

Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems.

Von
G. Szegő in Berlin.

Einleitung.

In meiner Arbeit, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems¹⁾, habe ich Entwicklungen untersucht, die nach den Näherungsnennern

des zur Funktion $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$

$$\int_{-1}^1 \frac{p(t)}{x-t} dt$$

gehörigen Stieltjesschen Kettenbruches fortschreiten; hierbei bezeichnet $p(x)$ eine im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ definierte $(L)^2$ integrable nicht-negative Funktion, die daselbst nicht fast überall²⁾ verschwindet; diese Kettenbruchnennern $Q_n(x)$ sind gewisse klassische Polynome, die man unabhängig von jeder Kettenbruchtheorie auch durch die folgenden Orthogonalitätseigenschaften definieren kann:

- a) $Q_n(x)$ ist ein Polynom n -ten Grades,
- b) der Koeffizient von x^n in $Q_n(x)$ ist positiv,
- c) $\int_{-1}^1 p(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$

Im folgenden bezeichne ich diese Polynome $Q_n(x)$ als *orthogonal* in bezug auf die „Belegungsfunktion“ $p(x)$, oder auch als orthogonale Polynome,

¹⁾ Mathematische Annalen 82 (1921), S. 188–212.

²⁾ D. h. im Lebesgueschen Sinne.

³⁾ „Fast überall“ heißt: mit Ausnahme einer Menge mit dem Lebesgueschen Maße 0.

die zu der Belegungsfunktion $p(x)$ gehören. Aus der Definition folgt, daß die Funktionen

$$\sqrt{p(x)} Q_0(x), \sqrt{p(x)} Q_1(x), \dots, \sqrt{p(x)} Q_n(x), \dots$$

ein Orthogonalsystem bilden⁴⁾.

Ich führe folgende bekannte Beispiele an:

Für $p(x) = 1$ ist $Q_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) das n -te Legendresche Polynom.

Für $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $Q_n(x) = \text{konst.} \cos n \arccos x$, d. h. $Q_n(\cos \vartheta) = \text{konst.} \cos n \vartheta$.

Für $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist $Q_n(\cos \vartheta) = \text{konst.} \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta}$.

Für $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ ($\alpha, \beta > -1$) sind die $Q_n(x)$ die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome⁵⁾.

In meiner oben angeführten Arbeit habe ich die Entwicklung einer *analytischen Funktion* nach den Polynomen $Q_n(x)$ untersucht, mit dem Ergebnis, daß für eine ausgedehnte Klasse von Entwicklungen analoge Sätze gelten, wie für die Entwicklung nach Legendreschen Polynomen. Diese Klasse war dadurch charakterisiert, daß die Belegungsfunktion $p(x)$ als im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ positiv und samt

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log p(x)$$

(L) integabel vorausgesetzt war. Die Ergebnisse dieser Arbeit waren eigentlich Anwendungen meiner früheren Untersuchungen über Toeplitz'sche Formen⁶⁾.

Ich will nun in der vorliegenden Arbeit mit völlig anderen Methoden eine weit schwierigere Frage behandeln, über welche in der Literatur bisher nur ganz spezielle Resultate vorliegen, nämlich, die Entwicklung einer „*willkürlichen*“ *Funktion* nach den Polynomen $Q_n(x)$, d. h. einer Funktion, von welcher zunächst gar nichts anderes vorausgesetzt wird, als daß sie (etwa im Lebesgueschen Sinne) integabel sei⁷⁾.

⁴⁾ In der Stieltjesschen Theorie werden „Belegungen“ der ganzen reellen Achse (also eines unendlichen Intervalls) betrachtet. Sobald man sich auf ein endliches Intervall beschränkt, ist es offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn das Intervall $(-1, 1)$ zugrunde gelegt wird. — Bezüglich der wichtigsten Eigenschaften der Polynome $Q_n(x)$ verweise ich übrigens auf meine Arbeit a. a. O.¹⁾.

⁵⁾ Vgl. Kapitel III.

⁶⁾ Diese Zeitschrift 6 (1920), S. 167–202 und 9 (1921), S. 167–190.

⁷⁾ Vgl. G. Darboux, Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de Mathématiques pures et appliquées (3) 4 (1878), S. 5–56; O. Blumenthal, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches usw.

Unter einer solchen Entwicklung verstehe ich, ausführlicher formuliert, folgendes: $p(x) f(x)$ sei (L) integrel, ferner setze man

$$(1) \quad c_n = \int_{-1}^1 p(x) f(x) Q_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

wobei die $Q_n(x)$ die oben definierten, zu $p(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome bezeichnen. Dann gehört zu $f(x)$ die Entwicklung

$$(2) \quad f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \dots + c_n Q_n(x) + \dots;$$

hier bedeutet das Zeichen \sim , wie auch in der Theorie der Fourierschen Reihen, lediglich das Bestehen der Gl. (1), sagt aber nichts über die Konvergenz, Summierbarkeit usw. von (2) aus. Die oben angeführten Beispiele zeigen, daß die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen sowie nach Legendreschen Polynomen in diese allgemeinere Klasse von Entwicklungen gehört.

In dieser Arbeit soll ein Theorem bewiesen werden, welches für einen inneren Punkt ξ des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$, in dem die Belegungsfunktion $p(x)$ gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt, sämtliche auf die Entwicklung (2) betreffenden Konvergenz- und Summierbarkeitsfragen auf die entsprechenden Fragen bezüglich Fourierscher (Kosinus-) Reihen zurückführt. Dieser Satz spielt somit in der Theorie dieser allgemeineren Entwicklungen eine ähnliche Rolle, wie ein bekannter Satz von A. Haar⁸⁾ in der Theorie der Legendreschen Reihen, der seinerseits übrigens als Spezialfall in dem hier bewiesenen Theorem enthalten ist. Auch habe ich bei der Abfassung dieser Arbeit gewisse Untersuchungen von J. Tamarkine vor Augen gehabt, durch die eine allgemeine Klasse von Entwicklungen (mit denen jedoch die unsrigen — abgesehen von einigen trivialen Fällen —

Göttinger Dissertation 1898. Einleitung; W. Stekloff, Sur le développement d'une fonction donnée en séries usw. Journal für die reine und angewandte Mathematik 125 (1903), S. 207–236; vgl. auch A. Kneser, Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Mathematische Annalen 63 (1907), S. 477–524, bes. S. 524. — Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Methode scheint übrigens auch zur Behandlung der anderen, oben erwähnten Fragestellung (betreffend die Entwicklung einer *analytischen* Funktion) geeignet zu sein.

⁸⁾ A. Haar, Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. Mathematische Annalen 78 (1917), S. 121–136. — Während der Korrektur sind mir die folgenden Arbeiten von W. H. Young zugänglich geworden: Sur les séries de polynomes de Legendre. Comptes Rendus 165 (1917), S. 696–699; On the connexion between Legendre series and Fourier series. Proceedings of the London Mathematical Society (2) 18 (1919), S. 141–162. Diese Arbeiten enthalten ein Theorem über Legendresche Reihen, welches etwas allgemeiner ist als das Haarsche.

nichts Gemeinsames haben) auf ähnliche Weise auf die trigonometrische Entwicklung zurückgeführt wird, wie es hier geschieht⁹⁾.

Ich definiere zunächst eine Klasse (A) von Belegungsfunktionen $p(x)$ folgendermaßen. Es sei $p(x)$ im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ nach Riemann integrierbar und im Innern dieses Intervalles positiv. An den Endpunkten $x = \pm 1$ kann sie auch 0 oder unendlich werden, jedoch so, daß sie von der Form

$$p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta q(x)$$

sei, wobei $-\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{1}{2}$ und $q(x)$ eine beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion ist, welche im ganzen Intervall $(-1, 1)$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Mit Hilfe dieser Bezeichnungsweise kann ich das Hauptresultat dieser Arbeit in der folgenden Form aussprechen:

Theorem. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A);*

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

seien die zugehörigen orthogonalen Polynome, für die

$$\int_{-1}^1 p(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ist. Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, für welche $p(x)[f(x)]^2$ im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ (L) integrierbar ist¹⁰⁾, und $s_n(x)$ bezeichne die n -te Partialsumme der Entwicklung von $f(x)$ nach den Polynomen $Q_n(x)$, d. h. der Entwicklung

$$f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \dots + c_n Q_n(x) + \dots$$

$$\left[c_n = \int_{-1}^1 p(x) f(x) Q_n(x) dx \right]:$$

es sei ferner $\sigma_n(x) = \sigma_n(\cos \vartheta)$ die n -te Partialsumme der Entwicklung von $p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta) |\sin \vartheta|$ in eine Kosinusreihe, d. h. der Entwicklung

$$p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta) |\sin \vartheta| \sim \frac{\gamma_0}{2} + \gamma_1 \cos \vartheta + \dots + \gamma_n \cos n \vartheta + \dots$$

$$\left[\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta) \sin \vartheta \cos n \vartheta d \vartheta \right].$$

Dann besteht zwischen $s_n(x)$ und $\sigma_n(x)$ an jeder inneren Stelle $\xi = \cos \vartheta_0$

⁹⁾ J. Tamarkine, Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **31** (1912), S. 345–382. Ebenda findet sich eine Zusammenstellung der Literatur bezüglich dieser Frage.

¹⁰⁾ Daraus folgt schon die Integrierbarkeit von $p(x)f(x)$.

des Intervalles $-1 \leq x \leq 1$, wo die Belegungsfunktion $p(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, die folgende Beziehung

$$d. h. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[s_n(\xi) - \frac{\sigma_n(\xi)}{p(\xi) \sqrt{1-\xi^2}} \right] = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{\nu=0}^n Q_\nu(\xi) \int_{-1}^1 p(x) f(x) Q_\nu(x) dx - \frac{1}{p(\xi) \sqrt{1-\xi^2}} \sum_{\nu=0}^n \cos \nu \vartheta_0 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \nu \vartheta d\vartheta \right] = 0^{11)}.$$

Dieses Theorem liefert unmittelbar die Möglichkeit, die bekannten Konvergenz- und Summierbarkeitssätze der Theorie der Fourierschen Reihen auf unsere allgemeineren Reihentypen zu übertragen. Für $p(x) = 1$ folgt hieraus der oben erwähnte Satz von Haar¹²⁾.

Im I. Kapitel schicke ich zunächst einige elementare Hilfssätze voraus, um die späteren Beweisführungen nicht unterbrechen zu müssen. Ebenda wird auch die Beweismethode skizziert. Im II. Kapitel betrachte ich zwei an sich interessante Belegungstypen, nämlich die folgenden:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)},$$

wobei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ im Intervalle $(-1, 1)$ positive Polynome bezeichnen. Für diese Belegungen lassen sich die Polynome $Q_n(x)$ (wenigstens von einem gewissen Index an) explizite aufschreiben und auch die Entwicklung nach ihnen läßt sich einfach auf die trigonometrische Entwicklung zurückführen. Durch diese Betrachtungen gelangt man äußerst einfach zum Beweis unseres Theorems. Im III. Kapitel untersuche ich endlich Entwicklungen nach Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen;

¹¹⁾ Ich benütze im folgenden die Bezeichnungswaise $\sum_{\nu=0}^{n'} a_\nu = \sum_{\nu=0}^n a_\nu - \frac{a_n}{2}$. — Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit ist so zu verstehen, daß ein ξ enthaltendes offenes Intervall existiert, wo diese Bedingung erfüllt ist. Diese Bedingung läßt sich übrigens noch beträchtlich reduzieren.

¹²⁾ Man könnte offenbar die Partialsummen unserer Entwicklung ebensogut auch mit denen der Kosinusreihe von $p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta)$ (oder auch von $f(\cos \vartheta)$ selbst), wie es a. a. O. ⁸⁾ Haar macht, vergleichen; dann muß aber die weitere Voraussetzung getroffen werden, daß $p(\cos \vartheta) f(\cos \vartheta)$ im Intervalle $0 \leq \vartheta \leq \pi$, oder was dasselbe heißt, $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} p(x) f(x)$ im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ (L) integrabel sei. (Dies folgt keineswegs aus den Voraussetzungen unseres Theorems. Beispiel: $p(x) = 1$, $f(x)$ sei 0 für $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-x} \log(1-x)}$ für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$).

das dabei erhaltene Resultat gestattet auch diese Entwicklungen auf die trigonometrischen zurückzuführen¹³⁾.

Die in dieser Arbeit verwendete Methode (vgl. § 3), die übrigens ganz elementar ist, scheint auch zur Behandlung anderer verwandten Fragen mit Erfolg brauchbar zu sein. Von diesen erwähne ich hier nur die Untersuchung der angegebenen Entwicklung an solchen Stellen des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$, in denen die der Belegungsfunktion $p(x)$ in unserem Theorem auferlegte Bedingung (zweimal stetig differenzierbar zu sein) nicht erfüllt ist; ferner die Behandlung von Entwicklungen, die nach solchen Stieltjesschen Kettenbruchennern fortschreiten, welche zu einer Belegung des unendlichen Intervalls $-\infty < x < \infty$ (oder $0 \leq x < \infty$) gehören. (Vgl. die Fußnote ⁴⁾). Die eingehende Untersuchung dieser sowie anderer Entwicklungen, die nach gewissen von mir definierten Polynomtypen fortschreiten¹⁴⁾, behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

Inhalt.

Kapitel I. Hilfssätze. Darstellung der Methode.

- § 1. Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.
- § 2. Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.
- § 3. Darstellung der Methode.

Kapitel II. Über zwei Typen von Belegungsfunktionen.

- § 4. Über die orthogonalen Polynome, die zu der Belegungsfunktion $\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$ gehören.

¹³⁾ Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß der Beweis dieser Theoreme (vgl. § 3) nicht auf die asymptotische Untersuchung der Polynome $Q_n(x)$ (oder auf die der „Lebesgueschen Konstanten“) begründet ist, wie es bei verwandten Betrachtungen gewöhnlich der Fall zu sein pflegt. (Vgl. etwa A. Haar, a. a. O. ⁸⁾). — Meine Methode liefert übrigens auch eine asymptotische Formel der Polynome $Q_n(x)$. Diese Formel, die ich in einer anderen Arbeit ableiten will, lautet:

$$Q_n(\cos \vartheta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \vartheta_0}} \Re \frac{1}{\Delta(e^{i\vartheta_0})} e^{-i[(n+\frac{1}{2})\vartheta_0 - \frac{\pi}{4}] + \varepsilon_n},$$

wobei $\Delta(z) = \Delta(p; z)$ die im Hilfssatz II (§ 2) definierte analytische Funktion bezeichnet und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ist. (Die Voraussetzungen für $p(x)$ sind hierbei dieselben, wie in dem oben ausgesprochenen Theorem.)

¹⁴⁾ Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Fortsetzung.) Diese Zeitschrift 9 (1921), S. 167–190; vgl. insbesondere S. 180. — Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Ebenda S. 218 bis 270; vgl. insbesondere S. 263.

§ 5. Über die Quadratsumme der orthogonalen Polynome.

§ 6. Beweis von Satz I.

§ 7. Beweis von Satz II.

Kapitel III. Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach
Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen.

§ 8. Hilfssätze.

§ 9. Beweis.

Kapitel I.

Hilfssätze. Darstellung der Methode.

§ 1.

Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Hilfssatz I. Zu jeder Funktion $p(x)$ der Klasse $(A)^{15)}$, die an einer inneren Stelle ξ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist und zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε lassen sich zwei Funktionen von der Form

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)}$$

angeben, wobei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ für $-1 \leq x \leq 1$ positive Polynome bezeichnen, die folgenden Bedingungen genügen:

a) Es ist für $-1 \leq x \leq 1$

$$p_1(x) \leq p(x) \leq p_2(x).$$

b) Man hat

$$0 \leq \int_{-1}^1 \frac{\log p_2(x) - \log p_1(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon.$$

c) Endlich ist

$$p_1(\xi) = p_2(\xi) = p(\xi).$$

Anmerkung. Aus b) folgt mit Rücksicht auf a)

$$0 \leq \int_{-1}^1 \frac{\log p_2(x) - \log p(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon$$

und eine analoge Ungleichung für $p_1(x)$. (Umgekehrt ergibt sich aus diesen zwei Ungleichungen durch Addition eine im wesentlichen mit b) gleichwertige Beziehung.)

¹⁵⁾ Vgl. Einleitung.

Man setze

$$k(x) = \log \frac{\sqrt{1-x^2}}{p(x)} = \log \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha} (1+x)^{\frac{1}{2}-\beta}}{q(x)};$$

dies ist eine von oben beschränkte (höchstens logarithmisch unendlich werdende) $(R)^{16)}$ integrable Funktion. Die im Hilfssatz I enthaltene Forderung (soweit sie sich auf $p_1(x)$ bezieht) läßt sich somit auch folgendermaßen aussprechen:

Es sei $k(x)$ eine von oben beschränkte (höchstens logarithmisch unendlich werdende) (R) integrable Funktion, die für $x = \xi$ ($-1 < \xi < 1$) zweimal stetig differenzierbar ist. Man bestimme ein für $-1 \leq x \leq 1$ positives Polynom $P_1(x)$ derart, daß

$$a) \quad k(x) \leq \log P_1(x) \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$b) \quad \int_{-1}^1 \frac{\log P_1(x) - k(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon,$$

$$c) \quad k(\xi) = \log P_1(\xi)$$

seien.

Wäre $k(x)$ eine ganze Funktion, etwa ein Polynom, so würde der Nachweis der Existenz von $P_1(x)$ gar keine Schwierigkeit bereiten¹⁷⁾. Es genügt also vollkommen, die Existenz eines Polynoms $\Pi(x)$ zu beweisen, für das

$$a') \quad k(x) \leq \Pi(x) \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$b') \quad \int_{-1}^1 \frac{\Pi(x) - k(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon,$$

$$c') \quad k(\xi) = \Pi(\xi)$$

gelten.

Zu diesem Zwecke betrachte man die Funktion

$$l(x) = \frac{k(x) - k(\xi) - k'(\xi)(x-\xi) - \frac{1}{2}k''(\xi)(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2},$$

die im Intervalle $(-1, 1)$ von oben beschränkt (höchstens logarithmisch

¹⁶⁾ D. h. im Riemannschen Sinne.

¹⁷⁾ Man betrachte dann einfach die Abschnitte $s_m(x)$ (m ist ungerade) der nach den Potenzen von $(x-\xi)$ fortschreitenden Taylorsche Entwicklung der analytischen Funktion $e^{k(x)}$. Da für genügend große m gleichmäßig im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$

$$|e^{k(x)} - s_m(x)| < \varepsilon' (x-\xi)^{m+1} \quad (\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon' = 0)$$

ausfällt, so genügt $P_1(x) = s_m(x) + \varepsilon' (x-\xi)^{m+1}$ der Forderung.

unendlich) und (R) integrabel ist. Es gibt mithin ein Polynom $\pi(x)$, für das

$$l(x) \leq \pi(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

und

$$\int_{-1}^1 [\pi(x) - l(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon$$

ist. (Dies folgt aus der Definition des Riemannsches Integrals.) Man setze endlich

$$II(x) = k(\xi) + k'(\xi)(x - \xi) + \frac{1}{2}k''(\xi)(x - \xi)^2 + (x - \xi)^3 \pi(x),$$

dann erfüllt $II(x)$ offenbar die Bedingungen a'), b'), c'). Es ist auch leicht ersichtlich, daß sich stets solche Approximationspolynome $P_1(x)$ ermitteln lassen, die für $-1 \leq x \leq 1$ unter einer von ε unabhängigen oberen Schranke bleiben.

Ähnlich beweist man die Existenz von $P_2(x)$.

§ 2.

Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Man verdankt Herrn Fejér den folgenden Satz aus der Theorie der trigonometrischen Polynome:

Jedes positive trigonometrische Polynom $t(\vartheta)$ läßt sich in der Form

$$t(\vartheta) = |a(z)|^2 \quad (z = e^{i\vartheta})$$

darstellen, wobei $a(z)$ ein Polynom von z ist¹⁸⁾.

Das Polynom $a(z)$ ist im allgemeinen durch $t(\vartheta)$ noch *nicht* eindeutig bestimmt; es müssen vielmehr etwa noch folgende einschränkende Bedingungen hinzukommen:

1. $a(z)$ sei von 0 verschieden für $|z| \leq 1$,
2. $a(0)$ sei reell und positiv.

Hiermit ist das Polynom $a(z)$, das die obige Darstellung liefert, *eindeutig* bestimmt. Man hat nämlich

$$\log t(\vartheta) = 2 \Re \log a(e^{i\vartheta}),$$

wobei $\Re \log a(z)$ den reellen Teil der für $|z| \leq 1$ regulären analytischen

¹⁸⁾ Über trigonometrische Polynome. Journal für die reine und angewandte Mathematik 146 (1916), S. 53–82.

Funktion $\log a(z)$ ($\log a(0)$ ist reell) bezeichnet und hieraus ergibt sich bekanntlich

$$\log a(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log t(\vartheta) \frac{1+ze^{-i\vartheta}}{1-ze^{-i\vartheta}} d\vartheta^{19)}.$$

Diese Betrachtungen lassen sich in gewissem Sinne verallgemeinern²⁰⁾. Es sei $f(\vartheta)$ eine für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ definierte, samt $\log f(\vartheta)$ (L) integrierbare (fast überall positive) Funktion. Dann läßt sich die analytische Funktion

$$D(z) = e^{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log f(\vartheta) \frac{1+ze^{-i\vartheta}}{1-ze^{-i\vartheta}} d\vartheta}$$

bilden, die folgende Eigenschaften besitzt [vgl. die Fußnote²²⁾]:

- a) $D(z)$ ist regulär und von 0 verschieden für $|z| < 1$.
- b) $D(0)$ ist reell und positiv.
- c) Es ist fast überall im Intervalle $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

$$\lim_{r \rightarrow 1} |D(re^{i\vartheta})|^2 = f(\vartheta).$$

Ich will jetzt eine Bezeichnungsweise einführen, die im folgenden oft gebraucht wird. Es sei $p(x)$ eine im Intervalle $-1 \leq x \leq 1$ definierte fast überall positive Funktion, für welche $\log p(\cos \vartheta)$ im Intervalle $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ (L) integrierbar ist. Man setze dann

$$\Delta(p; z) = e^{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log p(\cos \vartheta) \frac{1+ze^{-i\vartheta}}{1-ze^{-i\vartheta}} d\vartheta}$$

Diese Funktion besitzt analoge Eigenschaften, wie oben $D(z)$. Hat ferner $p(x)$ an einer inneren Stelle $\xi = \cos \vartheta_0$ des Intervalls $(-1, 1)$ einen stetigen zweiten Differentialquotienten, dann existiert

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Delta(p; re^{i\vartheta_0}) = \Delta(p; e^{i\vartheta_0}),$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \Delta'(p; re^{i\vartheta_0}) = \Delta'(p; e^{i\vartheta_0})^{21)}$$

und es ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} |\Delta(p; re^{i\vartheta_0})|^2 = |\Delta(p; e^{i\vartheta_0})|^2 = p(\cos \vartheta_0) = p(\xi)^{22)}.$$

¹⁹⁾ Im folgenden werden die Buchstaben ϑ , \bar{x} als Integrationsbuchstaben verwendet.

²⁰⁾ Vgl. G. Szegő, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Erscheint in den Mathematischen Annalen.

²¹⁾ $\Delta'(p; z)$ bezeichnet die Ableitung von $\Delta(p; z)$ nach z .

²²⁾ Diese drei Gleichungen lassen sich vielleicht am einfachsten auf die folgende Weise ableiten.

(Fortsetzung der Fußnote 22 auf nächster Seite.)

Es gilt nun der folgende

Hilfssatz II. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A)²³, die an einer inneren Stelle $\xi = \cos \vartheta_0$ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig*

Die dritte Gleichung ist eine unmittelbare Folge des Schwarzschen Satzes über das Poissonsche Integral.

Die wesentlich weitergehende erste Gleichung ergibt sich unschwer aus einem von Herrn Lichtenstein verschärften Fatouschen Satze (vgl. Crelle Journal 141, S. 12—42), nach welchem

$$(*) \quad \lim_{r=1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \frac{1+re^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}} d\vartheta$$

existiert, sobald $f(\vartheta)$ für $\vartheta=0$ stetig ist und der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(\vartheta) - f(-\vartheta)\} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta$$

existiert. In unserem Falle ist $f(\vartheta) = \log p[\cos(\vartheta + \vartheta_0)]$ sogar (zweimal) stetig differenzierbar für $\vartheta=0$, d. h. das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\vartheta) - f(0)}{\sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$$

ist absolut konvergent. In diesem Falle folgt die Existenz von (*) mit Rücksicht auf die Ungleichung

$$\left| \frac{1-e^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}} \right| \leq 2 \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi; 0 < r < 1)$$

wesentlich einfacher, da ja für $r < 1$, $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(\vartheta) - f(0)] \frac{1+re^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}} d\vartheta \right| \leq 2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|f(\vartheta) - f(0)|}{\sin \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$$

ist und das Integral auf der rechten Seite strebt mit ε gegen 0.

Ähnlich ergibt sich aus der Voraussetzung, daß $f(\vartheta)$ zweimal stetig differenzierbar ist, die absolute Konvergenz von

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\vartheta) - f(0) - f'(0)\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta$$

und hieraus die Existenz von

$$\lim_{r=1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \frac{e^{-i\vartheta}}{(1-re^{-i\vartheta})^3} d\vartheta.$$

Man erhält daraus ohne Schwierigkeit, daß

$$\lim_{r=1} \Delta'(p; re^{i\vartheta_0})$$

existiert.

²³) Vgl. Einleitung.

differenzierbar ist. Es sei ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ die im Hilfssatz I definierten Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \Delta(p; e^{i\vartheta_0})| < \eta_1(\varepsilon), \\ \text{b)} \quad & |\Delta'(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \Delta'(p; e^{i\vartheta_0})| < \eta_2(\varepsilon) \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned}$$

wobei $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon)$ Funktionen von ε bezeichnen, die mit ε beliebig klein werden.

Man setze zunächst

$$A(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

$$B(z) = \frac{d}{dz} \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{(1-z)^2},$$

dann ist (vgl. Fußnote 22)

$$\begin{aligned} (\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta_0)^2 |A(re^{i(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})})| &\leq |1-\gamma|^2 \left| \frac{1+r\gamma}{1-r\gamma} \right| \leq 4 \left| \frac{1-\gamma}{1-r\gamma} \right| \leq 8, \\ (\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta_0)^2 |B(re^{i(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})})| &\leq |1-\gamma|^2 \frac{2}{|1-r\gamma|^2} \leq 8 \\ &(\gamma = e^{i(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})}; r < 1), \end{aligned}$$

man hat ferner ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \log \Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \log \Delta(p; e^{i\vartheta_0}) &= \lim_{r=1} [\log \Delta(p_\alpha; re^{i\vartheta_0}) - \log \Delta(p; re^{i\vartheta_0})] \\ &= \lim_{r=1} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\log p_\alpha(\cos \bar{\vartheta}) - \log p(\cos \bar{\vartheta})] A(re^{i(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})}) d\bar{\vartheta}, \end{aligned}$$

also nach Hilfssatz I

$$\begin{aligned} |\log \Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \log \Delta(p; e^{i\vartheta_0})| &\leq \frac{8}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\log p_\alpha(\cos \bar{\vartheta}) - \log p(\cos \bar{\vartheta})|}{(\cos \vartheta_0 - \cos \bar{\vartheta})^2} d\bar{\vartheta} \\ &< \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|\log p_\alpha(x) - \log p(x)|}{(\xi - x)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{4}{\pi} \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $|\Delta(p; e^{i\vartheta_0})|^2 = |\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0})|^2 = p(\cos \vartheta_0) = p(\xi) > 0$ ist, folgt hieraus ohne Schwierigkeit die Ungleichung a).

Um auch b) zu beweisen, genügt es offenbar, den Ausdruck

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \frac{\Delta'}{\Delta}(p; e^{i\vartheta_0}) = \lim_{r=1} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\log p_\alpha(\cos \bar{\vartheta}) - \log p(\cos \bar{\vartheta})] B(re^{i(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})}) d\bar{\vartheta}$$

abzuschätzen, was analog, wie oben, geschieht. Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

§ 3.

Darstellung der Methode.

1. Es sei $p(x)$ eine im Intervalle $(-1, 1)$ definierte Funktion der Klasse (A) , die an einer inneren Stelle $\xi = \cos \vartheta_0$ dieses Intervalls zweimal stetig differenzierbar ist. Es sei $F(x)$ eine Funktion, die im Intervalle $(-1, 1)$ samt

$$\frac{|F(x)|^2}{p(x)}$$

(L) integrabel ist und λ, μ bezeichnen zwei reelle Parameter. Ich stelle die folgende *Maximum-Aufgabe*:

Man betrachte die Gesamtheit aller Polynome n -ten Grades $A_n(x)$ mit reellen Koeffizienten, die der Bedingung

$$\int_{-1}^1 p(x) [A_n(x)]^2 dx = 1$$

unterworfen sind. Gefragt wird nach dem Maximum $M_n(p; \lambda, \mu)$ von

$$\left[\lambda A_n(\xi) + \mu \int_{-1}^1 F(x) A_n(x) dx \right]^2.$$

Die Antwort lautet:

$$M_n(p; \lambda, \mu) = \sum_{\nu=0}^n \left[\lambda Q_\nu(\xi) + \mu \int_{-1}^1 F(x) Q_\nu(x) dx \right]^2,$$

wobei die $Q_n(x)$ die zu der Belegungsfunktion $p(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome sind, für welche

$$\int_{-1}^1 p(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

ist. (Vgl. die Einleitung.)

Es sei in der Tat

$$A_n(x) = t_0 Q_0(x) + t_1 Q_1(x) + \dots + t_n Q_n(x),$$

wobei die t_ν beliebige reelle Zahlen bezeichnen, die der Bedingung,

$$\int_{-1}^1 p(x) [A_n(x)]^2 dx = t_0^2 + t_1^2 + \dots + t_n^2 = 1$$

genügen. Man hat

$$\lambda A_n(\xi) + \mu \int_{-1}^1 F(x) A_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^n t_\nu \left[\lambda Q_\nu(\xi) + \mu \int_{-1}^1 F(x) Q_\nu(x) dx \right],$$

woraus nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung unsere Behauptung ohne Schwierigkeit folgt.

Der Ausdruck $M_n(p; \lambda, \mu)$ läßt sich auch in der Form

$$(1) \quad M_n(p; \lambda, \mu) = K_n(p; \xi) \lambda^2 + 2S_n(p; \xi) \lambda \mu + H_n(p) \mu^2$$

schreiben, wobei

$$K_n(p; \xi) = \sum_{r=0}^n [Q_r(\xi)]^2,$$

$$S_n(p; \xi) = \sum_{r=0}^n Q_r(\xi) \int_{-1}^1 F(x) Q_r(x) dx,$$

$$H_n(p) = \sum_{r=0}^n \left[\int_{-1}^1 F(x) Q_r(x) dx \right]^2$$

ist; $K_n(p; \xi)$ bezeichnet hier die Quadratsumme der zu $p(x)$ gehörigen n ersten orthogonalen Polynome, $S_n(p; \xi)$ die n -te Partialsumme der Entwicklung von

$$\frac{F(x)}{p(x)}$$

an der Stelle ξ (in dem in der Einleitung festgestellten Sinne) und $H_n(p)$ die Quadratsumme der Koeffizienten dieser Entwicklung. Man hat nach der Besselschen Ungleichung

$$(2) \quad H_n(p) \leq H(p) = \int_{-1}^1 \frac{[F(x)]^2}{p(x)} dx.$$

2. Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ bezeichnen die im Hilfssatz I definierten, zu $p(x)$ gehörigen Funktionen. Dann können für die Funktionen $p_1(x)$ bzw. $p_2(x)$ und $F(x)$ ähnliche Maximum-Aufgaben gestellt werden, wie in 1. für $p(x)$ und $F(x)$. Es gelten ferner mit Rücksicht auf Hilfssatz I a) für die Lösungen $M_n(p_\alpha; \lambda, \mu)$ ($\alpha = 1, 2$) dieser Maximum-Aufgaben folgende Ungleichungen:

$$(3) \quad M_n(p_2; \lambda, \mu) \leq M_n(p; \lambda, \mu) \leq M_n(p_1; \lambda, \mu),$$

und zwar für jeden Wert der Parameter λ, μ . Man setze

$$M_n(p_\alpha; \lambda, \mu) = K_n(p_\alpha; \xi) \lambda^2 + 2S_n(p_\alpha; \xi) \lambda \mu + H_n(p_\alpha) \mu^2 \quad (\alpha = 1, 2),$$

wobei die $K_n(p_\alpha; \xi)$, $S_n(p_\alpha; \xi)$, $H_n(p_\alpha)$ analoge Bedeutung haben, wie $K_n(p; \xi)$ usw. Man hat also

$$(3') \quad K_n(p_2; \xi) \lambda^2 + 2S_n(p_2; \xi) \lambda \mu + H_n(p_2) \mu^2 \leq K_n(p; \xi) \lambda^2 + 2S_n(p; \xi) \lambda \mu + H_n(p) \mu^2 \leq K_n(p_1; \xi) \lambda^2 + 2S_n(p_1; \xi) \lambda \mu + H_n(p_1) \mu^2$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$(4) \quad K_n(p_2; \xi) \leq K_n(p; \xi) \leq K_n(p_1; \xi),$$

$$(5) \quad H_n(p_2) \leq H_n(p) \leq H_n(p_1)$$

und

$$[S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)]^2 \leq [H_n(p) - H_n(p_2)][K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)] \\ \leq H_n(p)[K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)]$$

$$(6) \quad \leq H(p)[K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)].$$

3. Ich behaupte nun, daß der Beweis unseres Theorems, welches in der Einleitung formuliert wurde, sich auf den Beweis der folgenden Sätze zurückführen läßt:

Satz I. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A), die an einer inneren Stelle ξ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es sei ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ bezeichnen die in Hilfssatz I definierten Funktionen. Dann gilt für die Quadratsummen*

$$K_n(p_\alpha; \xi) = \sum_{r=0}^n [Q_r^{(\alpha)}(\xi)]^2 \quad (\alpha = 1, 2)$$

der zu $p_\alpha(x)$ gehörigen Polynome $Q_r^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha = 1, 2$) an der Stelle ξ eine Ungleichung

$$0 \leq K_n(p_1; \xi) - K_n(p_2; \xi) < \eta(\varepsilon);$$

$\eta(\varepsilon)$ bezeichnet hier eine Funktion von ε , die nicht mehr von n abhängt und mit ε gegen 0 strebt.

Satz II. *Es sei $p_2(x)$ eine Funktion von der in Hilfssatz I eingeführten Form*

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)},$$

wobei $P_2(x)$ ein für $-1 \leq x \leq 1$ positives Polynom bezeichnet. Es seien $Q_n^{(2)}(x)$ die zu $p_2(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome und $F(x)$ bezeichne eine (L) integrable Funktion. Dann ist für alle x im Innern des Intervalles $-1, 1$ ($x = \cos \vartheta$; $0 < \vartheta < \pi$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{r=0}^n Q_r^{(2)}(x) \int_{-1}^1 F(\bar{x}) Q_r^{(2)}(\bar{x}) d\bar{x} \right. \\ \left. - \frac{1}{p_2(x) \sqrt{1-x^2}} \sum_{r=0}^n \cos r \vartheta \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \cos r \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} \right] = 0.$$

In der Tat nehmen wir für einen Augenblick diese Sätze als bewiesen an. Es sei $f(x)$ eine Funktion, für welche $p(x)[f(x)]^2$ (mithin auch $p(x)f(x)$) (L) integrabel ist. Man setze

$$F(x) = p(x)f(x).$$

Diese Funktion genügt alsdann den in 1. gestellten Bedingungen. Es sei ferner

$$f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \dots + c_n Q_n(x) + \dots \quad [c_n = \int_{-1}^1 p(x) f(x) Q_n(x) dx]$$

die Entwicklung von $f(x)$ nach den orthogonalen Polynomen $Q_n(x)$, die zu $p(x)$ gehören. Dann ist offenbar mit unserer oben eingeführten Bezeichnungsweise

$$S_n(p; \xi) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu Q_\nu(\xi)$$

und

$$S_n(p_2; \xi) = \sum_{\nu=0}^n Q_\nu^{(2)}(\xi) \int_{-1}^1 p(x) f(x) Q_\nu^{(2)}(x) dx,$$

außerdem ist $p(\xi) = p_2(\xi)$. Unser Theorem wird also, mit Rücksicht auf Satz II, bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)] = 0$$

ist. Nun folgt aber aus (6) wegen Satz I

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)| < \sqrt{H(p)} \eta(\varepsilon)$$

und da $\eta(\varepsilon)$ sich mit ε beliebig klein machen läßt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)] = 0.$$

Alles geht somit darauf hinaus, die Sätze I und II, die sich ja auf die speziellen Belegungsfunktionen $p_1(x)$ und $p_2(x)$ beziehen, zu beweisen.

Dies wird im Kapitel II gezeigt werden.

Kapitel II.

Über zwei Typen von Belegungsfunktionen.

In diesem Kapitel will ich zwei Typen von Belegungsfunktionen betrachten, bei welchen man die zugehörigen orthogonalen Polynome (wenigstens von einem gewissen Index an) direkt berechnen kann und für die auch die Entwicklungsfrage äußerst einfach zu erledigen ist. Diese sind

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} P_2(x)} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

wobei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ für $-1 \leq x \leq 1$ positive Polynome bezeichnen. Ich werde mich zunächst mit der Belegungsfunktion

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

beschäftigen, unter $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives Polynom verstanden. Aus ihr gehen die vorhin definierten Belegungsfunktionen hervor, indem man

$$P(x) = P_1(x)$$

bzw.

$$P(x) = (1 - x^2)P_2(x)$$

setzt.

§ 4.

Über die orthogonalen Polynome, die zu der Belegungsfunktion $\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$ gehören.

Es sei $P(x)$ ein Polynom k -ten (und nicht niedrigeren) Grades, welches im Innern des Intervalls $(-1, 1)$ positiv ist und an den Endpunkten $x = \pm 1$ höchstens von der ersten Ordnung verschwindet. Dann ist $P(\cos \vartheta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches (Kosinus-) Polynom k -ter Ordnung. Man hat somit nach einem Satz von Fejér²⁴⁾

$$P(\cos \vartheta) = |\tau(z)|^2 = [c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2 \quad (z = e^{i\vartheta}),$$

wobei

$$\tau(z) = \tau_0 + \tau_1 z + \dots + \tau_k z^k \quad (\tau_0 \neq 0, \tau_k \neq 0)$$

ein Polynom k -ten Grades mit reellen Koeffizienten und

$$c(\vartheta) = \tau_0 + \tau_1 \cos \vartheta + \dots + \tau_k \cos k\vartheta,$$

$$s(\vartheta) = \tau_1 \sin \vartheta + \dots + \tau_k \sin k\vartheta$$

konjugierte Kosinus- bzw. Sinuspolynome k -ter Ordnung bezeichnen, die die reellen und imaginären Komponenten von $\tau(e^{i\vartheta})$ sind, d. h.

$$\tau(e^{i\vartheta}) = c(\vartheta) + i s(\vartheta).$$

Es sei das Polynom $\tau(z)$ für $|z| \leq 1$ von 0 verschieden (mit eventueller Ausnahme der Punkte $z = \pm 1$, wo es höchstens von der ersten Ordnung verschwinden kann), ferner $\tau(0)$ reell und positiv. (Durch diese Forderungen ist $\tau(z)$ *eindeutig* bestimmt.) Ich behaupte dann den

Satz 1. Die zu der Belegungsfunktion

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$$

gehörigen orthogonalen Polynome, wobei $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives, für $x = \pm 1$ höchstens von der ersten Ordnung verschwindendes

²⁴⁾ Vgl. Fußnote 18).

Polynom k -ten Grades bezeichnet, lassen sich für $n > \frac{k}{2} - 1$ durch folgende Formel gewinnen:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Im e^{i(n+1)\vartheta} \tau(e^{-i\vartheta}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-s(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + c(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta]^{25}. \end{aligned}$$

Der rechtsstehende Ausdruck läßt sich auch in der Form

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} [\tau_0 \sin(n+1)\vartheta + \tau_1 \sin n\vartheta + \dots + \tau_k \sin(n+1-k)\vartheta]$$

schreiben und hieraus ist es ersichtlich, daß dieser stets ein Sinuspolynom $(n+1)$ -ter Ordnung darstellt; $Q_n(x)$ wird somit mit Hilfe der obigen Formel tatsächlich als ein Polynom n -ten Grades definiert.

Um diese Formel zu beweisen, genügt es bekanntlich, die Orthogonalitätseigenschaft

$$(1) \quad \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)} Q_n(x) x^r dx = 0 \quad (0 \leq r \leq n-1; n > \frac{k}{2} - 1)$$

und die weitere Gleichung

$$(2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)} Q_n^2(x) dx = 1 \quad (n > \frac{k}{2} - 1)$$

nachzuweisen.

Die Gleichungen (1) lassen sich offenbar in der folgenden Form schreiben:

$$\int_0^\pi \frac{\sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta)}{P(\cos \vartheta)} \sin \vartheta \cos^r \vartheta d\vartheta = 0 \quad (0 \leq r \leq n-1; n > \frac{k}{2} - 1);$$

diese Gleichungen sind, da $\sin \vartheta \cos^r \vartheta$ ein Sinuspolynom $(r+1)$ -ter Ordnung und umgekehrt ein solches Sinuspolynom stets von der Form $\sin \vartheta A(\cos \vartheta)$ ($A(x)$ ein Polynom r -ten Grades) ist, mit den folgenden äquivalent:

$$\int_0^\pi \frac{\sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta)}{P(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta)}{P(\cos \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta = 0$$

$$(1 \leq r \leq n; n > \frac{k}{2} - 1).$$

²⁵⁾ Man zeigt leicht, daß diese Formel (abgesehen von einem konstanten Faktor) auch für $n = \frac{k}{2} - 1$ (k gerade) gilt.

Die Gleichungen (1) sind also bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+1)\vartheta} \tau(e^{-i\vartheta})}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2} (e^{i\nu\vartheta} - e^{-i\nu\vartheta}) d\vartheta = 0 \quad (1 \leq \nu \leq n; n > \frac{k}{2} - 1)$$

ist. Das letzte Integral läßt sich aber (nach Multiplikation mit i) auf die folgende Form bringen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\vartheta}}{\tau(e^{i\vartheta})} (e^{i\nu\vartheta} - e^{-i\nu\vartheta}) i e^{i\vartheta} d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{z^n \left(z^\nu - \frac{1}{z^\nu} \right)}{\tau(z)} dz,$$

wobei das Integral rechter Hand im Cauchyschen Sinne zu nehmen ist. Da die Funktion

$$\frac{z^{n+\nu} - z^{n-\nu}}{\tau(z)}$$

für $|z| \leq 1$ (auch an den Stellen $z = \pm 1$) regulär ist, folgt hieraus die Behauptung.

Um auch die Gleichung (2) nachzuweisen, berechnen wir das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)} Q_n^2(x) dx &= \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta}{P(\cos \vartheta)} Q_n^2(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{[\sin \vartheta Q_n(\cos \vartheta)]^2}{P(\cos \vartheta)} d\vartheta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[\Im e^{i(n+1)\vartheta} \tau(e^{-i\vartheta})]^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2} d\vartheta. \end{aligned}$$

Andererseits ist unter z eine beliebige komplexe Zahl verstanden,

$$(\Im z)^2 = \frac{|z|^2 - \Re z^2}{2}.$$

Unser Integral reduziert sich somit auf das folgende:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|e^{i(n+1)\vartheta} \tau(e^{-i\vartheta})|^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2} d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \Re \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i(n+1)\vartheta} [\tau(e^{-i\vartheta})]^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2} d\vartheta.$$

Das erste Glied ist offenbar gleich 1, das zweite Integral läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(2n+2)\vartheta} \tau\left(\frac{1}{e^{i\vartheta}}\right)}{\tau(e^{i\vartheta})} d\vartheta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n+1} \tau\left(\frac{1}{z}\right)}{\tau(z)} dz.$$

Nun ist aber die Funktion

$$\frac{z^{2n+1} \tau\left(\frac{1}{z}\right)}{\tau(z)}$$

regulär für $|z| \leq 1^{26}$, mithin verschwindet dieses Integral. Daraus folgt die Gleichung (2) und somit der Satz 1.

§ 5.

Über die Quadratsumme der orthogonalen Polynome.

Unsere nächste Aufgabe ist, die Summe

$$K_n(x) = [Q_0(x)]^2 + [Q_1(x)]^2 + \dots + [Q_n(x)]^2$$

zu berechnen, welche, wie in § 3 gezeigt wurde, in unseren Betrachtungen eine wesentliche Rolle spielt. $Q_n(x)$ hat hier durchwegs die in § 4 angegebene Bedeutung, $x = \cos \vartheta$ bezeichnet eine feste Stelle im Innern des Intervalls $(-1, 1)$.

Man hat nach der Christoffelschen Formel²⁷⁾

$$K_n(x) = \frac{l_n}{l_{n+1}} [Q'_{n+1}(x) Q_n(x) - Q'_n(x) Q_{n+1}(x)],$$

wobei $l_n > 0$ den höchsten Koeffizienten von $Q_n(x)$, d. h. den Koeffizienten von x^n bezeichnet. Nun folgt aus Satz 1, mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$$

ein Polynom n -ten Grades von $\cos\vartheta$ mit dem höchsten Koeffizienten 2^n ist, daß für $n > \frac{k}{2} - 1$

$$l_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^n \tau_0,$$

also

$$\frac{l_n}{l_{n+1}} = \frac{1}{2},$$

d. h.

$$K_n(x) = \frac{Q'_{n+1}(x) Q_n(x) - Q'_n(x) Q_{n+1}(x)}{2}$$

ist.

Andererseits hat man

$$\sin\vartheta Q_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-s(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + c(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta]$$

und

$$\begin{aligned} & \cos\vartheta Q_n(\cos\vartheta) - \sin^2\vartheta Q'_n(\cos\vartheta) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-s'(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + c'(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta] \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) [s(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta + c(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta]. \end{aligned}$$

²⁶⁾ Auch für $z = \pm 1$.

²⁷⁾ Vgl. etwa O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin: Teubner, 1913), S. 381.

Daraus ergibt sich nach einer leichten Rechnung der folgende

Satz 2. Die Quadratsumme $K_n(x)$ der $n + 1$ ersten orthogonalen Polynome, die zu der Belegungsfunktion

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$$

gehören, wobei $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives — für $x = \pm 1$ höchstens von der ersten Ordnung verschwindendes — Polynom k -ten Grades bezeichnet, läßt sich für $n > \frac{k}{2} - 1$ aus folgender Formel entnehmen:

$$\pi \sin^3 \vartheta K_n(\cos \vartheta) = (n+1) \sin \vartheta P(\cos \vartheta) + A_n [c(\vartheta)]^2 + B_n [s(\vartheta)]^2 + C_n c(\vartheta) s(\vartheta) + D_n c'(\vartheta) s(\vartheta) + E_n c(\vartheta) s'(\vartheta),$$

wobei $c(\vartheta)$ und $s(\vartheta)$ die in § 4 definierten trigonometrischen Polynome bezeichnen und A_n, B_n, C_n, D_n, E_n von $P(x)$ unabhängig (nur von n und ϑ abhängig) sind; und zwar ist

$$A_n = -\sin(n+1)\vartheta \cos(n+2)\vartheta,$$

$$B_n = \sin(n+2)\vartheta \cos(n+1)\vartheta,$$

$$C_n = \cos(2n+3)\vartheta, \quad D_n = -E_n = \sin \vartheta.$$

§ 6.

Beweis von Satz I.

Ich will nun den im § 3, 3. formulierten Satz I beweisen, der sich auf die Quadratsumme der orthogonalen Polynome bezieht, die zu den im Hilfssatz I definierten Belegungsfunktionen

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)}$$

gehören; $P_1(x)$ und $P_2(x)$ bezeichnen hier zwei Polynome k_1 - bzw. k_2 -ten (und nicht niedrigeren) Grades, die für $-1 \leq x \leq 1$ positiv sind. Es sei

$$P_1(\cos \vartheta) = |\tau_1(e^{i\vartheta})|^2 = [c_1(\vartheta)]^2 + [s_1(\vartheta)]^2$$

und

$$P_2(\cos \vartheta) = |\tau_2(e^{i\vartheta})|^2 = [c_2(\vartheta)]^2 + [s_2(\vartheta)]^2,$$

wobei $\tau_1(z)$, $c_1(\vartheta)$ usw. analoge Bedeutung haben, wie $\tau(z)$, $c(\vartheta)$ usw. im § 4. Es ist $\tau_\alpha(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$ ($\alpha = 1, 2$).

Diese Belegungsfunktionen gehen aus der in §§ 4 und 5 behandelten hervor, indem dort

$$P(x) = P_1(x) \quad \text{bzw.} \quad P(x) = (1-x^2) P_2(x),$$

oder wegen

$$1 - \cos^2 \vartheta = \left| \frac{1-z^2}{2} \right|_{z=e^{i\vartheta}},$$

$$\tau(z) = \tau_1(z) \quad \text{bzw.} \quad \tau(z) = \frac{1-z^2}{2} \tau_2(z)$$

gesetzt wird. Ich setze nun der Symmetrie halber

$$\tau_2^*(z) = \frac{1-z^2}{2} \tau_2(z)$$

und

$$\tau_2^*(e^{i\vartheta}) = c_2^*(\vartheta) + i s_2^*(\vartheta).$$

Dann folgt aus Satz 2 für die in § 3, 3. eingeführten Quadratsummen $K_n(p_\alpha; x)$ ($\alpha = 1, 2$) die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} \pi \sin^3 \vartheta K_n(p_1; \cos \vartheta) &= \frac{(n+1) \sin^2 \vartheta}{p_1(\cos \vartheta)} + A_n [c_1(\vartheta)]^2 + B_n [s_1(\vartheta)]^2 \\ &\quad + C_n c_1(\vartheta) s_1(\vartheta) + D_n c_1'(\vartheta) s_1(\vartheta) + E_n c_1(\vartheta) s_1'(\vartheta), \\ \pi \sin^3 \vartheta K_n(p_2; \cos \vartheta) &= \frac{(n+1) \sin^2 \vartheta}{p_2(\cos \vartheta)} + A_n [c_2^*(\vartheta)]^2 + B_n [s_2^*(\vartheta)]^2 \\ &\quad + C_n c_2^*(\vartheta) s_2^*(\vartheta) + D_n c_2^{*'}(\vartheta) s_2^*(\vartheta) + E_n c_2^*(\vartheta) s_2^{*'}(\vartheta). \end{aligned}$$

Hierbei ist $n > \text{Max} \left(\frac{k_1}{2} - 1, \frac{k_2}{2} \right)$. Daraus ergibt sich insbesondere für $x = \xi = \cos \vartheta_0$ ($0 < \vartheta_0 < \pi$) mit Rücksicht auf Hilfssatz I c)

$$\begin{aligned} \pi \sin^3 \vartheta_0 [K_n(p_1; \xi) - K_n(p_2; \xi)] &= A_n^{(0)} \{ [c_1(\vartheta_0)]^2 - [c_2^*(\vartheta_0)]^2 \} \\ &\quad + B_n^{(0)} \{ [s_1(\vartheta_0)]^2 - [s_2^*(\vartheta_0)]^2 \} + \dots, \end{aligned}$$

wobei $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, \dots$ die Ausdrücke bezeichnen, die aus A_n, B_n, \dots für $\vartheta = \vartheta_0$ hervorgehen.

Wir wollen nun Hilfssatz II heranziehen. Es ist zunächst

$$\Delta(p_1; z) = \frac{1}{\tau_1(z)} \sqrt{\frac{1-z^2}{2}}$$

und

$$\Delta(p_2; z) = \frac{1}{\tau_2(z)} \sqrt{\frac{2}{1-z^2}},$$

d. h.

$$\tau_1(z) = \sqrt{\frac{1-z^2}{2}} \frac{1}{\Delta(p_1; z)}$$

und

$$\tau_2^*(z) = \frac{1-z^2}{2} \tau_2(z) = \sqrt{\frac{1-z^2}{2}} \frac{1}{\Delta(p_2; z)}.$$

Daraus folgt, daß

$$\lim \tau_1(e^{i\vartheta_0}) = \lim \tau_2^*(e^{i\vartheta_0})$$

existiert, wenn ε gegen 0 strebt und dasselbe gilt für die Ableitungen

Da die Ausdrücke $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, \dots$ für alle n beschränkt sind, folgt hieraus, daß die Differenz $K_n(p_1; \xi) - K_n(p_2; \xi)$ mit ε gegen 0 strebt.

Damit ist unser Satz I bewiesen.

Gleichzeitig ergibt sich ohne Mühe mit Rücksicht auf die Ungleichungen (4) von § 3 der folgende

Satz I'. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A), die an einer inneren Stelle $\xi = \cos \vartheta_0$ des Intervalls $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es seien ferner $Q_n(x)$ die zugehörigen orthogonalen Polynome. Dann ist*

$$\pi \sin^3 \vartheta_0 K_n(p; \xi) = \pi \sin^3 \vartheta_0 \sum_{r=0}^n [Q_r(\cos \vartheta_0)]^2 = \frac{(n+1) \sin^2 \vartheta_0}{p(\cos \vartheta_0)} + A_n^{(0)} [c(\vartheta_0)]^2 + B_n^{(0)} [s(\vartheta_0)]^2 + C_n^{(0)} c(\vartheta_0) s(\vartheta_0) + D_n^{(0)} c'(\vartheta_0) s(\vartheta_0) + E_n^{(0)} c(\vartheta_0) s'(\vartheta_0) + \varepsilon_n,$$

wobei $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, \dots$ die obige Bedeutung haben und

$$c(\vartheta_0) + i s(\vartheta_0) = \sqrt{\frac{1 - e^{2i\vartheta_0}}{2}} \frac{1}{\Delta(p; e^{i\vartheta_0})}$$

gesetzt wird (analog werden $c'(\vartheta_0)$ und $s'(\vartheta_0)$ definiert; vgl. § 2); endlich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \text{ (46)}.$$

§ 7.

Beweis von Satz II.

1. Wir wollen jetzt den letzten Schritt zum Beweis des in der Einleitung ausgesprochenen Theorems tun, indem wir den in § 3, 3. formulierten Satz II beweisen.

Es folgt zunächst aus Satz 1 für die zur Belegungsfunktion

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)}$$

gehörigen orthogonalen Polynome $Q_n^{(2)}(x)$ die folgende Darstellung

$$\sin \vartheta Q_n^{(2)}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Im e^{i(n+1)\vartheta} \tau_2^*(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Im e^{i(n+1)\vartheta} \frac{1 - e^{-2i\vartheta}}{2} \tau_2(e^{-i\vartheta}),$$

wobei $\tau_2(z)$ und $\tau_2^*(z)$ die in § 6 gegebene Bedeutung haben. Diese Formel gilt für

$$n > \frac{k_2 + 2}{2} - 1, \text{ d. h. für } n > \frac{k_2}{2},$$

²⁶⁾ Aus diesem Satz läßt sich auch die in der Fußnote ¹³⁾ angegebene asymptotische Formel der Polynome $Q_n(x)$ ableiten. Ferner ergibt sich hieraus der folgende interessante Grenzwertsatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_0^2(\xi) + Q_1^2(\xi) + \dots + Q_n^2(\xi)}{n+1} = \frac{1}{x p(\xi) \sqrt{1-\xi^2}}.$$

wenn k_2 den (echten) Grad von $P(x)$ bezeichnet²⁹⁾. Da ferner

$$\frac{1 - e^{-2i\vartheta}}{2} = i \sin \vartheta e^{-i\vartheta}$$

ist, folgt hieraus

$$Q_n^{(2)}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re e^{in\vartheta} \tau_n(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [c_2(\vartheta) \cos n\vartheta + s_2(\vartheta) \sin n\vartheta].$$

2. Ich will nun der Einfachheit halber die Indizes 2 überall weglassen und den Satz II folgendermaßen formulieren:

Es sei $P(x)$ ein für $-1 \leq x \leq 1$ positives Polynom k -ten (und nicht niedrigeren) Grades und $F(x)$ eine im Intervalle $(-1, 1)$ (L) integrable Funktion. Man bezeichne mit $s_n(x)$ die n -te Partialsumme der Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{\nu}(x) \int_{-1}^1 F(\bar{x}) Q_{\nu}(\bar{x}) d\bar{x},$$

wobei $Q_n(x)$ die zu der Belegungsfunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P(x)}$$

gehörigen orthogonalen Polynome bezeichnen.

Es bezeichne ferner $\sigma_n(x) = \sigma_n(\cos \vartheta)$ die n -te Partialsumme der Kosinusreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \nu \vartheta \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \cos \nu \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta}.$$

Dann ist für $-1 < x < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x) - P(x) \sigma_n(x)] = 0.$$

Hier ist

$$Q_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re e^{in\vartheta} \tau(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [c(\vartheta) \cos n\vartheta + s(\vartheta) \sin n\vartheta] \quad \left(n > \frac{k}{2}\right),$$

wobei

$$P(\cos \vartheta) = |\tau(e^{i\vartheta})|^2 \quad [\tau(z) \neq 0 \text{ für } |z| \leq 1, \tau(0) > 0]$$

und

$$\tau(e^{i\vartheta}) = c(\vartheta) + i s(\vartheta), \quad \text{d. h. } P(\cos \vartheta) = [c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2$$

ist. Man setze ferner

$$\tau(z) = \tau_0 + \tau_1 z + \dots + \tau_k z^k \quad (\tau_0 > 0, \tau_k \neq 0),$$

dann ist

$$Q_n(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\tau_0 \cos n\vartheta + \tau_1 \cos(n-1)\vartheta + \dots + \tau_k \cos(n-k)\vartheta].$$

²⁹⁾ Diese Formel gilt (abgesehen von einem konstanten Faktor) auch für $n = \frac{k_2}{2}$ (k_2 gerade). Vgl. die Fußnote ²⁵⁾.

Der Beweis von Satz II stützt sich ebenfalls auf die Christoffel'sche Formel³⁰⁾, wie der von Satz I. Man hat

$$s_n(x) = \frac{l_n}{l_{n+1}} \int_{-1}^1 F(\bar{x}) \frac{Q_{n+1}(x) Q_n(\bar{x}) - Q_n(x) Q_{n+1}(\bar{x})}{x - \bar{x}} d\bar{x},$$

wobei l_n den höchsten Koeffizienten von $Q_n(x)$ bezeichnet. Nun ist für $n > \frac{k}{2}$

$$l_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-1} \tau_0,$$

d. h.

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(\bar{x}) \frac{Q_{n+1}(x) Q_n(\bar{x}) - Q_n(x) Q_{n+1}(\bar{x})}{x - \bar{x}} d\bar{x} \quad \left(n > \frac{k}{2}\right).$$

Ich setze

$$\Phi_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = [c(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + s(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta] [c(\bar{\vartheta}) \cos n\bar{\vartheta} + s(\bar{\vartheta}) \sin n\bar{\vartheta}] \\ - [c(\vartheta) \cos n\vartheta + s(\vartheta) \sin n\vartheta] [c(\bar{\vartheta}) \cos(n+1)\bar{\vartheta} + s(\bar{\vartheta}) \sin(n+1)\bar{\vartheta}],$$

dann ist

$$s_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \frac{\Phi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} d\bar{\vartheta} = 0.$$

Man hat ferner nach bekannten Formeln

$$s_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta}.$$

Ich benutze jetzt das fundamentale Lemma aus der Theorie der Fourierschen Reihen, wonach für jede im Intervalle $(0, \pi)$ (L) integrable Funktion $\varphi(\vartheta)$ die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \varphi(\bar{\vartheta}) \cos n\bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \varphi(\bar{\vartheta}) \sin n\bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} = 0$$

gelten. Daraus folgt offenbar, da $\sin \frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}$ für $0 \leq \bar{\vartheta} \leq \pi$ oberhalb einer positiven Zahl bleibt (wenn ϑ eine feste Stelle im Innern des Intervalles $(0, \pi)$ bezeichnet), daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} d\bar{\vartheta} = 0$$

³⁰⁾ Vgl. Fußnote ²⁷⁾.

ist. Der zu beweisende Satz lautet somit

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \left[\frac{\Phi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} - P(\cos \vartheta) \frac{\sin(2n+1) \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta} = 0.$$

Ich führe jetzt die Funktion

$$\Psi_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = [c(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + s(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta] [c(\vartheta) \cos n\bar{\vartheta} + s(\vartheta) \sin n\bar{\vartheta}] \\ - [c(\vartheta) \cos n\vartheta + s(\vartheta) \sin n\vartheta] \cdot [c(\vartheta) \cos(n+1)\bar{\vartheta} + s(\vartheta) \sin(n+1)\bar{\vartheta}]$$

ein, die man offenbar auch in der Form

$$\Psi_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \{[c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2\} \{ \cos[(n+1)\vartheta + \varphi] \cos[n\bar{\vartheta} + \varphi] \\ - \cos[n\vartheta + \varphi] \cos[(n+1)\bar{\vartheta} + \varphi] \} \\ = -P(\cos \vartheta) \left\{ \sin \left[(2n+1) \frac{\vartheta + \bar{\vartheta}}{2} + 2\varphi \right] \sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2} + \sin(2n+1) \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2} \sin \frac{\vartheta + \bar{\vartheta}}{2} \right\}$$

schreiben kann, wobei φ nur von ϑ , nicht aber von $\bar{\vartheta}$ und n abhängt³¹).

Da ferner die folgenden Funktionen von $\bar{\vartheta}$

$$F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \frac{c(\vartheta) - c(\bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} \quad \text{und} \quad F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \frac{s(\vartheta) - s(\bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}}$$

(L) integrabel sind, folgt, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \frac{\Phi_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) - \Psi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} d\bar{\vartheta} = 0$$

ist. Der zu beweisende Satz läßt sich mithin auch folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \left[\frac{\Psi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} - P(\cos \vartheta) \frac{\sin(2n+1) \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\sin \frac{\vartheta + \bar{\vartheta}}{2}}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} + \frac{1}{2 \sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}} = 0,$$

man hat also

$$\frac{\Psi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}} - P(\cos \vartheta) \frac{\sin(2n+1) \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}}{2 \sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}} \\ = -P(\cos \vartheta) \sin \left[(2n+1) \frac{\vartheta + \bar{\vartheta}}{2} + 2\varphi \right] \frac{\sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}}.$$

³¹) Es ist nämlich $a \cos \bar{\vartheta} + b \sin \bar{\vartheta} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\bar{\vartheta} + \alpha)$, wobei α von $\bar{\vartheta}$ unabhängig ist.

Da die Funktion von $\bar{\vartheta}$

$$F(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \sin \left[(2n+1) \frac{\vartheta + \bar{\vartheta}}{2} + 2\varphi \right] \frac{\sin \frac{\vartheta - \bar{\vartheta}}{2}}{\cos \vartheta - \cos \bar{\vartheta}}$$

(L) integrel ist, folgt hieraus die Behauptung.

Damit ist Satz II und also auch unser in der Einleitung formuliertes Theorem bewiesen.

Kapitel III.

Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Jacobi- schen (hypergeometrischen) Polynomen.

Das in der Einleitung ausgesprochene und in Kapitel II bewiesene Theorem gestattet auch die Entwicklungen, die nach Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen fortschreiten, mit der trigonometrischen Entwicklung zu vergleichen. Die Jacobischen Polynome $J_n(\alpha, \beta; x)$ gehören zu der Belegungsfunktion

$$p(x) = p(\alpha, \beta; x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

wobei α und β größer als -1 sind, und lassen sich bekanntlich durch die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta J_m(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

charakterisieren (vgl. Jacobi, Werke 6, S. 184). Das im vorhergehenden bewiesene Theorem ist indessen nur für $-\frac{1}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{1}{2}$ auf diese Polynome anwendbar, da $p(x) = p(\alpha, \beta; x)$ nur in diesem Falle zu der Klasse (A) (vgl. Einleitung) gehört. Der Zweck dieses letzten Kapitels ist das Entwicklungstheorem auch für Jacobische Polynome zu beweisen, deren Indizes entweder der Bedingung: $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$, oder der Bedingung: $\alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$ genügen. Den Fall, wo von den Zahlen α, β die eine $> -\frac{1}{2}$ und die andere $< -\frac{1}{2}$ ist, konnte ich leider nicht erledigen.

Bevor ich auf diese Erweiterungen übergehe, schicke ich einige, im wesentlichen bekannte Hilfssätze über diese Polynome voraus.

§ 8.

Hilfssätze.

Der Zweck dieses Paragraphen ist den asymptotischen Wert von

$$(1) \quad K_n(p; x) = \sum_{r=0}^n [J_r(\alpha, \beta; x)]^2$$

für große n zu berechnen, wenn x eine innere Stelle des Intervalls $(-1, 1)$ bezeichnet.

Man hat zunächst nach der Christoffelschen Formel

$$(1') \quad K_n(p; x) = \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} [J'_{n+1}(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) - J'_n(\alpha, \beta; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x)],$$

wobei $l_n(\alpha, \beta)$ den Koeffizient von x^n in $J_n(\alpha, \beta; x)$ bezeichnet.

Es ist bekanntlich

$$(2) \quad p(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) = (-1)^n c_n(\alpha, \beta) \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta};$$

die (offenbar positive) Konstante $c_n(\alpha, \beta)$ läßt sich aus der Bedingung

$$\int_{-1}^1 p(\alpha, \beta; x) [J_n(\alpha, \beta; x)]^2 dx = 1$$

berechnen. Es ergibt sich

$$[c_n(\alpha, \beta)]^2 = \frac{2n + \alpha + \beta + 1}{2^{2n + \alpha + \beta + 1}} \frac{(n + \alpha + \beta)!}{n! (n + \alpha)! (n + \beta)!},$$

d. h. nach der Stirlingschen Formel

$$c_n(\alpha, \beta) = \frac{\left(\frac{e}{n}\right)^n}{2^{n + \frac{\alpha + \beta}{2}} \sqrt{2\pi}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

und

$$\frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha, \beta)} = 2n + O(1)^{32}.$$

Aus (2) folgt ferner

$$l_n(\alpha, \beta) = \frac{(2n + \alpha + \beta)!}{(n + \alpha + \beta)!} c_n(\alpha, \beta),$$

also ist

$$\frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{33}.$$

³²⁾ $O(a_n)$ ist das übliche Zeichen für eine Größe, die mit a_n dividiert bei wachsendem n beschränkt bleibt. Der Kürze halber wird $\Gamma(z + 1) = \Pi(z) = z!$ geschrieben.

³³⁾ Die etwas weniger besagende Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2},$$

sogar die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_n(\alpha, \beta)} = c > 0$$

gilt viel allgemeiner. Es sei $p(x)$ eine samt $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log p(x)$ (L) integrable Funktion und $l_n(p)$ sei der Koeffizient von x^n in $Q_n(x)$, wobei $Q_n(x)$ das zu $p(x)$ gehörige n -te orthogonale Polynom bezeichnet. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n(p)}{l_n(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} \frac{l_n(p)}{2^n} = e^{-\frac{1}{2\pi}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log p(x) dx$$

(Vgl. a. a. O.¹⁾ S. 207).

Nun liefert (2) durch Differentiation nach x

$$\begin{aligned} & p'(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) + p(\alpha, \beta; x) J_n'(\alpha, \beta; x) \\ &= (-1)^n c_n(\alpha, \beta) \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \\ &= -\frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha-1, \beta-1)} p(\alpha-1, \beta-1; x) J_{n+1}(\alpha-1, \beta-1; x) \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich unschwer

$$\begin{aligned} & p(\alpha, \beta; x) [J_{n+1}'(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) - J_n'(\alpha, \beta; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x)] \\ &= -p(\alpha-1, \beta-1; x) \left[\frac{c_{n+1}(\alpha, \beta)}{c_{n+2}(\alpha-1, \beta-1)} J_{n+2}(\alpha-1, \beta-1; x) J_n(\alpha, \beta; x) \right. \\ & \quad \left. - \frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha-1, \beta-1)} J_{n+1}(\alpha-1, \beta-1; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x) \right], \end{aligned}$$

d. h.

$$(1'') \quad K_n(p; x) = \frac{1}{1-x^2} \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} \left[\frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha-1, \beta-1)} J_{n+1}(\alpha-1, \beta-1; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x) \right. \\ \left. - \frac{c_{n+1}(\alpha, \beta)}{c_{n+2}(\alpha-1, \beta-1)} J_{n+2}(\alpha-1, \beta-1; x) J_n(\alpha, \beta; x) \right].$$

Wir wollen jetzt eine von G. Darboux herrührende asymptotische Formel der Polynome $J_n(\alpha, \beta; x)$ heranziehen³⁴). Es ist für $0 < \vartheta < \pi$

$$\begin{aligned} & J_n(\alpha, \beta; \cos \vartheta) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \vartheta}} \frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^\beta} \cos \left[\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Man setze hier der Kürze halber

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \sin \vartheta}} \frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\vartheta}{2}\right)^\beta} = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin \vartheta}} \frac{1}{\sqrt{p(\alpha, \beta; \cos \vartheta)}} = g(\alpha, \beta; \vartheta)$$

und

$$\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) = \gamma_n(\alpha, \beta; \vartheta) = \gamma_n,$$

dann ist

$$J_n(\alpha, \beta; \cos \vartheta) = g(\alpha, \beta; \vartheta) \cos \gamma_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (0 < \vartheta < \pi).$$

Daraus folgt u. a., daß die Polynome $J_n(\alpha, \beta; x)$ an einer festen Stelle im Innern des Intervalles $(-1, 1)$ beschränkt bleiben. Aus den obigen Formeln ergibt sich ferner

$$\frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} \frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha-1, \beta-1)} = \frac{n}{2} + O(1)$$

³⁴) Darboux, a. a. O.⁹), S. 23. Die von uns angegebene Formel folgt durch eine leichte Umformung aus der Darboux'schen.

und

$$\frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} \frac{c_{n+1}(\alpha, \beta)}{c_{n+2}(\alpha-1, \beta-1)} = \frac{n}{2} + O(1),$$

d. h.

$$(1''') \quad K_n(p; x) = \frac{n}{2(1-x^2)} [J_{n+1}(\alpha-1, \beta-1; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x) \\ - J_{n+2}(\alpha-1, \beta-1; x) J_n(\alpha, \beta; x)] + O(1) \\ (-1 < x < 1).$$

Man hat nun für $0 < \vartheta < \pi$

$$J_n(\alpha, \beta; \cos \vartheta) = g(\alpha, \beta; \vartheta) \cos \gamma_n,$$

ferner

$$J_{n+1}(\alpha, \beta; \cos \vartheta) = g(\alpha, \beta; \vartheta) \cos(\gamma_n + \vartheta) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$J_{n+1}(\alpha-1, \beta-1; \cos \vartheta) = g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) \cos\left(\gamma_n + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ = -g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) \sin \gamma_n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$J_{n+2}(\alpha-1, \beta-1; \cos \vartheta) = g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) \cos\left(\gamma_n + \vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ = -g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) \sin(\gamma_n + \vartheta) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Der Klammerausdruck in (1''') läßt sich also nach der Substitution $x = \cos \vartheta$ auch folgendermaßen schreiben:

$$g(\alpha, \beta; \vartheta) g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) [-\sin \gamma_n \cos(\gamma_n + \vartheta) + \cos \gamma_n \sin(\gamma_n + \vartheta)] \\ + O\left(\frac{1}{n}\right) = g(\alpha, \beta; \vartheta) g(\alpha-1, \beta-1; \vartheta) \sin \vartheta + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{p(\alpha, \beta; \cos \vartheta) p(\alpha-1, \beta-1; \cos \vartheta)}} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1-x^2}}{p(\alpha, \beta; x)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ (x = \cos \vartheta),$$

d. h.

$$K_n(p; x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{p(\alpha, \beta; x) \sqrt{1-x^2}} + O(1) \quad (-1 < x < 1).$$

§ 9.

Beweis.

Es sei $x = \cos \vartheta$, $\bar{x} = \cos \bar{\vartheta}$ und

$$\mathfrak{E}_n(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \sum_{\nu=0}^n J_\nu(\alpha, \beta; \cos \vartheta) J_\nu(\alpha, \beta; \cos \bar{\vartheta}) \\ - \frac{1}{p(\alpha, \beta; \cos \vartheta) \sin \vartheta} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^n \cos \nu \vartheta \cos \nu \bar{\vartheta},$$

dann lautet der zu beweisende Satz folgendermaßen: Es ist für jede Funktion $f(x)$, die im Intervalle $(-1, 1)$ samt $p(\alpha, \beta; x)[f(x)]^2(L)$ integral ist und für $-1 < \xi = \cos \vartheta_0 < 1$ ($0 < \vartheta_0 < \pi$)

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi p(\alpha, \beta; \cos \bar{\vartheta}) f(\cos \bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} = 0.$$

1. Es seien zunächst die Indizes α und β größer als $-\frac{1}{2}$. Dann läßt sich zu jeder ε die „Approximationsbelegung“ $p_2(x)$ genau so wie im Hilfssatz I ermitteln. Wir können also ähnlich wie in § 3 schließen. Es habe $K_n(p; \xi)$ und $K_n(p_2; \xi)$ die dortige Bedeutung, d. h. die Quadratsumme der $n + 1$ ersten, zu $p(x)$ bzw. $p_2(x)$ gehörenden orthogonalen Polynome für $x = \xi$. Dann ist nach § 3, (6) [$p(\alpha, \beta; x) = p(x)$]

$$(4) \quad \left| \int_0^\pi p(\cos \bar{\vartheta}) f(\cos \bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} \right|^2 \leq H(p) [K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)].$$

Unsere Behauptung wird somit bewiesen, wenn wir die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)] = 0$$

zeigen können.

Dies läßt sich in der Tat nachweisen, und zwar mittels einer von G. Darboux a. a. O.⁷⁾ ausgeführten Methode. Doch gestalten sich die hierbei erforderlichen Rechnungen äußerst langwierig; wir wollen hier also dieser Schwierigkeit aus dem Wege gehen, indem wir zeigen, daß es für unsere Zwecke vollkommen genügt, das Bestehen einer Ungleichung

$$(5) \quad 0 \leq K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi) < C$$

nachzuweisen; C bedeutet hier eine von n und $f(x)$ unabhängige positive Konstante.

In der Tat, nehmen wir (5) als bewiesen an. Dann folgt aus (4)

$$(4') \quad \left| \int_0^\pi p(\cos \bar{\vartheta}) f(\cos \bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} \right|^2 \leq CH = C \int_{-1}^1 p(x) [f(x)]^2 dx.$$

Es sei nun $A(x)$ irgendein Polynom (etwa r -ten Grades). Man hat offenbar

$$\sum_{r=0}^n J_r(\alpha, \beta; x) \int_{-1}^1 p(\bar{x}) A(\bar{x}) J_r(\alpha, \beta; \bar{x}) d\bar{x} = A(x) \quad (n \geq r)$$

und mit Rücksicht auf elementare Konvergenzsätze aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^n \cos r \vartheta \int_0^\pi p(\cos \bar{\vartheta}) A(\cos \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} \cos r \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} = p(\cos \vartheta) A(\cos \vartheta) \sin \vartheta$$

($0 < \vartheta < \pi$),

d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi p(\cos \bar{\vartheta}) A(\cos \bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} = 0.$$

Aus (4') ergibt sich somit, indem dort $f(x)$ durch $f(x) - A(x)$ ersetzt wird,

$$\begin{aligned} & \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi p(\cos \bar{\vartheta}) f(\cos \bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} \right|^2 \\ & \leq C \int_{-1}^1 p(x) [f(x) - A(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

wobei $A(x)$ ein beliebiges Polynom bezeichnet. Die rechte Seite läßt sich aber hier durch geeignete Wahl von $A(x)$ beliebig klein machen³⁵⁾, woraus tatsächlich (3) folgt.

Es bleibt uns also übrig, die Ungleichung (5) zu beweisen. In § 6 wurde die Formel

$$K_n(p_2; \xi) = \frac{n+1}{\pi \sqrt{1-\xi^2} p_2(\xi)} + O(1) = \frac{n+1}{\pi \sqrt{1-\xi^2} p(\xi)} + O(1)$$

abgeleitet, wobei $O(1)$ eine für alle n und ε beschränkte Größe bezeichnet. Mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen abgeleitete Formel

$$K_n(p; \xi) = \frac{n}{\pi \sqrt{1-\xi^2} p(\xi)} + O(1)$$

folgt hieraus ohne Schwierigkeit die Behauptung.

Damit ist unser Entwicklungstheorem für alle Entwicklungen bewiesen, die nach Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \beta; x)$ mit Indizes $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ fortschreiten.

2. Eine einfache Bemerkung ermöglicht aber, auf dieselbe Weise auch den Fall $-1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$ zu erledigen. In der Tat läßt sich dann genau so wie in § 1 eine Belegungsfunktion $p_2(x)$ ermitteln, die von derselben Form ist, wie die im Hilfssatz I festgestellte (d. h.

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)},$$

wobei $P_2(x)$ ein für $-1 \leq x \leq 1$ positives Polynom bezeichnet) und wörtlich dieselben Eigenschaften besitzt wie die dort angegebenen, mit dem einzigen Unterschied, daß

$$p(x) \geq p_2(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ist (und nicht \leq , wie dort). Dementsprechend erleiden die Ausführungen von § 3 eine leichte Modifizierung. Es ist mit der dortigen Bezeichnungsweise

$$M_n(p; \lambda, \mu) \leq M_n(p_2; \lambda, \mu)$$

³⁵⁾ Vgl. etwa Stekloff, a. a. O.³⁾, S. 214 und Fußnote.

und

$$\begin{aligned} & K_n(p; \xi) \lambda^2 + 2 S_n(p; \xi) \lambda \mu + H_n(p) \mu^2 \\ \leq & K_n(p_2; \xi) \lambda^2 + 2 S_n(p_2; \xi) \lambda \mu + H_n(p_2) \mu^2, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} K_n(p; \xi) & \leq K_n(p_2; \xi), \\ H_n(p) & \leq H_n(p_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)|^2 & \leq [H_n(p_2) - H_n(p)] [K_n(p_2; \xi) - K_n(p; \xi)] \\ & \leq H_n(p_2) [K_n(p_2; \xi) - K_n(p; \xi)], \end{aligned}$$

wobei $S_n(p; \xi)$ (wie in § 3) die n -te Partialsumme der Entwicklung von $\frac{F(x)}{p(x)}$ nach den zu $p(x)$ gehörigen orthogonalen Polynomen bezeichnet; $F(x)$ wird hierbei (wie dort) als (L) integrabel vorausgesetzt.

Es sei nun (wie in § 3)

$$F(x) = p(x) f(x),$$

dann ist

$$H_n(p_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(p_2) = \int_{-1}^1 \frac{[F(x)]^2}{p_2(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{[p(x)]^2}{p_2(x)} [f(x)]^2 dx.$$

vorausgesetzt, daß dieses Integral endlich ist. Den Ausdruck

$$K_n(p_2; \xi) - K_n(p; \xi)$$

können wir ähnlich wie vorher abschätzen. Unser Resultat bleibt also in Gültigkeit, vorausgesetzt, daß nicht nur das Integral

$$\int_{-1}^1 p(x) [f(x)]^2 dx,$$

sondern sogar

$$\int_{-1}^1 \frac{[p(x)]^2}{p_2(x)} [f(x)]^2 dx$$

oder, was dasselbe heißt,

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} [p(x) f(x)]^2 dx$$

endlich ist. (Offenbar folgt daraus, daß das Integral von $p(x) f(x)$ endlich ist.)

Indem wir zwei Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ als „äquikonvergent“ bezeichnen, wenn es eine von 0 verschiedene Zahl k gibt derart, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n (a_v - k b_v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{v=0}^n a_v - k \sum_{v=0}^n b_v \right] = 0$$

ist, können wir unser Entwicklungstheorem über Jacobische Polynome folgendermaßen formulieren:

Es seien

$$J_n(\alpha, \beta; x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome mit den Indizes α und β ($\alpha, \beta > -1$), die durch die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta J_m(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

zu charakterisieren sind. Es sei $f(x)$ eine Funktion, für welche das Lebesguesche Integral

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx$$

existiert. Dann ist die Entwicklung von $f(x)$ nach Jacobischen Polynomen

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(\alpha, \beta; x) \int_{-1}^1 (1-\bar{x})^\alpha (1+\bar{x})^\beta f(\bar{x}) J_n(\alpha, \beta; \bar{x}) d\bar{x} \quad (x = \cos \vartheta)$$

„äquikonvergent“ mit der Kosinuserwicklung von $(1 - \cos \vartheta)^\alpha (1 + \cos \vartheta)^\beta f(\cos \vartheta) |\sin \vartheta|$ für alle x im Innern des Intervalls $(-1, 1)$, vorausgesetzt, daß entweder

$$\alpha \text{ und } \beta \geq -\frac{1}{2} \text{ und } (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [f(x)]^2(L) \text{ integrabel}$$

oder

$$\alpha \text{ und } \beta \leq -\frac{1}{2} \text{ und } (1-x)^{2\alpha+\frac{1}{2}} (1+x)^{2\beta+\frac{1}{2}} [f(x)]^2(L) \text{ integrabel}$$

ist.

Unter den zahlreichen Anwendungen dieses Satzes, die sich von selbst bieten, hebe ich die folgende hervor:

Die Entwicklung einer stetigen Funktion nach den Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \beta; x)$ mit den Indizes $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ oder $-1 < \alpha, \beta \leq -\frac{1}{2}$ (oder insbesondere die Entwicklung einer stetigen Funktion nach den speziellen Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \alpha; x)$, wobei $\alpha > -1$ beliebig ist) ist im Innern des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$ nicht notwendig konvergent; sie ist aber stets summierbar mit Hilfe der Cesàroschen Mitteln von der Ordnung ε , wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet.

Berlin, März 1921.

(Eingegangen am 25. März 1921.)