Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Von Mitio NAGUMO.

(Gelesen am 16. Mai 1942.)

§ 1. Einleitung.

In dieser Note werden k-dimensionale Vektoren mit dicken Buchstaben bezeichnet. Wir sollen also unter

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

ein System der Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_k)$$

$$(i=1,2,\cdots,k)$$

verstehen.

O. Perron hat den Existenzbeweis der Lösungen einer gewöhnlicher Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ in der Form gegeben, dass sie in einen Bereich $a\leqq x<b$, $\omega_1(x)\leqq y\leqq\omega_2(x)$ eingeschlossen werden, wobei $\omega_i(x)$ den Bedingungen

$$D_{\pm}\omega_1(x)\leqq F(x,\omega_1(x)),\quad D_{\pm}\omega_2(x)\geqq F(x,\omega_2(x))$$

genügen[1]. Diese Hinsicht ist von *Hukuhara* äusserst ausgeführt[2]. Er nennt auch eine Teilmenge $\mathfrak{E}$ der Punktmenge $\mathfrak{D}$ des $(x,\boldsymbol{y})$-Raumes „*nach rechts majorant in* $\mathfrak{D}$," wenn jede in $\mathfrak{D}$ liegende Lösungskurve von (1) mit einem beliebigen Anfangspunkt $(x_0,\boldsymbol{y}_0)$ in $\mathfrak{E}$ immer in $\mathfrak{E}$ bleibt für $x\geqq x_0$.

Das Hauptziel der vorliegenden Note ist in einem Sinne notwendige und hinreichende Bedingungen zu geben, dass $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{D}$ nach rechts majorant ist. Die Bedingungen werden mittels Unterintegrals[3] gegeben, das sich auf der Idee von *Okamura* beruht, die er für die Unitätsbedingung der Lösung von (1) gebraucht hat[4].

§ 2. Zülassige Menge.

Definition 1. Eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $(x,\boldsymbol{y})$-Raumes heisst *nach*

(1) Math. Ann. 76 (1915).

(2) Nippon Sugaku-Buturigakkwai Kwaisi 5 (1931) u. 6 (1932) (japanisch). Vgl. Memoirs of the Fac. of Sci. Kyûsyû Imp. Univ. Ser. A. 2. (1941) 1–25.

(3) Die Definition wird in § 4 dieser Note gegeben.

(4) Memoirs of the College of Sci. Kyoto Imp. Univ. Ser. A. 23 (1941) 225–231.

rechts zulässig für die Differentialgleichung (1), wenn es für jeden Punkt (x_0, y_0) von $\mathfrak{M}$ eine positive Zahl l gibt, sodass eine in $\mathfrak{M}$ liegende Integralkurve von (1) mit dem Anfangspunkt (x_0, y_0) existiert mindestens für $x_0 \leqq x < x_0 + l$.

Linksseitige Zulässigkeit kann man ganz analog definieren.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{D}$ eine offene Menge im Raum von (x, y) und sei $\mathfrak{E}$ eine in $\mathfrak{D}$ abgeschlossene Menge, worauf $f(x, y)$ stetig ist. $\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann nach rechts zulässig für (1), wenn es für jeden Punkt (x_0, y_0) von $\mathfrak{E}$ und eine beliebige positive Zahl ε einen Punkt (x_1, y_1) von $\mathfrak{E}$ gibt mit der Beschaffenheit: $x_0 < x_1 < x_0 + \varepsilon$ und*

$$\left| \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - f(x_0, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Beweis: Es braucht nur die Hinlänglichkeit der Bedingungen zu beweisen, weil die Notwendigkeit klar ist. Für einen Punkt (x_0, y_0) von $\mathfrak{E}$ gibt es positive Zahlen l und M derart, dass der Bereich $\mathfrak{D}_1$: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + l$, $|y - y_0| \leqq (M+1) l$ in $\mathfrak{D}$ liegt, und in $\mathfrak{D}_1$ $|f(x, y)| \leqq M$ ist. $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n = (x_n, y_n)$ sei eine Punktfolge mit den Bedingungen: $x_{\nu-1} < x_\nu < x_{\nu-1} + \varepsilon$, $P_\nu \in \mathfrak{E}$ und

$$\left| \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{x_\nu - x_{\nu-1}} - f(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}) \right| < \varepsilon \quad (\varepsilon < 1). \tag{2}$$

Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller möglichen solchen Punkte P_n. Die obere Grenze ξ der Werte von x, für die $(x, y) \in \mathfrak{M}$ sind, genügt $\xi > x_0 + l$. Denn, wäre dies nicht der Fall, würde $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{D}_1$ enthalten. Es gibt einen Häufungspunkt (ξ, y^*) von $\mathfrak{M}$ auf $x = \xi$. Da $(\xi, y^*) \in \mathfrak{E}$ ist, so gibt es einen $(\xi_1, y_1^*) \in \mathfrak{E}$ derart, dass $\xi < \xi_1 < \xi + \varepsilon$ und

$$\left| \frac{y_1^* - y^*}{\xi_1 - \xi} - f(\xi, y^*) \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Es gibt aber eine endliche Folge $P_0, P_1, \cdots, P_n$ mit den Bedingungen $x_{\nu-1} < x_\nu < x_{\nu-1} + \varepsilon$ und (2) aus $\mathfrak{M}$, sodass P_n in die beliebige Nähe von (ξ, y^*) kommt. Also $x_n < \xi_1 < x_n + \varepsilon$ und nach (3)

$$\left| \frac{y_1^* - y_n}{\xi_1 - x_n} - f(x_n, y_n) \right| < \varepsilon.$$

Folglich $P_{n+1} = (\xi_1, y_1^*) \in \mathfrak{M}$ mit $\xi_1 = x_{n+1} > \xi$, gegen der Definition von ξ.

Nun sei $y = Y_N(x)$ die Gleichung des Streckenzuges, der eine Punktfolge $P_0, P_1, \cdots, P_n$ mit den Bedingungen $P_\nu \in \mathfrak{E}$, $x_{\nu-1} < x_\nu < x_{\nu-1} + \varepsilon$ und (2) verbindet, wobei $\varepsilon = \frac{1}{N}$ ist. Die Kurven $y = Y_N(x)$ liegen für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + l$ immer in $\mathfrak{D}_1$ und genügen der Ungleichung

$$|Y_N(x') - Y_N(x'')| \leqq (M+1)|x' - x''|.$$

Es gibt dann eine Teilfolge $\{N_i\}$ der natürlichen Zahlen, sodass $Y_{N_i}(x)$ für $N_i \to \infty$ in $\langle x_0, x_0 + l \rangle$ gleichmässig gegen eine stetige Kurve

$y=Y(x)$ konvergiert, die in $\mathfrak{E}$ liegt. Man kann nicht schwer beweisen, dass für genügend grosse N_i

$$\left|\frac{Y_{N_i}(x')-Y_{N_i}(x)}{x'-x}-f(x,\ Y(x))\right|<\varepsilon$$

ist, wenn $|x'-x|<\delta$, $x_0\leqq x\leqq x_0+l$, wobei $\delta>0$ genügend klein ist. Daraus folgt für $N_i\to\infty$ und dann für $\delta\to 0$, dass

$$\frac{d}{dx}Y(x)=f(x,\ Y(x))$$

für $x_0\leqq x<x_0+l$ und $Y(x_0)=y_0$. W.z.b.w.

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ von denselben Bedeutungen wie in Satz 1, Ist $\mathfrak{E}$ nach rechts zulässig für (1), so kann jede Integralkurve von (1), die in $\mathfrak{E}$ liegt, bis auf den Rand von $\mathfrak{D}$ fortsetzbar.*

Bewis: Dem Leser überlassen.

Als eine Anwendung von Satz 1 und Satz 2 bekommen wir nicht schwer:

Es sei $f(x,y)$ im Bereiche $a\leqq x<b$, $\omega_1(x)\leqq y\leqq\omega_2(x)$ stetig, wobei $\omega_i(x)$ in $a\leqq x<b$ stetig sind und genügen den Relationen

$$\underline{D}_+\omega_1(x)\leqq f(x,\ \omega_1(x)),\quad \overline{D}_+\omega_2(x)\geqq f(x,\ \omega_2(x)).$$

Es gibt dann mindestens eine in $a\leqq x<b$ stetige Lösung $y=y(x)$ von $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$ mit den Bedingungen $y(a)=y_0$, $(\omega_1(a)\leqq y_0\leqq\omega_2(a))$, und

$$\omega_1(x)\leqq y(x)\leqq\omega_2(x)$$

für *$a\leqq x<b$.*

§ 3. Operation $\overline{D}^+_{[f]}\varphi$.

Definition 2. Eine auf einer Menge $\mathfrak{D}$ im $(x,\ y)$-Raum definierte Funktion $\varphi(x,\ y)$ heisst *von der Klasse (L)*, genauer von der Klasse $(L,\ \alpha)$, in $\mathfrak{D}$, wenn sie in $\mathfrak{D}$ stetig ist und es eine Konstante α gibt, sodass für beliebige $(x,\ y_i)\in\mathfrak{D}$ $(i=1,\ 2)$ mit einem gemeinsamen Wert von x die Ungleichung besteht:

$$|\varphi(x,\ y_1)-\varphi(x,\ y_2)|\leqq\alpha|y_1-y_2|.$$

Ist $\varphi(x,\ y)$ eine reellwertige Funktion der Klasse (L) auf $\mathfrak{D}$, so hat der Grenzwert

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{\varphi(x_0+h,\ y(x_0+h))-\varphi(x_0,\ y_0)}{h}$$

immer denselben Wert, wenn nur $y(x)$ eine beliebige Funktion derart ist, dass $(x,\ y(x))\in\mathfrak{D}$ für $x_0<x<x_0+\delta$[5] und

$$\lim_{h\to+0}\frac{y(x_0+h)-y_0}{h}=f(x,\ y_0)$$

(5) δ bedeutet eine von $y(x)$ abhängige positive Zahl.

ist. *Diesen Grenzwert bezeichnen wir dann mit* $\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\,\varphi(x_0, y_0)$.

Also

$$\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\,\varphi(x_0, \boldsymbol{y}_0)=\varlimsup_{h\to+0}\frac{\varphi(x_0+h,\ \boldsymbol{y}_0+h\boldsymbol{f}_0)-\varphi(x_0, \boldsymbol{y}_0)}{h},$$

wenn nur $(x_0+h,\ \boldsymbol{y}_0+h\boldsymbol{f}_0)\in\mathfrak{D}$ für genügend kleine $h\geqq 0$, wobei $\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0)$.

Man kann leicht für die Funktionen der Klasse (L) folgende Relationen beweisen:

$$\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}[\varphi_1(x, \boldsymbol{y})+\varphi_2(x, \boldsymbol{y})]\leqq\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\varphi_1(x, \boldsymbol{y})+\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\varphi_2(x, \boldsymbol{y}).$$

$$\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}[\varphi_1(x, \boldsymbol{y})\cdot\varphi_2(x, \boldsymbol{y})]\leqq\varphi_1(x, \boldsymbol{y})\cdot\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\varphi_2(x, \boldsymbol{y})$$
$$+\varphi_2(x, \boldsymbol{y})\cdot\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\varphi_1(x, \boldsymbol{y}),$$

wenn $\varphi_i(x, \boldsymbol{y})\geqq 0$ $(i=1,\ 2)$ sind.

Nicht schwer kann man beweisen folgenden:

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{D}$ *eine Menge, worauf* $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ *stetig ist, und sei* $\varphi(x, \boldsymbol{y})$ *eine Funktion der Klasse* (L) *auf* $\mathfrak{D}$. $\mathfrak{E}$ *sei die durch* $\varphi(x, \boldsymbol{y})\leqq 0$ *definierte Teilmenge von* $\mathfrak{D}$. *Besteht für jeden Punkt von* $\mathfrak{E}$, *sodass* $\varphi(x, \boldsymbol{y})=0$, *die Ungleichung*

$$\bar{\boldsymbol{D}}^{+}{}_{[\boldsymbol{f}]}\varphi(x, \boldsymbol{y})<0,$$

so ist $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{D}$ *nach rechts majorant für* (1).

Als einen spezialen Fall erhält mann:

Satz 4. *Es sei* $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ *in* $a\leqq x<b$, $|\boldsymbol{y}|<+\infty$ *stetig und genüge der Ungleichung*

$$S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}))<\boldsymbol{D}_{+}\omega(x)$$

für $a\leqq x<b$, $S(\boldsymbol{y})=\omega(x)$, *wobei* $\omega(x)$ *eine in* $\langle a, b)$ *stetige Funktion und* $S(\boldsymbol{y})$ *eine Funktion der Klasse* (L), *sodass für eine beliebige nach rechts differentiierbare* $\boldsymbol{y}(x)$

$$D_{+}S(\boldsymbol{y}(x))\leqq S(D_{+}\boldsymbol{y}(x))$$

ist[6], *z.B.* $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{y}|$, *oder* $S(\boldsymbol{y})=\mathrm{Max}\,[y_1, \cdots; y_k]$, *udgl. Dann ist der durch* $S(\boldsymbol{y})\leqq\omega(x)$ *definierte Bereich* $\mathfrak{E}$ *nach rechts majorant für* (1).

Beweis: Man braucht nur zu setzen

$$\varphi(x, \boldsymbol{y})=S(\boldsymbol{y})-\omega(x).$$

§ 4. Bedingungen der Majoranten Menge mittels Unterintegrals.

Definition 3. Eine reellwertige Funktion $\varphi(x, \boldsymbol{y})$ auf $\mathfrak{D}$ heisst ein *Unterintegral von* (1), wenn φ zur Klasse (L) gehört und für jede

(6) Vgl. Hukuhara: Sur la Fonction $S(x)$ de M.E. Kamke, Jap. Jour. of Math. **17** (1941), 289.

Lösung $y(x)$ von (1) $\varphi(x, y(x))$ monoton abnimmt im erweiterten Sinne[7].

$\varphi(x, y)$ ist ein Unterintegral von (1) dann und nur dann, wenn φ zur Klasse (L) gehört und genügt der Ungleichung

$$\overline{D}^{+}{}_{[f]}\varphi(x, y) \leqq 0.$$

Hilfssatz 1. Es sei $\varphi(x, y, P)$ eine in einem Bereich $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $P \in \mathfrak{M}$ stetige Funktion von (x, y, P), wobei $\mathfrak{M}$ eine in sich kompakte Menge ist[8]. Ist $\varphi(x, y, P)$ ein Unterintegral von (1) in $\mathfrak{D}$ und gehört da zur Klasse $(L, 1)$, so sind $\underset{P\in\mathfrak{M}}{\mathrm{Max}}\ \varphi(x, y, P)$ und $\underset{P\in\mathfrak{M}}{\mathrm{Min}}\ \varphi(x, y, P)$ in $\mathfrak{D}$ Unterintegrale von (1).

Beweis: Dem Leser überlassen.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{D}$ auf einer offenen Menge $\mathfrak{D}^*$ (im (x, y)-Raum) abgeschlossen und nach beiden Seiten zulässig für (1), wobei $f(x, y)$ auf $\mathfrak{D}$ stetig ist.*

Eine in $\mathfrak{D}$ abgeschlossene Menge $\mathfrak{E}$ ist in $\mathfrak{D}$ nach rechts majorant dann und nur dann, wenn es in einer Umgebung des jeden Punktes von $\mathfrak{E}$ ein Unterintegral $\varphi(x, y)$ von (1) gibt, sodass $\varphi(x, y)=0$ für $(x, y) \in \mathfrak{E}$ und $\varphi(x, y)>0$ für $(x, y) \in \mathfrak{D}-\mathfrak{E}$.

Beweis: Da die Hinlänglichkeit der Bedingungen leicht zu beweisen ist, so beweisen wir nur die Notwendigkeit dieser Bedingungen.

Es sei (a, b) ein Punkt von $\mathfrak{E}$. Es gibt dann positive Zahlen l und M, sodass der Bereich $|x-a| \leqq l$, $|y-b| \leqq Ml$ ganz in $\mathfrak{D}^*$ liegt und da $|f(x, y)| \leqq M$ ist. $\mathfrak{D}_1$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{D}$ mit diesem Bereich. Für beliebige zwei Punkte $P=(x_P, y_P)$ und $Q=(x_Q, y_Q)$, sodass $x_P \leqq x_Q$, definieren wir die *Okamurasche Funktion* $D(P, Q)$ folgendermassen: Wir teilen das Intervall $\langle x_P, x_Q\rangle$ durch $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$, sodass $x_{i-1} \leqq x_i$, $x_0=x_P$ und $x_n=x_Q$. $P_i=(x_i, y_i)$ und $Q_i=(x_i, y_i')$ seien Punkte von $\mathfrak{D}_1$ auf derselben Hyperebene $x=x_i$ derart, dass Q_{i-1} und P_i auf einer in $\mathfrak{D}_1$ laufenden Integralkurve liegen, $P_0=P$ und $Q_n=Q$. (Vgl. Fig. 1.) $D(P, Q)$ sei die untere Genze der Werte $\sum_{i=0}^{n}|y_i-y_i'|$ für alle möglichen solchen Punkte P_i und Q_i, wobei n auch beliebig variert.

Wie man nicht schwer beweist, genügt $D(P, Q)$ folgenden Relationen.

i) $D(P, Q) \geqq 0$.

ii) $D(P, R) \leqq D(P, Q)+D(Q, R)$, wenn $x_P \leqq x_Q \leqq x_R$.

iii) $$|D(P, Q)-D(P', Q')| \leqq |y_P-y_{P'}|+|y_Q-y_{Q'}| + M(|x_P-x_{P'}|+|x_Q-x_{Q'}|).$$

iv) Ist $x_P=x_Q$, so ist $D(P, Q)=|y_P-y_Q|$.

(7) D. h., aus $x_1<x_2$ folgt, dass $\varphi(x_1, y(x_1)) \geqq \varphi(x_2, y(x_2))$.

(8) D. h., jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ hat mindestens einen Häufungspunkt in $\mathfrak{M}$.

v) $D(P, Q)=0$ dann und nur dann, wenn P und Q auf einer in $\mathfrak{D}_1$ laufenden Integralkurve liegen.

vi) $D(P, X)$ ist als eine Funktion von $X=(x, y)$ ein Unterintegral von (1) für $x \geqq x_P$.

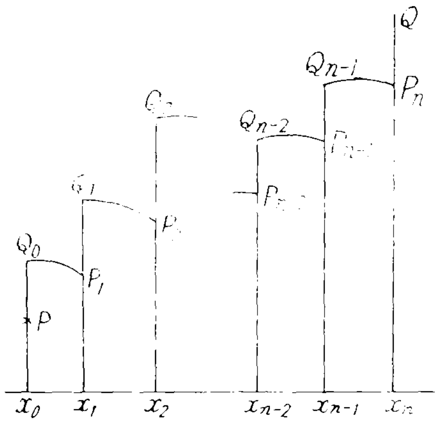

Fig. 1.

Für $x < x_P$ erweitern wir $D(P, X)$ durch

$$D^*(P, X)=\begin{cases} D(P, X) & \text{für} \quad x \geqq x_P, \\ |y-y_P|+M(x_P-x) & \text{für} \quad x < x_P. \end{cases}$$

$D^*(P, X)$ ist dann eine stetige Funktion von (P, X) für $P \epsilon \mathfrak{D}_1$, $X \epsilon \mathfrak{D}_1$, gehört zur Klasse $(L, 1)$ als eine Funkion von X und ist eine Unterintegral von (1).

Nun definieren wir $\varphi(X)$ durch

$$\varphi(X)=\operatorname*{Min}_{P \epsilon \mathfrak{E}_1} D^*(P, X),$$

wobei $\mathfrak{E}_1$ der Durchschnitt von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{D}_1$ ist. Nach Hilfassatz 1 ist dann $\varphi(X)$ auch ein Unterintegral von (1). Da $\mathfrak{E}$ nach rechts majorant ist, $\varphi(X)=0$ dann und nur dann, wenn $X \epsilon \mathfrak{E}_1$, und $\varphi(X)>0$ für $X \epsilon \mathfrak{D}_1-\mathfrak{E}_1$. W.z.b.w.

Als eine Anwendung bekommen wir:

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{E}$ in einem offenen Gebiet $\mathfrak{D}$ abgeschlossen und nach rechts zulässig für* (1). *Es bestehe die Ungleichung*

$$|f(x, y)-f(x, y^*)| \leqq K|y-y^*| \tag{4}$$

für jeden Punkt (x, y) von $\mathfrak{D}-\mathfrak{E}$ und den Punkt (x, y^*) von $\mathfrak{E}$ mit demselben Wert von x, sodass $|y-y^*|$ minimum ist. Dann ist $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{D}$ nach rechts majorant für (1).

Beweis: Sei (a, b) ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{E}$, so gibt es positive Zahlen l und M, sodass der Bereich $\mathfrak{D}_1$: $|x-a| \leqq l$, $|y-b| \leqq Ml$ in $\mathfrak{D}$ liegt und da $|f(x, y)|<M$ ist. Für einen festen $(x, y) \epsilon \mathfrak{D}_1-\mathfrak{E}$ und

einen veränderlichen $(x^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}_1$ wird $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*|+M|x-x^*|$ minimum nur für $x \leqq x^*$. Wir definieren also

$$\psi(x, \boldsymbol{y}) = \operatorname*{Min}_{(x^*, \boldsymbol{y}^*)\in\mathfrak{E}_1} [\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*| + M|x-x^*|\,], \tag{5}$$

wobei $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}\cdot\mathfrak{D}_1$. Es ist klar, dass $\psi(x, \boldsymbol{y}) = 0$ ist für $(x, \boldsymbol{y}) \in \mathfrak{E}_1$ und $\psi(x, \boldsymbol{y}) > 0$ für $(x, \boldsymbol{y}) \in D_1 - \mathfrak{E}_1$.

Wird $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*|+M|x-x^*|$ minimum für $x^* > x$, $(x^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathfrak{E}_1$ bei einem festen $(x, \boldsymbol{y})$, so gilt für $0 < h < x^* - x$,

$$|\boldsymbol{y}+h\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}^*| + M|x^*-(x+h)| < |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*| + M|x-x^*|,$$

also $\psi(x+h, \boldsymbol{y}+h\boldsymbol{f}) < \psi(x, \boldsymbol{y})$, folglich

$$\overline{D}^+[\boldsymbol{f}]\psi(x, \boldsymbol{y}) \leqq 0.$$

Wird dagegen $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*|+M|x^*-x|$ minimum für $x=x^*$, $(x^*, \boldsymbol{y}^*) \in \mathfrak{E}_1$ beim festen $(x, \boldsymbol{y})$, so gilt für genügend kleine $h > 0$

$$|\boldsymbol{y}+h\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}^*(x+h)| \leqq |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^*| + h[\,|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}^*)| + \delta(h)],$$

wobei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^*(x)$ eine durch $(x^*, \boldsymbol{y}^*)$ gehende Integralkurve ist, die für $x^* \leqq x < x^* + \varepsilon$ in $\mathfrak{E}$ liegt, und $\delta(h)$ mit h nach Null strebt. Also

$$\psi(x+h, \boldsymbol{y}+h\boldsymbol{f}) - \psi(x, \boldsymbol{y}) \leqq h[\,|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}^*)| + \delta(h)],$$

folglich nach (4) und (5), wobei $x = x^*$ ist,

$$\overline{D}^+[\boldsymbol{f}]\psi(x, \boldsymbol{y}) \leqq K\psi(x, \boldsymbol{y}).$$

Nun setzen wir $\varphi(x, \boldsymbol{y}) = \psi(x, \boldsymbol{y})\,e^{-Kx}$, so ist $\varphi(x, \boldsymbol{y})$ von der Klasse (L) und genügt in $\mathfrak{D}_1$ den Bedingungen: $\overline{D}^+[\boldsymbol{f}]\varphi(x, \boldsymbol{y}) \leqq 0$, $\varphi(x, \boldsymbol{y}) = 0$ für $(x, \boldsymbol{y}) \in \mathfrak{E}_1$ und $\varphi(x, \boldsymbol{y}) > 0$ für $(x, \boldsymbol{y}) \in \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{E}_1$. W.z.b.w.

§ 5. Vergleich eines Gleichungssystems mit einer einzigen Gleichung.

Hilfssatz 2. Es sei $F(x, y)$ im Bereich $\mathfrak{D}$: $a \leqq x < b$, $y < A(x)$ stetig und sei der Bereich $\mathfrak{E}$: $a \leqq x < b$, $y \leqq \omega(x)$ in $\mathfrak{D}$ nach rechts majorant für

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{6}$$

wobei $A(x)$ und $\omega(x)$ in $a \leqq x < b$ stetig sind und $\omega(x) < A(x)$. Es gibt dann ein Unterintegral $\varphi(x, y)$ von (6) in $\mathfrak{D}_1$: $a \leqq x \leqq b_1 < b$, $y \leqq A_1(x)$, wobei $A_1(x)$ in $\langle a, b_1\rangle$ stetig und $\omega(x) < A_1(x) < A(x)$, derart, dass $\varphi(x, y) > 0$ ist für $y > \omega(x)$, $\varphi(x, y) = 0$ für $y \leqq \omega(x)$ und *$\varphi(x, y)$ mit y monoton wächst im erweiterten Sinne.*

Beweis: Es gibt eine Konstante $M > 0$, sodass in $\mathfrak{D}_1$ $|F(x, y)| < M$ ist.

Es sei $D(P, X)$ die Okamurasche Funktion von (6) in $\mathfrak{D}_1$, wobei

$P=(\xi, \eta)$, $X=(x, y)$ und $\xi \leqq x$. Sind $\eta \leqq \omega(\xi)$, und $y \geqq \omega(x)$, so wächst $D(P, X)$ mit y monoton im erweiterten Sinne.

Denn es seien $X=(x, y)$ und $\tilde{X}=(x, \tilde{y})$ Punkte mit demselben Wert von x, sodass $x>\xi$ und $\tilde{y}>y \geqq \omega(x)$. Für eine beliebige $\varepsilon>0$ gibt es Punktfolge $\{P_i\}$ und $\{Q_i\}$ wie im Beweis von Satz 5, sodass $P_0=P$, $Q_n=\tilde{X}$ und

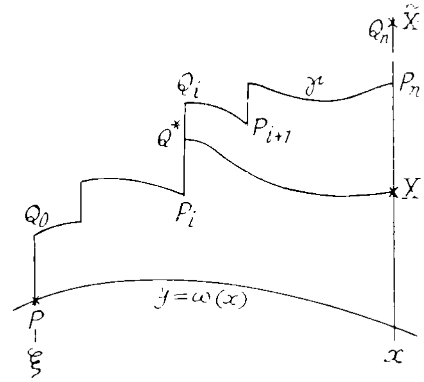

Fig. 2.

$$\sum_{i=0}^{n} P_iQ_i < D(P, \tilde{X}) + \varepsilon.$$

Es sei $\mathfrak{S}$ die Kurve, die aus Stücken Q_iP_{i+1} der Integralkurven und vertikalen Strecken P_iQ_i bestehen. Eine Integralkurve durch X trifft $\mathfrak{S}$ an einem Punkt Q^*. Q^* ist entweder auf einem Strecke P_iQ_i oder auf einem Stücke Q_iP_{i+1} der Integralkurve. Dann ist

$$D(P, X) \leqq P_0Q_0 + \cdots + P_iQ_i < D(P, \tilde{X}) + \varepsilon.$$

Folglich $D(P, X) \leqq D(P, \tilde{X})$.

Für $P \epsilon \mathfrak{C}_1$ und $X \epsilon \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{C}_1$ setzen wir

$$D^*(P, X) = \begin{cases} D(P, X), & \text{wenn } x \geqq \xi \\ y-\omega(x)+2M(\xi-x), & \text{wenn } x<\xi. \end{cases}$$

Wir definieren dann $\varphi(X)$ durch

$$\varphi(X) = \begin{cases} \underset{P \epsilon \mathfrak{C}_1}{\mathrm{Min}}\, D^*(P, X), & \text{wenn } X \epsilon \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{C}_1, \\ 0, & \text{wenn } X \epsilon \mathfrak{C}_1. \end{cases}$$

So besitzt $\varphi(X)$ alle im Satz erwähnten Eigenschaften. W.z.b.w.

Satz 7. *Es sei $F(x, y)$ im Bereich $a \leqq x < b$, $-\infty < y < \infty$ stetig und sei der Bereich $a \leqq x < b$, $y \leqq \omega(x)$ nach rechts majorant für die Gleichung*

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{6}$$

wobei $\omega(x)$ *in* $a\leqq x<b$ *stetig ist.*

Nun sei $f(x, y)$ *im Bereich* $a\leqq x<b$, $|y|<+\infty$ *stetig und* $S(x, y)$ *sei da von der Klasse* (L) *mit der Eigenschaft:*

$$(7) \qquad \overline{D}^{+}[f]S(x, y)\leqq F(x, S(x, y)).$$

Dann ist der durch $a\leqq x<b$, $S(x, y)\leqq\omega(x)$ *definierte Bereich* $\mathfrak{E}$ *nach rechts majorant für die Gleichung*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Beweis: Nach Hilfssatz 2 gibt es eine Funktion $\varphi(x, y)$ von der Klasses (L) im $a\leqq x\leqq b_1<b$, $|y|\leqq A$, sodass $\varphi(x, y)<0$ für $y>\omega(x)$ und $\varphi(x, y)=0$ für $y\leqq\omega(x)$.

$$(8) \qquad \overline{D}^{+}_{x}\varphi(x, y)\geqq 0,$$

und $\varphi(x, y)$ mit y monoton wächst im erweiterten Sinne. Wir setzen $\Phi(x, y)=\varphi(x, S(x, y))$. $\Phi(x, y)$ gehört dann zur (L). Nach (7) gilt für $h>0$

$$S(x+h, y+hf)\leqq S(x, y)+h[F(x, S(x, y))+\delta(h)],$$

wobei $\delta(h)$ mit h nach Null strebt. Also

$$\Phi(x+h, y+hf)-\Phi(x, y)\leqq\varphi(x+h, S+hF)-\varphi(x, S), +\alpha h\delta(h),$$

folglich nach (8)

$$\overline{D}^{+}[f]\Phi(x, y)\leqq 0.$$

$\Phi(x, y)$ ist also ein Unterintegral von (1), $\Phi(x, y)=0$ für $(x, y)\in\mathfrak{E}$ und $\Phi(x, y)>0$ für $(x, y)\in\mathfrak{D}-\mathfrak{E}$. $\mathfrak{E}$ ist dann nach rechts majorant. W. z.b.w.

Als ein spezialer Fall von 7 gilt:

Satz 8. *Es seien* $F(x, y)$ *und* $f(x, y)$ *Funktionen von denselben Eigenschaften wie in Satz 7, während die Ungleichung (7) durch*

$$(9) \qquad S(f(x, y))\leqq F(x, S(y))$$

ersetzt ist, wobei $S(y)$ *zur Klasse* (L) *gehört und genügt*

$$D_{+}S(y(x))\leqq S(D_{+}y(x))$$

für eine beliebige nach rechts differentiierbare Funktion $y(x)$, *z. B.* $S(y)=|y|$.

Ist der Bereich $a\leqq x<b$, $y\leqq\omega(x)$ *nach rechts majorant für (6), wobei* $\omega(x)$ *in* $a\leqq x<b$ *stetig ist, so ist der durch* $a\leqq x<b$, $S(y)\leqq\omega(x)$ *definierte Bereich nach rechts majorant für (1).*

Mathematisches Institut der Kaiserlichen
Universität zu Osaka.

(Eingegangen am 18. Mai 1942.)