Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Einleitung.

Wenn ein Polynom nur reelle Nullstellen besitzt, so besitzen seine sämtlichen Derivierten ebenfalls nur reelle Nullstellen. Wenn eine analytische Funktion Grenzwert von Polynomen mit nur reellen Nullstellen ist, so gehört sie einer scharf abgrenzbaren Klasse von ganzen Funktionen an[1]); auch die ganzen Funktionen dieser Klasse haben die Eigenschaft, daß keine der Derivierten nichtreelle Nullstellen besitzt. Welche Funktionen sind noch dieser Eigenschaft teilhaftig?

Diese Frage in voller Allgemeinheit zu beantworten dürfte nicht leicht sein, aber für zwei Funktionenklassen, die den rationalen ganzen Funktionen besonders nahe stehen, läßt sie sich vollständig entscheiden: für rationale gebrochene Funktionen und für solche ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht, die nur eine endliche Anzahl von Nullstellen haben. Die folgenden Sätze gehen über die angedeutete Fragestellung noch etwas hinaus.

I. *Es sei $R(z)$ eine rationale gebrochene Funktion. Die Anzahl der nicht reellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$, der n-ten Derivierten von $R(z)$, wächst mit n ins Unendliche, wenn keiner der folgenden beiden Ausnahmefälle vorliegt:*

1. *$R(z)$ hat im Endlichen nur einen Pol (er kann einfach oder mehrfach sein).*

2. *$R(z)$ hat im Endlichen nur zwei Pole, die in bezug auf die reelle Achse zueinander symmetrisch liegen.*

Im Ausnahmefall 1. *bleibt die Anzahl sämtlicher Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ beschränkt, wenn n ins Unendliche strebt. Wenn $R(z)$ sich im*

---

[1]) G. Pólya und J. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Crelles Journal **144**, S. 89–113.

Ausnahmefall 2. befindet und für reelles z reelle Werte annimmt, so bleibt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ *unverändert bei wachsendem n, von einem bestimmten Werte von n an.*

II. *Es seien* $P(z)$ *und* $Q(z)$ *Polynome, es sei* $Q(0)=0$ *und es sei*

$$G(z)=P(z)\,e^{Q(z)}$$

gesetzt. Die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$, *der n-ten Derivierten von* $G(z)$, *wächst mit n ins Unendliche, wenn keiner der folgenden beiden Ausnahmefälle vorliegt:*

1. $Q(z)$ *ist vom Grade* 1.

2. $Q(z)$ *ist vom Grade* 2, $Q(z)=bz-cz^2$, *wo b reell und c positiv ist.*

Im Ausnahmefall 1. *bleibt die Anzahl sämtlicher Nullstellen von* $G^{(n)}(z)$ *beschränkt, wenn n ins Unendliche strebt. Wenn* $G(z)$ *sich im Ausnahmefall* 2. *befindet und für reelles z reelle Werte annimmt, so nimmt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von* $G^{(n)}(z)$ *mit wachsendem n nie zu.*

Unter welchen Umständen die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ bzw. $G^{(n)}(z)$ mit n ins Unendliche wächst, unter welchen sie beschränkt bleibt, habe ich im Ausnahmefall 2. bei Zulassung von Funktionen, die für reelles z auch nichtreelle Werte annehmen, noch nicht vollständig entschieden. Das Hauptgewicht liegt aber auch nicht auf diesem Ausnahmefall, sondern auf der Methode, die im allgemeinen Fall zur Entscheidung, zu dem Nachweis von unendlich vielen nichtreellen Nullstellen führt. Diese Methode liefert noch viel mehr, nämlich die folgenden Sätze:

III. *Es sei* $F(z)$ *eine meromorphe Funktion. Man betrachte die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der Funktionen* $F(z), F'(z), F''(z), \ldots, F^{(n)}(z), \ldots$ *besteht. Die Gesamtheit der Häufungspunkte dieser Punktmenge hängt nur von der Lage der Pole von* $F(z)$ *ab (also z. B. nicht von deren Multiplizität). Zur Gesamtheit der Häufungspunkte gehört ein Punkt z dann und nur dann, wenn die beiden ihm nächstliegenden Pole von* $F(z)$ *in gleichem Abstand von ihm liegen.*

IV. *Es seien* $P(z)$ *und* $Q(z)$ *Polynome, es sei*

$$Q(z)=bz^q+b_1z^{q-1}+b_2z^{q-2}+\ldots+b_q,$$

$b\neq 0$, $q\geq 2$, *und es sei*

$$G(z)=P(z)\,e^{Q(z)}$$

gesetzt. Man betrachte die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der Funktionen $G(z), G'(z), G''(z), \ldots, G^{(n)}(z), \ldots$ *besteht. Die Gesamtheit der Häufungspunkte dieser Punktmenge hängt nur von* *dem Grad q und von den beiden höchsten Koeffizienten von $Q(z)$, von b und b_1 ab. Sie besteht nämlich aus q Halbstrahlen, die aus dem Punkte $z = -\frac{b_1}{qb}$ auslaufend die Ebene in q gleiche Winkelräume teilen. Diese Halbstrahlen laufen parallel den q als Vektoren aufgefaßten Wurzeln der Gleichung $bz^q + 1 = 0$.*

Die Gesamtheit der Häufungspunkte, die im Satz III erwähnt ist, hat eine auch rein geometrisch genommen merkwürdige Gestalt, die einer näheren Beschreibung wert ist. Es sei a ein Pol der gegebenen meromorphen Funktion $F(z)$. Diejenigen Punkte z der Ebene, die dem Pol a näher liegen, als allen übrigen Polen von $F(z)$, bilden den „Wirkungsbereich" von a. Wenn a und b zwei Pole von $F(z)$ sind, deren Wirkungsbereiche gemeinsame Grenzpunkte haben, so liegen dieselben in der Symmetrale der beiden Punkte a und b, d. h. in der Geraden, die die Verbindungsstrecke von a und b senkrecht trifft und halbiert. Der Wirkungsbereich von a ist daher das Innere von einem konvexen Polygon, das sich eventuell ins Unendliche erstreckt und in diesem Falle auch unendlich viele Seiten haben kann. Handelt es sich z. B. um die elliptische Funktion $\wp(z)$, so sind die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole untereinander kongruent, jedes bildet einen Fundamentalbereich, und hat im allgemeinen die Form eines zentrisch-symmetrischen Sechsecks mit drei Paaren von gleichen und parallelen Seiten, kann aber auch in ein rechtwinkliges Parallelogramm ausarten. Satz III besagt, daß die derivierte Menge der abzählbaren Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der meromorphen Funktion $F(z)$ und ihrer Derivierten $F'(z), F''(z), \ldots$ besteht, identisch ist mit der Menge sämtlicher Punkte der Grenzlinien, die die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole von $F(z)$ voneinander scheiden. Das Gebiet, das von dem Pol a beherrscht wird, ist identisch mit der Menge solcher Punkte z, in denen entwickelt die Funktion $F(z)$ eine Potenzreihe ergibt, die an der Konvergenzgrenze den einzigen singulären Punkt a hat. Satz III besagt also, daß solche und nur solche Punkte der Ebene Häufungspunkte der Nullstellen der sukzessiven Derivierten einer meromorphen Funktion sind, in denen entwickelt dieselbe eine Potenzreihe mit mehr als einem singulären Punkt an der Konvergenzgrenze erzeugt. Diese Formulierung bringt uns schon dem Beweis außerordentlich nahe.

Satz III gilt auch im Falle, wenn die meromorphe Funktion nur einen Pol hat. Dessen Wirkungsbereich hat keine Grenzen im Endlichen und die Nullstellen der sukzessiven Derivierten haben keinen Häufungspunkt im Endlichen. Für ganze Funktionen wird aber die Untersuchung sofort viel schwieriger[1a]). Den einfachsten Fall klärt Satz IV auf: die Nullstellen

[1a]) Ich bezeichne, wie üblich, den Wert a als Picardschen Ausnahmewert der ganzen transzendenten Funktion $g(z)$, wenn $g(z) - a$ nur endlich viele Nullstellen hat.

der sukzessiven Derivierten der dort betrachteten ganzen Funktion $G(z)$ häufen sich an genau denselben Stellen, wie die der sukzessiven Derivierten von irgendeiner der rationalen Funktionen, die man erhält, wenn man in

$$\left\{1-\frac{b}{m}\left(z+\frac{b_1}{qb}\right)^q\right\}^{-m}$$

$m=1$ oder 2 oder 3 ... setzt.

Übrigens werde ich noch mehr beweisen, als in den Sätzen III, IV ausgesprochen ist. Die Gesamtheit der Nullstellen der n-ten Derivierten strebt in beiden untersuchten Fällen mit unendlich wachsendem n gegen eine *Grenzlage*, in einem Sinne, den ich später genau definieren will. Diese Grenzlage ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte sämtlicher Nullstellen sämtlicher Derivierten. Ferner streben auch die Einsstellen oder irgendwelche a-Stellen der n-ten Derivierten gegen dieselbe Grenzlage wie die Nullstellen, und haben auch dieselbe Häufungseigenschaft wie die Nullstellen.

Die Untersuchung des infinitären Verhaltens der sukzessiven Derivierten $F(z), F'(z), F''(z), \ldots$ in einem *festen* Punkt z bildet die Theorie der Taylorschen Reihe. Durch die gegenwärtige Untersuchung wird eine natürliche Erweiterung dieser Theorie angeschnitten: dieselbe Funktionenfolge wird jetzt bei variablem z in einem Gebiet der z-Ebene auf ihre asymptotischen Eigenschaften hin untersucht.

Der Satz III (über meromorphe Funktionen) ergibt sich sozusagen ohne Rechnung, aus der Kombination geläufigster Resultate, durch eine ähnliche Anwendung des Stieltjes-Vitalischen Konvergenzsatzes, wie sie in einer wohlbekannten Arbeit von Jentzsch[2]) zu finden ist. Der Beweis des Satzes IV verläuft nach derselben Methode wie der des Satzes III, benötigt jedoch eine nicht ganz einfache asymptotische Rechnung.

Ein besonders einfaches Beispiel, das den Satz III erläutert, ergibt die rationale Funktion $\frac{1}{1+z^2}$, deren n-te Dirivierte die n reellen Nullstellen

---

Besitzen $g(z)$ und seine beiden ersten Derivierten, $g'(z)$ und $g''(z)$ Picardsche Ausnahmewerte, so ist $g(z)=P(z)e^{Q(z)}+a$, wo a eine Konstante ist, $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome sind. Daraus folgt das Korollar: Wenn $g(z)$ nicht die Funktion ae^{bz} ist, wo a, b Konstanten, so besitzt das Produkt $g(z)\,g'(z)\,g''(z)$ Nullstellen In einer etwas weniger vollständigen Form habe ich diese Sätze schon früher angekündigt. (Vgl. Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, Nyt Tidsskrift for Mat. B. (1921), S. 14–21.) Ich fand sie im Anschluß an eine briefliche Mitteilung von Herrn P. Csillag in Budapest. Der Beweis soll an anderem Ort ausgeführt werden. (Anmerkung bei der Korrektur. Juli 1921. G. P.)

[2]) R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktioner, Acta Mathematica 41 (1918), S. 219–251.

$z = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n+1}$, $\operatorname{cotg}\frac{2\pi}{n+1}$, $\operatorname{cotg}\frac{3\pi}{n+1}$, ... $\operatorname{cotg}\frac{n\pi}{n+1}$ besitzt. Es wurde durch A. A. Markoff bewiesen[3]), daß die Nullstellen der sukzessiven Derivierten von e^{-z^2}, die bis auf den Faktor e^{-z^2} mit den sogenannten Hermiteschen Polynomen identisch sind, jedem Punkte der reellen Achse beliebig nahe kommen. Dies liefert ein Beispiel zu Satz IV. Auf dieses wichtige Beispiel zugespitzt, würden sich die zur Begründung des Satzes IV nötigen Rechnungen beträchtlich abkürzen lassen. Daß die Derivierten der im Satze II betrachteten ganzen Funktionen nicht sämtlich nur reelle Nullstellen haben können, wenn von den dort präzisierten Ausnahmefällen 1. und 2. abgesehen wird, ist in früheren Arbeiten von mir gezeigt worden[4]). Mit den Nullstellen sukzessiver Derivierten hat sich insbesondere Herr Alander vielfach beschäftigt[5]). Seine wichtigsten Resultate beziehen sich auf ganze Funktionen vom Geschlechte 2, 3, 4 und 5, jedoch hat er auch manche beachtenswerte Gesichtspunkte, Beispiele, heuristische Betrachtungen und Vermutungen entwickelt, die auch die Gegenstände dieser Arbeit betreffen und die durch die gegenwärtigen Resultate zum Teil bestätigt werden. Insbesondere hat Herr Alander in seiner Abhandlung a. a. O.[5c]) die Frage aufgeworfen, die durch meinen Satz I beantwortet wird, und die mir übrigens den Anlaß zur Wiederaufnahme meiner Beschäftigung mit dem Gegenstand gegeben hat.

Meromorphe Funktionen.

1. Es sei $F(z)$ eine meromorphe Funktion. Ich betrachte die Folge der positiven Funktionen

$$(1) \qquad \left|\frac{F'(z)}{1!}\right|, \quad \left|\frac{F''(z)}{2!}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots \quad \left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots .$$

Ich will zwei Eigenschaften dieser Folge nachweisen.

a) Von der Kreisfläche $|z| \leqq R$ seien alle Punkte entfernt, die von einem Pol von $F(z)$ eine kleinere Entfernung als δ haben. So entsteht

[3]) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig u. Berlin 1912), vgl. S. 261, Lehrsatz 2. Für eine Verallgemeinerung in anderer Richtung vgl. G. Pólya, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem, Mathem. Zeitschrift **8** (1920), S. 171–181.

[4]) G. Pólya, a) Sur une question concernant les fonctions entières, Comptes Rendus **158** (1914), 330–333, b) Bemerkung zur Theorie der ganzen Funktionen, Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver. **24** (1915), 392—400.

[5]) M. Ålander, a) Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation, Thèse, Upsal (1914), b) Sur les zéros extraordinaires des dérivées des fonctions entières réelles, Arkiv för Math., Astr. och. Fys. **11** (1916), No. 15, c) Sur les zéros des dérivées des fonctions rationnelles et d'autres fonctions méromorphes, Arkiv för Math., Astr. och Fys. **14** (1920) No. 23.

ein abgeschlossener Bereich $[R, \delta]$. In irgendeinem Bereiche $[R, \delta]$ ist die Funktionenfolge (1) gleichmäßig beschränkt.

b) Die Folge (1) ist konvergent in jedem Punkte der Ebene, der zu keiner der Grenzlinien gehört, die die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole von $F(z)$ voneinander scheiden. Es ist

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|z-a|} \text{ oder } \frac{1}{|z-b|} \text{ oder } \frac{1}{|z-c|} \dots,$$

jenachdem der betrachtete Punkt im Wirkungsbereiche vom Pol a oder in dem von b oder in dem von $c \dots$ liegt. Die Konvergenz findet gleichmäßig statt in jedem abgeschlossenen Teilbereiche des Wirkungsbereiches von a, der den Punkt a nicht enthält. Ähnliches gilt für die Wirkungsbereiche der übrigen Pole $b, c, \dots$ von $F(z)$.

Der Wirkungsbereich von a wurde als die Gesamtheit derjenigen Punkte definiert, die näher an a liegen, als an irgendeinem anderen Pol von $F(z)$, „näher" im Sinne von $<$, nicht im Sinne von $\leqq$ verstanden. Der Wirkungsbereich von a enthält also nur innere Punkte.

Um a) zu beweisen, betrachte man den Bereich $\left[R + \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$; in diesem Bereich ist die Funktion $F(z)$ regulär und $F(z)$ hat darin ein wohlbestimmtes Maximum M. Um jeden Punkt z des Bereiches $[R, \delta]$ läßt sich ein Kreis mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ beschreiben, der vollständig im Bereiche $\left[R + \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ liegt. Nach einer klassischen Ungleichung der Funktionentheorie ist also

$$\left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqq \frac{M}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}, \qquad \left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{2M^{\frac{1}{n}}}{\delta}$$

in jedem Punkte von $[R, \delta]$, woraus die Behauptung a) folgt.

Um die Behauptung b) zu beweisen, betrachte ich den Pol a, der $q+1$-fach sein soll, und setze

$$F(z) = \frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\,A_1}{(z-a)^2} + \frac{2!\,A_2}{(z-a)^3} + \dots + \frac{q!\,A_q}{(z-a)^{q+1}} + \Phi(z),$$

wo $\Phi(z)$ an der Stelle a regulär ist ($A_q \neq 0$, $q \geqq 0$). Es ist

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \left\{\frac{n!\,A_0}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(n+1)!\,A_1}{(z-a)^{n+2}} + \dots + \frac{(n+q)!\,A_q}{(z-a)^{n+q+1}}\right\} + \Phi^{(n)}(z)$$

$$(2) \qquad \frac{F^{(n)}(z)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+q)A_q}{(z-a)^{n+q+1}} \Bigg\{ 1 + \frac{(z-a)^{q+1}}{(n+1)\dots(n+q)} \frac{(a-z)^n}{n!} \frac{\Phi^{(n)}(z)}{A_q}$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k}{A_q} \frac{(z-a)^{q-k}}{(n+k+1)\dots(n+q)} \Bigg\} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+q)A_q}{(z-a)^{n+q+1}} \{1 + \varphi_n(z)\}.$$

Ich bezeichne mit $\varrho(z)$ den Konvergenzradius der Potenzreihe, die durch Entwicklung von $\Phi(z)$ um den Punkt z entsteht. $\varrho(z)$ ist bekanntlich eine stetige Funktion von z. (Denn es sei $|z' - z| < \varrho(z)$, d. h. z' im Konvergenzkreis um z gelegen. Aus der Konstruktion des kleinsten und des größten Kreises vom Mittelpunkte z', der den Konvergenzkreis vom Mittelpunkt z berührt, ergibt sich, wie bekannt

$$\varrho(z) - |z' - z| \leqq \varrho(z') \leqq \varrho(z) + |z' - z|).$$

Ich betrachte die Funktion $\frac{|z-a|}{\varrho(z)}$. Sie ist in jedem Punkte z stetig, wo $\varrho(z) > 0$. Sie ist also sicherlich stetig im Wirkungsbereiche von a; daselbst ist ferner $\frac{|z-a|}{\varrho(z)} < 1$. Ich bezeichne mit $\mathfrak{A}$ einen abgeschlossenen, ganz im endlichen gelegenen Teilbereich des Wirkungsbereiches von a. Ich bezeichne mit ϱ_0 das Minimum von $\varrho(z)$ in $\mathfrak{A}$ und mit α das Maximum von $\frac{|z-a|}{\varrho(z)}$ daselbst. Es ist also

$$(3) \qquad \varrho(z) \geqq \varrho_0 > 0, \qquad \frac{|z-a|}{\varrho(z)} \leqq \alpha < 1 \qquad \text{in } \mathfrak{A}.$$

Man wähle ein festes β,

$$(4) \qquad \alpha < \beta < 1.$$

Man beschreibe um jeden Punkt z von $\mathfrak{A}$ einen Kreis vom Radius $\beta\varrho(z)$. Das durch die Flächen aller dieser Kreise überdeckte Gebiet heiße $\mathfrak{A}^*$. Ein in $\mathfrak{A}^*$ gelegener Punkt z hat von dem nächstgelegenen singulären Punkte der Funktion $\Phi(z)$ eine Entfernung, die $\geqq (1-\beta)\varrho_0$ ist. Die Funktion $\Phi(z)$ ist somit im Innern und am Rande von $\mathfrak{A}^*$ regulär, und es gibt eine Zahl M, so daß in jedem Punkte z von $\mathfrak{A}^*$

$$|\Phi(z)| \leqq M.$$

Um jeden Punkt z von $\mathfrak{A}$ gibt es aber einen Kreis vom Radius $\beta\varrho(z)$, der ganz in $\mathfrak{A}^*$ verläuft. Daher ist in jedem Punkt z von $\mathfrak{A}$

$$\frac{|\Phi^{(n)}(z)|}{n!} \leqq \frac{M}{(\beta\varrho(z))^n},$$

woraus nach (3) folgt

$$\left|\frac{(z-a)^n \Phi^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n M. \tag{5}$$

Es folgt aus den Formeln (5) (4) (2) für die durch die letztere erklärte Funktion $\varphi_n(z)$, daß

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0 \qquad \text{gleichmäßig in } \mathfrak{A}.$$

Dadurch ist Behauptung b) vollständig bewiesen.

In einem ganz im Endlichen gelegenen Bereich, wie z. B. im Bereich $\mathfrak{A}$, kann eine einzelne Funktion $F^{(n)}(z)$ nur eine endliche Anzahl Nullstellen haben. Aus der bewiesenen Behauptung b) folgt also die eine Hälfte des Satzes III: außerhalb der Grenzlinien, die die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole von $F(z)$ voneinander scheiden, haben die Nullstellen der Folge $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ... keinen Häufungspunkt.

2. Um den Beweis der zweiten, wichtigeren Hälfte des Satzes III möglichst klar zu gestalten, will ich einige Hilfssätze, die keinen Anspruch auf Neuheit erheben und die übrigens teilweise noch schärfer gefaßt werden könnten, explicite formulieren.

Hilfssatz I. Die Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_n(z)$, ... seien analytisch im Bereiche $\mathfrak{B}$, der nur innere Punkte enthält, und es soll daselbst die Funktionenfolge

$$\Re f_1(z),\ \Re f_2(z),\ \ldots\ \Re f_n(z),\ \ldots$$

(die Folge der reellen Teile) konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Es gebe ferner einen Punkt z_0 im Bereiche $\mathfrak{B}$, so so daß auch die Zahlenfolge

$$f_1(z_0),\ f_2(z),\ \ldots\ f_n(z_0),\ \ldots$$

konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots\ f_n(z), \ldots$$

in $\mathfrak{B}$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$.

Ich nehme an, $\mathfrak{B}$ sei der Einheitskreis $|z| < 1$ und $z_0 = 0$. Von diesem Fall kann man durch bekannte Schlußweisen (dachziegelartige Überdeckung mit Kreisen) zu einem beliebigen Gebiet übergehn. Als Teilgebiet $\mathfrak{B}'$, worin ich den Satz zu beweisen habe, nehme ich die Kreisfläche $|z| \leqq r$ an. Es sei $r < R < 1$. Nach Voraussetzung ist, wenn $\varepsilon > 0$ vorgegeben, für alle hinreichend große m und n

$$|f_m(0) - f_n(0)| < \varepsilon, \qquad |\Re f_m(z) - \Re f_n(z)| < \varepsilon$$

für alle Punkte z im Kreise $|z| \leqq R$. Daraus folgt, wenn die Carathéodorysche Ungleichung[6]) auf die Funktion $f_m(z) - f_n(z)$ angewendet wird,

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \frac{2R3\varepsilon}{R-r}$$

im Kreise $|z| \leqq r$, womit Hilfssatz I bewiesen ist.

Hilfssatz II. Es seien $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n, \dots$ positive Zahlen, $\lim_{n=\infty} \mu_n = \infty$. Die Funktionen $f_1(z), f_2(z), \dots f_n(z), \dots$, seien analytisch im Bereiche $\mathfrak{B}$, der nur innere Punkte enthält, und es soll daselbst die Folge positiver Funktionen

$$(6) \qquad |f_1(z)|^{\frac{1}{\mu_1}}, \ |f_2(z)|^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots \ |f_n(z)|^{\frac{1}{\mu_n}}, \dots$$

gegen eine stets von 0 verschiedene Grenzfunktion konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Dann kann man durch Auswahl einer passenden Bestimmung der Funktion $f_n(z)^{\frac{1}{\mu_n}}$ in einem Punkte z_0 von $\mathfrak{B}$ erreichen, daß die Folge der analytischen Funktionen

$$f_n(z)^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad f_2(z)^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots f_n(z)^{\frac{1}{\mu_n}}, \dots$$

in $\mathfrak{B}$ konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem Teilbereiche $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$, ferner, daß die Grenzfunktion im Punkte z_0 einen vorgeschriebenen Arcus erhält.

Es sei α eine vorgegebene reelle Zahl. Man wähle von den unendlich vielen Bestimmungen der Funktion $lg\, f_n(z)$ diejenige, für welche

$$-\pi + \mu_n\alpha < \Im\, lg\, f_n(z_0) \leqq \mu_n\alpha + \pi.$$

Das ist mindestens von einem gewissen n an möglich, sobald nämlich $f_n(z_0) \neq 0$ ist. Es folgt daraus

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Im\, lg\, f_n(z_0)}{\mu_n} = \alpha,$$

und weil die Konvergenz des reellen Teiles von $\frac{lg\, f_n(z_0)}{\mu_n}$ sowieso vorausgesetzt wurde, ergibt sich die Konvergenz der Funktionenfolge

$$(8) \qquad \frac{lg\, f_1(z)}{\mu_1}, \quad \frac{lg\, f_2(z)}{\mu_2}, \dots \frac{lg\, f_n(z)}{\mu_n}, \dots$$

in dem Punkte $z = z_0$.

Es sei $\mathfrak{B}'$ ein abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{B}$. Die Funktionenfolge (6) konvergiert in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig, nach Voraussetzung, und hat somit

[6]) Vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916), S. 89.

daselbst eine stetige Grenzfunktion. Diese verschwindet nicht in $\mathfrak{B}'$, ebenfalls nach Voraussetzung, hat also daselbst ein von 0 verschiedenes Minimum δ. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz gilt in $\mathfrak{B}'$, höchstens mit Ausnahme von endlich vielen n, $|f_n(z)|^{\frac{1}{\mu_n}} > \frac{\delta}{2}$. Insbesondere sind die Funktionen $f_n(z)$ alle von einem gewissen n an von 0 verschieden in $\mathfrak{B}'$ und folglich ist daselbst $lg\, f_n(z)$ regulär. Somit kann Hilfssatz I angewendet werden auf die Folge (8), deren reeller Teil in $\mathfrak{B}'$ nach Voraussetzung gleichmäßig konvergiert und die im Punkte $z = z_0$, nach (7), überhaupt konvergiert.

Somit ist die Konvergenz der Folge mit dem allgemeinen Glied

$$e^{\frac{lg\, f_n(z)}{\mu_n}} = (f_n(z))^{\frac{1}{\mu_n}}$$

bewiesen. Die Grenzfunktion hat im Punkte z_0 den vorgegebenen Arcus α, gemäß (7).

Im Hilfssatz II ist implicite die folgende geläufige Tatsache enthalten: sind $f(z)$ und $g(z)$ in einem Kreise analytisch, und ist daselbst $|f(z)| = |g(z)|$, ferner im Mittelpunkte z_0 des Kreises $f(z_0) = g(z_0)$, so sind $f(z)$ und $g(z)$ identisch.

3. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis, dessen Mittelpunkt an der Begrenzung des Wirkungsbereiches von a liegt. Ich behaupte, daß es unter den Funktionen $F(z)$, $F'(z)$ $F''(z), \ldots$ höchstens endlich viele gibt, die keine Nullstellen in $\mathfrak{K}$ haben.

Ich darf annehmen, daß $\mathfrak{K}$ keinen Pol von $F(z)$ enthält. Würde die ausgesprochene Behauptung nicht zutreffen, so gäbe es unendlich viele Funktionen

$$\left(\frac{F^{(m)}(z)}{m!}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad m = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n, \ldots \tag{9}$$

die im Kreise $\mathfrak{K}$ keinen Verzweigungspunkt hätten, also darin regulär wären. Ein Teil von $\mathfrak{K}$ liegt im Wirkungsbereiche von a. Es sei z_0 ein darin gelegener Punkt. Ich kann (nach Hilfssatz II) die Bestimmungen der Funktionen (9) so wählen, daß sie in z_0 konvergieren, und zwar gegen $\frac{1}{z_0 - a}$ (vgl. b)). Dann muß die Folge (9) (nach b) und nach Hilfssatz II) in einem gewissen Teil des Kreises $\mathfrak{K}$ gegen $\frac{1}{z-a}$ streben, nämlich in dem Teil, der im Wirkungsbereiche von a liegt. Der Kreis $\mathfrak{K}$ liegt aber sicherlich im Innern eines passend gewählten Gebietes $[R, \delta]$, von dem in a) die Rede war. Also ist die Folge (9) in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig beschränkt. Daher müßte, nach dem Stieltjesschen Spezialfall des grundlegenden Vitalischen Konvergenzsatzes, die Konvergenz der Folge (9) sich auf den ganzen Kreis $\mathfrak{K}$

ausdehnen, und die Folge (9) müßte im ganzen Kreis $\mathfrak{K}$ gegen $\frac{1}{z-a}$ streben. Der Kreis $\mathfrak{K}$ enthält aber noch einen Teil von dem Wirkungsbereiche eines von a verschiedenen Poles von $F(z)$, sagen wir von b. In diesem Teil von $\mathfrak{K}$ streben die absoluten Werte der Funktionen (9), wie vorher bewiesen (vgl. b)), gegen $\frac{1}{|z-b|} > \frac{1}{|z-a|}$. Wir kommen somit zu einem Widerspruch. Dieser löst sich nur dann, wenn wir zugeben, daß, eventuell mit Ausnahme von endlich vielen, alle Funktionen (9) im Kreise $\mathfrak{K}$ Verzweigungspunkte, also Nullstellen haben, w. z. b. w.

Ich habe noch etwas mehr bewiesen, als im Satz III ausgesprochen ist. Um das Bewiesene kurz formulieren zu können, will ich erklären, was ich unter der *Grenzlage* einer Folge von Punktmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ verstehe. Diese Punktmengen seien in der Ebene der komplexen Zahlen gelegen. Unter Umgebung eines Punktes z sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte z verstanden. Ich teile die Punkte der Ebene in drei Kategorien.

Ein Punkt gehört zur *ersten Kategorie*, wenn in einer gewissen Umgebung von ihm nur endlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Punkte besitzen.

Ein Punkt gehört zur *zweiten Kategorie*, wenn in jeder Umgebung von ihm unendlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Punkte besitzen, aber wenn in einer gewissen Umgebung von ihm unendlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ keine Punkte besitzen.

Ein Punkt gehört zur *dritten Kategorie*, wenn in jeder Umgebung von ihm sämtliche Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$, eventuell bis auf eine Ausnahme von endlich vielen, Punkte besitzen.

Man kann den Unterschied der drei Kategorien noch etwas anders ausdrücken. Ich bezeichne eine Punktfolge $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n, \ldots$ als eine *Repräsentantenfolge* der Mengenfolge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$, wenn z_1 der Menge $\mathfrak{M}_1$, z_2 der Menge $\mathfrak{M}_2, \ldots z_n$ der Menge $\mathfrak{M}_n, \ldots$ entnommen ist. Gibt es eine Repräsentantenfolge, die gegen z konvergiert, so gehört z zur *dritten* Kategorie; gibt es keine Repräsentantenfolge, die gegen z konvergiert, aber wohl eine solche, zu deren Häufungspunkten z gehört, so ist z von der *zweiten* Kategorie; gibt es keine Repräsentantenfolge, zu deren Häufungspunkten z gehört, so ist z von der *ersten* Kategorie.

Die Punkte der dritten Kategorie bilden die *kleinste Grenzlage* der Folge von Punktmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Die Punkte von der dritten und zweiten Kategorie zusammen bilden die *größte Grenzlage* derselben Folge. Wenn die kleinste und die größte Grenzlage zusammenfallen, d. h. wenn Punkte der zweiten Kategorie nicht existieren, so spreche ich kurz von einer *Grenzlage* der fraglichen Folge. Man kann sich den Begriff der Grenzlage etwa an dem Fall klarmachen, wo jedes $\mathfrak{M}_n$ sich auf einen einzigen Punkt reduziert, oder an funktionentheoretischen Beispielen. Gute Beispiele bieten dar die Nullstellen einer gleichmäßig konvergenten Folge analytischer Funktionen innerhalb des Konvergenzbereiches, die bekannte Gibbssche Erscheinung bei den Fourierreihen usw.

Es bedeute jetzt $\mathfrak{M}_n$ die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen von $F^{(n)}(z)$, von der n-ten Derivierten der meromorphen Funktion $F(z)$ besteht. Wie bewiesen wurde, gehört ein Punkt, der im Innern des Wirkungsbereiches irgendeines Poles a von $F(z)$ liegt, zur *ersten Kategorie* (vgl. unter 1); ein Punkt, der gemeinsamer Grenzpunkt der Wirkungsbereiche zweier verschiedener Pole ist, gehört zur dritten Kategorie (vgl. vorstehend). Die eingeführte Terminologie erlaubt unser Resultat so zu formulieren:

Zusatz I zum Satz III. *Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion, so strebt die Menge der Nullstellen von $F^{(n)}(z)$ einer bestimmten Grenzlage zu. Zu dieser Grenzlage gehört ein Punkt dann und nur dann, wenn die beiden ihm nächstliegenden Pole von $F(z)$ in gleichem Abstand von ihm liegen.*

Es gilt noch der

Zusatz II zum Satz III. *Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion, so strebt die Menge der a-Stellen von $F^{(n)}(z)$ einer bestimmten Grenzlage zu. Diese Grenzlage ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte der abzählbaren Punktmenge, die aus sämtlichen a-Stellen sämtlicher Funktionen $F(z)$, $F'(z), \ldots F^{(n)}(z), \ldots$ besteht. Endlich ist die fragliche Grenzlage für alle a-Werte dieselbe. Es gilt somit die auf die 0-Stellen bezügliche Beschreibung der Grenzlage im Satz III auch für die a-Stellen.*

Zusatz II geht daraus hervor, daß die Funktionenfolge

$$|F'(z)-a|, \quad \left|\frac{F''(z)-a}{2!}\right|^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left|\frac{F^{(n)}(z)-a}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}, \ldots$$

dieselben beiden Eigenschaften hat, wie die Folge (1): in jedem Bereich $[R, \delta]$ bleibt sie gleichmäßig beschränkt, und im Innern des Wirkungsbereiches irgendeines Poles von $F(z)$ ist

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{F^{(n)}(z)-a}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty}\left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

Ganze Funktionen von endlichem Geschlecht mit endlich vielen Nullstellen.

4. Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome vom Grade p bzw. q

10) $$P(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$$

(11) $$Q(z)=\frac{z^q}{q}+b_2 z^{q-2}+b_3 z^{q-3}+\dots+b_{q-1} z$$

$p \geqq 0$, $q \geqq 2$. Um Satz IV zu beweisen, genügt es, ganze Funktionen

(12) $$G(z)=P(z)e^{Q(z)}$$

zu betrachten, wo $P(z)$, $Q(z)$ die Form (10), (11) haben. Denn wenn auch eine im Satz IV erwähnte ganze Funktion $G(z)$ nicht die vorgelegte spezielle Form hätte, so lassen sich immer drei Kontsanten a, b, c bestimmen, so daß $aG(bz+c)$ sicherlich die vorgelegte Form hat. Ich werde zwei Eigenschaften der durch (10) (11) (12) gegebenen ganzen Funktion $G(z)$ nachweisen.

A. Zu jedem R ($R>0$) und zu jedem a läßt sich eine Konstante M bestimmen, derart daß im Kreise $|z| \leqq R$

$$\left|\frac{(G^{(n)}(z)-a)\,n^{\frac{n-p}{q}+\frac{1}{2}}e^{-\frac{n}{q}}}{n!}\right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} < M.$$

B. Man teile die Ebene durch q Halbstrahlen, die von dem Punkt $z=0$ aus durch die q Wurzeln der Gleichung $z^q=-1$ gezogen ins Unendliche laufen, in q Winkelräume. Es sei a fest gegeben, $e^{\frac{2\pi i}{q}}=\omega$ gesetzt. Dann besteht

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{(G^{(n)}(z)-a)\,n^{\frac{n-p}{q}+\frac{1}{2}}e^{-\frac{n}{q}}}{n!}\right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} = \left|e^{z\omega^{-r}}\right|$$

in demjenigen unter den beschriebenen Winkelräumen, dessen Winkelhalbierende durch den Punkt ω^r geht.

Da die Funktionen e^z, $e^{z\omega^{-1}}, \dots e^{z\omega^{-q+1}}$ sich nicht bloß in einer multiplikativen Konstante unterscheiden, folgt aus A., B. nach der Beweismethode, die ich unter 1, 2, 3 dargelegt habe, daß die Menge der Häufungsstellen sämtlicher a Stellen von $G(z)$, $G'(z)$, $G''(z)\dots G^{(n)}(z),\dots$ identisch ist mit den q Halbstrahlen, die die Gebiete voneinander scheiden, worin der Grenzwert verschiedenen analytischen Charakter hat; ferner daß diese q Halbstrahlen auch die Grenzlage der a-Stellen von $G^{(n)}(z)$ bilden. Für $a=0$ ergibt sich insbesondere der Satz IV.

Die Eigenschaft A. ist sehr leicht nachzuweisen. Es kann zunächst eine positive Konstante A bestimmt werden, so daß für

(13) $$|z| \leqq R, \qquad |u| \geqq 1$$

(14) $$|P(z+u)| \leqq e^{A|u|^{q-1}}.$$

Ferner gibt es eine Konstante B, so daß für $|z| \leqq R$

$$\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} |Q^{(k)}(z)| \leqq B.$$

Daher ist, wenn beide Bedingungen (13) erfüllt sind,

$$(15) \qquad \left|Q(z+u)\right| = \left|\frac{u^q}{q} + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{u^k}{k!} Q^{(k)}(z)\right| \leqq \frac{|u^q|}{q} + B|u|^{q-1}$$

und, $A + B = C$ gesetzt, unter denselben Bedingungen (13) gemäß (14) (15)

$$|G(z+u)| \leqq \exp\left(\frac{|u|^q}{q} + C|u|^{q-1}\right).$$

(Ich schreibe $e^z = \exp(z)$.) Daher ist

$$\left|\frac{G^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqq \frac{\exp\left(\frac{|u|^q}{q} + C|u|^{q-1}\right)}{|u|^n}.$$

Setzen wir hierin $|u|^q = n$. Es ergibt sich

$$(16) \qquad \left|\frac{G^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqq e^{\frac{n}{q}} n^{-\frac{n}{q}} e^{Cn^{1-\frac{1}{q}}}.$$

Beachten wir noch, daß

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} \left|\frac{n^{\frac{n-p}{q}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{q}}}{n!}\right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} = \lim_{n=\infty} \exp\left\{n^{\frac{1}{q}}\left(1-\frac{1}{q}\right)(1-\lg n)\right\} = 0.$$

Aus (16) (17) ergibt sich leicht die Behauptung A.

Die Behauptung B. konnte ich hingegen nur durch eine asymptotische Rechnung nachweisen, die ziemlich weitläufig ist und eigentlich mehr beweist, als es genau genommen nötig wäre. Ich schicke zwei Bemerkungen voraus. Erstens: es genügt mit Rücksicht auf (17) die Behauptung B. nur im Falle $a = 0$ zu beweisen. Zweitens: es genügt nur einen Winkelraum unter den q fraglichen zu betrachten, etwa den Winkelraum

$$-\frac{\pi}{q} < \operatorname{arc} z < +\frac{\pi}{q}.$$

Zu den übrigen $q-1$ Winkelräumen kann man dann durch Drehungen der Ebene übergehn.

5. Erstreckt man die Integration um eine den Punkt $w = 0$ umfassende doppelpunktslose geschlossene Kurve, so ist

$$\frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(z+w)}{w^n} \frac{dw}{w}.$$

Der Beweis der Behauptung A. unter 4 legt die Variablenvertauschung $w \,|\, n^{\frac{1}{q}} w$ nahe; es ist

$$\frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i n^{\frac{n}{q}}} \int \frac{G(z+n^{\frac{1}{q}} w)}{w^n} \frac{dw}{w}. \tag{18}$$

Setzen wir $\frac{1}{k!} Q^{(k)}(z) = Q_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots, q$. Dann ist (vgl. (11))

$$Q(z+n^{\frac{1}{q}} w) = \frac{w^q n}{q} + w^{q-1} n^{1-\frac{1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z).$$

$$\frac{G^{(n}(z)}{n!} = \tag{19}$$

$$= \frac{n^{\frac{p}{q}} e^{z n^{1-\frac{1}{q}}}}{2\pi i n^{\frac{n}{q}} e^{-\frac{n}{q}}} \int \frac{P(z+n^{\frac{p}{q}} w)}{n^{\frac{p}{q}}} \left(\frac{e^{\frac{w^q-1}{q}}}{w}\right)^n e^{(w^{q-1}-1) n^{1-\frac{1}{q}} z} \exp\left\{\sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z)\right\} \frac{dw}{w}.$$

Man bezeichne mit $\mathfrak{G}$ dasjenige Gebiet der w-Ebene, worin

$$\left|\frac{e^{\frac{w^q-1}{q}}}{w}\right| < 1. \tag{20}$$

$\mathfrak{G}$ enthält nur innere Punkte. Die q-ten Einheitswurzeln gehören *nicht* zu $\mathfrak{G}$. Man beachte, daß solche Punkte w, worin beide Ungleichungen

$$\text{(21)} \quad \frac{1}{|w|} < 1, \qquad \text{(22)} \quad \left|e^{\frac{w^q-1}{q}}\right| < 1$$

zugleich erfüllt sind, sicherlich zu $\mathfrak{G}$ gehören. (21) ist im Außenraume des Einheitskreises erfüllt. Um (22) zu diskutieren, setze ich

$$w = s e^{i\psi} \qquad (s > 0,\ \psi \text{ reell}) \tag{23}$$

und betrachte die in Polarkoordinaten s, ψ gegebene Kurve

$$s^q = \frac{1}{\cos q\psi}. \tag{24}$$

Die Kurve (24) hat q verschiedene Äste; man teile die w-Ebene in $2q$ gleiche Winkelräume, deren gemeinsame Spitze der Punkt $w = 0$ ist, so daß einer davon durch die positive reelle Achse halbiert wird; in jedem zweiten Winkelraum liegt eine q-te Einheitswurzel (in der Winkelhalbierenden) und verläuft ein Ast der Kurve (24), der in der betreffenden Einheitswurzel den Kreis $|w| = 1$ berührt (vgl. Figur für $q = 3$). Die Kurve (24) zerschneidet die w-Ebene in $q + 1$ Stücke: in einem derselben, das den Punkt $w = 0$ enthält und nach dem üblichen Sprachgebrauch als ein „Sterngebiet" zu bezeichnen ist, ist $\mathfrak{R}\,(w^q - 1) = s^q \cos q\psi - 1 < 0$, also (22) erfüllt. In den q übrigen, untereinander kongruenten Gebieten ist $\Re(w^q - 1) > 0$; an der Kurve (24) selber ist $\Re(w^q - 1) = s^q \cos q\psi - 1 = 0$.

Betrachten wir das regelmäßige q-Eck $\mathfrak{Q}$, das den Kreis $|w| = 1$ in den q-ten Einheitswurzeln berührt. Sieht man von diesen q Berührungspunkten ab, so sind entlang des geschlossenen Linienzuges $\mathfrak{Q}$ beide Bedingungen (21) (22) erfüllt. Für (21) ist das klar. Betrachten wir diejenige Seite von $\mathfrak{Q}$, die durch den Punkt $w = 1$ geht. Sie hat in Polarkoordinaten die Gleichung $s \cos\psi = 1$. Daß (22) entlang von $\mathfrak{Q}$ erfüllt ist, kommt somit auf das Bestehen der Ungleichung

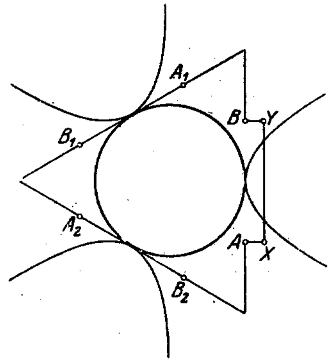

Fig. 1.

$$\frac{\cos q\psi}{(\cos\psi)^q} - 1 < 0 \qquad \text{für } 0 < \psi < \frac{\pi}{2q}$$

heraus, die man etwa aus der in denselben Grenzen geltenden Ungleichung

$$\frac{d}{d\psi}(\lg\cos q\psi - q\lg\cos\psi) = -q(\operatorname{tg} q\psi - \operatorname{tg}\psi) < 0$$

beweist. — Daß die polygonale Linie $\mathfrak{Q}$, abgesehen von seinen q zum Nullpunkt nächsten Punkten, ganz im Gebiet $\mathfrak{G}$ verläuft, ist wichtig für das Folgende.

In den q-ten Einheitswurzeln $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{q-1}$ $\left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}}\right)$ ist $\exp\{(w^{q-1} - 1)\, n^{1-\frac{1}{q}} z\}$ das ausschlaggebende Glied unter dem Integralzeichen rechts in (19). Es sei

(25) $$z = re^{i\varphi}$$

(26) $$r > 0, \quad -\frac{\pi}{q} < \varphi < +\frac{\pi}{q}.$$

Es ist für

$$w = \omega^\nu, \qquad 1 \leqq |\nu| \leqq \frac{q}{2}$$

(27) $$\Re(w^{q-1} - 1)z = r\left\{\cos\left(-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right) - \cos\varphi\right\}.$$

Es ist gemäß (26)

$$\left|-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right| \geqq \frac{2\pi|\nu|}{q} - |\varphi| > \frac{2\pi|\nu|}{q} - \frac{\pi}{q} \geqq \frac{\pi}{q} > |\varphi|,$$

$$\left|-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right| \leqq \frac{2\pi|\nu|}{q} + |\varphi| < \pi + \frac{\pi}{q} \leqq 2\pi - \frac{\pi}{q} < 2\pi - |\varphi|,$$

woraus, nach (27)

$$r^{-1}\Re(w^{q-1}-1)z = \cos\left(\frac{2\pi\nu}{q}+\varphi\right) - \cos\varphi < 0 \tag{28}$$
$$\text{für } w = \omega^{\nu}, \quad \nu \not\equiv 0 \pmod q$$

folgt.

Diese Verhältnisse veranlassen uns, den geschlossenen Linienzug

$$AXYBA_1B_1A_2B_2\ldots A_{q-1}B_{q-1}A$$

der Figur (worin $q=3$) als Integrationskurve für das Integral (19) zu wählen. Ich will diesen Linienzug mit $\mathfrak{Q}'$ bezeichnen. $\mathfrak{Q}'$ entsteht aus dem regelmäßigen q-Eck $\mathfrak{Q}$ durch eine rechteckige Ausbuchtung $AXYB$ d r durch $w=1$ gehenden Seite. Setzt man

$$A = 1-\beta i, \qquad B = 1+\beta i, \qquad X = 1+\xi-\beta i, \qquad Y = 1+\xi+\beta i,$$

so ist der Integrationsweg durch die Angabe der beiden reellen Zahlen ξ, β $(\beta > 0)$ vollständig festgelegt. Die genaue Wahl von ξ und β behalte ich mir vor, nur folgendes sei im voraus bemerkt: β wird fest gewählt. Die Wahl von ξ wird von n abhängen. Doch wird eine Zahl α fest gewählt, derart, daß die beiden horizontalen Strecken mit den Endpunkten

$$1-\alpha+i\beta, \quad 1+\alpha+i\beta; \quad 1-\alpha-i\beta, \quad 1+\alpha-i\beta \tag{29}$$

ganz im Gebiete $\mathfrak{G}$ liegen, wo (20) erfüllt ist, und es wird stets mindestens von einem gewissen n an $-\alpha < \xi < +\alpha$ sein[7]).

Unter diesen Bedingungen ist entlang $YBA_1B_1\ldots A_{q-1}B_{q-1}AX$ für ein gewisses $\gamma, \gamma > 0$

$$\int\limits_{YB\ldots AX} \frac{P(z+n^{\frac{1}{q}}w)}{n^{\frac{p}{q}}} \left(e^{\frac{\frac{w^q-1}{q}}{w}}\right)^n e^{(w^{q-1}-1)n^{1-\frac{1}{q}}z} \exp\left\{\sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z)\right\}\frac{dw}{w} = O\left(e^{-\gamma n^{1-\frac{1}{q}}}\right) \tag{30}$$

und zwar gleichmäßig in z, wenn $z = re^{i\varphi}$ auf einen abgeschlossenen endlichen Teil des Winkelraumes (26) beschränkt ist. Man kann nämlich, gemäß (28), eine Zahl $c > 0$ und an der durch ω^{ν} gehenden Seite von $\mathfrak{Q}$ zwei Punkte A_ν, B_ν fixieren $(\nu = 1, 2, \ldots q-1)$, die ω^{ν} unter sich enthalten, derart, daß an der Strecke $A_\nu B_\nu$ für alle in Betracht kommende z

$$\Re(w^{q-1}-1)z < -c.$$

Die Linienzüge $YBA_1, B_1A_2, \ldots, B_{q-2}A_{q-1}, B_{q-1}AX$ liegen im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$, wo (20) erfüllt ist, also ist an diesen Zügen das Integral sogar $O(e^{-kn})$ für ein passend gewähltes k.

[7]) Für $q=2$ sind die Verhältnisse etwas anders, aber viel einfacher. Man kann als Integrationskurve für (19) etwa das Quadrat wählen, das den Kreis $|w|=1$ in den Punkten $w=1, i, -1, -i$ berührt.

Ich setze jetzt $w = 1 + \eta$ und entwickle nach Potenzen von η

$$(31)\quad \left(\frac{w^q - 1}{q} - \lg w\right) n + (w^{q-1} - 1)\, n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z) = \sum_0^{\infty} A_k \eta^k$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ sind Polynome in $n^{\frac{1}{q}}$ und z. Es ist insbesondere

$$(32)\quad \begin{cases} A_0 = \sum\limits_{k=0}^{q-2} n^{\frac{k}{q}} Q_k(z), \\ A_1 = (q-1)\, n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum\limits_{k=0}^{q-2} k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z), \\ A_2 = \frac{q}{2} n + \frac{(q-1)(q-2)}{2} n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum\limits_{k=0}^{q-2} \frac{k(k-1)}{2} Q_k(z)\, n^{\frac{k}{q}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Es ist zu ersehen, daß $A_3, A_4, \ldots$ als höchste Potenz von n $n^1 = n^{\frac{q}{q}}$ enthalten. Ich bemerke ferner, daß $A_q, A_{q+1}, A_{q+2}, \ldots$ von z unabhängig sind, indem

$$A_q = \frac{n}{q}(1 + (-1)^q), \quad A_{q+1} = (-1)^{q+1} \frac{n}{q+1}, \quad A_{q+2} = (-1)^{q+2} \frac{n}{q+2}, \ldots$$

Ich werde die Ungleichung nötig haben: für $|\eta| < \frac{1}{2}$ ist

$$(33)\quad |A_{q+1}\eta^{q+1} + A_{q+2}\eta^{q+2} + \ldots| < \eta^{q+1} n.$$

Ich setze jetzt

$$(34)\quad \eta = \delta + \frac{it}{\sqrt{n}},$$

$$(35)\quad \delta = B_1 n^{-\frac{1}{q}} + B_2 n^{-\frac{2}{q}} + \ldots + B_q n^{-1},$$

$$(36)\quad A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \ldots + A_q\eta^q$$
$$= C_0 + \frac{it}{\sqrt{n}} C_1 - t^2 C_2 + \frac{t^3}{\sqrt{n}} C_3 + \frac{t^4}{n} C_4 + \ldots + \frac{t^q}{n^{\frac{q-2}{2}}} C_q,$$

wo $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_q$ nur von z, $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_q$ von n und z abhängen, und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_q$ so bestimmt sind, daß C_1 möglichst stark für $n = \infty$ verschwindet. (Diese Forderung werde ich bald präzisieren.) Man findet

$$(37)\quad \begin{cases} C_0 = A_0 + A_1\delta + A_2\delta^2 + \ldots + A_q\delta^q, \\ C_1 = A_1 + 2A_2\delta + 3A_3\delta^2 + \ldots + qA_q\delta^{q-1}, \\ C_2 = \frac{1}{n}(A_2 + 3A_3\delta + \ldots), \\ C_3 = -\frac{i}{n}(A_3 + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$(38)\quad \frac{C_1}{n} = (q-1)n^{-\frac{1}{q}} + \sum_{k=0}^{q-2} k n^{-\frac{q-k}{q}} Q_k(z) + (q+\ldots)(B_1 n^{-\frac{1}{q}} + B_2 n^{-\frac{2}{q}} + \ldots) + \ldots$$

$$= (qB_1 + q - 1)n^{-\frac{1}{q}} + (qB_2 + \ldots)n^{-\frac{2}{q}} + (qB_3 + \ldots)n^{-\frac{3}{q}} + \ldots$$

Verlangt man, daß in dieser Entwicklung nach wachsenden Potenzen von $n^{-\frac{1}{q}}$ die Koeffizienten von $n^{-\frac{1}{q}}, n^{-\frac{2}{q}}, \ldots, n^{-\frac{q}{q}}$ verschwinden sollen, so lassen sich $B_1, B_2, \ldots, B_q$ nacheinander bestimmen, und zwar als Konstanten oder als Polynome in z. Es ist $B_1 = -\frac{q-1}{q}$ usw. [8]. Nach dieser Bestimmung von $B_1, B_2, \ldots, B_q$, also von δ gemäß (35), sind auch die Ausdrücke $C_0, C_1, \ldots, C_q$ mitbestimmt, nach (37). Ich will folgende Eigenschaften hervorheben:

C_0 enthält $n^{\frac{q-2}{q}}$ als höchste Potenz von n.

$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_q$ können nach wachsenden Potenzen von $n^{-\frac{1}{q}}$ geordnet werden (sie enthalten keine positive Potenz von n). Für $\lim n = \infty$ konvergieren sie also gegen endliche Grenzwerte und bleiben bei allen fraglichen Werten von z, n beschränkt. Insbesondere ist

$$(39)\quad \lim_{n=\infty} C_2 = \frac{q}{2}.$$

Setzt man gemäß (34)

$$(40)\quad w = 1 + \eta = 1 + \delta + \frac{it}{\sqrt{n}},$$

so sei die geradlinige Strecke XY dadurch bestimmt, daß t in (40) reelle Werte annehmen soll. Führt man die Variablenvertauschung (40) aus, so wird aus (19) mit Berücksichtigung von (30), (31), (36)

$$(41)\quad \frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{n^{\frac{p}{q}} e^{z n^{1-\frac{1}{q}} + C_0}}{2\pi n^{\frac{n}{q}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{q}}} \left\{ \int_{-(\beta+d)\sqrt{n}}^{+(\beta-d)\sqrt{n}} \Phi_n(t)\,dt + O\left(\sqrt{n}\, e^{-\gamma n^{1-\frac{1}{q}} - C_0}\right) \right\},$$

wo zur Abkürzung

$$(42)\quad d = \Im\delta,$$

$$(43)\quad \Phi_n(t) = \frac{P(z + n^{\frac{1}{q}} w)}{n^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{1 + \delta + \frac{it}{\sqrt{n}}} \exp\left\{ \frac{it}{\sqrt{n}} C_1 - t^2 C_2 + \frac{t^3}{\sqrt{n}} C_3 + \ldots + \frac{t^q}{n^{\frac{q-2}{q}}} C_q + \sum_{q+1}^{\infty} \eta^k \ldots \right.$$

[8]) Die Gleichung $C_1 = 0$ definiert δ als eine algebraische Funktion von $n^{-\frac{1}{q}}$. Der Ausdruck (35) ist der Anfang der Reihentwick'ung des einzigen Zweiges, der für $n^{-\frac{1}{q}} = 0$ verschwindet.

gesetzt wurde. Es ist aus den auseinandergesetzten Eigenschaften der Größen $C_1, C_2, \ldots, C_q, A_{q+1}, \ldots$ (vgl. insbesondere (33), (39)) und aus der Bedeutung von η, δ (vgl. (34), (35)) klar, daß bei festem t

$$(44) \qquad \lim_{n=\infty} \Phi_n(t) = e^{-\frac{qt^2}{2}}$$

Nun gibt es offenbar zwei Konstanten K, K', so daß für alle fragliche Werte von z, n

$$(45) \qquad |C_1| < K,$$

$$(46) \qquad \left| \frac{P(z + n^{\frac{1}{q}} w)}{n^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{1 + \delta + \frac{it}{\sqrt{n}}} \right| < K'.$$

Ferner ist für genügend großes n sicher

$$(47) \qquad \left| C_2 - \frac{q}{2} \right| < \frac{1}{4}$$

(vgl. (39)); ferner, wie auch das feste β gewählt ist,

$$(48) \qquad -2\beta < -\beta - d < \beta - d < +2\beta,$$

da doch nach (42), (35)

$$\lim_{n=\infty} d = 0.$$

Nun beachte man, daß nach (34) entweder $|\eta| \leqq 2|\delta|$ oder $|\eta| \leqq \frac{2|t|}{\sqrt{n}}$ Im ersteren Falle ist, gemäß (33),

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq 2^{q+1} |\delta|^{q+1} n < 1$$

von einem gewissen n an, mit Rücksicht auf (35). Im zweiten Falle ist innerhalb der Grenzen des Integrals (41)

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq \left| \frac{2t}{\sqrt{n}} \right|^{q+1} n = t^2 2^{q+1} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{q-1} < t^2 2^{2q} \beta^{q-1}$$

von einem gewissen n an, mit Rücksicht auf (48), vorausgesetzt, daß, um der Ungleichung (33) die Anwendbarkeit zu sichern, das feste $\beta < \frac{1}{8}$ gewählt ist. Zusammengefaßt ist auf alle Fälle

$$(49) \qquad \left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq 1 + t^2 2^{2q} \beta^{q-1}.$$

Nun bin ich endlich in der Lage, die Größe von β zu fixieren: es sei $< \frac{1}{8}$ gewählt, ferner so, daß für alle fraglichen n und z

$$(50) \qquad 2\beta |C_3| + (2\beta)^2 |C_4| + \ldots + (2\beta)^{q-2} |C_q| + 2^{2q} \beta^{q-1} < \frac{1}{4}$$

wird, was zu erreichen ist, da $C_3, C_4, \ldots, C_q$ beschränkt bleiben. Nach (43), (45), (46), (47), (49), (50) ist

$$(51)\qquad |\Phi_n(t)| < K' \exp\left\{K + \left(-\frac{q}{2}+\frac{1}{4}\right)t^2 + t^2\frac{1}{4} + 1\right\}$$

von einem gewissen n an für $-2\beta < t < +2\beta$, also, gemäß (48), im ganzen Integrationsintervall des Integrals in (41). Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K' \exp\left(K + 1 - \frac{q-1}{2}t^2\right)\cdot dt$$

konvergiert, folgt aus (44), (51) offenbar, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{-(\beta+d)\sqrt{n}}^{+(\beta-d)\sqrt{n}} \Phi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{qt^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{q}}.$$

Daher ist, nach (41),

$$(52)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{G_n(z)}{n!}\,\frac{n^{\frac{n}{q}+\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{n}{q}}}{n^{\frac{p}{q}}\,e^{zn^{1-\frac{1}{q}}+C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}}.$$

Man beachte, daß gemäß (37), (35), (32) C_0 aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, daß es in z ein Polynom ist, und daß $n^{\frac{q-2}{q}}$ die höchste Potenz von n ist, die in C_0 vorkommt. Man kann also dem Resultat (52) auch die Form geben

$$(53)\qquad G^{(n)}(z) \sim n!\, n^{-\frac{n-p}{q}-\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{q}} \exp\left\{zn^{1-\frac{1}{q}} + D_2(z)n^{1-\frac{2}{q}} + \ldots + D_q(z)\right\},$$

wo $D_2(z), D_3(z), D_4(z), \ldots, D_q(z)$ Polynome in z bedeuten, zu deren Berechnung der Beweis eine bestimmte Anweisung gibt. Aus dieser asymptotischen Entwicklung folgt reichlich die unter 4 ausgesprochene Behauptung B.

Diskussion der Ausnahmefälle.

6. Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion. Soll die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ unter einer von n unabhängigen oberen Schranke liegen, so darf offenbar die Grenzlage dieser Nullstellen keine Strecke außerhalb der reellen Achse in sich begreifen (vgl. Zusatz I zu Satz III). Man betrachte das kleinste konvexe Polygon $\mathfrak{P}$, das sämtliche Pole von $R(z)$ umschließt, man zerlege den Umfang dieses Polygons $\mathfrak{P}$ durch die darauf liegenden Pole von $R(z)$ in einzelne Strecken, und man errichte auf jeder solchen Strecke als Mittellot einen Halbstrahl in der Richtung der äußeren Normalen von $\mathfrak{P}$. Von jedem solchen Halbstrahl

gehört ein unendliches Stück zur Grenzlage der Nullstellen von $R^{(n)}(z)$. Soll also die Grenzlage keine Strecke außerhalb der reellen Achse enthalten, so bleiben nur zwei Fälle übrig: entweder reduziert sich das erwähnte Polygon $\mathfrak{P}$ auf einen einzigen Punkt (Ausnahmefall 1 des Satzes I) oder auf eine Strecke, die von der reellen Achse senkrecht halbiert wird und deren beide Endpunkte die einzigen Pole von $R(z)$ sind (Ausnahmefall 2 des Satzes I).

Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion von der im Satz II erwähnten Form. Es sei q der Grad des Polynoms $Q(z)$, $Q(z) = bz^q + b_1 z^{q-1} + \ldots$. Soll die im Satz IV beschriebene Grenzlage keine Strecke außerhalb der reellen Achse in sich begreifen, so muß die Gleichung $bz^q + 1 = 0$ nur reelle Wurzeln haben; also muß b reell und negativ und $q = 2$ sein; ferner müssen die $q = 2$ im Satz IV erwähnten Halbstrahlen zusammen die reelle Achse ausmachen, also muß b_1 reell sein (Ausnahmefall 2 des Satzes II). Oder aber die Funktion $G(z)$ darf überhaupt nicht unter den Satz IV fallen, also $q = 1$ sein (Ausnahmefall 1 des Satzes II).

7. Nachdem ich so ausführlich dargelegt habe, welche ganz spezielle geometrische Konfigurationen zu den Ausnahmefällen Anlaß geben, will ich die Resultate der algebraischen Diskussion dieser Fälle in aller Kürze mitteilen und die Beweise, die aus geläufigen Überlegungen aufgebaut sind, nur andeuten.

Es handelt sich um die ganze Funktion $G(z)$ und um die rationale Funktion $R(z)$. Im Ausnahmefall 1 haben diese die Form

$$G(z) = P(z)e^{az}, \qquad R(z) = \frac{Q(z)}{(z-a)^p} + S(z)$$

und im Ausnahmefall 2 die Form

$$G(z) = P(z)e^{bz - cz^2}, \qquad R(z) = \frac{Q(z)}{((z-b)^2 + c^2)^p} + S(z),$$

$P(z), Q(z), S(z)$ sind Polynome, a eine Konstante, b, c reelle Konstanten, $c > 0$, p eine positive ganze Zahl. Ich betrachte die n-ten Derivierten im Ausnahmefall 1

$$G^{(n)}(z) = P_n(z)e^{az}, \qquad R^{(n)}(z) = \frac{Q_n(z)}{(z-a)^{p+n}}$$

und im Ausnahmefall 2

$$G^{(n)}(z) = P_n(z)e^{bz - cz^2}, \qquad R^{(n)}(z) = \frac{Q_n(z)}{((z-b)^2 + c^2)^{p+n}}.$$

(Ich nehme n, wenn es sich um $R(z)$ handelt, größer als der Grad von $S(z)$ an.) In diesen Formeln sind $P_n(z)$, $Q_n(z)$ Polynome. Man sieht dies durch vollständige Induktion ein, sich auf eine Rekursionsformel stützend, worin $P_{n+1}(z)$ linear homogen durch $P_n(z)$ und $P_n'(z)$ ausgedrückt wird, ähnlich wie $Q_{n+1}(z)$ durch $Q_n(z)$ und $Q'_n(z)$. Dieselbe Rekursionsformel zeigt, daß im Ausnahmefall 1 $P_{n+1}(z)$ denselben Grad hat wie $P_n(z)$, während im Ausnahmefall 2 der Grad von $P_{n+1}(z)$ denjenigen von $P_n(z)$ um eine Einheit übertrifft. Ähnlich ist das Verhältnis zwischen $Q_{n+1}(z)$ und $Q_n(z)$.

Ich betrachte jetzt den Fall, wo $G(z)$ und $R(z)$ für reelles z reelle Werte annehmen. In diesem Falle *hat $P_{n+1}(z)$ ebenso viel oder weniger nichtreelle Nullstellen als $P_n(z)$*, und ähnlich steht es mit $Q_{n+1}(z)$ und $Q_n(z)$. Dies kann man aus der Beziehung zwischen den Graden und aus der Abzählung der neu hinzukommenden reellen Nullstellen schließen. Man benutzt entweder die erwähnten Rekursionsformeln oder noch besser, das Theorem von Rolle. Es ist dabei nützlich, auch die Nullstellen in $z = +\infty$ bzw. in $z = -\infty$ zu berücksichtigen. Man sagt, daß eine solche Nullstelle im Unendlichen vorliegt, wenn die Funktion für $z = +\infty$ bzw. $z = -\infty$ mit einem von einer gewissen Stelle an unveränderten Vorzeichen der Null zustrebt. Bei Zulassung solcher Nullstellen bleibt der Satz von Rolle gültig, der die Existenz einer ungeraden Anzahl Nullstellen der Derivierten zwischen zwei sukzessiven Nullstellen der Funktion behauptet.

So sind die Umrisse der einfachen Überlegungen, die bestätigen können, was in den Sätzen I, II über die Ausnahmefälle gesagt wurde[9]). Diese Sätze I, II erhalten eine besonders scharfe Fassung, wenn man sich auf solche Funktionen $G(z)$ und $R(z)$ beschränkt, die für reelles z reelle Werte annehmen, und wenn man noch voraussetzt, daß $R(z)$ echtgebrochen ist, d. h. für $z = \infty$ verschwindet. Befindet sich $G(z)$ oder $R(z)$ nicht in einem der beiden Ausnahmefälle, so wächst die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ mit n ins Unendliche. Befindet sich hingegen $G(z)$ bzw. $R(z)$ in einem der beiden Ausnahmefälle, so nimmt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ mit wachsendem n nie zu, strebt also gegen einen endlichen Grenzwert und ist insbesondere stets $= 0$, wenn schon $G(z)$ bzw. $R(z)$ keine nichtreellen Nullstellen hatten. Man kann in den Ausnahmefällen übrigens (mit dem Rolleschen Satze) auch zeigen, daß die reellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ von einem gewissen n an sämtlich einfach sind. Diese Verhältnisse sind besonders bemerkenswert im Ausnahmefall 2, wo doch die reellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. von $R^{(n)}(z)$ mit wachsendem n immer zahlreicher werden und in jedes Intervall der reellen Achse eindringen.

8. Ich will nicht unerwähnt lassen, daß sich das Verhalten der absolut größten Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ mit Erfolg studieren läßt, wenn $R(z)$ eine

---

[9]) Für andere Beweise vgl. z. B. a. a. O. [4b]), S. 392—393, [5c]), S. 9—11 oder etwa schon H. Laurent, Traité d'algèbre III[e] partie (Paris 1894) die Aufgaben 14, 16, 30, 39, S. 70—75.

rationale Funktion ist. $R(z)$ soll die Pole $a, b, c, \ldots, l$ bzw. von der Ordnung $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ besitzen. Dann hat $R(z)$ die Form

$$\begin{aligned} R(z) = S(z) &+ \frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\,A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_0}{z-b} + \frac{1!\,B_1}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{(\beta-1)!\,B_{\beta-1}}{(z-b)^\beta} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L_0}{z-l} + \frac{1!\,L_1}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{(\lambda-1)!\,L_{\lambda-1}}{(z-l)^\lambda} \\ = S(z) &+ \sum\left(\frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\,A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^\alpha}\right). \end{aligned}$$

$S(z)$ bedeutet ein Polynom, $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B_0, \ldots, L_{\lambda-1}$ Konstanten, und zwar ist $A_{\alpha-1} \neq 0$, $B_{\beta-1} \neq 0, \ldots, L_{\lambda-1} \neq 0$; Σ bedeutet eine Summation über alle Pole $a, b, c, \ldots, l$. Es ist

$$R^{(n)}(z) = (-1)^n \sum\left(\frac{n!\,A_0}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(n+1)!\,A_1}{(z-a)^{n+2}} + \ldots + \frac{(n+\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^{n+\alpha}}\right).$$

54)
$$\lim_{n=\infty} \frac{(nz)^{n+1}(-1)^n R^{(n)}(nz)}{n!} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n=\infty} \sum\left(\frac{A_0}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+1}} + \frac{n+1}{nz-a}\,\frac{A_1}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots(n+\alpha-1)}{(nz-a)\ldots(nz-a)}\,\frac{A_{\alpha-1}}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+}}\right. \\ &= \sum\left(A_0 + \frac{1}{z}A_1 + \ldots + \frac{1}{z^{\alpha-1}}A_{\alpha-1}\right)e^{\frac{a}{z}} \\ &= \mathfrak{A}\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{a}{z}} + \mathfrak{B}\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{b}{z}} + \ldots + \mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{l}{z}} \\ &= F\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(z), \mathfrak{C}(z), \ldots, \mathfrak{L}(z)$ Polynome bedeuten, bzw. vom Grade $\alpha-1, \beta-1, \gamma-1, \ldots, \lambda-1$ und $F(z)$ eine ganze Funktion ist.

Über das asymptotische Verhalten der Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ in einer mit n sich verengernden Umgebung des Punktes $z = \infty$ gibt das Verhalten der Nullstellen von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ Aufschluß. Die Nullstellenverteilung dieser Funktion für kleines z gehorcht aber sehr eleganten, geometrisch formulierbaren Gesetzen[10]), die mit dem schon unter 6 betrachteten klein-

[10]) G. Pólya, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen, Sitzungsber. München (1920), S. 285–290. Vgl. noch H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur (Paris, 1895), Kapitel 11. E. Feyer, Asymptotische Darstellung gewisser meromorpher Funktionen, Dissertation, Breslau 1919. Diese Stellen waren mir bei Abfassung meiner zitierten Arbeit noch unbekannt.

sten konvexen Polygon $\mathfrak{P}$ zusammenhängen, das sämtliche Punkte $a, b, c, \ldots, l$ umschließt. Insbesondere gilt folgendes: Errichtet man von dem Nullpunkt aus Halbstrahlen, die den äußeren Normalen des Polygons $\mathfrak{P}$ parallel sind, so schließen sich die Nullstellen von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ diesen Halbstrahlen asymptotisch an. Dieses Verhalten ist bei Kenntnis des Satzes III aus geometrischen Gründen plausibel.

Ich überlasse es dem Leser, sich zu überlegen, bis zu welchem Punkte der Beweis des Satzes I gefördert werden kann, wenn man von der Kenntnis des Satzes III absieht und sich nur auf die Grenzformel (54) und auf die Kenntnis der Nullstellenverteilung der darin auftretenden ganzen Funktion $F(z)$ stützt[11].

---

[11]) Vgl. dazu a. a. O. [5c]) S. 4–8. Für die eingehende Behandlung eines hierher gehörigen Spezialfalles vgl. noch G. Pólya, Bemerkung über die Mittag-Lefferschen Funktionen $E_\alpha(z)$. Tôhoku Math. J. **19** (1921), S. 241–248.

(Eingegangen am 7. Januar 1921.)