Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre.

Von

Dénes König in Budapest.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Problemen aus der *Analysis situs,* der Determinantentheorie und der Mengenlehre. Der Begriff der *Graphen* ist dasjenige Bindeglied, durch welches diese Probleme miteinander zusammenhängen. Die durch geometrische Anschaulichkeit ausgezeichnete Methode der Graphen, die auch zur Lösung mancher hier auftretenden Fragen führt, wird nämlich die Äquivalenz von scheinbar einander fernliegenden Fragestellungen zeigen.

§ 1.

Graphen.*)

Es sei eine endliche Anzahl von Punkten gegeben; gewisse Paare, die man aus diesen Punkten auswählen kann, sollen durch eine oder mehrere (endlich viele) Kanten verbunden werden. Eine auf diese Weise entstehende Figur wird im allgemeinen als ein *Graph* bezeichnet. Ein Graph heißt (in sich) *zusammenhängend,* falls man auf seinen Kanten von irgend einem seiner Punkte**) zu jedem anderen gelangen kann. Ist der Graph nicht zusammenhängend, so zerfällt er in eindeutiger Weise in zusammenhängende Teile. In der Trivialität dieser Aussage liegt der Vorteil gewisser (algebraischer) Anwendungen der Graphen. Läuft aus jedem Punkt dieselbe Anzahl von Kanten aus, so heißt der Graph *regulär* und diese konstante Anzahl wird als der *Grad* des regulären Graphes bezeichnet. Eine ganz

*) Vgl. Petersen: „Die Theorie der regulären Graphs", Acta Mathematica Bd. 15 (1891), S. 193—220.

**) Nur die ursprünglich angenommenen Punkte (Knotenpunkte) werden als „Punkte" des Graphes bezeichnet.

ausgezeichnete Rolle spielen die sogenannten *paaren Graphen;* ein Graph wird so bezeichnet, falls jeder geschlossene Linienzug, der aus seinen Kanten gebildet werden kann, eine gerade Anzahl von Kanten enthält (z. B. das Kantensystem des Würfels).

Ein Graph ist dann und nur dann ein paarer Graph, wenn man seine Punkte so in zwei Gruppen zerlegen kann, daß nur Punkte verschiedener Gruppen unmittelbar (durch eine Kante) verbunden sind.

In der Tat: ist eine Teilung in zwei solche Gruppen möglich, so gehören die Punkte jedes geschlossenen Kantenzuges *abwechselnd* der einen und der anderen Gruppe an; der geschlossene Kantenzug muß also eine gerade Anzahl von Kanten enthalten. Und umgekehrt: ordnet man die Punkte, auf einem beliebigen Kantenzug fortfahrend, abwechselnd der einen oder anderen Gruppe zu, so kann dies nur dann zu einem Widerspruch führen, falls man auf einen geschlossenen Kantenzug gestoßen ist, der eine ungerade Anzahl von Kanten enthält. (Dies gilt auch für nicht zusammenhängende Graphen, nur ist hier die Einteilung der Punkte in zwei Gruppen nicht eindeutig bestimmt.)

Auf diese Weise können die „nicht zusammenhängenden" und die „paaren" Graphen symmetrisch zueinander definiert werden, da man die nicht zusammenhängenden Graphen auch dadurch charakterisieren kann, daß ihre Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur zwei Punkte *derselben* Gruppe untereinander unmittelbar verbunden sind.

Die Gesamtheit G_k gewisser Kanten des Graphes G, wird als ein *Faktor* k^{ten} *Grades* von G bezeichnet, wenn von jedem Punkte von G genau k Kanten von G_k auslaufen. Ein Faktor k^{ten} Grades ist selbst ein regulärer Graph k^{ten} Grades, seine Punkte stimmen mit den Punkten des ursprünglichen Graphes überein. Gewisse Kanten von G bilden also dann einen Faktor *ersten* Grades, wenn jeder Punkt von G einmal und nur einmal als Endpunkt dieser Kanten vorkommt. Ist G regulär und n^{ten} Grades, so bilden diejenigen Kanten, die in einem Faktor k^{ten} Grades G_k *nicht* enthalten sind, einen Faktor $n-k^{\text{ten}}$ Grades, G_{n-k}. In diesem Falle setzt man nach Petersen:

$$G = G_k G_{n-k}.$$

Ebenso definiert man das Zerfallen eines regulären Graphes in mehr als zwei Faktoren. Stets ist die Summe der Grade der Faktoren dem Grade des ursprünglichen Graphes gleich. Im Folgenden wird besonders die Zerlegung eines regulären Graphes in Faktoren ersten Grades behandelt werden.

Jeder Graph zweiten Grades besteht aus einfachen (doppelpunktslosen) geschlossenen Linien. Dieser besitzt, wie man sieht, dann (und nur dann) einen Faktor ersten Grades, wenn alle diese geschlossenen Linien eine gerade Anzahl von Kanten enthalten.*)

Als eine Verallgemeinerung dieser Tatsache werden wir folgenden Satz beweisen:

A) *Jeder paare reguläre Graph besitzt einen Faktor ersten Grades.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des folgenden (der jedoch nur scheinbar mehr besagt**)):

B) *Jeder paare reguläre Graph k^{ten} Grades zerfällt in k Faktoren ersten Grades.*

Dieser Satz wieder ergibt sich als eine Folge des folgenden:

C) *Laufen in jedem Punkte eines paaren Graphes höchstens k Kanten zusammen, so kann man den Kanten des Graphes je einen von k Indizes auf solche Weise zuordnen, daß zwei Kanten, die in einem Punkt zusammenlaufen, stets verschiedene Indizes erhalten.*

Der Satz B) ist in der Tat eine unmittelbare Folge dieses Satzes, da im Falle eines regulären Graphes k^{ten} Grades die Kanten mit denselben Indizes je einen Faktor ersten Grades bilden.

Für den Beweis des Satzes C) wollen wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden, die, obzwar sie bei einer Beschränkung auf den Satz B) versagt, für den allgemeineren Satz C) unmittelbar zum Ziele führt. Ist die Anzahl der Kanten $\leqq k$, so ist der Satz natürlich richtig. Wir nehmen also an, daß er stets richtig ist, wenn diese Zahl $< N$ ist und beweisen ihn für den Graph G mit N Kanten.

Läßt man aus G irgend eine Kante, e weg, so entsteht also ein — natürlich ebenfalls paarer — Graph G', dessen Kanten mit den k Indizes in einer dem Satze C) entsprechenden Weise versehen werden können. Diese Indizes denken wir an den Kanten von G' angebracht. Verbindet die weggelassene Kante e die Punkte A und B, so ist es *erstens* möglich, daß irgend ein Index weder in A (d. h. an einer Kante die nach A läuft), noch in B vorkommt. In diesem Falle kann man diesen Index der Kante e zuordnen und unser Ziel ist erreicht. Wir können uns also auf den *zweiten* Fall beschränken: ein Index, etwa „1", der in B fehlt (einen solchen muß

*) Petersen, l. c., S. 195.

**) Nimmt man nämlich den Satz A) als richtig an, so hat der Graph k^{ten} Grades, G_k, einen Faktor ersten Grades G_1 und es ist $G_k = G_1 G_{k-1}$, ebenso ist $G_{k-1} = G_1' G_{k-2}$, $G_{k-2} = G_1'' G_{k-3}, \ldots$ wo auch $G_1', G_1'', \ldots$ Faktoren ersten Grades sind; endlich ist also $G_k = G_1 G_1' G_1'' \ldots G_1^{(k-1)}$ wirklich in Faktoren ersten Grades zerlegt. — Für eine gerade Zahl k folgt Satz B) unmittelbar aus einem Satze von Petersen (l. c., S. 200). Es wäre auch nicht schwer, den Fall einer ungeraden Gradzahl auf diesen Fall zurückzuführen. Der hier folgende Beweis, der auch zu allgemeineren Resultaten führt, ist jedoch einfacher und macht die Unterscheidung dieser zwei Fälle nicht nötig.

es geben, da in G' höchstens $k-1$ Kanten nach B — und ebenso auch nach A — laufen), kommt in A vor. Sei weiter „2" ein Index, der in A nicht vorkommt. — Sei nun AA_1 die Kante mit dem Index „1". Eventuell gibt es eine Kante A_1A_2 mit dem Index „2", dann vielleicht eine Kante A_2A_3 mit dem Index „1", eine Kante A_3A_4 mit dem Index „2", usw. Wir bilden diesen „alternierenden" Weg $AA_1A_2A_3\cdots$ so weit als nur möglich. Er ist — nach der Wahl der Indizes „1" und „2" — eindeutig bestimmt. Auf diesem Weg kann man keinen Punkt zweimal erreichen, denn wäre A_i der erste Punkt, der schon einmal passiert wurde, so müßten in A_i drei Kanten mit den Indizes „1" oder „2" vorkommen. Aber auch nach A kann man nicht zurückgelangen, da dort „2" gar nicht vorkommt und „1" (mit der Kante AA_1) schon benutzt wurde. Endlich kann man auf diesem Weg nicht nach B gelangen, denn dies könnte nur mit einer Kante vom Index „2" geschehen („1" kommt in B nicht vor) und dann würde der Weg von A nach B eine gerade Anzahl von Kanten enthalten; mit der weggelassenen Kante e zusammengenommen würde dieser Weg — im Gegensatz zu unseren Voraussetzungen — einen geschlossenen Kantenzug von G mit ungerader Kantenzahl ergeben.

$AA_1A_2\cdots A_r$ ist also ein doppelpunktsloser beiderseits offener Weg, der den Punkt B nicht enthält, und dessen Kanten abwechselnd die Indizes „1" und „2" tragen. Wir vertauschen nun die Indizes „1" und „2" auf den Kanten dieses Weges, ohne die Indizes der übrigen Kanten zu ändern. Die Verteilung der Indizes genügt auch nach dieser Vertauschung den Forderungen. Man sieht das unmittelbar sowohl für den ersten Punkt A, von wo aus ursprünglich keine Kante mit dem Index „2" auslief, wie für die inneren Punkte A_i und auch für den Endpunkt A_r, von wo keine zweite Kante mit dem Index „1" oder „2" auslaufen kann, da sonst unser Weg nicht in A_r enden könnte. Nun haben wir aber erreicht, daß der Index „1" auch in A nicht mehr vorkommt, so daß er der weggelassenen Kante e zugeordnet werden kann.

Damit sind der Satz C) und also auch die Sätze A) und B) bewiesen.

Bevor wir nun zu den Anwendungen dieser Untersuchungen auf die Determinantentheorie und Mengenlehre übergehen, wollen wir noch erwähnen, daß unser Satz B) in engem Zusammenhang mit einem bekannten Problem der *Analysis situs* selbst steht; dies ist das Problem des *Kartenfärbens.* Der bis heutzutage unbewiesene *Vierfarbensatz* besagt folgendes: „Man kann den Ländern einer ebenen Karte je eine von vier Farben stets auf solche Weise zuordnen, daß zwei Länder, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, immer verschiedene Farben erhalten." Man kann leicht sehen, daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo die Grenzen der Karte einen regulären Graph dritten Grades bilden und dann ist der Vierfarbensatz dem Taitschen Satze äquivalent,*) der besagt, daß ein solcher Graph stets in Faktoren ersten Grades zerfällt. Natürlich braucht darum noch nicht jeder Graph dritten Grades in drei Faktoren zu zerfallen, denn ein Graph kann nur dann als das Grenzsystem einer ebenen Karte angesehen werden, wenn er folgende zwei Eigenschaften besitzt: 1) er läßt sich auf der Ebene (Kugel) so zeichnen, daß dabei keine (neuen) Schnittpunkte auftreten und 2) jede seiner Kanten gehört einem doppelpunktslosen geschlossenen Kantenzuge an. Ohne diese zwei Einschränkungen ist der Taitsche Satz (Tait hat ihn ohne diese Einschränkungen ausgesprochen und als evident erklärt**)) gar nicht richtig, wie man durch zwei Beispiele zeigen kann.***) — Ist aber dieser Graph ein paarer Graph, so ist nach dem bewiesenen Satze B) der Satz auch ohne diese zwei Einschränkungen richtig. Allerdings ergibt dies nichts Neues für das Problem des Kartenfärbens, da in diesem Falle — wie Kempe†) bewiesen hat — nicht nur vier sondern schon drei Farben ausreichen. Für das allgemeine Problem wäre sicherlich ein wichtiger Schritt getan, wenn es — und zwar in einfacher Weise — gelingen würde, die Graphen von der Eigenschaft 1) durch innere (kombinatorische) Eigenschaften der Graphen zu charakterisieren. Dabei würde jedenfalls der Eulersche Polyedersatz eine wichtige Rolle spielen.††)

§ 2.

Anwendung auf Determinanten.

Die paaren Graphen können mit den Determinanten aus ganzen oder reellen Elementen in engen Zusammenhang gebracht werden und zwar mit jenen Eigenschaften dieser Determinanten, die nur vom absoluten Betrage ihrer Glieder abhängen und unabhängig sind von den Vorzeichen, die den Gliedern zugeordnet werden.

Wir wollen uns zunächst mit solchen Determinanten

$$D = |a_{ik}|_{i,k=1,2,\cdots,n}$$

beschäftigen, wo die Elemente a_{ik} nicht negative ganze Zahlen sind. Der

*) Diese Untersuchungen sind zusammengestellt z. B. bei Wernicke (Math. Ann. 58, S. 413).

**) Philosophical Magazine (5), Bd. 17, S. 30.

***) Das eine ist ein merkwürdiger Graph von Petersen (Intermédiaire des Mathématiciens Bd. 5, S. 225), das andere z. B. ein Graph (ebenfalls dritten Grades) von Sylvester (abgedruckt als Figur 11 in der öfters erwähnten Arbeit von Petersen).

†) Am. Journ. of Math. Bd. II, S. 193.

††) Dies habe ich in zwei in ungarischer Sprache erschienenen Arbeiten versucht (Mathematikai és természettudományi Értesítő Bd. 29).

quadratischen Matrix D kann man einen paaren Graphen G folgendermaßen zuordnen. Wir lassen den Reihen von D gewisse Punkte

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

und den Spalten ebenfalls n Punkte,

$$B_1, B_2, \cdots, B_n$$

als Punkte von G entsprechen und verbinden jeden Punkt A_i mit jedem Punkt B_k durch a_{ik} verschiedene Kanten. (Es kann a_{ik} auch Null sein.) Zwei A-Punkte und zwei B-Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der durch D vollkommen bestimmte Graph G ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem geschlossenen Kantenzug die Punkte A und B abwechselnd aufeinander folgen. Die Zahl der Kanten, die in A_i oder B_k zusammenlaufen ist gleich der Summe der i^{ten} Zeile, bzw. k^{ten} Spalte von D; G ist also dann und nur dann regulär, wenn jede Reihe und jede Spalte von D dieselbe Summe ergibt. — Da weder zwei A-, noch zwei B-Punkte untereinander unmittelbar verbunden sind, so können die Kanten eines jeden Faktors ersten Grades von G folgendermaßen bezeichnet werden:

$$A_1 B_{i_1}, A_2 B_{i_2}, \cdots, A_n B_{i_n}, \tag{K_i}$$

wo

$$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$$

eine Permutation der Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bedeutet. Dieses (K_i) ist dann und nur dann wirklich ein Faktor ersten Grades von G, wenn jede der Zahlen

$$a_{1 i_1}, a_{2 i_2}, \cdots, a_{n i_n}$$

d. h. das Produkt

$$a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

von Null verschieden ist. Dieses Produkt ist aber nichts anderes, als — vom Vorzeichen abgesehen — ein allgemeines Glied von D. Da nun nach Satz A) jeder reguläre paare Graph einen Faktor ersten Grades besitzt, sind wir zu folgendem Determinantensatze geführt worden.

D) *Wenn in einer Determinante aus nicht negativen [ganzen] Zahlen jede Reihe und jede Spalte dieselbe positive Summe ergibt, so ist wenigstens ein Glied der Determinante von Null verschieden.*

Nur für den Fall, daß die Elemente ganze Zahlen sind, wurde dieser Satz bewiesen, man kann aber unschwer zeigen, daß er auch für rationale, sogar für reelle Elemente überhaupt richtig bleibt. Negative Elemente dürfen jedoch nicht zugelassen werden, wie es z. B die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

zeigt; jede Reihensumme und Spaltensumme ist hier 1 und doch verschwinden alle sechs Glieder.

Wir wollen uns noch mit dem speziellen Fall beschäftigen, wo die nichtverschwindenden Elemente gleich 1 sind. Dann läßt sich das Übereinstimmen sämtlicher Reihen- und Spaltensummen auch so ausdrücken, daß jede Reihe und Spalte dieselbe Anzahl von Nullen enthält. In diesem Falle entsprechen verschiedenen Faktoren ersten Grades von G verschiedene Glieder von D. Da weiter das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinantenglieder nicht vom Werte der nichtverschwindenden Elemente abhängt, ergibt Satz B) den folgenden Satz:

E) *Ist die Anzahl der nichtverschwindenden Elemente in jeder Reihe und Spalte einer Determinante genau gleich k, so gibt es wenigstens k nichtverschwindende Determinantenglieder.*

(Diese k Glieder können stets so gewählt werden, daß jedes nichtverschwindende Determinantenelement in einem und nur einem dieser Glieder enthalten sei.)

Die Frage, wann es genau k und wann es mehr als k nichtverschwindende Glieder gibt, ist für $k = 1$ trivial, und kann für $k = 2$ mit Hilfe des entsprechenden Graphes sofort entschieden werden. Schon für $k = 3$ führt aber diese Frage (d. h. die Frage, wie viel Faktoren ersten Grades ein paarer Graph dritten Grades besitzt) auf viel schwierigere Untersuchungen, die auch mit dem Vierfarbensatz in enger Beziehung zu sein scheinen.

Man kann die hier gefundenen Determinantensätze (bzw. den Satz B)) auch so interpretieren:

F) *Sind auf einer quadratischen Tafel mit n^2 Feldern kn Figuren so aufgestellt, daß jede Reihe und jede Spalte genau k Figuren enthält (dabei dürfen mehrere Figuren auf demselben Felde stehn), so entsteht diese Konfiguration stets durch Überlagerung von k solchen Konfigurationen, in denen jede Zeile und jede Spalte genau eine Figur enthält.*

Eine analoge Interpretation kann auch dem Satze C) gegeben werden.

§ 3.

Unendliche Graphen und Anwendung auf die Mengenlehre.

Die hier gegebenen Untersuchungen und Anwendungen der Theorie der Graphen setzen eigentlich gar keine geometrische Anschauung voraus. Anstatt eines Graphes hätten wir immer von einer Menge von Paaren

$$\text{(G)} \qquad AB,\ CD,\ AE,\ \cdots,$$

die Kanten genannt werden, sprechen können. Diese Paare werden aus gewissen Elementen $A, B, C, \cdots$, die Punkte genannt werden, gebildet. Nur muß man hier für die Elemente der Menge G verschiedene *Multiplizitäten* zulassen, dem Umstande entsprechend, daß dieselben zwei Punkte durch mehrere Kanten verbunden sein können. Alle unsere geometrischen Begriffe (zusammenhängender Graph, regulärer Graph, Grad und geschlossener Linienzug eines Graphes usw.) können rein abstrakt mit Hilfe der Menge G definiert werden, ohne daß wir uns auf geometrische Anschauung stützen müssen. Diese Bemerkung ist wichtig, da, wenn man sie einmal angenommen hat, nichts im Wege steht, die „Sprache der Graphen" auch dann zu benützen, wenn die Mengen $(A, B, C, \cdots)$ und $(AB, CD, AE, \cdots)$ nicht endlich, ja sogar von beliebig großer Mächtigkeit sind. Es wäre überflüssig für diese „unendlichen" Graphen die Regularität, die Gradzahl, die Faktoren, (geschlossene) Kantenzüge, usw. besonders zu definieren. Wir wiederholen nur, daß ein Graph dann zusammenhängend genannt wird, falls man von irgend einem seiner Punkte zu jedem anderen durch eine endliche Anzahl seiner Kanten gelangen kann*). Die Tatsache, daß *auch ein unendlicher Graph auf eindeutige Weise in zusammenhängende Teile zerfällt,* kann ohne jede geometrische Anschauung leicht bewiesen werden.

Indem man die Mächtigkeit der Menge der Punkte und der Menge der Kanten keiner Einschränkung unterwirft, verallgemeinert man natürlich in hohem Maße den Begriff des Graphes. Nur eine Einschränkung wollen wir auch weiterhin beibehalten: wir werden uns auch im Folgenden nur mit solchen Graphen beschäftigen, wo die Anzahl der Kanten, die im selben Punkte zusammenlaufen, unter einer endlichen Schranke bleibt. Dann werden wir außer den schon behandelten „endlichen" Graphen nur noch mit „abzählbaren" Graphen (so wollen wir die Graphen mit einer abzählbaren Menge von Kanten kurz bezeichnen) zu tun haben. Es gilt nämlich der Satz:

G) *Bleibt die Anzahl der Kanten die im selben Punkt zusammenlaufen für einen Graph G unter einer endlichen Schranke h, so zerfällt G in endliche und abzählbare Teile.***)

Es genügt zu zeigen, daß wenn G auch zusammenhängend ist, er endlich oder abzählbar sein muß. Dies ist aber klar. Durch *eine* Kante

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu erwähnen, daß die Aussage „ein Punkt läßt sich aus einem anderen durch einen Weg aus unendlich vielen Kanten erreichen" keinen Sinn haben kann. Die Worte „durch eine endliche Anzahl seiner Kanten" können hier also durch die Werte „auf seinen Kanten" ersetzt werden. — Auch jeder geschlossene Kantenzug eines Graphes besteht *eo ipso* aus einer endlichen Anzahl von Kanten.

**) Es genügt schon, wenn man nur voraussetzt, daß in jedem Punkt eine endliche Anzahl von Kanten zusammenlaufen.

kann man aus irgend einem seiner Punkte P höchstens h Punkte erreichen, durch zwei höchstens $h^2, \cdots$ durch ν Kanten höchstens h^ν. Die Menge der Punkte, die man aus P durch eine endliche Zahl von Kanten erreichen kann, d. h. die Menge sämtlicher Punkte von G, ist also endlich oder abzählbar. Dann muß natürlich auch die Menge der Kanten endlich oder abzählbar sein.

Unter den unendlichen Graphen sind nach denjenigen ersten Grades (die aus Kanten ohne Zusammenhang bestehen) natürlich die Graphen zweiten Grades die einfachsten. Diese zerfallen in geschlossene Linien mit einer endlichen Kantenzahl und in beiderseits „ins Unendliche laufende" einfache Linien mit abzählbar unendlich vielen Kanten. Ist der Graph zweiten Grades ein paarer Graph, so ist offenbar jeder dieser Teile das Produkt zweier Faktoren ersten Grades, *also**) auch der ganze Graph. *Für den Grad* 2 *sind also die Sätze* A) *und* B) *auch für unendliche Graphen richtig.*

Um auch Beispiele unendlicher Graphen höheren Grades zu geben, soll noch erwähnt sein, daß das ebene quadratische Gitter einen unendlichen regulären Graph vierten Grades repräsentiert. Das analoge räumliche Gebilde ist ein unendlicher Graph sechsten Grades.

Unser Satz G) ist von Bedeutung, wenn man die Graphen in der Mengenlehre anwendet. Er läßt in manchen Fällen das Problem auf endliche und abzählbare Mengen reduzieren, wie sich das in dem Folgenden zeigen wird.

Wir wollen nämlich jetzt die Methode der Graphen auf den Beweis und auf eine Verallgemeinerung des folgenden Bernsteinschen Satzes**) anwenden***):

---

*) Dieser Schluß ist unberechtigt für den, der das Zermelosche *Auswahlprinzip* nicht anerkennt.

**) Diss. Göttingen 1901, abgedruckt in Math. Ann. 61, S. 117. Der Bernsteinsche Beweis ist auch schon für den Fall $\nu = 2$ (eigentlich wird von Bernstein nur dieser Fall ausführlich dargestellt) recht kompliziert. (Die folgende Überlegung erledigt diesen Fall durch unmittelbare Anschauung.) Natürlich ist dieser Bernsteinsche Satz eine unmittelbare Folge des Zermeloschen *Wohlordnungssatzes*. Unser Beweis mag vielleicht doch auch für denjenigen Interesse besitzen, der die Zermeloschen Beweise annimmt, trotzdem wir das Zermelosche *Auswahlprinzip* keineswegs zu vermeiden versuchten. Wir benutzen aber nur die einfachsten Begriffe der Mengenlehre (Menge, Element, Abbildung) und der Ordnungsbegriff spielt in unserem Beweise keine Rolle.

***) Der Äquivalenzsatz der Mengenlehre, der ebenfalls von Bernstein zuerst bewiesen wurde, läßt sich mit Hilfe des Graphenbegriffes ebenfalls in recht anschaulicher Weise beweisen. In der Tat benutzt der einfachste Beweis dieses Satzes, den J. König gegeben hat (Comptes Rendus, Bd. 143, S. 110), im Grunde genommen, diesen Begriff. Da liegen jedoch die Verhältnisse so einfach (es würde nur von Graphen

Sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ beliebige Mächtigkeiten und ν eine endliche Zahl, so folgt aus

$$\nu\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{n}$$

stets

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{n}.$$

Haben die Mengen M und N die Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, so besagt die Gleichung $\nu\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{n}$, daß diejenigen zwei Mengen, die aus M und N entstehen, wenn man alle Elemente durch ν verschiedene Elemente ersetzt, einander äquivalent sind. Ohne den Begriff der Mächtigkeit zu benutzen, kann also dieser Satz folgendermaßen formuliert werden:

H) *Stehen zwei Mengen in umkehrbarer* $(1, \nu)$-*Relation zueinander, so sind sie äquivalent.*

Wir wollen zunächst den Begriff der „umkehrbaren $(1, \nu)$-Relation" genau definieren. Wir sagen, daß M zu N in einer $(1, \nu)$-Relation steht, wenn jedem Elemente von M, ν Elemente von N entsprechen; diese brauchen jedoch nicht ν verschiedene Elemente von N zu sein, indem wir der Zuordnung eines M-Elementes zu einem N-Elemente eine *Multiplizität* zuordnen. Daß dem Elemente a von M aus N ν Elemente entsprechen, soll also stets so verstanden werden, daß, wenn dem M-Elemente a aus N die Elemente

$$b_1, b_2, \cdots, b_\mu \qquad (\mu \leqq \nu)$$

entsprechen und diese Zuordnungen der Reihe nach die Multiplizitäten

$$s_1, s_2, \cdots, s_\mu$$

besitzen, dann für jedes Element a von M

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu = \nu$$

ist. Eine solche Beziehung von M auf N wird nun *umkehrbar* genannt, wenn die Umkehrung dieser Relation, die die Elemente von N den Elementen von M zuordnet, ebenfalls eine $(1, \nu)$-Relation ist. Eine umkehrbare $(1, \nu)$-Relation hat also die Eigenschaft, daß, wenn eines der N-Elemente die dem Elemente a von M entsprechen, b ist, so ist eines der M-Elemente, die dem Elemente b von N entsprechen, a; und diese zwei Beziehungen haben dieselbe Multiplizität.

Dieser Umstand hat zur Folge, daß man die umkehrbare $(1, \nu)$-Relation zweier Mengen M und N (von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{n}$) oder — was dasselbe ist — die Richtigkeit der Beziehung $\nu\mathfrak{m} = \nu\mathfrak{n}$, in anschaulicher Weise durch einen paaren regulären Graph repräsentieren kann.

---

zweiten Grades die Rede sein), daß es als überflüssig erscheint, die Terminologie der Graphentheorie zu benutzen. — Der Versuch, die dort gegebene Methode meines Vaters auf den Beweis des oben erwähnten Bernsteinschen Satzes anzuwenden, führte mich zu den Untersuchungen, die in der vorliegenden Arbeit enthalten sind.

Die Elemente von M und N werden selbst die Punkte des zu definierenden Graphes sein; ein M-Punkt wird mit einem N-Punkt durch s Kanten verbunden, wo s die Multiplizität der (gegenseitigen) Beziehung dieser zwei Elemente bedeutet. Zwei M-Punkte, sowie zwei N-Punkte werden untereinander niemals verbunden. Der so entstehende Graph ist in der Tat ein paarer Graph, da auf jedem seiner geschlossenen Kantenzüge die Punkte M und N abwechselnd aufeinander folgen und er ist auch regulär, da in jedem seiner Punkte genau ν Kanten zusammenlaufen.

Nun zerfällt (nach Satz G)) der Graph G in endliche und abzählbare Teile. Sei G_1 ein beliebiger dieser Teile; seine Punkte sollen die Teilmengen M_1 und N_1 von M bzw. N bilden und es sei m_1 und n_1 die Mächtigkeit von M_1 und N_1. Dann ist

$$\nu m_1 = \nu n_1,$$

da sowohl die linke, wie die rechte Seite die Mächtigkeit der Menge der Kanten von G_1 bedeutet. Hier sind aber m_1 und n_1 endliche Zahlen oder $\aleph_0$ und da für diesen Fall der Bernsteinsche Satz trivial ist, so folgt hieraus

$$m_1 = n_1.$$

Denkt man sich dies für jeden Teil von G aufgeschrieben und addiert man, so ergibt sich

$$m = n,$$

womit der Bernsteinsche Satz vollkommen bewiesen ist.

Es entstehen aber große Schwierigkeiten, wenn man zur folgenden Verschärfung des Satzes H) (des Bernsteinschen Satzes) übergeht. Es sei hier gleich erwähnt, daß es uns nicht gelungen ist diesen Satz im allgemeinen zu beweisen.

I) *Stehen zwei Mengen in einer umkehrbaren $(1, \nu)$-Relation zueinander, so gibt es zwischen ihnen auch eine umkehrbar eindeutige Relation, die so beschaffen ist, daß sie nur solche Elemente einander zuordnet, die auch durch die gegebene $(1, \nu)$-Relation einander zugeordnet sind.*

In dem früher definierten Graph G äußert sich der Umstand, daß zwei Elemente durch die $(1, \nu)$-Relation einander entsprechen, dadurch, daß die entsprechenden zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind. Der Satz I) besagt also einfach, daß G einen Faktor ersten Grades besitzt; er würde also bewiesen sein, wenn man zeigen könnte, *daß der Satz* A) *auch für unendliche Graphen richtig ist.* (Nach Satz G) würde es genügen Satz A) nur noch für abzählbare Graphen zu beweisen.) — Auch umgekehrt folgt aus I) der Satz A) für unendliche Graphen. Denn jeder paare Graph ν^{ten} Grades kann als ein solcher Graph entstanden gedacht werden, der die umkehrbare $(1, \nu)$-Relation zweier Mengen repräsentiert. Dies folgt daraus, daß — wie wir dies für endliche Graphen schon ausgeführt haben — auch im Falle eines unendlichen paaren Graphes seine Punkte so in zwei Gruppen geteilt werden können, daß nur Punkte verschiedener Gruppen durch eine Kante verbunden sind*).

Hierdurch hat sich Satz I) mit dem für endliche und unendliche Graphen formulierten Satz A) äquivalent erwiesen. Auch den Sätzen B) und C) sind diese Sätze äquivalent. Denn nicht nur B) ist eine Folge von C) und A) von B), was für unendliche Graphen ebenso ersichtlich ist, wie für endliche, sondern es gilt auch umgekehrt, daß B) aus A) und C) aus B) folgt. Nur letztere Behauptung bedarf eines besonderen Beweises. Wir beweisen also den Satz:

Der Satz C) *ist eine Folge des Satzes* B).

Es sei G ein beliebiger paarer Graph, der so beschaffen ist, daß in jedem seiner Punkte höchstens k Kanten zusammenlaufen. Wir ergänzen G folgendermaßen zu einem neuen Graph H. Wir nehmen den Punkten von G entsprechend je einen neuen Punkt an und verbinden zwei neue Punkte mit soviel Kanten untereinander, als die entsprechenden zwei Punkte in G verbunden sind. Außerdem verbinden wir jeden Punkt von G mit dem ihm entsprechenden neuen Punkt durch $k-\alpha$ Kanten, wo $\alpha\,(\leqq k)$ die Zahl der Kanten bedeutet, die in G nach diesem G-Punkte laufen. Andere Punkte und Kanten werden nicht eingeführt. Der so entstandene Graph H ist regulär, da in jedem seiner Punkte $\alpha+(k-\alpha)=k$ Kanten zusammenlaufen. Auch ist H ein paarer Graph. Dies sieht man folgendermaßen ein. Da G ein paarer Graph ist, lassen sich seine Punkte so in zwei Gruppen I und II einteilen, daß jede Kante von G nur Punkte verschiedener Gruppen verbindet. Teilt man nun die neuen Punkte in I oder II ein, je nachdem der entsprechende G-Punkt zu II oder I gehört, so verbinden auch die Kanten von H nur Punkte verschiedener Gruppen (I und II). — Nimmt man also den Satz B) an, so zerfällt H in k Faktoren ersten Grades. Teilt man je einen von k Indizes den Kanten von G zu, je nachdem sie dem einen oder anderen dieser Faktoren angehören, so entspricht diese Verteilung der Indizes dem Satze C).

Wir wollen jetzt endlich noch zeigen, daß es genügen würde die Sätze A), B), C) und I), die sich einander als äquivalent erwiesen haben, für den Fall zu beweisen, daß die Gradzahl in A) und B) (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl ν in I)) eine Primzahl ist. Dies folgt für den Satz A), also auch für die übrigen drei, unmittelbar aus dem Satze:

K) *Wenn jeder paare Graph* μ^{ten} *Grades und jeder paare Graph* ν^{ten}

*) Zerfällt der Graph in unendlich viele Teile, so braucht man zu diesem Schluß wieder das Zermelosche *Auswahlprinzip*.

Grades einen Faktor ersten Grades besitzt, so hat auch jeder paare Graph $\mu\nu^{ten}$ Grades einen solchen Faktor.

Nehmen wir die Voraussetzungen dieses Satzes an und es sei P ein beliebiger Punkt eines beliebigen paaren Graphes G, $\mu\nu^{ten}$ Grades. Wir ersetzen P durch μ Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ und führen die $\mu\nu$ Kanten, die in G nach P laufen anstatt von P nach den Punkten P_i, und zwar so (sonst in beliebiger Weise), daß in jedem P_i $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ genau ν dieser $\mu\nu$ Kanten zusammenlaufen sollen. Führt man dies für jeden Punkt von G aus, so erhält man einen Graph G_ν, ν^{ten} Grades; und dies ist ebenfalls ein paarer Graph, da jedem geschlossenen Kantenzuge von G_ν ein geschlossener Kantenzug von G mit derselben Kantenzahl entspricht. Nach unseren Voraussetzungen hat also G_ν einen Faktor ersten Grades G_1. Vereinigt man nun wieder die Punkte $P_1, P_2, \cdots, P_\mu$ zu je einem Punkte P, wodurch man aus G_ν den ursprünglichen Graph G zurückerhält, so geht G_1 in einen Faktor G_μ μ^{ten} Grades von G über. Als ein Teil von G ist auch dieser G_μ ein paarer Graph und hat also, nach unseren Voraussetzungen, einen Faktor ersten Grades. Dies ist natürlich auch ein Faktor ersten Grades von G, womit Satz K) bewiesen ist.

[Indem man den ersten Teil dieses Beweises fast wörtlich wiederholt, ergibt sich auch das folgende, teilweise allgemeinere Resultat:

Besitzt jeder paare Graph ν^{ten} Grades einen Faktor k^{ten} Grades, so besitzt auch jeder paare Graph $\mu\nu^{ten}$ Grades einen Faktor μk^{ten} Grades.]

Für die Gradzahl 2 haben wir die Sätze A) und B) auch für unendliche Graphen bewiesen. Es folgt also aus K) daß *die Sätze* A), B), C) *und* I) *sicherlich richtig sind, wenn die Gradzahl* (bzw. die Zahl k in C) und die Zahl ν in I)) *eine Potenz von* 2 *ist.* Für eine beliebige Gradzahl (ja sogar schon für die Gradzahl 3 scheinen jedoch unsere Methoden nicht auszureichen, trotzdem man, wie wir sahen, sich auf abzählbare Graphen beschränken kann. Die vollständige Induktion, durch die wir den Satz C) für endliche Graphen bewiesen haben, versagt sofort, wenn der Graph unendlich viele Kanten hat.

Die Resultate dieser Arbeit wurden am 15. November 1915 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

Budapest, Oktober 1915.