

ÜBER DIE PRAKTISCHE AUFLÖSUNG VON INTEGRALGLEICHUNGEN MIT ANWENDUNGEN AUF RANDWERTAUFGABEN.

VON

E. J. NYSTRÖM

in HELSINGFORS.

§ 1. Die Fragestellung.

1. Über die fundamentale Bedeutung der Integralgleichungen äussert DU BOIS-REYMOND, der sie wohl zuerst erkannt hat, unter anderem¹: »Seitdem (seit 1852) sind mir die Integralgleichungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen so oft vorgekommen, dass ich überzeugt bin, die Fortschritte dieser Theorie seien an die der Behandlung der Integralgleichungen gebunden, über die aber so gut wie nichts bekannt ist.»

In der Tat hat die spätere Entwicklung der Wissenschaft nicht nur die angeführten Worte voll bestätigt, sondern die Integralgleichungen haben sich auf den verschiedensten Gebieten der Mathematik und deren Anwendungen zu einem mächtigen Hilfsmittel entwickelt, das vielleicht sogar umfassender und nützlicher als dasjenige der Differentialgleichungen genannt werden kann. So gibt beispielsweise eine von ABEL aufgestellte Integralgleichung ein Problem der Mechanik an, das keine bekannte Differentialgleichung auszudrücken vermag.²

Die Integralgleichungstheorie, die sich durch grosse Schmiegsamkeit gegenüber Verallgemeinerungen verschiedener Art auszeichnet hat, ist in den letzten Jahrzehnten zu einem hohen Grad der Vervollkommnung gebracht. Eine der

¹ DU BOIS-REYMOND: *Bemerkungen über* $Az = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103).

² vgl. V. MISES in Zeitschr. f. angew. Math. und Mech., Bd. 5 (1925), S. 159.

wichtigsten Entdeckungen auf diesem Gebiet bedeutet hierbei die FREDHOLM im Jahre 1900 gelungene Angabe der Lösung $\varphi(t)$ der »linearen Integralgleichung zweiter Art«

$$(1) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt + f(s) \quad (a < b),$$

wo der Kern $K(s, t)$ und $f(s)$ bekannte Funktionen sind¹. Man braucht von diesen Funktionen nur vorauszusetzen, dass sie im Gebiete $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, bzw. im Intervall $a \leq s \leq b$ eindeutig definiert seien und ausserdem nebst ihrem Quadrate integrabel im Sinne von LEBESGUE.

Bei der Herleitung des Fredholmschen Resultates, die auf mehrfache Weise geschehen kann, stellt sich eine schöne Analogie mit der »linearen Algebra« heraus, wenn man, wie wir es auch unten (Nr. 4) tun werden, die Gleichung (1) als Zusammenfassung eines linearen Systems mit unendlich vielen Unbekannten auffasst.

2. Für die *numerische Behandlung* von Integralgleichungen der Form (1) und auch der anderen Arten ist immerhin die Mehrzahl der theoretisch gegebenen Methoden nur von geringem Nutzen sowohl wegen der verwickelten Ausdrücke der expliziten Lösungsformeln als besonders auch wegen der oft eintretenden Unmöglichkeit der exakten Ausführung der in denselben bezeichneten Quadraturen. Ausserdem ist der in der Technik vorkommende Fall zu berücksichtigen, dass der Kern $K(s, t)$ sowie $f(s)$ überhaupt nicht durch analytische Ausdrücke gegeben sind, sondern dass ihre Werte durch Versuche bestimmt werden.

Diese Umstände machen die Aufstellung *praktisch brauchbarer Näherungsmethoden* wünschenswert. Solche sind jedoch nur wenig erörtert worden, und zwar erwähnt der oben zitierte Encyklopädieartikel nur zwei solche »von *allgemeiner Anwendbarkeit*«, nämlich diejenigen von E. SCHMIDT und D. ENSKOG. Die Methode von SCHMIDT bezieht sich auf »*Kerne endlichen Ranges*«, d. h. der Form

$$K(s, t) = \sum_{v=1}^n \alpha_v(s) \beta_v(t)$$

¹ Sowohl in der Terminologie wie in der Bezeichnung schliessen wir uns dem von HELLINGER und TOEPLITZ geschriebenen Encyklopädieartikel an (Enc. math. Wiss. II. C. 13, (1927)).

oder solche, die sich durch Ausdrücke dieser Art approximieren lassen; diejenige von ENSKOG liefert bei symmetrischem Kern, falls eine gewisse Ungleichung erfüllt ist, für die gesuchte Funktion $\varphi(s)$ eine »verallgemeinerte Fourierentwicklung«. In beiden Fällen muss eine Anzahl Koeffizienten durch je eine Quadratbestimmtheit bestimmt werden.

Wie HELLINGER und TOEPLITZ auch sagen, bedeutet die Zurückführung der Auflösung der Integralgleichung (1) auf diejenige von einer grossen Zahl linearer Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten keine wesentliche Förderung des Problems, indem die neue Aufgabe genau die gleichen Schwierigkeiten enthält wie die ursprüngliche. Zwar kann man die Methoden der Ausgleichsrechnung heranziehen, um »Normalgleichungen« mit einer kleinen Anzahl von Unbekannten zu gewinnen, doch muss dies als ein Umweg bezeichnet werden.

Man kann aber fragen, ob es nicht möglich wäre, die zu behandelnde Integralgleichung direkt durch ein zweckmässig gewähltes, lineares System mit nur wenigen Unbekannten zu ersetzen. Gerade dies wird den Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes bilden.¹

§ 2. Die numerische Auflösungsmethode.

3. Falls wir das oben angegebene Minimum von Stetigkeitsvoraussetzungen beibehalten wollten, würden damit die brauchbaren Hilfsmittel zu sehr eingeschränkt werden. Das würde übrigens bei naturwissenschaftlichen Anwendungen nichts nützen, da die bei solchen auftretenden Funktionen speziellere Stetigkeitsbedingungen erfüllen.

Wir machen daher zunächst folgende Voraussetzungen:

Der Kern $K(s, t)$ muss als Funktion von t betrachtet wenigstens stückweise durch Polynome approximiert werden können. Er selbst und seine Ableitungen können also für eine endliche Anzahl bestimmter Werte von t unstetig sein; dagegen dürfen die Diskontinuitätsstellen nicht von s abhängen. Ebenso dürfen $f(s)$ und $\varphi(s)$ sich für einige bekannte Werte der Variablen sprungweise ändern.

¹ Die zu besprechende Methode ist früher vom Verfasser in den Aufsätzen behandelt worden: I. *Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie.* (Soc. Scient. Fenn. Comm. Phys.-Math. IV. 15 (1928)), und II. *Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen.* (Soc. Scient. Fenn. Comm. Phys.-Math. V. 5. (1929)). Diese Aufsätze werden im Folgenden kurz mit I und II bezeichnet.

Ferner nehmen wir an, dass die Integralgleichung (1) eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Diese wollen wir im Intervall (a, b) annähern.

In den beiden letzten Paragraphen werden wir indessen Kerne betrachten, in denen oder in deren Ableitungen von s abhängige Unstetigkeiten vorkommen, und zwar behandeln wir den für verschiedene Anwendungen wichtigen Fall, dass die Diagonale $t=s$ des »Fundamentalquadrates« $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$ eine Diskontinuitätslinie ist.

4. Es gilt zunächst, das Integral in (1) durch eine Summe zu ersetzen. Jedoch handelt es sich nicht um eine gewöhnliche numerische Quadratur, da ja der Integrand unbekannt ist und nebst der Variablen t noch einen veränderlichen Parameter s enthält. Nichtsdestoweniger kann man von bekannten Quadraturformeln Gebrauch machen, indem man das Integral $\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$ als Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ der endlichen Summe

$$(2) \quad (b-a) [\alpha_1 K(s, t_1) \varphi(t_1) + \alpha_2 K(s, t_2) \varphi(t_2) + \dots + \alpha_n K(s, t_n) \varphi(t_n)]$$

auffasst, wo $\sum_1^n \alpha_i = 1$ ist. Der Wert des Integrals wird dem Produkt der Intervalllänge und einer »mittleren Ordinate« gleich gesetzt, wobei die letztere aus n , an den Stellen

$$(3) \quad t = t_1, \quad t = t_2, \dots, \quad t = t_n$$

zu messenden und mit den »Gewichten« $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zu nehmenden Ordinaten gebildet wird.

In der allgemeinen Theorie kann man die Punkte (3) äquidistant annehmen und alle Gewichte α_i gleich $\frac{1}{n}$ setzen¹; die Annahme von Werten t_i und Gewichten α_i , über die noch passend verfügt werden kann, geschieht hier eben im Hinblick auf das zu entwickelnde Näherungsverfahren.

In dem von uns auch zu berücksichtigenden Falle eines nur stückweise stetigen Kerns tritt anstatt des Klammerausdrucks in (2) eine Summe von mehreren solchen Ausdrücken auf. Mit den von uns gemachten Annahmen behalten die folgenden Ausführungen auch in diesem Falle mit unmittelbar einleuchtenden Erweiterungen ihre Gültigkeit.

¹ Vgl. GOURSAT: *Cours d'Analyse mathématique*, vol. III, 3te Aufl. Paris 1923, 368.

und uns die n Werte φ_i aus (6) bestimmt denken, so können wir in (7) einen beliebigen Wert s einsetzen. Die Formel (7) liefert daher eine approximative Lösung der Integralgleichung (1).

Hierbei sind die α_i und die t_i Zahlen, die weder von dem Kern noch von der Funktion $f(s)$ abhängen.

7. Wie in Nr. 2 gesagt, ist es für die Brauchbarkeit der skizzierten Methode wesentlich, dass man nur wenige lineare Gleichungen (6) aufzulösen hat. Es gilt somit, die n Punkte (3) nebst den zugehörigen Gewichten α_i so zu wählen, dass eine möglichst gute Näherung erhalten wird.

Dieses Problem ist aber bereits von GAUSS gelöst worden. Allerdings hatte er nur die Auswertung bestimmter Integrale im Sinne; wir können jedoch seine Resultate ohne weiteres für unseren Zweck verwenden.

Nach GAUSS wird die günstigste Näherung erhalten, wenn man die n Punkte mit den n Nullstellen der Kugelfunktion n :ten Grades zusammenfallen lässt, nachdem man durch die Transformation:

$$(8) \quad t = \frac{b-a}{2} t_1 + \frac{a+b}{2}$$

die Integrationsgrenzen zu -1 und $+1$ gemacht hat. Diese Punkte teilen also das Intervall (a, b) in bestimmte, ein für allemal angebbare Verhältnisse und sind somit wie auch die Gewichte α_i von der speziellen Form der zu lösenden Integralgleichung unabhängig. Durch die Gauss'sche Formel, die n Ordinaten benutzt, wird eine ganze rationale Funktion von $2n$:tem oder niedrigerem Grade genau integriert.

Bei speziellen Problemen können statt der Mittelwertformeln von GAUSS gewisse andere mit Vorteil gebraucht werden, vor allem wenn es gilt, einige Ordinaten besonders zu berücksichtigen (vgl. § 5). Unter Umständen sind die Formeln von TSCHEBYSCHEFF, bei denen alle Gewichte α_i gleich $\left(=\frac{1}{n}\right)$ gesetzt werden, auch empfehlenswert (vgl. S. 196, Fussnote¹).

Wir geben hier die Werte der Gauss'schen Zahlen¹ für $n \leq 10$ für das Intervall von -0.5 bis 0.5 .

¹ Diese Zahlen wurden von GAUSS selbst für $n = 2, 3, \dots, 7$ auf 16 Dezimalstellen angegeben für das Intervall von 0 bis 1. In den Ges. Werken III, S. 193, Göttingen 1866 findet sich ein Druckfehler indem dort für $n=2$ steht $a''=1.88 \dots$ statt $a''=0.88 \dots$

Tabelle der Gauss'schen Zahlen:

$n=2$	$\pm t_i$	0.2886751				
	α_i	0.5				
$n=3$	$\pm t_i$	0	0.3872983			
	α_i	0.4444444	0.2777778			
$n=4$	$\pm t_i$	0.1699905	0.4305682			
	α_i	0.3260726	0.1739274			
$n=5$	$\pm t_i$	0	0.2692347	0.4530899		
	α_i	0.2844444	0.2393143	0.1184634		
$n=6$	$\pm t_i$	0.1193096	0.3306047	0.4662348		
	α_i	0.2339570	0.1803808	0.0856622		
$n=7$	$\pm t_i$	0	0.2029226	0.3707656	0.4745540	
	α_i	0.2089796	0.1909150	0.1398527	0.0647425	
$n=8$	$\pm t_i$	0.0917173	0.2627662	0.3983332	0.4801449	
	α_i	0.1813419	0.1568533	0.1111905	0.0506143	
$n=9$	$\pm t_i$	0	0.1621267	0.3066857	0.4180156	0.4840801
	α_i	0.1651197	0.1561735	0.1303053	0.0903241	0.0406372
$n=10$	$\pm t_i$	0.0744372	0.2166977	0.3397048	0.4325317	0.4869533
	α_i	0.1477621	0.1346334	0.1095432	0.0747257	0.0333357

8. Wir machen noch einige Bemerkungen über die praktische Durchführung der Rechnung.¹

Ein guter Teil der Arbeit bei der Auflösung der Integralgleichung (1) besteht in der Berechnung der Koeffizienten der Gleichungen (6), wo wir uns jetzt die Unbekannten auf die linken Seiten gebracht denken. Da man aber sämtliche Koeffizienten der linken Seite aus den Werten einer und derselben Funktion zweier Veränderlichen, nämlich des Kerns, durch Multiplikation mit gegebenen Faktoren $\lambda(b-a)\alpha_i$ ausrechnen kann, lässt sich die Arbeit meistens durch Tabellen oder graphische oder mechanische Hilfsmittel wesentlich erleichtern. Ausserdem dürfte der Kern gerade bei den mathematisch, physikalisch oder technisch wichtigsten Problemen von verhältnismässig einfachem Bau sein.

Bei derartigen Rechnungen ist immer eine *Kontrolle* sehr wünschenswert, und eine solche kann hier auch leicht erhalten werden, und zwar dadurch, dass man in (1) statt φ irgendeine bekannte Funktion einträgt und die Funktion f der rechten Seite dementsprechend verändert. Denken wir uns z. B. $\varphi \equiv \text{Konst.} = 1$ gesetzt, so musste man haben

¹ Ausführlicher in der S. 187 genannten Abhandlung I, § 5.

$$(9) \quad f(s) = 1 - \lambda \int_a^b K(s, t) dt.$$

Die linken Seiten in (6) reduzieren sich mit der Annahme $\varphi \equiv 1$ auf die Summe der Koeffizienten der Unbekannten, und diese Summen müssen mit den Werten der Funktion (9) in den Punkten (5) übereinstimmen. Eventuelle Abweichungen rühren, sofern sie nicht auf Abrundungsfehlern beruhen, von den Fehlern der angewandten Integrationsformel her.

Eine gewisse Schwierigkeit bietet die jeweilige Feststellung der Anzahl n der zu benutzenden Ordinaten. Mangels anderer Anhaltspunkte kann man diejenige der Gauss'schen Formeln wählen, die zur Annäherung des bestimmten Integrals $\lambda \int_a^b K(s, t) f(t) dt$ genügend genau ist und die geringste Anzahl Ordinaten enthält. Eine grössere Anzahl Ordinaten zu benutzen als die notwendige, würde natürlich die Arbeit erschweren.

§ 3. Anwendung auf die Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

9. Da die Brauchbarkeit einer Methode der beschriebenen Art erst nach erfolgter Durchrechnung von Beispielen zu beurteilen ist, geben wir jetzt einige solche und zwar aus dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen, worauf im Anfang hingewiesen wurde.

Die »*Randwertaufgabe der Potentialtheorie*« besteht in Folgendem:

Eine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion $u(x, y)$ ist so zu bestimmen, dass sie im Innern eines von einer geschlossenen Kurve c begrenzten Bereiches der *Laplace'schen Differentialgleichung*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

genügt und auf der Randkurve c vorgeschriebene Werte $g(s)$ annimmt. Es gibt bekanntlich nur eine solche Funktion.

Um möglichst direkt an unsere Formeln anschliessen zu können, setzen wir voraus, das Grundgebiet sei einfach zusammenhängend und von einer *konvexen*,

mit stetig variierender Tangente versehenen Randkurve begrenzt.¹ Die Gleichung der Randkurve möge in Parameterform $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben sein.

Für die gesuchte harmonische Funktion ergibt sich eine »quellenmässige Darstellung«

$$(10) \quad u(x, y) = \int_c \mu(\theta) d\theta,$$

wo θ denjenigen Winkel bedeutet, den die Verbindungslinie des inneren Punktes $P(x, y)$ und eines beliebigen Randpunktes mit einer festen Richtung bildet. Die Funktion $\mu(\theta)$ ist aus einer Integralgleichung der Form (1) zu bestimmen, nämlich aus

$$(11) \quad \pi \bar{\mu}(s) + \int_c \bar{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial t} \arctg \frac{y(t) - y(s)}{x(t) - x(s)} dt = g(s),$$

wo $\bar{\mu}(t) = \mu(\theta)$ ist²

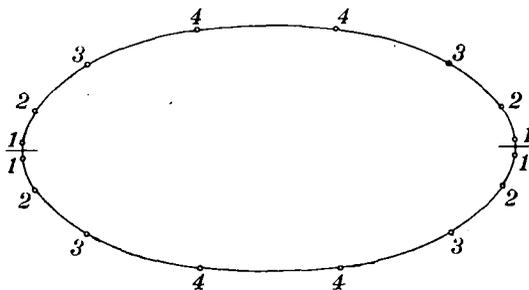


Fig. 1.

10. Die Kurve c sei nun im besonderen die Ellipse

$$(12) \quad x = \cos t, \quad y = \frac{1}{2} \sin t,$$

und die Randwerte seien in bezug auf beide Achsen symmetrisch verteilt. Die Integration längs des Randes wird dann vorteilhaft über die zu beiden Seiten der x -Achse liegenden Ellipsenhälften vorgenommen. Wählen wir die Gaussche Formel mit $n = 8$, so sind nach den betreffenden Zahlen der Tabelle S. 191 die Werte von $g(s)$ in den 16 in Fig. 1 markierten Punkten der Peripherie zu be-

¹ Wenn die Begrenzung Ecken besitzt, tritt der Fall stückweiser Stetigkeit der auftretenden Funktionen ein.

² Für die Herleitung vergleiche man z. B. GOURSAT: *Cours d'Analyse mathématique*, t. III oder die Abhandlung II des Verfassers.

rücksichtigen. Infolge der vorausgesetzten Symmetrie wird nun aber die Anzahl der Unbekannten auf 4 erniedrigt ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$).

Die Werte K_{ij} sind nun aus (12) und dem Ausdruck des Kerns in (11) zu berechnen. Es ergibt sich entsprechend (6) folgendes System:

$$(13) \quad \begin{cases} \mu_1 1.125990 + \mu_2 0.263037 + \mu_3 0.311729 + \mu_4 0.299244 = \frac{1}{\pi} g_1, \\ \mu_1 0.119735 + \mu_2 1.254816 + \mu_3 0.315974 + \mu_4 0.309480 = \frac{1}{\pi} g_2, \\ \mu_1 0.100591 + \mu_2 0.223987 + \mu_3 1.321839 + \mu_4 0.353576 = \frac{1}{\pi} g_3, \\ \mu_1 0.083522 + \mu_2 0.189758 + \mu_3 0.305828 + \mu_4 1.420914 = \frac{1}{\pi} g_4, \end{cases}$$

nach dessen Auflösung die gesuchte Funktion $\mu(s)$ durch die gemäss (7) aufgestellte Formel

$$\mu(s) = \frac{1}{\pi} g(s) - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i \mu_i}{\sqrt[5]{3} + \cos(s \pm t_i)}$$

berechnet wird, in welcher der Summand eine Kürzung des Ausdrucks

$$\alpha_i \mu_i \left\{ \frac{1}{\sqrt[5]{3} - \cos(t_k + t_i)} + \frac{1}{\sqrt[5]{3} - \cos(t_k + \pi - t_i)} + \frac{1}{\sqrt[5]{3} - \cos(t_k + \pi + t_i)} + \frac{1}{\sqrt[5]{3} - \cos(t_k + 2\pi - t_i)} \right\}$$

ist, ($i, k=1, 2, 3, 4$).

II. *Beispiel I* aus der *de Saint-Venantschen Torsionstheorie*. Bei der Bestimmung der Torsion eines zylindrischen Stabes von elliptischem Querschnitt stösst man auf das eben angezeigte Problem, wobei die Randwerte durch den Ausdruck

$$g(t) = k(x^2 + y^2)$$

gegeben sind. Wir nehmen hier $k = \frac{1}{2}$ an und lösen darauf das System (13).

Die resultierenden Näherungswerte sind nebst den zum Vergleich berechneten exakten in der folgenden Tabelle aufgeführt. Dieselbe enthält auch die extremen Werte der Funktion μ , die an den Endpunkten der Achse erreicht werden.

Der Fehler ist — wie eine nähere Betrachtung zeigt — für $t = 90^\circ$ und

$t = 270^\circ$ am grössten und er wird folglich den Betrag von $6 \cdot 10^{-6}$ nirgends übersteigen.

i	1	2	3	4		
t_i	$3^\circ 34' 26''.09$	$18^\circ 18' 0''.06$	$42^\circ 42' 7''.50$	$73^\circ 29' 27''.18$	0° und 180°	90° und 270°
$\frac{1}{\pi} g_i$	0.158691	0.147386	0.104254	0.049428	0.159155	0.039789
μ appr.	0.103034	0.092859	0.054038	0.004698	0.103451	-0.003985
μ exakt	0.103034	0.092859	0.054040	0.004696	0.103451	-0.003979

12. *Beispiel II. Konforme Abbildung der Ellipsenfläche auf den Einheitskreis*, wobei die Mittelpunkte einander entsprechen sollen.¹

Es wird zuerst die *Greensche Funktion* des Bereiches der Ellipse (12) mit dem Mittelpunkt als Pol bestimmt, dies bildet aber ein Randwertproblem der besprochenen Art, wobei die Funktion $g(t)$ durch die Formel

$$g(t) = -\log \sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben ist. Wir können uns deswegen wieder der Gleichungen (13) bedienen, in denen nur gegenüber dem früheren Falle die rechten Seiten zu ändern sind.

Mittels der Greenschen Funktion lässt sich dann diejenige analytische Funktion angeben, welche die gesuchte Abbildung vermittelt. Wir geben hier nur das Resultat an, das aus (13) und (10) teils durch Anwendung vierstelliger Logarithmen, teils graphisch ermittelt ist. Die gesuchte Funktion $Z(w) = Z(x + iy)$ ist von der Form

$$Z = w e^{u(x, y) + iv(x, y)}.$$

Wenn man, wie SCHWARZ bei seiner exakten Lösung der Aufgabe getan hat, die

Hilfsvariable z durch die Relation $w = \frac{\sqrt{3}}{4i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ einführt, erhält man

$$\begin{aligned} [u(x, y) + iv(x, y)]_{(\text{appr.})} = & 0.2878 + 0.1003 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 0.0064 \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) \\ & + 0.00045 \left(z^6 + \frac{1}{z^6} \right) + 0.00000 \left(z^8 + \frac{1}{z^8} \right); \end{aligned}$$

¹ Ausführliche Behandlung in II, §§ 11—12.

während nach SCHWARZ

$$[u(x, y) + iv(x, y)]_{(\text{exakt})} = 0.2879 + 0.1000 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + 0.0061 \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right) \\ + 0.00046 \left(z^6 + \frac{1}{z^6} \right) + 0.00004 \left(z^8 + \frac{1}{z^8} \right).^1$$

§ 4. Verschiedene Verallgemeinerungen.

13. Ausser den Gleichungen vom Fredholmschen Typus (1) gibt es gewisse andere, deren Auflösung nach der angegebenen Methode erfolgen kann.

Wir erwähnen zuerst die sogenannten »gemischten« oder »belasteten« Integralgleichungen

$$\varphi(s) = \lambda \sum_{v=1}^p m_v \overline{K}(s, t_v) \varphi(t_v) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt + f(s),$$

bei deren Auflösung man die p Werte $\varphi(t_v) = \varphi_v$ unter den n Unbekannten des linearen Systems (6) aufzunehmen hat. Wenn $p = 2$ ist, und φ_1, φ_2 die Werte von $\varphi(t)$ in den Endpunkten des Intervalls bedeuten, kann man sich gewisser von LOBATTO gegebener Quadraturformeln² bedienen, bei denen gerade diese Ordinaten besondere Berücksichtigung finden, die aber im übrigen nach dem Gauss'schen Prinzip gebildet sind. Sonst muss man im Falle belasteter Integralgleichungen eigens für diese Quadraturformeln aufstellen.

14. Ferner ist hervorzuheben, dass auch »Fredholmsche Integralgleichungen erster Art«

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt$$

¹ In seiner Arbeit *Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung* (Physikalische Zeitschrift 1928, S. 865—869) gelangt W. PRAGER zu einer Integralgleichung der Form (1) für die »Wirbelbelegung $v(s)$ der Querschnittsberandung« des Körpers, deren Auflösung nach unserer Methode von ihm beschrieben wird. Er wendet in einem Beispiel die *Tschebyscheff'sche* Formel für $n=5$, ebenso wie wir in Beispiel I, auf die beiden Hälften der Peripherie einer Ellipse vom Achsenverhältnis $\frac{1}{2}$ an. Zur Bestimmung der Kernwerte bedient er sich einer graphischen Methode. Er erhält ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und findet eine befriedigende Übereinstimmung der Näherungslösung mit der in diesem Fall auch angebbaren exakten.

² B. P. MOORS: *Valeur approximative d'une intégrale définie*, Paris 1905, § 30, Table D.

sowie *nichtlineare Integralgleichungen*

$$(14) \quad \varphi(s) = \int_a^b K(s, t, \varphi(t)) dt + f(s)$$

durch Erweiterung unserer Methode aufgelöst werden können. Man wird allerdings im letzteren Falle auf ein nichtlineares Gleichungssystem geführt, das sich aber oft wegen seiner Form zur Auflösung durch *Iteration* eignet. Dasselbe geht formal aus den früheren Formeln (6) hervor, wenn man rechts die Werte $K(t_j, t_i) \varphi(t_i)$ durch $K(t_j, t_i, \varphi(t_i))$ ersetzt. Das Iterationsverfahren besteht darin, dass man in die rechten Seiten der zu lösenden Gleichungen immer die besten, bisher bekannten Näherungswerte einsetzt. Auf die Frage der Konvergenz gehen wir hier nicht ein.¹ Eine Integralgleichung der Form (14) wird in § 5 als Beispiel behandelt werden.

15. Besonders bei Problemen der Elastizitätstheorie treten Integralgleichungen auf, deren Kerne von s abhängige Unstetigkeitsstellen aufweisen. Wir setzen hier (vgl. Nr. 3, Schluss), die Diagonale $s = t$ des Fundamentalquadrates, Fig. 2, als die einzig vorkommende Diskontinuitätslinie voraus.

Unsere Annahmen gestatten insbesondere, dass für den Kern *zwei* verschiedene analytische Ausdrücke gebraucht werden, die denselben in je einem derjenigen Dreiecke darstellen, in welche das Fundamentalquadrat von der Diagonale $s = t$ geteilt wird. Diese Ausdrücke seien übrigens im ganzen Fundamentalquadrat definiert und mögen mit $K^{(1)}(s, t)$ und $K^{(2)}(s, t)$ bezeichnet werden. Wir setzen also

$$(15) \quad K(s, t) \equiv K^{(1)}(s, t) \text{ für } a \leq t \leq s, \quad K(s, t) \equiv K^{(2)}(s, t) \text{ für } s \leq t \leq b,$$

und wir fassen den Fall ins Auge, wo $K^{(1)}(s, t)$, $K^{(2)}(s, t)$ und $f(s)$ im Fundamentalquadrat, bzw. im Intervall (a, b) durch ganze rationale Funktionen mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden können. Es gilt, den Verlauf

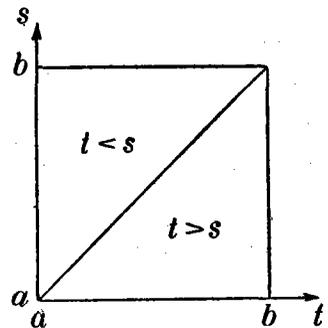


Fig. 2.

¹ Über die Ausführung der Iteration vergleiche man die Arbeit von v. MISES und H. POL-LACZEK-GEIRINGER in Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 9 (1929), insbesondere S. 62—73. Diese Arbeit betrifft zunächst *lineare* Systeme, doch kann Vieles von dem dort Gesagten verallgemeinert werden.

der gesuchten Funktion $\varphi(t)$; deren *Existenz* vorausgesetzt wird, in demselben Intervall festzulegen.

Hierher gehört u. a. die Auflösung der *Volterraschen Integralgleichung*

$$(16) \quad \varphi(s) = \lambda \int_a^s K(s, t) \varphi(t) dt + f(s),$$

die der Annahme $K^{(2)}(s, t) \equiv 0$ entspricht und somit ein Spezialfall von (1) mit dem Kern (15) ist.

16. Wenn aber, wie im Falle (15) oder (16), die Integrationsgrenzen von s abhängen, stellen sich der *numerischen Auflösung* erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Dies hat darin seinen Grund, dass ein *bestimmtes Integral*, wie dasjenige in (1) anfangs vorausgesetzt wurde, wesentlich leichter zu approximieren ist als ein *unbestimmtes*, das von der Grenze s abhängt.

Da nämlich die Gauss'schen Punkte t_i das Intervall in bestimmte Verhältnisse teilen, würden bei einem veränderlichen Intervall die Teilungspunkte ebenfalls veränderlich sein; in die verschiedenen Bedingungsgleichungen würden immer neue Unbekannte eingeführt werden, woran natürlich das ganze Verfahren scheitert.

Um der angezeigten Schwierigkeit zu entgehen, kann man folgendermassen verfahren:

Es lässt sich die Integralgleichung (1), wo wir uns nun den Parameter λ in den Ausdruck des Kerns hinein multipliziert denken und wo wir $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ annehmen, in je eine der beiden Formen

$$(17) \quad \varphi(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^{(2)}(s, t) \varphi(t) dt + \int_{-\frac{1}{2}}^s L(s, t) \varphi(t) dt + f(s),$$

$$(17)' \quad \varphi(s) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^{(1)}(s, t) \varphi(t) dt - \int_s^{\frac{1}{2}} L(s, t) \varphi(t) dt + f(s)$$

identisch umwandeln, wo die Funktion $L(s, t)$ durch

$$(18) \quad L(s, t) = K^{(1)}(s, t) - K^{(2)}(s, t)$$

definiert ist. Die ersten Glieder der rechten Seiten von (17) und (17)' sind *bestimmte*, die zweiten dagegen *unbestimmte* Integrale, und die ausgeführte Umformung wird eben deshalb vorgenommen, weil dieselben auf verschiedene Weise approximiert werden müssen.

Die Formel (17) werden wir für $s < 0$ gebrauchen, die andere, (17)', für $s > 0$, so dass wir die Integration mit veränderlicher Grenze stets höchstens über das halbe Intervall zu erstrecken haben.

17. Auf die ersten Glieder der rechten Seiten der Formeln (17), (17)' wenden wir in der beschriebenen Weise eine der Mittelwertformeln von GAUSS an und ersetzen somit die bestimmten Integrale durch Summen, in denen die Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ auftreten.

Bei der Approximation der unbestimmten Integrale können wir nun dieselben Punkte anwenden, aber auch nur diese, da das Eintragen eines neuen t -Wertes das Erscheinen einer neuen Unbekannten φ zur Folge hätte. Eine Ausnahme tritt jedoch ein, wenn man a priori gewisse Werte von $\varphi(t)$ kennt oder wenn die Funktion $L(s, t)$ Nullstellen besitzt; dann empfiehlt es sich, die Werte des Integranden $L(s, t)\varphi(t)$ auch an diesen Stellen — die wir Hilfspunkte nennen — heranzuziehen, um eine bessere Approximation zu erreichen.

Wir bestimmen nun für $L(s, t)$ ein *Lagrangesches Interpolationspolynom* $m-1$ -ten Grades, wenn wir im ganzen m ($m \geq n$) Punkte t_i berücksichtigen wollen. Den Näherungsausdruck

$$(19) \quad L(s, t)\varphi(t) = \sum_{i=1}^m \frac{II_m(t)}{(t-t_i)II'_m(t_i)} L(s, t_i)\varphi_i,$$

wo

$$II_m(t) = (t-t_1)(t-t_2) \dots (t-t_m),$$

können wir nun in die Formeln (17) und (17)' eintragen und die Integrationen ausführen. Geben wir dann der Variablen s der Reihe nach die Werte t_j ($j = 1, 2, \dots, m$), so bekommen wir ein lineares Gleichungssystem mit den m Unbekannten φ_j , dessen Auflösung zu einer approximativen Lösung der Integralgleichung (1) führt, falls eine Lösung existiert.

Die Koeffizienten sind wie früher von den Funktionen $K(s, t)$ und $f(s)$ unabhängig, sofern nicht die Wahl der Hilfspunkte durch die spezielle Form jener Funktionen bedingt ist.

Hätten wir bei der Approximation der unbestimmten Integrale die gleiche Schärfe erreichen wollen wie bei derjenigen der ersten Glieder der rechten Seiten von (17) und (17)', so hätten wir nach dem in Nr. 7 Gesagten ein Lagrangesches Polynom der Ordnung $2n-1$ verwenden müssen, es wären dann also n Hilfspunkte erforderlich gewesen. In der Praxis wird man jedoch wohl meistens (vgl. die Anwendung in dem folgenden Beispiel) eine geringere Anzahl solcher anwenden, muss aber beachten, dass dann die Fehler der Gleichungen im wesentlichen von der weniger guten Approximation der in den Formeln (17) eingehenden unbestimmten Integrale herrühren, deren Intervalllänge aber nicht grösser als $\frac{1}{2}$ ist.

Sobald wir mittels der lösenden Formeln neue Werte $\varphi(s)$ berechnet haben, können wir diese dazu verwenden, die Funktion $L(s, t)\varphi(t)$ durch ein Lagrangesches Polynom höherer Ordnung als das früher benutzte zu ersetzen und bekommen damit für die in (17) auftretenden unbestimmten Integrale bessere Näherungen als vorher.

Damit erhalten wir wieder für die φ_j , deren Anzahl jetzt grösser als m ist, ein neues System von Gleichungen, woraus sich für dieselben *verbesserte* Werte ergeben. Man könnte fragen, ob die hinzutretenden Gleichungen tatsächlich von den früheren unabhängig sind. Um sich von der Tatsache, dass dies der Fall ist, zu überzeugen, braucht man nur zu bedenken, dass ihre Koeffizienten durch Ausrechnung *neuer* Funktionswerte K_{ji} entstanden sind.

Das verbesserte lineare Gleichungssystem braucht übrigens nicht vollständig von neuem gelöst zu werden, sondern man benutzt es nur, um die *Korrekturen* der φ -Werte zu berechnen, was bekanntlich erheblich leichter auszuführen ist.

Die Kleinheit der Verbesserungen gibt eine Vorstellung von der Genauigkeit des Verfahrens.¹

Schliesslich wollen wir bemerken, dass der Kern der nichtlinearen Integralgleichung (14) auch von der Art (15) sein darf.

§ 5. Anwendung auf Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

18. Eine Anwendung der Integralgleichungstheorie bezieht sich auf Randwertprobleme der folgenden Art. Es soll eine für $t=a$ und $t=b$ verschwindende Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

¹ Eine etwas andere Fehlerabschätzung findet man in II, § 5. Ein Beispiel dazu in § 6.

$$(20) \quad \varphi''(s) = F(s, \varphi(s)) + g(s)$$

ermittelt werden. Diese Aufgabe ist aber damit äquivalent, die Integralgleichung

$$(21) \quad \varphi(s) = \int_a^b K(s, t) F(t, \varphi(t)) dt + f(s)$$

zu lösen, wo der Kern durch die Bedingungen

$$(22) \quad K(s, t) = K^{(1)}(s, t) = \frac{(s-b)(t-a)}{b-a} \quad \text{für } a \leq t \leq s.$$

$$(22)' \quad K(s, t) = K^{(2)}(s, t) = \frac{(s-a)(t-b)}{b-a} \quad \text{für } s \leq t \leq b$$

definiert ist und wo

$$(23) \quad f(s) = \int_a^b K(s, t) g(t) dt.^1$$

Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich durch direkte Differentiation von (21) nach s , indem man sich die Integration getrennt über die Intervalle von a bis s und von s bis b erstreckt denkt. Natürlich können die Grenzen auch jetzt mittels einer mit (8) analogen Transformation zu $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ gemacht werden, was wir als bereits ausgeführt annehmen.

19. Das Verschwinden der gesuchten Funktion an den Enden des Intervalls ist nun ein Umstand, den wir zur Erlangung einer schärferen Approximation gebrauchen können. Dies geschieht so, dass wir statt einer der Formeln von GAUSS eine der in Nr. 13 erwähnten *Lobattoschen* benutzen, denn hierdurch wird die Genauigkeit der Approximation gesteigert, ohne dass die Anzahl der Unbekannten vermehrt wird.

Die einfachste, überhaupt in Betracht kommende Näherungsformel ist diejenige, wo *drei* innere Ordinaten berücksichtigt werden. Diese sind nach *LOBATTO* in den Punkten $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ zu berechnen, und es wird

¹ Ist die Quadratur nicht elementar durchführbar, so muss man auch zur Bestimmung der Funktion $f(s)$ Näherungsmethoden heranziehen.

Zur Beurteilung der Genauigkeit brauchen wir nur die gewonnene Funktion $\varphi(s)$ mit dem Lagrangeschen Polynom $\bar{\varphi}(s)$ zu vergleichen.

Die beschriebene Methode zur Lösung des Randwertproblems (20) besitzt vor allem den Vorteil, dass sie ziemlich weit gebracht ist ohne Spezialisierung der Funktionen $F(s, \varphi(s))$ und $g(s)$.

20. Beispiel einer nichtlinearen Randwertaufgabe.¹

Es möge sich um das Problem

$$(25) \quad \varphi''(s) - \sin \varphi(s) + 1 = 0 \quad \varphi\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0$$

handeln. Man kann auf verschiedene Weisen zeigen, dass dasselbe eine Lösung hat, die nur wenig von derjenigen des linearen Problems

$$\varphi''(s) - \varphi(s) + 1 = 0 \quad \varphi\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0$$

abweicht, welche letztere durch

$$(26) \quad \varphi(s) = 1 - \frac{\cosh s}{\cosh \frac{1}{2}}$$

geliefert wird. Wir können uns zwecks Lösung von (25) des Systems (24) bedienen.

Das Eintragen von $g(t) \equiv -1$ in (23) liefert $f(s) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}s^2$. Hiermit und da jetzt $F(t, \varphi(t)) = \sin \varphi(t)$ zu setzen ist, können wir aus den Gleichungen (24) durch Iteration die Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ermitteln. Dabei erscheint es gut, von der Lösung des vorher erwähnten linearen Problems auszugehen. Wir gelangen schon nach zwei Schritten zu Werten φ_i , die sich durch nochmaliges Eintragen nicht mehr ändern, nämlich

$$\varphi_1 = 0.113200, \quad \varphi_2 = \varphi_3 = 0.065257.$$

¹ Die »Gleichung der erzwungenen Schwingung« liefert Beispiele zu diesem Paragraphen. In der Abhandlung II, § 7 wird die lineare Randwertaufgabe $y''(s) + y(s)(1 - ps^2) + 1 = 0$, $y\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0$ behandelt, die sich auf Schwingungen einer eingespannten Saite mit »parabolischer Massenverteilung« bezieht. Unsere Methode gibt eine gute Übereinstimmung mit den auf andere Weise berechneten Lösungen.

Dann haben wir das Lagrangesche Polynom $\bar{\varphi}(t)$ zu bilden und bekommen

$$(27) \quad 0.113200 - 0.443469 t^2 - 0.037324 t^4.$$

Ferner erhalten wir für $\sin \varphi(t)$ das Lagrangesche Polynom

$$0.112958 - 0.441001 t^2 - 0.043325 t^4,$$

das wir in (21) einführen und finden dann als näherungsweise Lösung des Randwertproblems (25)

$$(28) \quad \varphi(t) = 0.113200 - 0.443521 t^2 - 0.036750 t^4 - 0.001444 t^6.$$

Der Vergleich von (27) und (28) zeigt, dass der Unterschied dieser Funktionen den Betrag 0.000012 nirgends im Intervall übersteigt. Wir können deshalb behaupten, dass bei Abrundung der Werte der Näherungsfunktion (28) auf fünf Dezimalen die Unsicherheit höchstens eine Einheit der letzten Stelle beträgt.

