ÜBER POLYNOMENTWICKLUNGEN IM MITTAG-LEFFLER-SCHEN STERN DURCH ANWENDUNG DER EULERSCHEN REIHENTRANSFORMATION.

Von

KONRAD KNOPP

in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Herr G. Mittag-Leffler hat seit 1882 das Problem der analytischen Fortsetzung eines gegebenen Funktionselementes — d. h. der Gewinnung eines arithmetischen Ausdrucks, der in einem möglichst ausgedehnten Gebiete die durch das Element definierte Funktion darzustellen vermag — umfassend in Angriff genommen und insbesondere durch seine grossen Arbeiten in den *Acta mathematica* aus den Jahren 1900 bis 1905 in vollkommenster Weise beantwortet [7]. Diese Arbeiten haben überdies eine grosse Zahl weiterer Untersuchungen[1] angeregt, deren wichtigste Ergebnisse von Herrn L. Bieberbach in seinem Encyklopädie-Artikel [1] zusammengestellt worden sind.[2]

Im folgenden möchte ich nun zeigen, wie ein erheblicher Teil dieser Ergebnisse — unter ihnen die schönen Hauptsätze der 3. Note des Herrn Mittag-Leffler — in überraschend einfacher Weise dadurch gewonnen werden kann, dass man die klassische Eulersche Reihentransformation in einer naheliegenden Verallgemeinerung verwendet, wie dies für andere Zwecke schon 1898 von Herrn E. Lindelöf [6] und neuerdings von Herrn O. Perron [8] getan worden ist. Dann

[1] Ausführlichere Literaturangaben findet man in der 2. bis 5. Note des Herrn Mittag-Leffler.

[2] Hier ist auch die gesamte in Frage kommende Literatur aufgeführt.

werden uns die durchaus elementaren Methoden, die für die klassische Eulersche Reihentransformation schon seit längerem bekannt sind, unmittelbar zu all den Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern führen, die Herr Mittag-Leffler in der genannten Note aufgestellt hat, und die von anderen im Anschluss an seine Arbeiten angegeben worden sind. Aber darüber hinaus werden wir noch zu allgemeineren Entwicklungen nach analytischen Funktionen gelangen, deren Gewinnung nach den bisherigen Methoden nicht ohne weiteres möglich zu sein scheint.

In § 1 werde ich die bekannten Eigenschaften der klassischen Eulerschen Reihentransformation, die als Vorbild für die Verallgemeinerung dienen sollen, zusammenstellen. In § 2 wird eine mehr geometrische Zwischenbetrachtung über die in Frage kommenden Sternbereiche eingeschaltet, und in § 3 die in Aussicht genommene Verallgemeinerung der Eulerschen Transformation angegeben, sowie der Hauptsatz über das Konvergenzgebiet derselben bei Anwendung auf Potenzreihen bewiesen. Die oben erwähnten Entwicklungen nach Polynomen sollen in § 4 durch Spezialisierung aus dem Hauptsatze hergeleitet werden, und § 5 soll diesen Hauptsatz von den zunächst gemachten Einschränkungen befreien und so zu den schon angedeuteten allgemeineren Entwicklungen nach analytischen Funktionen führen.

§ 1.

Die klassische Eulersche Reihentransformation.

Die klassische Eulersche Reihentransformation [2] bezieht sich zunächst auf Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

mit konstanten Gliedern, und ihr ursprünglicher Zweck war wohl bei Euler, die Konvergenz der Reihe zu verbessern. Sie wird folgendermassen gewonnen: Die Reihe Σa_n kann aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für} \qquad x=1$$

oder aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{y}{2-y}\right)^n \quad \text{für} \quad y = 1$$

entstanden gedacht werden. Entwickelt man die letztere Reihe formal nach Potenzen von y, so erhält man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n y^n$$

mit

$$a'_0 = a_0 \quad \text{und} \quad a'_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} a_n\right]$$

für $n \geqq 1$. Setzt man nun erst $y = 1$, so erhält man die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left[\binom{n-1}{0} a_1 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} a_n\right],$$

die man als die *Eulersche Transformation* von Σa_n bezeichnet.

Die Eigenschaften dieser Transformation sind eingehend untersucht worden.[1] Es sei das folgende hervorgehoben:

1. Wenn die ursprüngliche Reihe Σa_n konvergiert, so konvergiert auch die transformierte Reihe $\Sigma a'_n$, und beide haben die gleiche Summe. Man nennt das den *Permanenzsatz* des Verfahrens [4; S. 232].

2. Demgegenüber lehren allereinfachste Beispiele (s. Nr. 3), dass die transformierte Reihe $\Sigma a'_n$ sehr wohl konvergieren kann, wenn die ursprüngliche Reihe divergiert. Von dieser letzteren sagt man dann, dass sie *durch das Eulersche Verfahren summierbar*, kürzer: dass sie *E-summierbar* sei [4; S. 235]. Als ihren Wert, genauer: als ihre E-Summe sieht man dann natürlich die gewöhnliche Summe ihrer E-Transformation — wie wir die Reihe $\Sigma a'_n$ in Bezug auf Σa_n kurz nennen wollen — an. Ist die ursprüngliche Reihe von vornherein konvergent, so kann die transformierte Reihe erheblich *besser* konvergent sein (s. Nr. 3). Beide Eigenschaften können für numerische Zwecke von Vorteil sein.

3. Transformiert man z. B. die geometrische Reihe $1 + z + z^2 + \cdots$, so erhält man als ihre E-Transformation die Reihe

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z}{2}\left(\frac{z+1}{2}\right) + \cdots + \frac{z}{2}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{n-1} + \cdots.$$

[1] Vgl. etwa A. Pringsheim [9] und K. Knopp [4], [5].

Diese konvergiert nicht nur für $|z| < 1$, sondern in dem (4-mal so grossen) Kreise $|z+1| < 2$, der den Einheitskreis völlig umschliesst. Und in denjenigen Punkten des Einheitskreises, in denen

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| < |z| \text{ oder } \left|\frac{z+1}{z}\right| < 2$$

ist, d. h. also in den Punkten des Einheitskreises, die zugleich ausserhalb des Kreises $\left|z - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$ liegen, z. B. in $z = -\frac{1}{2}$, ist die Konvergenz der transformierten Reihe besser als die der ursprünglichen.

Hiernach ist also die geometrische Reihe Σz^n noch weit ausserhalb ihres Konvergenzkreises E-summierbar, und ihre Summe ist dort

$$= 1 + \frac{z}{2} \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = \frac{1}{1-z},$$

liefert also die analytische Fortsetzung der im Einheitskreise durch Σz^n dargestellten Funktion.

4. Hiernach liegt die Vermutung nahe, dass die Anwendung der E-Transformation auf beliebige Potenzreihen diese noch in gewissen Gebieten ausserhalb ihres Konvergenzkreises zu summieren vermag, und dass man dadurch die analytische Fortsetzung des gegebenen Funktionselementes gewinnen wird. Dem ist in der Tat so. Ist etwa die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit positivem endlichem Konvergenzradius vorgelegt, so lautet ihre E-Transformation

$$c_0 + \frac{1}{2} c_1 z + \cdots + \frac{1}{2^n}\left[\binom{n-1}{0} c_1 z + \binom{n-1}{1} c_2 z^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-1} c_n z^n\right] + \cdots.$$

Sie ist also eine Polynomentwicklung mit besonders einfach gebauten Polynomen.

Der genaue Konvergenzbereich $\mathfrak{K}$ dieser Entwicklung ist der folgende [4; S. 239]: Es sei ζ_φ der erste auf dem Halbstrahl $\operatorname{arc} z = \varphi = \text{const.}$ beim Fortsetzen des Elementes $\Sigma c_n z^n$ von 0 her angetroffene singuläre Punkt, und es sei K_φ der Kreis

$$\left|\frac{z}{\zeta_\varphi}+1\right|<2,$$

also derjenige Kreis, der aus dem in Nr. 3 benutzten durch Multiplikation aller seiner Punkte mit ζ_φ hervorgeht. Ist $\Sigma c_n z^n$ längs des ganzen Strahles arc $z=\varphi$ regulär, so werde unter ζ_φ der unendlich ferne Punkt und unter K_φ die ganze Ebene verstanden. *Dann ist* $\mathfrak{K}$ *der Durchschnitt aller* K_φ *für* $0\leqq\varphi<2\pi$. In den einfachsten Fällen ist also $\mathfrak{K}$ ein Kreisbogenpolygon, und in jedem Falle ein konvexer Bereich, der den Konvergenzkreis von $\Sigma c_n z^n$ umschliesst. Im Innern von $\mathfrak{K}$ ist $\Sigma c_n z^n$ überall E-summierbar, ausserhalb von $\mathfrak{K}$ dagegen nirgends; nur auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ bleibt das Konvergenzverhalten unentschieden. Im Innern von $\mathfrak{K}$ ist die E-Transformation von $\Sigma c_n z^n$ sogar *absolut* konvergent.

5. Transformiert man die E-Transformation $\Sigma a'_n$ von Σa_n noch einmal in derselben Weise usw., so gelangt man nach p Schritten zu der Reihe

$$a_0+\frac{1}{q+1}a_1+\cdots+\frac{1}{(q+1)^n}\left[\binom{n-1}{0}q^{n-1}a_1+\binom{n-1}{1}q^{n-2}a_2+\cdots+\binom{n-1}{n-1}a_n\right]+\cdots,$$

bei der zur Abkürzung $2^p-1=q$ gesetzt worden ist. Diese Transformation würde man auch direkt erhalten, wenn man x statt durch $\frac{y}{2-y}$ sogleich durch $\frac{y}{(q+1)-qy}$ ersetzt und $\Sigma a_n x^n$ wieder formal nach Potenzen von y entwickelt. — Bei Anwendung auf die geometrische Reihe liefert dies die Entwicklung

$$1+\frac{z}{q+1}+\cdots+\frac{z}{q+1}\left(\frac{z+q}{q+1}\right)^{n-1}+\cdots,$$

die in dem Kreise

$$|z+q|<q+1$$

konvergiert und dort die Summe

$$1+\frac{z}{q+1}\,\frac{1}{1-\dfrac{z+q}{q+1}}=\frac{1}{1-z}$$

hat, also die analytische Fortsetzung von Σz^n liefert. Für wachsende p bzw. q approximieren diese Kreise die Halbebene $\Re(z)<1$ in dem Sinne, dass jedes beschränkte Gebiet, das einschliesslich seines Randes dem Innern dieser Halbebene angehört, für hinreichend grosses q auch im Innern des genannten Kreises liegt.

Analog erhält man durch Anwendung dieser p-fach iterierten E-Transformation auf die Potenzreihe $\Sigma c_n z^n$ die Polynomentwicklung

$$c_0 + \frac{1}{q+1} c_1 z + \cdots + \frac{1}{(q+1)^n} \left[\binom{n-1}{0} q^{n-1} c_1 z + \cdots + \binom{n-1}{n-1} c_n z^n \right] + \cdots.$$

Ihr genaues Konvergenzgebiet $\mathfrak{K}$ wird ganz ebenso wie in Nr. 4 erhalten; man hat für K_φ jetzt nur die Kreise

$$\left| \frac{z}{\zeta_\varphi} + q \right| < q + 1$$

zu nehmen. Im Innern dieses Gebietes $\mathfrak{K}$ ist die Entwicklung wieder absolut konvergent. Für wachsende q approximieren diese Gebiete $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(q)$ das sogenannte Borelsche Summationspolygon, das man erhält, wenn man die Kreise K_φ durch die Halbebenen

$$\Re\left(\frac{z}{\zeta_\varphi}\right) < 1$$

ersetzt: Jedes beschränkte Gebiet, das einschliesslich seines Randes dem Innern des Borelschen Summationspolygons angehört, liegt für ein hinreichend grosses q auch im Innern von $\mathfrak{K}$ [4; S. 239 ff.].

Ein Beweis der in Nr. 4 und 5 angegebenen Tatsachen wird sich weiter unten sehr einfach ergeben.

§ 2.

Die Sterngebiete.

Ehe wir nun die in Aussicht genommene Verallgemeinerung der eben besprochenen klassischen Eulerschen Reihentransformation vornehmen, wollen wir die Gewinnung des Konvergenzgebietes $\mathfrak{K}$ unter einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachten.

Dazu sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes, von einer stetigen doppelpunktlosen Kurve $\mathfrak{C}$ umschlossenes Gebiet, das die Punkte der reellen Strecke $0 < z < 1$ in seinem Innern, und den Punkt $+1$ auf seinem Rande zu liegen hat.[1] Überdies soll jeder aus dem Nullpunkt gezogene Halbstrahl nur genau einen von

[1] $\mathfrak{G}$ ist offen zu denken; soll sein Rande $\mathfrak{C}$ hinzugenommen werden, so wird das Gebiet ausdrücklich als abgeschlossen bezeichnet.

o verschiedenen Punkt mit dem Rande $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ gemein haben. Jedes solche Gebiet $\mathfrak{G}$ wollen wir mit Herrn Mittag-Leffler eine *erzeugende Figur* nennen.

Mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ soll nun jedem Funktionselement $f(z)=\Sigma c_n z^n$ mit positivem, endlichem Konvergenzradius auf folgende zwei Arten ein »*Stern*» zugeordnet werden:

1. Art. Für ein $t \neq 0$ bezeichne $t \cdot \mathfrak{G}$ dasjenige Gebiet, dessen Punkte durch Multiplikation mit t aus den Punkten von $\mathfrak{G}$ hervorgehen. Durchläuft nun t von o an die Punkte eines bestimmten Halbstrahles arc $z=\varphi=$ const. in der z-Ebene, so wird das Gebiet $t \cdot \mathfrak{G}$, solange $|t|$ hinreichend klein ist, ganz im Innern des Konvergenzkreises von $f(z)$ liegen, also $f(z)$ in $t \cdot \mathfrak{G}$ regulär sein. Bezeichnet r_φ die obere Grenze der $|t|$ dieses Halbstrahles, für die $f(z)$ in $t \cdot \mathfrak{G}$ noch regulär ist, und wird

$$r_\varphi \cdot e^{i\varphi} = z_\varphi$$

gesetzt, so können wir z_φ als den *letzten* Punkt des Halbstrahles bezeichnen, für den $f(z)$ in $z_\varphi \cdot \mathfrak{G}$ noch regulär ist, oder als den *ersten* Punkt des Halbstrahles, für den $f(z)$ auf dem Rande von $z_\varphi \cdot \mathfrak{G}$ eine singuläre Stelle zu liegen hat. *Die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Strecken*

$$0 \ldots z_\varphi \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

werde als der zu $\mathfrak{G}$ gehörige Stern $\mathfrak{K}_1$ des Elementes $f(z)$ bezeichnet. Ist dann z_1 ein Punkt des Halbstrahles $0 \ldots z_\varphi$, der von o aus gesehen jenseits z_φ liegt, so ist wegen der vorausgesetzten Gestalt des Gebietes $\mathfrak{G}$ im Innern von $z_1 \cdot \mathfrak{G}$ sicher ein singulärer Punkt von $f(z)$ gelegen.

2. Art. Es sei $\mathfrak{G}'$ das Gebiet derjenigen Punkte z, für die $\frac{1}{z}$ ausserhalb $\mathfrak{G}$ liegt, so dass $\mathfrak{G}'$ das von der zu $\mathfrak{C}$ reziproken Kurve $\mathfrak{C}^{-1}$ berandete, den Nullpunkt enthaltende Gebiet ist. Ist dann (wie in § 1, Nr. 4) ζ_φ der erste auf dem Halbstrahl arc $z=\varphi=$ const. beim Fortsetzen des Elementes $f(z)=\Sigma c_n z^n$ von o her angetroffene singuläre Punkt (bzw. $\zeta_\varphi=\infty$, falls auf dem betreffenden Halbstrahle kein singulärer Punkt liegt), so werde *der Durchschnitt aller abgeschlossenen Gebiete*

$$\zeta_\varphi \cdot \mathfrak{G}' \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

als der zu $\mathfrak{G}$ gehörige Stern $\mathfrak{K}_2$ des Elementes $f(z)$ bezeichnet.[1]

[1] Für $\zeta_\varphi=\infty$ soll $\zeta_\varphi \cdot \mathfrak{G}'$ natürlich wieder die ganze Ebene bedeuten.

Wir werden sogleich zeigen, dass in jedem Falle $\mathfrak{K}_1 \equiv \mathfrak{K}_2$ ist. Diesen auf beide Arten erhaltenen Bereich bezeichnen wir dann kurz als den *zu* $\mathfrak{G}$ *als erzeugender Figur gehörigen Stern* $\mathfrak{K}$ *des Elementes* $f(z)$. Die zweite Konstruktion von $\mathfrak{K}$ ist die anschaulichere. Sie lehrt z. B. sofort, dass, wenn $\mathfrak{G}'$ ein konvexes Gebiet ist, auch der Stern $\mathfrak{K}$ konvex ausfällt. In den Beispielen des § 1, Nr. 4 und 5, wurde $\mathfrak{K}$ auf diese zweite Art konstruiert; hier war $\mathfrak{G}'$ der Kreis

$$|z+q| < q+1,$$

also die erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ das Kreisgebiet

$$\left|z - \frac{q}{2q+1}\right| < \frac{q+1}{2q+1}.$$

Für $q \to \infty$ geht dies Gebiet in den Kreis

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

über, der die erzeugende Figur für das Borelsche Summationspolygon abgibt, für das $\mathfrak{G}'$ die Halbebene $\Re(z) < 1$ ist. Der zugehörige Stern ist also wirklich in den einfacheren Fällen ein Polygon. Degeneriert $\mathfrak{G}$ zu der abgeschlossenen reellen Strecke $0 \leqq z \leqq 1$, so wird $\mathfrak{G}'$ zu der von $+1$ nach $+\infty$ längs der positiv-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene, und $\mathfrak{K}$ zu dem Mittag-Lefflerschen *Hauptstern*, der von der Vereinigungsmenge aller (bei ζ_φ offenen) Strecken $0 \ldots \zeta_\varphi$ gebildet wird.

Dass nun $\mathfrak{K}_1 \equiv \mathfrak{K}_2$ ist, erkennt man folgendermassen:

a) *Beweis, dass* $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2$. Es sei z_0 ein spezieller der Punkte von $\mathfrak{K}_1$, also ein Punkt einer der abgeschlossenen Strecken $0 \ldots z_\varphi$. Dann ist zu zeigen, dass z_0 *allen*, ebenfalls abgeschlossenen Gebieten $\zeta_\varphi \cdot \mathfrak{G}'$ angehört.[1] Nun ist definitionsgemäss $f(z)$ im Innern von $z_0 \cdot \mathfrak{G}$ regulär, während jedes ζ_φ ein singulärer Punkt ist. Es liegt also

ein jedes	ζ_φ	ausserhalb	oder	auf	dem	Rande	von $z_0 \cdot \mathfrak{G}$.
Daher liegt	$\frac{\zeta_\varphi}{z_0}$	»	»	»	»	»	» $\mathfrak{G}$,
und folglich	$\frac{z_0}{\zeta_\varphi}$	innerhalb	»	»	»	»	» $\mathfrak{G}'$,
daher	z_0	»	»	»	»	»	» $\zeta_\varphi \cdot \mathfrak{G}'$.

[1] Für diejenigen ζ_φ, die $=\infty$ zu setzen sind, ist ja nichts zu beweisen.

b) *Beweis, dass* $\mathfrak{K}_2 \leqq \mathfrak{K}_1$. Es sei jetzt z_1 ein nicht zu $\mathfrak{K}_1$ gehöriger Punkt. Er liegt dann auf der Verlängerung einer der Strecken $0 \ldots z_\varphi$ über z_φ hinaus, und im Gebiete $z_1 \cdot \mathfrak{G}$ muss dann, wie schon oben bemerkt, ein singulärer Punkt ζ von $f(z)$ liegen. Da wegen der vorausgesetzten Gestalt von $\mathfrak{G}$ dann auch die ganze Strecke von 0 (excl.) bis ζ zu $z_1 \cdot \mathfrak{G}$ gehört, so muss auch einer der Punkte ζ_φ — derjenige nämlich, für den $\varphi = \operatorname{arc} \zeta$ ist — im Gebiete $z_1 \cdot \mathfrak{G}$ liegen:

Es liegt ein	ζ_φ	innerhalb	$z_1 \cdot \mathfrak{G}$.
Dann liegt	$\dfrac{\zeta_\varphi}{z_1}$		$\mathfrak{G}$,
also	$\dfrac{z_1}{\zeta_\varphi}$	ausserhalb	$\mathfrak{G}'$,
und somit	z_1	»	$\zeta_\varphi \cdot \mathfrak{G}'$.

Ein nicht zu $\mathfrak{K}_1$ gehöriger Punkt z_1 gehört also auch nicht zu $\mathfrak{K}_2$. Daher ist $\mathfrak{K}_2 \leqq \mathfrak{K}_1$, und folglich $\mathfrak{K}_1 \equiv \mathfrak{K}_2$.

§ 3.

Die Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation.

Wir kommen nun zu unserm eigentlichen Thema, der Verallgemeinerung der klassischen Eulerschen Reihentransformation und ihrer Anwendung zur Gewinnung von Polynomentwicklungen und zur analytischen Fortsetzung im Mittag-Lefflerschen Stern. Sie besteht einfach darin, dass wir, anstatt in $\Sigma a_n x^n$ für x die spezielle Funktion $x = \dfrac{y}{2-y}$ einzuführen und nach Potenzen von y umzuordnen, eine allgemeinere Funktion $x = E(y)$ wählen, die nur gewissen gleich zu nennenden Voraussetzungen zu genügen hat. Diese naheliegende, aber überaus fruchtbare Verallgemeinerung ist wohl zuerst von Herrn E. Lindelöf in seiner schönen Arbeit »Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques» [6] angegeben und für Probleme der analytischen Fortsetzung angewendet worden. Das dabei zur Geltung kommende allgemeine Prinzip ist das der Nutzbarmachung der durch $E(y)$ vermittelten konformen Abbildung. Neuerdings hat Herr O. Perron im Anschluss an [4] ähnliche, wenn auch nicht so weitgehende Verallgemeinerungen betrachtet [8], und Anwendungen davon gemacht, die sich mit den unsrigen nahe berühren.

Es sei also

$$x=E(y)=\gamma_0+\gamma_1 y+\gamma_2 y^2+\cdots$$

eine Funktion von y, von der wir zunächst voraussetzen, *dass sie im abgeschlossenen Einheitskreise regulär ist und dass sie das Gebiet $|y|<1$ auf eine erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ in der x-Ebene eineindeutig abbildet und zwar so, dass $y=+1$ in $x=+1$ übergeht.* Eine beliebige Reihe Σa_n kann dann aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für} \quad x=1$$

oder aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (E(y))^n \quad \text{für} \quad y=1$$

entstanden gedacht werden. Entwickelt man die letztere Reihe formal nach Potenzen von y, so möge die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n y^n$$

entstehen. Setzt man nun erst $y=1$, so soll die gewonnene Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$$

als *verallgemeinerte Eulersche Transformation*, kurz: *als ihre E-Transformation* bezeichnet werden. Ist $\Sigma a'_n$ konvergent zur Summe s, so heisse Σa_n wieder *E-summierbar* mit der *E-Summe* s.

Um die Transformation explizit durchzuführen, setzen wir

$$(E(y))^k=\gamma_0^{(k)}+\gamma_1^{(k)} y+\gamma_2^{(k)} y^2+\cdots \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Dann wäre

$$a'_n=\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} a_k$$

zu nehmen. Um den hier notwendigen Konvergenzfragen zunächst aus dem Wege zu gehen und bei Anwendung auf Potenzreihen zu Polynomentwicklungen zu gelangen, *setzen wir weiter voraus, dass* $\gamma_0=0$ *ist,* dass also neben $y=+1$ auch $y=0$ ein Fixpunkt der Abbildung durch $x=E(y)$ ist und dass dieser im Innern von $\mathfrak{G}$ liegt. Dann ist $a'_0=a_0$, und für $n\geqq 1$

$$a'_n=\gamma_n^{(1)}a_1+\gamma_n^{(2)}a_2+\cdots+\gamma_n^{(n)}a_n.$$

Ist nun Σa_n wieder die Potenzreihe $\Sigma c_n z^n$ mit dem positiven endlichen Konvergenzradius r, so liefert ihre E-Transformation die Polynomentwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z),$$

wenn für $n\geqq 1$

$$\gamma_n^{(1)}c_1 z+\gamma_n^{(2)}c_2 z^2+\cdots+\gamma_n^{(n)}c_n z^n=P_n(z)$$

und überdies $c_0=P_0(z)$ gesetzt wird. Über den Konvergenzbereich dieser Polynomentwicklung gilt nun der folgende

Hauptsatz 1. *Ist die Funktion* $x=E(y)$ *in* $|y|\leqq 1$ *regulär, ist* $E(0)=0$ *und* $E(1)=1$ *und bildet sie den Kreis* $|y|<1$ *eineindeutig auf die erzeugende Figur* $\mathfrak{G}$ *ab, so ist das genaue Konvergenzgebiet* $\mathfrak{K}$ *der E-Transformation*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

des Funktionselementes $f(z)=\Sigma c_n z^n$ *der zu* $\mathfrak{G}$ *als erzeugender Figur gehörige Stern* $\mathfrak{K}$ *dieses Elementes: Innerhalb* $\mathfrak{K}$ *ist* $\Sigma c_n z^n$ *überall E-summierbar und ihre E-Summe liefert dort die analytische Fortsetzung von* $f(z)$; *ausserhalb von* $\mathfrak{K}$ *ist die Reihe nicht mehr E-summierbar.*

Der *Beweis* ist überraschend einfach: Es sei z_0 fest gewählt. Dann war, um die E-Transformation von $\Sigma c_n z_0^n$ zu erhalten, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n (E(y))^n \quad \text{formal in} \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_0)\, y^n$$

umgeordnet worden. Wegen $E(0)=0$ ist diese Umordnung für alle hinreichend kleinen y offenbar legitim, und es sind dann beide Reihen konvergent und stellen dieselbe Funktion von y, nämlich die Funktion

$$f(z_0\cdot E(y))=\psi(y)$$

dar. Daher wird die zweite der Reihen im Punkte $+1$ sicher absolut konvergieren,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_0) \qquad \textit{absolut konvergent,}$$

wenn diese Funktion $\psi(y)$ im *abgeschlossenen* Einheitskreise $|y| \leqq 1$ regulär ist. Dagegen wird die Reihe sicher divergieren,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z_0) \qquad \textit{divergent,}$$

wenn $\psi(y)$ im *offenen* Einheitskreise $|y| < 1$ schon eine singuläre Stelle besitzt.

Aus diesen beiden fast selbstverständlichen Bemerkungen folgt nun sofort der Hauptsatz 1: Denn ist z' ein spezieller der Punkte z_φ (vgl. § 2, 1. Art), also ein spezieller Randpunkt von $\mathfrak{K}$, so wird behauptet, dass $\Sigma P_n(z_0)$ *konvergiert* oder *divergiert*, jenachdem z_0 auf dem Halbstrahle $0 \ldots z'$ von 0 aus gesehen *vor* z' oder *hinter* z' liegt. Liegt aber z_0 *vor* z', so ist $f(z)$ definitionsgemäss in dem abgeschlossenen Gebiete $z_0 \cdot \mathfrak{G}$ regulär; und da für alle $|y| \leqq 1$ der Punkt

$$z = z_0 \cdot E(y)$$

diesem abgeschlossenen Gebiete $z_0 \cdot \mathfrak{G}$ angehört und $E(y)$ in $|y| \leqq 1$ regulär ist, so ist auch die *mittelbare* Funktion

$$\psi(y) = f(z_0 \cdot E(y))$$

in $|y| \leqq 1$ regulär. Also ist $\Sigma P_n(z_0)$ absolut konvergent. — Liegt dagegen z_0 *hinter* z', so hat $f(z)$ im *offenen* Gebiete $z_0 \cdot \mathfrak{G}$ schon einen singulären Punkt z_1. Dieser muss für ein geeignetes y_1 mit $|y_1| < 1$ durch

$$z_1 = z_0 \cdot E(y_1)$$

erhalten werden. Also hat $\psi(y)$ im offenen Einheitskreise den singulären Punkt y_1, und $\Sigma P_n(z_0)$ muss notwendig divergieren.

Damit ist schon alles bewiesen.

Nachträglich erkennt man noch: Es wurde beim ersten, auf die Konvergenz bezüglichen Teil des Beweises kein Gebrauch davon gemacht, dass der Einheitskreis $|y| \leqq 1$ durch $x = E(y)$ auf das abgeschlossene Gebiet $\mathfrak{G}$ *umkehrbar* eindeutig abgebildet wird. Es genügt, wenn die Bilder der Punkte $|y| \leqq 1$ sämtlich dem abgeschlossenen Gebiete $\mathfrak{G}$ angehören und dieses vollständig bedecken.

§ 4.

Spezielle Polynomentwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern.

Wir wollen nun zeigen, dass in diesem Hauptsatze 1 die in der Einleitung und in § 1 genannten älteren Resultate als einfache Spezialfälle enthalten sind.

Es ist sofort klar, wie man die Transformation $E(y)$ zu wählen hat, damit der Konvergenzstern $\mathfrak{K}$ der resultierenden Polynomentwicklung möglichst umfangreich wird: Da $\mathfrak{K}$, wie schon erwähnt, in den Mittag-Lefflerschen Hauptstern übergeht, wenn $\mathfrak{G}$ auf die Strecke $0 \ldots 1$ degeneriert, so hat man, um diesem äussersten hier noch in Betracht kommenden Fall möglichst nahe zu kommen, nur dafür zu sorgen, dass $\mathfrak{G}$ die Strecke $0 \ldots 1$ möglichst nahe umschliesst. Wir gehen daraufhin die älteren Beispiele durch.

1. Bei der klassischen Eulerschen Transformation wird

$$x = E(y) = \frac{y}{2-y}$$

genommen. Hier sind offenbar alle Voraussetzungen des Hauptsatzes 1 erfüllt; $\mathfrak{G}$ ist der Kreis

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3}.$$

Damit sind die in § 1 Nr. 4 ausgesprochenen Behauptungen bewiesen. Da hier aber $\mathfrak{G}$ die Strecke $0 \ldots 1$ nicht nahe unschliesst, so wird $\mathfrak{K}$ im allgemeinen nur einen geringen Teil des Hauptsterns des betrachteten Funktionselementes ausmachen.

2. Bei der p-mal iterierten klassischen Eulerschen Transformation wird

$$x = E(y) = \frac{y}{(q+1) - qy} \qquad (q = 2^p - 1)$$

genommen. Auch hier sind alle Voraussetzungen des Hauptsatzes 1 offenbar erfüllt, da $\mathfrak{G}$ jetzt der Kreis

$$\left| x - \frac{q}{2q+1} \right| < \frac{q+1}{2q+1}$$

ist. Damit sind auch die in § 1 Nr. 5 ausgesprochenen Behauptungen bewiesen.

Mit wachsendem p bzw. q schliesst sich $\mathfrak{G}$ enger um die Strecke $0\ldots 1$ herum und geht in der Grenze in den Kreis

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$

über. Dann wird $\mathfrak{K}$ zum Borelschen Summationspolygon.

3. Für dieses Borelsche Summationspolygon aber kann auf diesem Wege keine Polynomentwicklung gewonnen werden, da $\mathfrak{G}$ jetzt den Nullpunkt nicht mehr in seinem Innern zu liegen hat, also $E(0)=\gamma_0 \neq 0$ ist. Wir kommen hierauf im nächsten Paragraphen zurück.

4. Bei den weiteren speziellen Entwicklungen wird $E(y)$ meist folgendermassen gewonnen: Man wählt irgend eine Potenzreihe

$$E_1(y)=\beta_1 y+\beta_2 y^2+\cdots$$

mit positivem Konvergenzradius R und setzt für ein ϱ aus $0<\varrho<R$ die Funktion

$$x=E(y)=\frac{E_1(\varrho y)}{E_1(\varrho)}=\gamma_1 y+\gamma_2 y^2+\cdots$$

an. Diese ist dann gewiss für $|y|\leqq 1$ regulär, und es ist $E(0)=0$ und $E(1)=1$; sie kann also, falls sie den Einheitskreis noch in der vorgeschriebenen Weise abbildet, als Transformationsfunktion genommen werden. Bei der klassischen Eulerschen Transformation und ihren Iterationen wird z. B.

$$E_1(y)=\frac{y}{1-y}$$

genommen. Für $\varrho=\frac{1}{2}$ bzw. $\varrho=\frac{q}{q+1}$, $q>0$, erhält man dann

$$E(y)=\frac{\frac{q}{q+1}y}{1-\frac{q}{q+1}y}\cdot\frac{1}{q}=\frac{y}{(q+1)-qy},$$

wie in Nr. 1 und 2. Tatsächlich macht Euler [2] auch genau diesen Ansatz mit $\varrho=\frac{1}{2}$.

5. Herr MITTAG-LEFFLER benutzt in der 3. Note [7] die Funktion

$$E_1(y) = y \cdot \exp \int_1^y \left[\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^\beta - 1\right] \frac{dt}{t}\ ^1$$

mit $R = 1$ und einem β in $0 < \beta < 1$, das man gegen $+1$ wachsen lassen soll. Die in der genannten Note gewonnenen Polynomentwicklungen werden daher durch unseren Hauptsatz geliefert, wenn in ihm für ein $\varrho < 1$

$$x = E(y) = \frac{E_1(\varrho y)}{E_1(\varrho)}$$

mit der angegebenen Bedeutung von $E_1(y)$ verwendet wird. Diese Funktion $E_1(y)$ selber ist für $|y| = 1$ noch stetig und bildet, wie l. c. genau ausgeführt wird, diese Kreislinie auf eine herzförmige Figur ab. Die Spitze liegt in $+1$ fest, während die einspringende Ecke eine negativ-reelle Abszisse hat, die mit $\beta \to 1$ nach 0 rückt. Dabei degeneriert die Figur auf die Strecke $0 \ldots 1$. Die angesetzte Funktion $E(y)$ wird also eine erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ liefern, die sich so eng um die Strecke $0 \ldots 1$ herumlegt, wie man will, wofern nur bei festem $\varrho < 1$ der Parameter β dicht genug unterhalb 1 genommen wird.[2] Ist daher $\mathfrak{B}$ irgend ein beschränktes Gebiet, das einschliesslich seines Randes im Innern des Hauptsterns des Funktionselementes $f(z)$ liegt, so kann man $\beta < 1$ stets so gross nehmen, dass $\mathfrak{B}$ auch dem Konvergenzgebiet $\mathfrak{K}$ der zugehörigen E-Transformation von $\Sigma c_n z^n$ angehört. In diesem Sinne kann man sagen, dass $f(z) = \Sigma c_n z^n$ in jedem bestimmten inneren Punkte z des Hauptsterns bei geeigneter Wahl von β auch E-summierbar ist zur Summe $f(z)$. — Die Berechnung der Konstanten $\gamma_n^{(k)}$ führt Herr MITTAG-LEFFLER an der genannten Stelle in allen Einzelheiten durch.

6. Da die eben benutzte Funktion rechnerisch etwas kompliziert erscheint, versuchten andere Forscher einfachere Vorschläge zu machen. I. FREDHOLM [3][3] benutzte die Funktion

$$E_1(y) = \log(1 - y).$$

---

[1] $\exp w$ bedeutet e^w.

[2] Dass der Rand von $\mathfrak{G}$ von jedem Nullstrahl in nur genau einem Punkte getroffen wird, zeigt Herr MITTAG-LEFFLER nicht ausdrücklich. Doch ist dies für den Divergenzteil im Beweise des Hauptsatzes eine unerlässliche Voraussetzung. Diese Lücke lässt sich indessen ohne Schwierigkeit ausfüllen.

[3] Vgl. S. 365 der 4. der zitierten Arbeiten des Herrn MITTAG-LEFFLER [7].

Hier hat man also für ein ϱ aus $0<\varrho<1$ die Funktion

$$x = E(y) = \frac{\log(1-\varrho y)}{\log(1-\varrho)}$$

zu nehmen, die um so günstiger ist, je näher ϱ bei $+1$ liegt. Denn $\mathfrak{G}$ hat dann die Gestalt einer flachen Ellipse, deren Hauptachse sich von einer dicht links von 0 gelegenen negativ-reellen Stelle bis $+1$ erstreckt. Für $\varrho \to +1$ degeneriert $\mathfrak{G}$ wieder in die Strecke $0 \ldots 1$, so dass in dieser Hinsicht dieselben Bemerkungen gelten wie bei dem vorigen Beispiel. — Die Berechnung der $\gamma_n^{(k)}$ fällt weniger einfach aus.

7. Im Anschluss an das Fredholmsche Beispiel gibt Herr Mittag-Leffler noch eine etwas einfacher gebaute und für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten günstigere Funktion an. Man gewinnt sie durch unsere jetzigen Ansätze, indem man von

$$E_1(y) = \frac{y}{(1-y)^\alpha}$$

ausgeht mit einem α aus $0<\alpha<1$, das schliesslich $\to 0$ rücken soll. Wählt man nun speziell

$$\varrho = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}},$$

so erhält man dies neue Mittag-Lefflersche Beispiel:

$$x = E(y) = \frac{\alpha y}{\left(1 - \left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right) y\right)^\alpha}.$$

Die Gestalt von $\mathfrak{G}$ wird genau bestimmt, und die nun sehr einfache Berechnung der $\gamma_n^{(k)}$ vollständig durchgeführt. Wegen

$$(E(y))^k = \alpha^k y^k \left(1 - \left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right) y\right)^{-\alpha k}$$

hat man sofort

$$\gamma_n^{(k)} = (-1)^{n-k} \binom{-\alpha k}{n-k} \left(1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{n-k} \alpha^k,$$

— Koeffizienten, die, wie die Funktion $E_1(y)$ unmittelbar erkennen lässt, sämtlich positiv sind.

8. Nicht wesentlich davon verschieden ist die Wahl

$$E_1(y) = 1-(1-y)^\alpha \qquad (0<\alpha<1,\ \alpha\to 0),$$

die für ein $\varrho<1$ zu

$$x = E(y) = \frac{1-(1-\varrho y)^\alpha}{1-(1-\varrho)^\alpha}$$

führt. Die Entwicklungen

$$(E_1(y))^k = \beta_k^{(k)} y^k + \beta_{k+1}^{(k)} y^{k+1} + \cdots$$

werden hier wieder ganz einfach, da man, um die $\beta_n^{(k)}$ zu gewinnen, nur je endlich viele Binomialentwicklungen zu addieren hat. Man findet [1; S. 450]

$$\beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu+n} \binom{k}{\nu} \binom{\alpha\nu}{n}.$$

Da $E_1(y)$ für $0<\alpha<1$ lauter positive Entwicklungskoeffizienten hat, so sind auch hier die $\beta_n^{(k)}$ sämtlich positiv.

9. Ein anderer Vorschlag des Herrn MITTAG-LEFFLER[1] besteht noch darin, von der Abbildung eines Kreisbogenzweiecks mit immer spitzer werdendem Winkel auszugehen, d. h. für ein $\alpha>0$ von

$$E_1(y) = \frac{(1+y)^\alpha-(1-y)^\alpha}{\alpha(1+y)^\alpha+(1-y)^\alpha}$$

auszugehen und $\alpha\to 0$ abnehmen zu lassen. Die für ein $\varrho<1$ durch

$$x = E(y) = \frac{E_1(\varrho y)}{E(\varrho)}$$

gelieferte erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ umschliesst dann die Strecke $0 \ldots 1$ um so enger, je kleiner $\alpha>0$ gewählt wird. Für $\alpha\to 0$ degeneriert sie zu der genannten Strecke.

10. In den bisherigen Beispielen wiesen die Bilder der Peripherie des Einheitskreises vermöge der Funktion $E_1(y)$ in $+1$ Ecken mit von 0 verschiedenem (wenn auch mit $\beta\to 1$ bzw. $\alpha\to 0$ zu 0 abnehmendem) Winkel auf, oder sie schnitten die reelle Achse in vertikaler Richtung. Eine besonders gute Approximation des Hauptsterns durch die Gebiete $\mathfrak{K}$ wird man erwarten können, wenn

[1] In der 3. Note [7], S. 228. Hier ist auch auf Herrn V. VOLTERRA Bezug genommen.

dieses Bild von vornherein bei $+1$ eine Spitze mit horizontaler Spitzentangente hat. Dann hat ihr Spiegelbild am Einheitskreise etwa die Gestalt einer grossen Kardioide, die ihre Spitze in $+1$ zu liegen hat und dort den Halbstrahl $+1 \cdots +\infty$ als Spitzentangente besitzt. Da die Kardioide als Spiegelbild einer Parabel am Einheitskreise gewonnen werden kann, so wird man auf folgenden Weg geführt, um eine geeignete Funktion $E_1(y)$ herzustellen: Die Funktion

$$y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4\varepsilon i}\sqrt{x}\right)$$

bildet das Innere der Parabel

$$\Im(\sqrt{x}) = \varepsilon > 0$$

auf den Einheitskreis der y-Ebene ab. Also bildet

$$y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4\varepsilon i}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

das Äussere einer Kardioide in der soeben beschriebenen Lage auf das Innere des Einheitskreises ab, und

$$x = 1 - \frac{\pi^2}{16\varepsilon^2 \operatorname{arc\,tg}^2 \sqrt{y}}$$

wird umgekehrt das Innere des Einheitskreises $|y| < 1$ auf das Äussere der Kardioide in der x-Ebene abbilden. Hierbei entspricht der Randpunkt $y = -1$ der Spitze $+1$ der Kardioide. Ersetzt man y durch $-y$ und führt den Logarithmus ein, so erkennt man, dass

$$x = 1 + \frac{1}{\frac{\alpha}{4}\log^2\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}} \qquad \left(\alpha = \frac{16\varepsilon^2}{\pi^2}\right)$$

das Gebiet $|y| < 1$ so auf das Äussere der Kardioide abbildet, dass die beiden Randpunkte $+1$ einander entsprechen. Die reziproke Funktion endlich, also die Funktion

$$x = E_1(y) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\log^2\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}},$$

bildet die Peripherie $|y| = 1$ auf das Spiegelbild der Kardioide am Einheitskreise ab, also auf eine Kurve, die (bei kleinem $\alpha > 0$) die Strecke $0 \ldots 1$ eng umschliesst und in $+1$ eine Spitze mit horizontaler Spitzentangente hat. — Für ein dicht unterhalb 1 gelegenes ϱ ist dann wieder

$$x = E(y) = \frac{E_1(\varrho y)}{E(\varrho)}$$

eine zur Verwendung im Hauptsatz geeignete Transformationsfunktion. Auf die ganz elementar durchführbare Untersuchung, dass $\mathfrak{G}$ die erforderlichen gestaltlichen Verhältnisse aufweist, wollen wir hier verzichten und nur noch hervorheben, dass die Entwicklung von $E_1(y)$:

$$\begin{aligned} E_1(y) &= 1 - \frac{1}{1 + \alpha y + \frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) y^2 + \cdots + \frac{\alpha}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) y^n + \cdots} \\ &= \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots, \end{aligned}$$

wie sich leicht zeigen lässt, lauter positive Koeffizienten hat.[1] Das auf diese Funktion gegründete Summierungsverfahren gehört daher, wie *alle* durch die bisher besprochenen Beispiele eingeführten Verfahren, zu derjenigen Klasse, die Herr O. Perron [8] ausschliesslich seinen Betrachtungen zu Grunde legt.

§ 5.

Allgemeinere Entwicklungen im Mittag-Lefflerschen Stern.

Wir hatten bisher, um zu Polynomentwicklungen zu gelangen, in der Entwicklung

$$x = E(y) = \gamma_0 + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \cdots$$

[1] Herr Th. Kaluza zeigt in einer demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit allgemein, dass der Divisionsansatz

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \cdots} = 1 - \beta_1 y - \beta_2 y^2 - \cdots$$

lauter positive β_n liefert, falls die α_n positiv sind und

$$\frac{1}{\alpha_1} \geqq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \geqq \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \geqq \cdots$$

ist. Dies ist aber in unserm Falle erfüllt.

vorausgesetzt, dass $E(0)=\gamma_0=0$ sei, dass also $y=0$ ein Fixpunkt der Abbildung sei und demgemäss im Innern von $\mathfrak{G}$ liegt. Ist $\gamma_0\neq 0$, so wird — die Konvergenz von $\Sigma a_n x^n$ für gewisse $x\neq 0$ vorausgesetzt — die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(E(y))^n$$

dann und nur dann für alle hinreichend kleinen y konvergieren, wenn γ_0 im Innern des Konvergenzkreises von $\Sigma a_n x^n$ liegt. Gehen wir sogleich zur Anwendung der Betrachtungen auf Potenzreihen über, nehmen wir also $a_n=c_n z_0^n$, so sehen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n (E(y))^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0\cdot E(y))^n$$

dann und nur dann für alle hinreichend kleinen y konvergiert, wenn $z_0\gamma_0$ im Innern des Konvergenzkreises von $\Sigma c_n z^n$ — sein Radius heisse wieder r — liegt, wenn also

$$|z_0\gamma_0| < r$$

ist. Dann darf aber auch wieder die Umordnung nach Potenzen von y vorgenommen werden, was nun eine Entwicklung der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(z_0) y^n$$

mit

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} c_k z^k$$

ergibt. Wir bezeichnen auch jetzt wieder die nach analytischen Funktionen fortschreitende Reihe $\Sigma G_n(z)$ als *E-Transformation* von $\Sigma c_n z^n$, und die letztere nennen wir *E-summierbar* zur *E-Summe* s, falls $\Sigma G_n(z)$ konvergiert und die Summe s hat. Dann gilt mit nur unwesentlicher Modifikation der den Hauptsatz 1 des § 3 als Spezialfall enthaltende

Hauptsatz 2. *Ist die Funktion $x=E(y)$ in $|y|\leqq 1$ regulär, ist $E(1)=1$ und bildet sie den Kreis $|y|<1$ auf eine erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ ab, so ist das genaue Konvergenzgebiet $\mathfrak{K}'$ der E-Transformation*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(z)$$

des Funktionselementes $f(z) = \Sigma c_n z^n$ *derjenige Teil* $\mathfrak{R}'$ *des zu* $\mathfrak{G}$ *als erzeugender Figur gehörigen Sterns* $\mathfrak{R}$ *dieses Elementes, für dessen Punkte* z *die Bedingung*

$$|\gamma_0 z| < r$$

erfüllt ist: Innerhalb $\mathfrak{R}'$ *ist* $\Sigma c_n z^n$ *überall E-summierbar, und ihre E-Summe liefert dort die analytische Fortsetzung von* $f(z)$; *ausserhalb* $\mathfrak{R}'$ *ist die Reihe nicht mehr E-summierbar.*

Der *Beweis* ist im wesentlichen derselbe wie in § 3: Ist z_0 mit $|z_0\gamma_0| < r$ fest gewählt, so ist die Umordnung von

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n (E(y))^n \quad \text{in} \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z_0) y^n$$

wegen $|z_0 \cdot E(0)| = |z_0\gamma_0| < r$ für alle hinreichend kleinen y legitim, und beide Reihen stellen die Funktion

$$f(z_0 \cdot E(y)) = \psi(y)$$

dar. Die zweite Reihe wird daher in $y = +1$ absolut konvergieren oder divergieren, jenachdem $\psi(y)$ in $|y| \leqq 1$ regulär ist oder in $|y| < 1$ schon eine singuläre Stelle hat. Das erste tritt aber — und aus genau denselben Gründen wie in § 3 — sicher ein, wenn z_0 im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt, das zweite, falls es ausserhalb $\mathfrak{R}$ liegt. Damit ist der Beweis schon vollendet.

Für Punkte z, die innerhalb des Kreises $|z\gamma_0| < r$ auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ oder auf der Peripherie $|z\gamma_0| = r$ liegen, bleibt das Konvergenzverhalten wieder unentschieden.

Als *Beispiel* führen wir Entwicklungen für das Borelsche Summationspolygon durch. Hier ist die erzeugende Figur $\mathfrak{G}$ der Kreis

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

der den Nullpunkt auf dem Rande zu liegen hat. Funktionen $E(y)$, die den Einheitskreis auf diesen Kreis $\mathfrak{G}$ abbilden, sind etwa die folgenden:

$$E(y) = \frac{1+y}{2}$$

oder allgemeiner

$$E(y) = \frac{1+y}{q-(q-2)y}$$

mit einem reellen $q > 1$. Hier ist $\gamma_0 = \frac{1}{q}$. Daher wird die entstehende Entwicklung in demjenigen Teil des Borelschen Summationspolygons von $\Sigma c_n z^n$ konvergieren, in dem $|z| < qr$ ist, und wird ausserhalb dieses Gebietes divergieren. Falls also das Summationspolygon überhaupt beschränkt ist, kann man q stets so gross wählen, dass $\Sigma c_n z^n$ in diesem ganzen Polygon E-summierbar ist. Und in jedem Falle kann man wieder sagen, dass $\Sigma c_n z^n$ in jedem bestimmten Punkte des Summationspolygons E-summierbar ist, falls der Parameter q gross genug genommen wird.

Setzt man, wie bisher,

$$E(y) = \gamma_0 + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \cdots$$

und für $k \geqq 0$

$$(E(y))^k = \gamma_0^{(k)} + \gamma_1^{(k)} y + \gamma_2^{(k)} y^2 + \cdots,$$

so ist jetzt $\gamma_0^{(0)} = 1$, $\gamma_n^{(0)} = 0$ für $n \geqq 1$, und für $k \geqq 1$ und alle $n \geqq 0$

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{1}{q^k}\left\{\binom{k}{0}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{q-2}{q}\right)^n + \binom{k}{1}\binom{n+k-2}{k-1}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{n-1} + \cdots \right.$$
$$\left. + \binom{k}{k}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{q-2}{q}\right)^{n-k}\right\}.$$

Setzt man mit diesen Werten

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} c_k z^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

an, so ist $\Sigma G_n(z)$ also in demjenigen Teil des Borelschen Summationspolygons von $f(z) = \Sigma c_n z^n$ konvergent, in dem $|z| < qr$ ist, und liefert dort die analytische Fortsetzung von $f(z)$. Ausserhalb dieses Gebietes ist die Entwicklung divergent.

Verzeichnis der zitierten Literatur.

L. BIEBERBACH [1]. *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen,* Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II C 4, §§ 37—44.

L. EULER [2]. *Institutiones calculi differentialis.* Pars posterior, Caput I, Petersburg 1755, S. 281; oder: Opera omnia, series prima, vol. X, p. 217.

I. FREDHOLM [3]. *Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler,* Öfversigt af Kongl. Svenska Vet. Ak. Förhandlingar, Bd. 58 (1901), S. 203—205.

K. KNOPP [4]. *Über das Eulersche Summierungsverfahren,* Mathematische Zeitschrift, Bd. 15 (1922), S. 226—253.

[5]. *Über das Eulersche Summierungsverfahren,* Mathematische Zeitschrift, Bd. 18, (1923), S. 125—156.

E. LINDELÖF [6]. *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques,* Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Bd. 24 (1898), N° 7, S. 1—37.

G. MITTAG-LEFFLER [7]. *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène,* 1. bis 5. Note, Acta mathematica 23 (1. Note), 24 (2. und 3. Note), 26 (4. Note) und 29 (5. Note).

O. PERRON [8]. *Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation,* Mathematische Zeitschrift 18 (1923), S. 157—172.

A. PRINGSHEIM [9]. *Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation,* Sitzungsberichte der Kgl. Bayrischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 11—92.