt$$

$$\leqq 4\,\Phi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^{2-\alpha}(nt)^{1+\alpha}}{(1+nt)^3} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt$$

$$\leqq 4\,\Phi_\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{n}{1+nt}\right)^{2-\alpha} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

Sei nun ε beliebig >0; nach Voraussetzung ist jetzt

$$\frac{\Phi_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}} < \varepsilon \quad \text{für} \quad t < \delta,\ \delta = \delta(\varepsilon) < 1,$$

somit wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{n}{1+nt}\right)^{2-\alpha} \frac{\Phi_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt < \varepsilon \int_0^{\delta} \frac{n^{2-\alpha}\, dt}{(1+nt)^{2-\alpha}} + \left(\frac{n}{1+n\delta}\right)^{2-\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^{1+\alpha}} \Phi_\alpha(t)\, dt$$

$$< \frac{\varepsilon\, n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\delta^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^{1+\alpha}} \Phi_\alpha(t)\, dt < \frac{2\,\varepsilon\, n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

für $n > n(\delta)$.

Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} \left[\pi n^\alpha (\sigma_n - s) - \frac{\omega_n}{n^{1-\alpha}} g_\alpha\right] = 0. \tag{5}$$

Nun ist

$$\omega_n = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\left(\sin \frac{\tau}{n}\right)^{2-\alpha}} \frac{d\tau}{n}, \text{ und}$$

$$\frac{\omega_n}{n^{1-\alpha}} = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}}\, d\tau + \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} \left[\frac{1}{\left(\frac{n}{\tau} \sin \frac{\tau}{n}\right)^{2-\alpha}} - 1\right] d\tau + \int_{\sqrt{n}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} \cdot \frac{d\tau}{\left(\frac{n}{\tau} \sin \frac{\tau}{n}\right)^{2-\alpha}}$$

$$= i_1 + i_2 + i_3.$$

Ferner ist offenbar für $0 < x < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $0 < \alpha < 1$,

$$1 < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha-2} < \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha-2} < \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)},$$

also

$$0 < i_2 < \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} \left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} - 1 \right] d\tau < \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} d\tau.$$

Ferner ist $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, also

$$0 < i_3 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha} \int_{\sqrt{n}}^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} d\tau < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^{2-\alpha}} d\tau.$$

Hieraus folgt, dass $\lim \frac{\omega_n}{n^{1-\alpha}}$ existiert, und es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n}{n^{1-\alpha}} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}} dt = \gamma_\alpha > 0. \tag{6}$$

Durch partielle Integration erhält man weiter

$$\gamma_\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\tau}{(1-\alpha)\tau^{1-\alpha}} d\tau = \frac{1}{(1-\alpha)2^\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{(1-\alpha)2^\alpha};$$ [1]

aus (5) und (6) folgt nun unmittelbar Satz 2.

Damit die Bedingung (II') für ein α $(0<\alpha\leqq 1)$ erfüllt sei, muss notwendigerweise

$$\frac{1}{h^{1+\alpha}} \int_0^h [f(x+2t)+f(x-2t)-2s]\, dt \to \frac{g_\alpha}{1+\alpha},\ h\to +0 \text{ sein.}$$ [2]

---

[1] Vgl. z. B. G. F. MEYER, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale ..., Leipzig 1871, S. 182.

[2] Es muss auch die Lebesguesche Summabilitätsbedingung $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+2t)+f(x-2t)-2s|\,dt \to 0$ erfüllt sein, denn es ist $\frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t)|\,dt < \frac{1}{h}\int_0^h |\varphi(t)-g_\alpha t^\alpha|\,dt + \frac{1}{h}\int_0^h |g_\alpha|\, t^\alpha\, dt \to 0$.

Während die Bedingung (L_1) bezw. (L_2) gleichmässig in einem Intervall erfüllt sein muss, drückt die Bedingung (II') nur eine Eigenschaft der Funktion an der Stelle x aus.[1]

§ 4. Es sei $\psi(x)$ eine mod. 2π periodische, im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion und

$$\psi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x);$$

dann ist

$$\int_0^x \psi(t)\, dt = c + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{-\beta_\nu}{\nu} \cos \nu x + \frac{\alpha_\nu}{\nu} \sin \nu x \right), \qquad c = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\beta_\nu}{\nu}.$$

Ich setze

$$f(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt,$$

dann ist

$$f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x) = \int_0^{2t} [\psi(x+\tau) - \psi(x-\tau)]\, d\tau.$$

Die Bedingung (I') mit $s = f(x)$ geht jetzt über in

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h \left| \int_0^{2t} \left[\psi(x+\tau) - \psi(x-\tau) - \frac{1}{2} g \right] dt \right| dt \to 0, \; h \to +0. \tag{7}$$

Aus Satz 1. folgt unter dieser Bedingung

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} (\beta_\nu \cos \nu x - \alpha_\nu \sin \nu x)}{\log n} + \frac{n}{\log n} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\frac{\beta_\nu}{\nu} \cos \nu x - \frac{\alpha_\nu}{\nu} \sin \nu x \right) \to \frac{g}{2\pi}, \; n \to \infty. \tag{8}$$

---

[1] Eine andere Verallgemeinerung der Bedingung (L_2) findet sich in meiner Arbeit: Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionenklassen. Sitzungsb. d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-phys. Kl. Jahrg. 1922, S. 135—150. Nämlich (S. 147)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2\, dx \leqq 8 \lambda^2 t^{2\alpha} \quad \text{für} \quad t > 0;$$

hieraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\tau (a_\nu^2 + b_\nu^2)^\varrho$ für gewisse Werte von τ und ϱ.

Die Bedingung (7) ist sicherlich erfüllt, wenn

$$\frac{1}{t}\int_0^{2t}\left|\psi(x+\tau)-\psi(x-\tau)-\frac{1}{2}g\right|d\tau \to 0,\ t\to +0;$$

in diesem Falle ist nach einem Satz von LUKÁCS[1],

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n=1}(\beta_\nu \cos \nu x - \alpha_\nu \sin \nu x)}{\log n} \to \frac{g}{2\pi},\quad n\to\infty,$$

und somit nach (8)

$$\frac{n}{\log n}\sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{\beta_\nu}{\nu}\cos \nu x - \frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin \nu x\right) \to 0,\ n\to\infty.$$

Es gilt also jetzt

$$\frac{n}{\log n}[\sigma_n(x)-f(x)] \to \frac{g(x)}{2\pi},\quad n\to\infty,$$

dagegen

$$\frac{n}{\log n}[s_n(x)-f(x)] \to 0,\quad n\to\infty.$$

Die Grösse $\frac{g}{2}$ ist der verallgemeinerte Sprung der Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle x, und wurde unter speziellen Bedingungen zuerst von Herrn FEJÉR bestimmt.[2]

Frankfurt a. Main, den 25:ten April 1925.

---

[1] F. LUKÁCS, Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. für Math. 150 (1920), S. 107—112.

[2] L. FEJÉR, Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. für Math. 142 (1913), S. 165—188.

Man vergl. ferner: CSILLAG, Korlátos ingadozású függvénysorok Fourier-féle állandóiról (ungarisch), Math. és Phys. Lapok XXVII (1918), S. 301—308; SZIDON, A függvény ugrásának meghatározása a függvény Fourier-féle sorából, ibidem, S. 309—311.