Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen.

Von

Erich Stiemke in Berlin.

Eine reelle Größe a nenne ich *positiv*, wenn $a > 0$ ist, *nicht negativ*, wenn $a \geqq 0$ ist. Mehrere Größen nenne ich *nicht negativ*, wenn keine negativ ist, *positiv*, wenn außerdem mindestens eine positiv ist, *durchweg positiv*, wenn jede positiv ist. Dann ist

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

positiv, wenn $a_0, a_1, \cdots a_n$ positiv, $b_0, b_1, \cdots b_n$ durchweg positiv sind. Umgekehrt gelten die beiden folgenden Sätze, auf die ich durch Untersuchungen über unendliche Moduln geführt worden bin:

I. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die Koeffizienten positiv sind, so haben die Gleichungen eine durchweg positive Lösung.*

II. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die Koeffizienten durchweg positiv sind, so haben die Gleichungen eine positive Lösung.*

Wenn die Gleichungen keine Lösung haben, so läßt sich jede lineare Funktion von $x_0, x_1, \cdots x_n$ aus ihren linken Seiten zusammensetzen, also auch eine mit (durchweg) positiven Koeffizienten.

Wenn die Gleichungen nur eine Lösung haben, $b_0, b_1, \cdots b_n$, so sei etwa $b_0 > 0$. Dann lassen sich aus ihnen die Gleichungen

$$b_0 x_1 - b_1 x_0 = 0, \ \cdots \ b_0 x_n - b_n x_0 = 0$$

zusammensetzen. Wäre $b_1 \leqq 0$, so hätte die erste Gleichung positive Koeffizienten. Daher ist $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $\cdots b_n > 0$.

Für den Fall von zwei Unbekannten ist damit der Satz I bereits bewiesen. Angenommen er sei auch schon für n Unbekannte als richtig erkannt. Ist nun diese Anzahl $n + 1$, so unterscheide ich zwei Fälle:

1) Aus dem System P der $m + 1$ gegebenen Gleichungen folge eine Gleichung der Form

$$u_0 = x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n = 0,$$

worin $a_1, \cdots a_n$ positiv sind. Dann ersetze man eine der Gleichungen durch $u_0 = 0$ und setze den Wert $x_0 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ in die übrigen Gleichungen ein. Dadurch gehen sie über in ein System Q von m Gleichungen $u_1 = 0, \cdots u_m = 0$ zwischen den n Unbekannten $x_1, \cdots x_n$. Die $m + 1$ Gleichungen $u_0 = 0, u_1 = 0, \cdots u_m = 0$ sind den $m + 1$ gegebenen Gleichungen P völlig äquivalent.

In keiner linearen Verbindung der m Gleichungen des Systems Q sind die Koeffizienten positiv. Nach dem Induktionsschluß haben daher die Gleichungen Q eine durchweg positive Lösung $x_1 = b_1, \cdots x_n = b_n$. Aus $u_0 = 0$ folgt weiter

$$x_0 = b_0 = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n > 0.$$

Daher haben auch die $m + 1$ Gleichungen P eine durchweg positive Lösung.

2) Keine lineare Verbindung der Gleichungen P habe die Form $u_0 = 0$.

Wir können den Beweis auf den Fall beschränken, wo die Gleichungen P mehrere Lösungen haben, dann besitzen sie auch eine solche, worin $x_0 = 0$ ist. Setzt man nun $x_0 = 0$, so erhält man aus P ein System R von $m + 1$ Gleichungen zwischen n Unbekannten $x_1, \cdots x_n$.

Keine lineare Verbindung $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ der Gleichungen R hat positive Koeffizienten. Denn in der analogen Verbindung

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

der Gleichungen P sind $a_1, \cdots a_n$ positiv. Daher kann nach der Voraussetzung über P nicht $a_0 \geqq 0$ sein. Es kann aber auch nicht $a_0 < 0$ sein, weil sonst diese Gleichung die Form $a_0 u_0 = 0$ hätte.

Nach dem Induktionsschluß haben daher die Gleichungen R eine durchweg positive Lösung $x_1 = c_1, \cdots x_n = c_n$. In Verbindung mit $x_0 = c_0 = 0$ ergibt sich daraus eine Lösung der Gleichungen P.

Es kann aber nicht in jeder Lösung dieser Gleichungen $x_0 = 0$ sein. Denn sonst wäre $x_0 = 0$ eine lineare Verbindung der Gleichungen P mit positiven Koeffizienten. Daher haben die Gleichungen P eine Lösung $d_0, d_1, \cdots d_n$, worin $d_0 > 0$ ist. Folglich haben sie auch die Lösung

$$b_0 = c_0 + \varepsilon d_0,\; b_1 = c_1 + \varepsilon d_1, \cdots b_n = c_n + \varepsilon d_n.$$

Ist ε positiv und hinlänglich klein, so ist jeder dieser $n + 1$ Werte positiv.

Aus dem Satze I folgt unmittelbar der Satz II. Die gegebenen Gleichungen seien

$$(1) \qquad a_{\alpha 0} x_0 + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ein vollständiges System ihrer Lösungen sei

$$(2) \qquad b_{\beta 0},\; b_{\beta 1},\; \cdots\; b_{\beta n} \qquad (\beta = 0, 1, 2, \cdots).$$

Dann bilden umgekehrt die Größen

(3) $$a_{\alpha 0},\ a_{\alpha 1},\ \cdots\ a_{\alpha n}$$

ein *vollständiges* System von Lösungen der Gleichungen

(4) $$b_{\beta 0} x_0 + b_{\beta 1} x_1 + \cdots + b_{\beta n} x_n = 0.$$

Angenommen keine lineare Verbindung der Gleichungen (1) habe durchweg positive Koeffizienten. Dann wird in Satz II behauptet, daß sie eine positive Lösung haben. Im andern Falle hätte nämlich keine lineare Verbindung der Gleichungen (4) positive Koeffizienten. Daher wäre nach Satz I eine lineare Verbindung der Größen (3) durchweg positiv, d. h. eine lineare Verbindung der Gleichungen (1) hätte durchweg positive Koeffizienten.

Man kann die bewiesenen Sätze noch etwas schärfer formulieren. Ist die Gleichung $x_0 = 0$ eine Folge der Gleichungen (1), so will ich x_0 eine *singuläre* Unbekannte nennen, im andern Falle eine *reguläre*. Sind die Unbekannten sämtlich singulär, so pflegt man zu sagen, die Gleichungen besitzen keine Lösung.

III. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die regulären Unbekannten positive Koeffizienten haben, so besitzen die Gleichungen eine Lösung, worin die Werte dieser Unbekannten durchweg positiv sind.*

IV. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die regulären Unbekannten durchweg positive Koeffizienten haben, so besitzen die Gleichungen eine Lösung, worin die Werte dieser Unbekannten positiv sind.*