Über die Iteration analytischer Funktionen

HELMUT RÜSSMANN

Communicated by JÜRGEN MOSER

1. Einleitung. Sei

$$f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

eine Potenzreihe ohne konstantes Glied mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann heißt der Fixpunkt $z = 0$ der Abbildung $z \to f(z)$ stabil, wenn zwei positive Zahlen $r_0 < R$ und $r < R$ existieren, so daß für alle Punkte z des Kreises $|z| \leqq r_0$ die Menge der Bildpunkte $z_1 = f(z)$, $z_{n+1} = f(z_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ im Kreis $|z| < r$ liegt.

Für $|\lambda| < 1$ ist $z = 0$ sogar asymptotisch stabil (im Sinne von Ljapunov), d.h. es gibt eine positive Zahl $r_0 < R$, so daß $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ ist für alle z im Kreis $|z| \leqq r_0$. Man braucht nämlich r_0 nur so klein zu wählen, daß $|f(z)z^{-1} - \lambda| \leqq \frac{1}{2}(1 - |\lambda|)$ ist für $|z| \leqq r_0$, also $|z_n| \leqq 2^{-n}(1 + |\lambda|)^n r_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ gilt.

Für $|\lambda| \geqq 1$ ist, wie Siegel [5], [6] gezeigt hat, notwendig und hinreichend für die Stabilität, daß $|\lambda| = 1$ ist und eine konvergente Lösung

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \cdots \tag{1}$$

der Schröderschen Funktionalgleichung

$$\varphi(\lambda\zeta) = f(\varphi(\zeta)) \tag{2}$$

existiert.

Wenn λ eine n-te Einheitswurzel ist, kann man durch Koeffizientenvergleich sofort feststellen, daß eine formale Lösung (1) von (2) nur existiert, wenn die $(n - 1)$-te Iterierte der Abbildung $z \to f(z)$ die Identität ist. Diese Eigenschaft der Abbildung $z \to f(z)$ ist dann offenbar notwendig und hinreichend für die Stabilität von $z = 0$.

Sei nun weiterhin $|\lambda| = 1$, aber λ keine n-te Einheitswurzel, also

$$\lambda = e^{2\pi i\alpha} \qquad (\alpha \text{ reell und irrational}). \tag{3}$$

Dann besitzt die Schrödersche Funktionalgleichung (2) genau eine formale Lösung (1), die auch als Schrödersche Reihe bezeichnet wird. Siegel [5], [6]

Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 17, No. 6 (1967).

hat bewiesen, daß die Schrödersche Reihe konvergiert, wenn für α in (3) die Ungleichungen

$$|k\alpha - l| > ck^{-\mu} \tag{4}$$

für beliebige ganze l, k, $k \geqq 1$ gelten mit positiven c, μ, die nur von α abhängen. Die Bedingung (4) besagt, daß α keine Liouvillesche Zahl ist. In der vorliegenden Arbeit soll die Siegelsche Konvergenzaussage auf eine Klasse Liouvillescher Zahlen ausgedehnt werden.

Wir beweisen den

Satz. *Es sei* q_n $(n = 0, 1, \cdots)$ *der Näherungsnenner n-ter Ordnung von* α *in* (3), *und es gelte*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1} < \infty . \tag{5}$$

Dann konvergiert die Schrödersche Reihe.

Machen wir uns zunächst klar, daß in diesem Satz das Siegelsche Resultat enthalten ist. Dazu sei $\alpha = [\beta_0, \beta_1, \cdots]$ die Darstellung von α als regelmäßiger Kettenbruch. Die Teilnenner $\beta_1, \beta_2, \cdots$ stehen bekanntlich mit den Näherungsnennern $q_0, q_1, \cdots$ in dem rekursiven Zusammenhang

$$q_0 = 1, \qquad q_1 = \beta_1, \qquad q_n = \beta_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \cdots), \tag{6}$$

aus welchem man ohne Mühe wegen $\beta_n \geqq 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ die Ungleichungen

$$q_n \geqq (\sqrt{2})^n \qquad (n = 2, 3, \cdots) \tag{7}$$

ableitet. Außerdem gibt as zu jedem k $(k = 1, 2, \cdots)$ genau eine ganze Zahl l, so daß

$$D_k = |k\alpha - l| < \tfrac{1}{2} \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{8}$$

ist. Mit dieser Bezeichnung lauten dann die bekannten Ungleichungen für die Näherungsbrüche (vgl. [4] §13)

$$D_k \geqq \frac{1}{2k} \qquad (k > 1; k \neq q_1, q_2, \cdots) \tag{9}$$

und

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < D_{q_n} < \frac{1}{q_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{10}$$

Aus (4), (8) und (10) folgt

$$q_{n+1} < c^{-1} q_n^{\mu} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

womit sich mit (7) die Gültigkeit von (5) ergibt.

Um andererseits zu sehen, daß die Bedingung (5) auch wirklich Liouvillesche Zahlen erfaßt, betrachten wir z.B. alle α, für die

$$q_n^n \leqq \beta_{n+1} \leqq q_n^{(n!)^\kappa} \qquad (\kappa \geqq 1; n = 2, 3, \cdots) \tag{11}$$

ist. Die linke Hälfte dieser Ungleichungen kann bekanntlich nur für Liouvillesche Zahlen gelten. Aus (11) folgt mit Rücksicht auf (6) leicht

$$q_n^{n+1} < q_{n+1} < q_n^{(n!)^{\kappa+1}} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

und hieraus wegen $q_2 \geqq 2$ durch vollständige Induktion

$$q_n \geqq (\sqrt{2})^{n!} \qquad (n = 2, 3, \cdots),$$

so daß sich die Abschätzung

$$\sum_{n=3}^{\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1} \leqq \sum_{n=3}^{\infty} (n!)^{\kappa+1} q_n^{-1} \log q_n$$
$$\leqq \log(\sqrt{2}) \sum_{n=3}^{\infty} (n!)^{\kappa+2} (\sqrt{2})^{-n!} < \infty$$

ergibt, also (5) erfüllt ist.

Man kann übrigens zeigen, daß die Bedingung (5) gegenüber äguivalenten irrationalen Zahlen α invariant ist (vgl. [4] §17).

Der Beweis unseres Satzes erfolgt mit Hilfe der Newtonschen Methode der sukzessiven Approximation, wie sie schon mehrfach auf Probleme angewendet wurde, in denen kleine Nenner auftreten (vgl. z.B. [1]). Daß die Newtonsche Methode noch anwendbar bleibt, wenn die Bedingungen für die kleinen Nenner wie etwa (4) durch schwächere wie (5) ersetzt werden, hat zuerst Brjuno [2] in Zusammenhang mit einem Differentialgleichungsproblem bemerkt.

Cremer [3] hat Beispiele konvergenter $f(z)$ mit divergenter Schröderscher Reihe konstruiert für alle λ, die der Bedingung

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} |\lambda^k - 1|^{1/k} = 0 \tag{12}$$

genügen. Für die in (8) definierten D_k leitet man zufolge (3) leicht die Ungleichungen

$$4D_k \leqq |\lambda^k - 1| \leqq 7D_k \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

her, aus denen zusammen mit (9) und (10) folgt, daß (12) äquivalent ist mit

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1} = \infty .$$

Es bleibt also noch die Frage der Stabilität bei solchen (Liouvilleschen) Zahlen α offen, deren Näherungsnenner die Beziehungen

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1} < \infty , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q_n^{-1} \log q_{n+1} = \infty$$

erfüllen.

2. Ein Lemma. Statt die Konvergenz der Schröderschen Reihe (1) zu beweisen, können wir auch die zu ihr inverse Reihe

$$\psi(z) = z + \cdots \tag{14}$$

betrachten, welche also die Lösung der Funktionalgleichung

$$\lambda\psi(z) = \psi(f(z)) \tag{15}$$

darstellt. Bilden wir nun die Substitution

$$\zeta = \psi(z) = z + \cdots, \qquad \omega = \psi(w), \tag{16}$$

so geht die Abbildung

$$w = f(z) = \lambda z + \cdots \tag{17}$$

vermöge (15) in die Drehung

$$\omega = \lambda\zeta \tag{18}$$

über. Zum Beweis des Satzes aus der Einleitung haben wir also zu zeigen, daß die eindeutig bestimmte Substitution (16), welche die Abbildung (17) in die Drehung (18) überführt, konvergiert, wenn die Näherungsnenner $q_0, q_1, \cdots$ von α in (3) der Ungleichung (5) genügen.

Wir setzen

$$c = \frac{1}{4} \prod_{n=0}^{\infty} q_{n+1}^{-1/q_n}, \tag{19}$$

wo $q_0, q_1, \cdots$ wieder die Näherungsnenner von α in (3) sind. Nach der Voraussetzung (5) des Satzes ist $c > 0$. Weiter wählen wir eine natürliche Zahl M so groß, daß

$$M \geqq 2^7, \tag{20}$$

$$M \geqq 2c^{-1} \tag{21}$$

ist und

$$m(1 - \rho) > c^{-1} \qquad (m \geqq M) \tag{22}$$

gilt, wobei wir zur Abkürzung

$$\rho = m^{-2/m} \tag{23}$$

gesetzt haben. Wir definieren noch

$$N(m) = \{j \mid m - 1 \leqq q_j < 2m - 2\} \tag{24}$$

und

$$P_m = \prod_{n \in N(m)} q_{n+1}^{-1/q_n} \tag{25}$$

mit $P_m = 1$ für $N(m) = \emptyset$. Endlich bezeichnen wir mit $O(z^m)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ eine formale Potenzreihe in z mit reellen oder komplexen Koeffizienten, bei der die Glieder mindestens bis zum $(m - 1)$-ten Grade einschließlich fehlen. Dann behaupten wir das folgende

Lemma. *I. Sei m eine natürliche Zahl $\geqq 2$ und*

$$F(z) = O(z^m). \tag{26}$$

Dann gibt es ein Polynom

$$H(z) = O(z^m), \tag{27}$$

so daß die formale Abbildung

$$w = \lambda z + F(z) \tag{28}$$

durch die Substitution

$$\zeta = z + H(z), \qquad \omega = w + H(w) \tag{29}$$

in eine Abbildung der Form

$$\omega = \lambda\zeta + F_+(\zeta) \tag{30}$$

übergeht, wobei

$$F_+(\zeta) = O(\zeta^{2m-1}) \tag{31}$$

ist.

II. Sei

$$m \geqq M, \tag{32}$$

r eine positive Zahl mit

$$r > c \tag{33}$$

und $F(z)$ im Kreis $|z| \leqq r$ analytisch mit der Abschätzung

$$|F(z)| \leqq 1 \qquad (|z| \leqq r). \tag{34}$$

Dann ist $F_+(\zeta)$ im Kreis $|\zeta| \leqq r_+$ analytisch mit der Abschätzung

$$|F_+(\zeta)| \leqq 1 \qquad (|\zeta| \leqq r_+), \tag{35}$$

wobei

$$r_+ = r\rho^4 P_m \tag{36}$$

zu setzen ist, und für das Polynom $H(z)$ gilt

$$|H(z)| \leqq m^{-1} \qquad (|z| \leqq r_+). \tag{37}$$

Durch wiederholte Anwendung von Teil I des Lemmas können wir zunächst erreichen, daß die gegebene Abbildung (17) durch eine Substitution

$$z_0 = g(z), \qquad w_0 = g(w),$$

wo $g(z) = z + \cdots$ ein Polynom ist, in eine Abbildung der Form

$$w_0 = \lambda z_0 + F_0(z_0), \qquad F_0(z_0) = O(z_0^{m_0}), \qquad m_0 = M + 1 \tag{38}$$

übergeht, wobei $F_0(z_0)$ konvergiert, weil dies für die gegebene Reihe $f(z)$ in (17) vorausgesetzt ist. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $F_0(z_0)$ für $|z_0| \leqq 1$ analytisch ist und der Abschätzung

$$|F_0(z_0)| \leqq 1 \qquad (|z_0| \leqq 1) \tag{39}$$

genügt. Denn andernfalls betrachten wir statt (38) die Abbildung

$$w_0 = \lambda z_0 + \epsilon^{-1} F_0(\epsilon z_0)$$

mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$. Wenn diese Abbildung durch die konvergente Substitution $\zeta = \tilde{g}(z_0) = z_0 + \cdots$, $\omega = \tilde{g}(w_0)$ nach (18) transformiert wird, so ist die Substitution

$$\zeta = \epsilon \tilde{g}(\epsilon^{-1} z_0), \qquad \omega = \epsilon \tilde{g}(\epsilon^{-1} w_0)$$

von (38) in (18) trivialerweise konvergent.

Nun setzen wir

$$m_s = 2^s M + 1 \qquad (s = 0, 1, \cdots), \tag{40}$$

$$\rho_s = m_s^{-2/m_s} \tag{41}$$

und

$$r_{s+1} = r_s \rho_s^4 P_{m_s} . \tag{42}$$

Dann liefert das Lemma zu einer Abbildung der Form

$$\begin{cases} w_s = z_s + F_s(z_s), \qquad F_s(z_s) = O(z_s^{m_s}), \\ F_s(z_s) \textit{ analytisch und } |F_s(z_s)| \leqq 1 \quad \textit{für} \quad |z_s| \leqq r_s \end{cases} \tag*{(43)$_s$}$$

eine Polynom–Substitution

$$z_{s+1} = g_s(z_s) = z_s + H_s(z_s), \qquad w_{s+1} = g_s(w_s), \tag{44}$$

$$H_s(z_s) = O(z_s^{m_s}) \tag{45}$$

mit der Abschätzung

$$|H_s(z_s)| \leqq m_s^{-1} \qquad (|z_s| \leqq r_{s+1}), \tag{46}$$

welche $(43)_s$ in eine Abbildung der Form $(43)_{s+1}$ überführt, falls

$$r_s > c \tag{47}$$

ist. Wegen (38) und (39) dürfen wir $(43)_0$ mit $r_0 = 1$ als erfüllt ansehen, so daß (47) wegen (19) für $s = 0$ richtig ist. Mit $r_0 = 1$ ergibt sich aus (42) bei Beachtung von (19), (25), (40) und (41) die Beziehung

$$r_s = \prod_{k=0}^{s-1} \rho_k^4 P_{m_k} \geqq 4c \prod_{k=0}^{\infty} m_k^{-8/m_k}$$

für $s = 1, 2, \cdots$. Nach (20) und (40) ist aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{-1} \log m_k \leqq M^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-s} \log 2^s M = 2M^{-1} \log 2M \leqq 2^{-3} \log 2,$$

also nicht nur (47) für $s = 1, 2, \cdots$ erfüllt, sondern sogar

$$r_s \geqq 2c \qquad (s = 1, 2, \cdots). \tag{48}$$

Daher existiert die Substitution (44), (45), (46) für $s = 0, 1, \cdots$, und wir gelangen ausgehend von $(43)_0$ durch die Substitution

$$z_{s+1} = \psi_s(z_0), \qquad w_{s+1} = \psi_s(w_0),$$

wo ψ_s durch

$$\psi_s(z) = g_s(g_{s-1}(\cdots (g_0(z)) \cdots)) \qquad (s = 0, 1, \cdots) \tag{49}$$

definiert ist, zu $(43)_{s+1}$. Wegen (40) und (45) ist

$$\psi_\infty(z) = z + \cdots$$

eine wolhldefinierte formale Potenzreihe, und die Substitution

$$\zeta = \psi_\infty(z_0), \qquad \omega = \psi_\infty(w_0)$$

transformiert $(43)_0$ offenbar in (18). Daher haben wir nur noch die Konvergenz der Reihe $\psi_\infty(z)$ zu zeigen, um den Beweis unseres Satzes mit Hilfe des Lemmas zu beenden.

Nach (21) und (40) ist

$$\sum_{k=s}^{\infty} m_k^{-1} \leqq 2^{-s}c \qquad (s = 0, 1, \cdots). \tag{50}$$

Daher ergibt sich zusammen mit (44), (46), (48) und (49) durch vollständige Induktion

$$|\psi_s(z)| \leqq \sum_{k=1}^{s} |H_k(\psi_{k-1}(z))| + |H_0(z)| + |z| \leqq \sum_{k=0}^{s} m_k^{-1} + c \leqq 2c \quad \text{für} \quad |z| \leqq c,$$

also

$$|\psi_s(z)| \leqq 2c \qquad (|z| \leqq c;\, s = 0, 1, \cdots).$$

Hieraus folgt aber bei Beachtung von (50) sofort

$$|\psi_{s+t}(z) - \psi_s(z)| \leqq \sum_{k=s+1}^{s+t} |H_k(\psi_{k-1}(z))| \leqq \sum_{k=s+1}^{s+t} m_k^{-1} \leqq 2^{-s}c$$

für $|z| \leqq c$ und $s, t = 1, 2, \cdots$. Somit ist die Polynomfolge $\psi_s(z)$ $(s = 0, 1, \cdots)$ im Kreis $|z| \leqq c$ gleichmäßig konvergent, also die Potenzreihe $\psi_\infty(z)$ für $|z| < c$ konvergent.

3. Der Beweis des Lemmas. Bei Berücksichtigung von (28) und (29) erhalten wir aus (30) die Gleichung

$$F_+(\zeta) = G(z(\zeta)), \tag{51}$$

wobei

$$G(z) = H(\lambda z + F(z)) - \lambda H(z) + F(z) \tag{52}$$

ist und $z = z(\zeta) = \zeta + \cdots$ die zu $\zeta = z + H(z)$ inverse Reihe darstellt. Die Reihe $F(z) = \sum_{k=m}^{\infty} F_k z^k$ aus (26) spalten wir auf in das Polynom

$$\tilde{F}(z) = \sum_{k=m}^{2m-2} F_k z^k$$

und die Reihe

$$\hat{F}(z) = \sum_{k=2m-1}^{\infty} F_k z^k \tag{53}$$

und bestimmen das Polynom $H(z)$ durch Koeffizientenvergleich aus der Gleichung

$$\lambda H(z) - H(\lambda z) = \tilde{F}(z), \tag{54}$$

so daß wir

$$H(z) = \sum_{k=m}^{2m-2} (\lambda - \lambda^k)^{-1} F_k z^k \tag{55}$$

erhalten, also (27) erfüllt ist. Gehen wir mit (54) in (52) ein, so bekommen wir die Gleichung

$$G(z) = H(\lambda z + F(z)) - H(\lambda z) + \hat{F}(z), \tag{56}$$

von der wir wegen (26), (27) und (53) leicht $G(z) = O(z^{2m-1})$ ablesen. Aus (51) folgt daher wegen $z(\zeta) = \zeta + \cdots$ die Beziehung (31), womit Teil I des Lemmas bewiesen ist.

Nach der Voraussetzung von Teil II des Lemmas ist $F(z)$ und damit wegen (53) auch $\hat{F}(z)$ für $|z| \leqq r$ analytisch. Zufolge (55) und (56) ist dann auch $G(z)$ im Kreis $|z| \leqq r$ analytisch.

Für die Koeffizienten F_k von $F(z)$ ergibt sich aus (34) nach der Cauchyschen Abschätzungsformel

$$|F_k| \leqq r^{-k} \qquad (k = m, m + 1, \cdots), \tag{57}$$

so daß wir die Ungleichung

$$|F(z)| \leqq \rho^m (1 - \rho)^{-1} \qquad (|z| \leqq \rho r) \tag{58}$$

und mit Rücksicht auf (53) ebenso

$$|\hat{F}(z)| \leqq \rho^m (1 - \rho)^{-1} \qquad (|z| \leqq \rho r) \tag{59}$$

erhalten, wobei $\rho < 1$ in (23) definiert ist.

Die Koeffizienten H_k von $H(z)$ lassen sich zufolge (13), (55), und (57) zunächst durch

$$|H_k| \leqq (4D_{k-1})^{-1} r^{-k} \qquad (m \leqq k < 2m - 1)$$

abschätzen und weiter wegen (9) durch

$$|H_k| \leqq k r^{-k} \qquad (m \leqq k < 2m - 1; k - 1 \neq q_1, q_2, \cdots) \tag{60}$$

bzw. wegen (10) und (24) durch

(61) $$|H_{q_j+1}| \leqq q_{j+1}r^{-q_j-1} \qquad (j \in N(m)).$$

Nach (25) ist $P_m \leqq 1$ und

$$q_{j+1} \leqq P_m^{-q_j-1} \qquad (j \in N(m)),$$

so daß wir aus (60) und (61) die Abschätzung

(62) $$|H_k| \leqq k(rP_m)^{-k} \qquad (m \leqq k < 2m - 1)$$

erhalten. Es ist $m \geqq 2^7$ wegen (20) und (32), mit (23) also

$$k^2\rho^k = (km^{-k/m})^2 \leqq 1 \qquad (k \geqq m).$$

Verwenden wir diese Ungleichung in (62), so bekommen wir

$$|H_k| \leqq k\,|H_k| \leqq (r\rho P_m)^{-k} \qquad (m \leqq k < 2m - 1)$$

und hieraus schließlich

(63) $$|H(z)| \leqq \rho^m(1 - \rho)^{-1} \qquad (|z| \leqq \rho^{-2}r_+)$$

und

(64) $$|H'(z)| \leqq r_+^{-1}\rho^m(1 - \rho)^{-1} \qquad (|z| \leqq \rho^{-2}r_+),$$

wobei wir noch (36) beachtet haben. Zufolge (19) ist $c < 1$, nach (22) und (23) also

(65) $$\rho^m(1 - \rho)^{-1} \leqq m^{-1},$$

woraus sich mit (63) die Abschätzung (37) ergibt.

Um den Beweis von Teil II des Lemmas zu beenden, müssen wir noch zeigen, daß $F_+(\zeta)$ im Kreis $|\zeta| \leqq r_+$ analytisch ist und (35) erfüllt. Dazu folgern wir zunächst aus (22), (23), (33) und (19) der Reihe nach

$$\rho^m(1 - \rho)^{-2} \leqq c^2 \leqq cr \leqq 4^{-1}rP_m$$

und aus (23) wegen (20) und (32) die Ungleichung $4^{-1} \leqq \rho^4$, so daß wir mit (36) insgesamt

(66) $$\rho^m(1 - \rho)^{-1} \leqq r_+(1 - \rho)$$

erhalten. (64) und (66) ergeben dann die unten benötigte Abschätzung

(67) $$|H'(z)| \leqq 1 - \rho \qquad (|z| \leqq \rho^{-2}r_+).$$

Weiter gilt wegen (58) und (66) für $|z| \leqq \rho^{-1}r_+$ die Beziehung

$$|\lambda z + F(z)| \leqq |z| + |F(z)| \leqq \rho^{-1}r_+ + \rho^m(1 - \rho)^{-1} \leqq \rho^{-2}r_+ ,$$

welche bei Beachtung von (56), (59) und (63) die Abschätzung

$$|G(z)| \leqq 3\rho^m(1 - \rho)^{-1} \qquad (|z| \leqq \rho^{-1}r_+)$$

liefert, zufolge (20), (32) und (65) also

$$|G(z)| \leqq 1 \qquad (|z| \leqq \rho^{-1}r_+). \tag{68}$$

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Inverse $z(\zeta) = \zeta + \cdots$ der Abbildung $\zeta = z + H(z)$ im Kreis $|\zeta| \leqq r_+$ analytisch ist und der Abschätzung

$$|z(\zeta)| \leqq \rho^{-1}r_+ \qquad (|\zeta| \leqq r_+) \tag{69}$$

genügt. Denn wie schon oben bemerkt wurde, ist $G(z)$ für $|z| \leqq r > \rho^{-1}r_+$ analytisch, weshalb nach (51) und (69) dann $F_+(\zeta)$ für $|\zeta| \leqq r_+$ analytisch ist. Aus (51), (68) und (69) folgt schließlich die Abschätzung (35), womit auch Teil II des Lemmas vollständig bewiesen ist.

Die Umkehrung $z(\zeta)$ von $\zeta = z + H(z)$ bestimmen wir durch eine Folge $(z_n(\zeta))$ von Polynomen rekursiv aus

$$z_0(\zeta) = 0, \qquad z_{n+1}(\zeta) = \zeta - H(z_n(\zeta)) \qquad (n = 0, 1, \cdots). \tag{70}$$

Diese Formel liefert mit (63) und (66) durch vollständige Induktion

$$|z_{n+1}(\zeta)| \leqq |\zeta| + |H(z_n(\zeta))| \leqq r_+(\rho + \rho^{-1} - 1) + \rho^m(1 - \rho)^{-1} \leqq \rho^{-1}r_+$$

für $|\zeta| \leqq r_+(\rho + \rho^{-1} - 1)$, also

$$|z_n(\zeta)| \leqq \rho^{-1}r_+ \qquad (|\zeta| \leqq r_+(\rho + \rho^{-1} - 1); n = 0, 1, \cdots). \tag{71}$$

Aus (67), (70) und (71) folgt dann

$$|z_{n+1}(\zeta) - z_n(\zeta)| \leqq \sup_{|z| \leqq \rho^{-1}r_+} (|H'(z)|)\, |z_n(\zeta) - z_{n-1}(\zeta)| \leqq (1 - \rho)\, |z_n(\zeta) - z_{n-1}(\zeta)|$$

für $|\zeta| \leqq r_+(\rho + \rho^{-1} - 1)$ und $n = 1, 2, \cdots$, also die gleichmäßige Konvergenz der Polynomfolge $(z_n(\zeta))$ im Kreis $|\zeta| \leqq r_+(\rho + \rho^{-1} - 1)$. Die Grenzfunktion $z(\zeta) = \lim_{n\to\infty} z_n(\zeta)$ ist daher für $|\zeta| \leqq r_+ < r_+(\rho + \rho^{-1} - 1)$ analytisch, stellt wegen (70) die Umkehrung von $\zeta = z + H(z)$ dar und erfüllt wegen (71) die Abschätzung (69).

Literatur.

[1] Arnold, V. I., Kleine Nenner und Stabilitätsprobleme der klassischen Mechanik und der Himmelsmechanik, *Uspekhi Mat. Nauk USSR*, **18** (1963) 91–192 oder *Russ. Math. Surveys*, **18** (1963) 85–191.

[2] Brjuno, A. D., Über die Konvergenz der Transformationen von Differentialgleichungen in die Normalform, *Doklady Akad. Nauk USSR*, **165** (1965) 987–989 oder *Soviet Math.*, **6** (1965) 1536–1538.

[3] Cremer, H., Über die Häufigkeit der Nichtzentren, *Math. Ann.*, **115** (1938) 573–580.

[4] Perron, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen, Bd.I.*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954.

[5] Siegel, C. L., Iterations of analytic functions, *Ann. Math.*, **43** (1942) 607–612.

[6] ————, *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954.

I. Mathematisches Institut
der Freien Universität,
Berlin, Germany
Date Communicated: April 26, 1967