Ueber Covarianten ebener Collineationen.

Von

P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Im Folgenden sollen einige auf die Covarianten ebener Collineationen und auf Systeme von Collineationen bezügliche Fragen erörtert werden, wobei ein gewisses Netz von Kegelschnitten in Betracht gezogen werden muss, welches auch von anderer Seite behandelt worden ist.*) Für unsere Zwecke muss dieses Netz jedoch in etwas anderer Weise als bisher entwickelt werden, namentlich soll die Benutzung der Doppelelemente der Collineation vermieden werden, was durch Herleitung einiger wichtiger Identitäten ermöglicht wird.

§ 1.

1) Setzen wir

$$f(xu) = \sum_{(i,k=1,2,3)} a_{ik}\, x_i u_k = \sum_{(i=1,2,3)} u_i f(x)_i = \sum_{(k=1,2,3)} x_k f_k(u),$$

so wird durch

$$f(xu) = 0$$

eine collineare Beziehung in der Ebene vermittelt, durch welche dem Punkt $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ der Punkt $f(x)_1 \mid f(x)_2 \mid f(x)_3$ zugeordnet wird.

Die inverse Collineation von $f = 0$ wird durch

$$\varphi(xu) = \sum_{(i,k=1,2,3)} \alpha_{ik}\, x_k u_i = 0$$

dargestellt, wo

$$\alpha_{ik} = \text{adj. } a_{ik} \quad \text{in} \quad \Delta = \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}, \ \Delta \neq 0 .$$

Jedem Punkte $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ der Ebene ist durch die Collineation f ein bestimmter Kegelschnitt

*) Burmester, kinematisch geom. Untersuchungen. Zeitschrift f. Math. und Phys., XX. Jahrg. Schnell, Ueber Schaaren unter einander persp. Tetraeder. Diss. Viernheim 1891, § 9.

$$C_\xi^2(f) = \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

zugeordnet; nur die Punkte x dieses Kegelschnitts haben die Eigenschaft, dass x, x', ξ in einer Geraden liegen, wobei x' den zu x homologen Punkt bedeutet.*) Alle Kegelschnitte $C_\xi^2(f)$ constituiren ein Netz, welches wir *das Netz von* f nennen werden. Jedem Punkt ξ entspricht ein Kegelschnitt $C_\xi^2(f)$ des Netzes, und umgekehrt. Ist nämlich Γ ein solcher dem Netze angehöriger Kegelschnitt, und man greift zwei beliebige Punkte a und b desselben heraus, so schneiden sich die Geraden aa' und bb' in einem Punkte p von Γ; denn $C_p^2(f)$ geht durch a und b, gehört dem Netze an und ist folglich identisch mit Γ, also $\Gamma \equiv C_p^2(f)$, d. h. Γ ist dem Punkt p zugeordnet.

Liegt ein Dreieck auf einem Kegelschnitt des Netzes, so liegt es perspectiv zu seinem homologen in f, das Perspectivitätscentrum liegt ebenfalls auf Γ und umgekehrt.

Wie die reciproke Ueberlegung zeigt, berühren alsdann die Seiten eines solchen Dreiecks zugleich mit der Perspectivitätsaxe v einen Kegelschnitt:

$$K_v^2(f) = \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & \varphi_1(u) \\ v_2 & u_2 & \varphi_2(u) \\ v_3 & u_3 & \varphi_3(u) \end{vmatrix} = 0$$

des dem Netze dual gegenüberstehenden Gewebes der Collineation f.

2) Durch

$$\sum a_{il} a_{lk} x_i u_k = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

ist bekanntlich das Quadrat der Collineation f gegeben. Diese Collineation

$$f^2 = f^2(xu)^{**)} = \sum a_{il} a_{lk} x_i u_k = \sum A_{ik} x_i u_k = 0$$

erzeugt ein Netz:

$$C_\xi^2(f^2) = \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f^2(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

von Kegelschnitten.

Nun ist evident, dass das Netz einer Collineation f von dem Netze der inversen Collineation φ nicht verschieden ist, denn der Kegelschnitt $C_\xi^2(\varphi)$ ist identisch mit dem Kegelschnitt $C_{\xi'}^2(f)$ und $\Delta \neq 0$. Durch passende Constantenbestimmung hat man so die Identität:

*) So auch im Folgenden: x'' homolog zu x', $x^{(n)}$ homolog zu $x^{(n-1)}$.

**) Eine Verwechselung mit $(f(xu))^2$ ist wohl ausgeschlossen.

$$\text{(a)} \qquad \begin{vmatrix} f(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ f(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ f(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varphi_1(x) \\ \xi_2 & x_2 & \varphi_2(x) \\ \xi_3 & x_3 & \varphi_3(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Ferner ist identisch:*)

$$\text{(b)} \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varphi_1(x) + if(x)_1 - f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & \varphi_2(x) + if(x)_2 - f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & \varphi_3(x) + if(x)_3 - f^2(x)_3 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wobei

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Aus (a) und (b) ergiebt sich:

$$\text{(c)} \qquad \begin{vmatrix} \psi(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \psi(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \psi(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f^2(x)_3 \end{vmatrix}$$

wobei

$$\psi(xu) = iu_x - f(xu).$$

Die Identität (c) besagt, dass jeder Kegelschnitt des Netzes von f^2 dem Netz von f angehört; aber auch das Umgekehrte ist im Allgemeinen richtig, denn

$$\det\ \psi(xu) = i\, i_\varphi - \Delta$$

wo

$$i_\varphi = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33},$$

ist im Allgemeinen nicht 0. Wird aber

$$i \,.\, i_\varphi - \Delta = 0,$$

so wird f^2 perspectiv**) und alle $C_\xi^2(f^2)$ zerfallen. Natürlich tritt dieses auch ein, wenn f selbst perspectiv ist, also alle $C_\xi^2(f)$ zerfallen. Es muss demnach det $C_\xi^2(f^2)$ die Factoren $i \,.\, i_\varphi - \Delta$ und det $C_\xi^2(f)$ enthalten, d. h. es ist:

$$\det C_\xi^2(f)^2 \equiv C(i \,.\, i_\varphi - \Delta) \det C_\xi^2(f).$$

Die Constante bestimmt man als 1 und findet schliesslich:

$$\text{(d)} \qquad \det C_\xi^2(f^2) \equiv (i \,.\, i_\varphi - \Delta) \det C_\xi^2(f).$$

Allgemein gilt demnach der Satz:

„*Das Netz der Collineation f ist identisch mit dem Netze von f^2.*“

„*Entspricht* A *dem Punkte a in $\psi(xu) = 0$, so ist*

$$C_a^2(f^2) \equiv C_A^2(f).\text{“}$$

Die Identität (c) zeigt, in welcher Art jeder der Kegelschnitte

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 427.

**) Pasch, l. c. S. 428.

$$C_1^2 = x_2 f^2(x)_3 - x_3 f^2(x)_2 = 0,$$
$$C_2^2 = x_3 f^2(x)_1 - x_1 f^2(x)_3 = 0,$$
$$C_3^2 = x_1 f^2(x)_2 - x_2 f^2(x)_1 = 0$$

linear von den Kegelschnitten:

$$D_1^2 = x_2 f(x)_3 - x_3 f(x)_2 = 0,$$
$$D_2^2 = x_3 f(x)_1 - x_1 f(x)_3 = 0,$$
$$D_3^2 = x_1 f(x)_2 - x_2 f(x)_1 = 0$$

abhängt, z. B. ist: $(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = \xi_3 = 0)$,

$$C_1^2 = (i - a_{11}) D_1^2 + a_{12} D_2^2 - a_{13} D_3^2.$$

In der Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & -a_{13} & a_{12} & 0 & -A_{13} & A_{12} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} & A_{23} & 0 & -A_{21} \\ -a_{12} & a_{31} & 0 & -A_{32} & A_{31} & 0 \\ a_{33}-a_{22} & a_{21} & -a_{31} & A_{23}-A_{22} & A_{21} & -A_{31} \\ -a_{12} & a_{11}-a_{33} & a_{32} & -A_{12} & A_{11}-A_{33} & A_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{22}-a_{11} & A_{13} & -A_{23} & A_{22}-A_{11} \end{vmatrix} \text{*)}$$

verschwinden alle Subdeterminanten höher als 3ten Grades identisch.

3) Man nehme nun zwei Punkte a und b in der Ebene an, bestimme den Schnittpunkt p von aa'' und bb'', und den Schnittpunkt p_1 von aa', bb'. $C_p^2(f^2)$ ist identisch mit $C_{p_1}^2(f)$; denn der durch a und b gehende Kegelschnitt des Netzes von f und f^2 (2.) ist nach 1) bezüglich den Punkten p_1 in Bezug auf f, p in Bezug auf f^2 zugeordnet. p und p_1 sind also homologe Punkte in $\psi(xu) = 0$. a, b, p, p_1 liegen auf einem Kegelschnitt des Netzes, pp' geht natürlich durch p_1, p_1'' liegt auf pp_1. Diese letztere Eigenschaft der Collineation ψ hat Herr Pasch auf anderem Wege abgeleitet.**) Da dem Punkte p in ψ der Punkt p_1, dem Punkt a aber ein a_1' auf der Geraden $aa' = ap_1$ entspricht, so sind die Geraden aa'' und aa' homologe Geraden von ψ***).

4) Nachdem wir diese Zusammenhänge constatirt, betrachten wir ein durch:

$$\chi(xu) = \varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

gegebenes System von doppelt unendlich vielen Collineationen. $\varkappa$, λ, μ sind Parameter, $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$.

*) Bezeichnung gemäss der von Herrn F. London gewählten. Vergl. F. L.: Ueber die Polarfiguren der ebenen C^3, Math. Ann. Bd. 36, § 2, 12.

**) Math. Ann. 1891. Bd. 38, S. 32.

***) Vergl. § 2, 2).

α) Greift man zwei Collineationen χ_1 und χ_2 heraus, so ist die Collineation: $\chi_1 \cdot \chi_2$ d. h. die durch aufeinanderfolgende Anwendung von χ_1 und χ_2 entstehende neue Collineation $= \chi_2 \cdot \chi_1$ und gehört wieder dem System χ an; ebenso die inverse einer jeden Collineation $\chi : \chi^{-1}$, daher auch: $\chi_1^{-l} \cdot \chi_2^{-m}$ u. s. w.

β) Wendet man auf einen Kegelschnitt des Netzes von f eine beliebige Collineation χ an, so erhält man einen Kegelschnitt desselben Netzes.

α) und β) ergeben sich daraus, dass alle Covarianten von f durch u_x, f, f^2 ausgedrückt werden können.*)

γ) Wir betrachten nun das Netz von χ; man hat:

$$\text{(e)}\quad \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varkappa x_1 + \lambda f(x)_1 + \mu f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & \varkappa x_2 + \lambda f(x)_2 + \mu f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & \varkappa x_3 + \lambda f(x)_3 + \mu f^2(x)_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \psi(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \psi(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \psi(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

unter Benutzung der Identität (c) in 2). Wir sehen, jeder Kegelschnitt des Netzes von χ gehört dem Netze von f an. Die Umkehrung ist jedoch nur richtig, wenn

$$\det\left(\lambda u_x + \mu \psi(xu)\right) \neq 0$$

ist. Nun ist:

$$\det\left(\lambda u_x + \mu \psi(xu)\right) = \lambda^2 + 2\lambda^2 \mu i + \lambda \mu^2 (i^2 + i_\varphi) + \mu^3 (i \cdot i_\varphi - \Delta).$$

Falls $\lambda \mid \mu$ die cubische Gleichung

$$\omega(\lambda \mu) = \lambda^3 + 2\lambda^2 \mu i + \lambda \mu^2 (i^2 + i_\varphi) + \mu^3 (i \cdot i_\varphi - \Delta) = 0$$

befriedigt, können im Netze von f Kegelschnitte auftreten, welche dem Netze von

$$\chi = \varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

nicht angehören. Dies tritt erstens ein, wenn χ perspectivisch wird, also $\det C_\xi{}^2(\chi) \equiv 0$ ist. Es wird aber auch $\det C_\xi{}^2(\chi) \equiv 0$, wenn f perspectiv wird, d. h. $\det C_\xi{}^2(\chi)$ muss erstens den Factor $\det C_\xi{}^2(f)$ und zweitens den Factor $\omega(\lambda\mu)$ besitzen; denn einer der beiden Factoren verschwindet stets mit $C_\xi{}^2(\chi)$, also ihr Product. Als weiterer Factor kann nur eine Constante auftreten, die sich als 1 ergiebt; es ist somit:

$$\text{(f)}\qquad \det C_\xi{}^2\left(\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu)\right) \equiv \omega(\lambda\mu) \det C_\xi{}^2(f).$$

Für $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$ ergiebt sich die Beziehung (d).

Ist

$$\det C_\xi{}^2(f) \neq 0, \qquad \omega(\lambda\mu) = 0,$$

so ist

$$\det C_\xi{}^2(\chi) = 0,$$

d. h. χ perspectiv (bez. die Form χ zerfällt):**)

---

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 429.

**) Zerfallende Formen werden im Allg. drei im Netze auftreten.

„In dem System $\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$ *giebt es 3 Serien von perspectivischen Collineationen, entsprechend den 3 Wurzeln der cubischen Gleichung* $\omega(\lambda\mu) = 0$.*“*

Diese Betrachtungen ergeben also rücksichtlich des Netzes von χ das Resultat:

„Das Netz jeder Collineation des Systems

$$\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

ist identisch mit dem Netze von f, *falls wir die Werthe von* $\lambda \mid \mu$, *welche* $\omega(\lambda\mu) = 0$ *befriedigen, ausschliessen.“*

5) Die Gleichung

$$\omega(\lambda\mu) = 0$$

steht in enger Beziehung zu einer anderen cubischen Gleichung:*)

$$\tau(\lambda\mu) = \lambda^3 - i\lambda^2\mu + i_\varphi\lambda\mu^2 - \Delta\mu^3 = 0.$$

Die Discriminante von ω ist identisch mit derjenigen von τ.

$$\text{discr. } \omega(\lambda\mu) = \text{discr. } \tau(\lambda\mu)$$

und die Hesse'sche Form von τ verschwindet identisch, wenn die Hessiana von ω identisch verschwindet, d. h. ω hat eine zwei- resp. dreifache Wurzel, wenn τ eine solche besitzt.

Setzen wir nun voraus, es sei

$$\omega(\lambda\mu) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det C_\xi^2(f) \neq 0,$$

so stellt die Gleichung

$$\det C_\xi^2(f) = 0$$

das Product der Doppelgeraden von $f(xu) = 0$**) und gemäss Identität (f) das Product der Doppelgeraden von

$$\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f(xu) = 0$$

dar. Alle Collineationen dieses Systems $\big(\omega(\lambda\mu) \neq 0\big)$ haben dieselben Doppelgeraden, dieselben Doppelpunkte wie $f(xu) = 0$. Auch hieraus kann man folgern, dass f und jede Collineation, $\big($für welche $\omega(\lambda\mu) \neq 0\big)$ des Systems dasselbe Netz besitzen.

Hat f drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$, also $\tau = 0$ drei verschiedene Wurzeln, so hat auch $\omega = 0$ drei verschiedene Wurzeln, wie oben gezeigt; es giebt 3 Serien von perspectiven Collineationen im System χ, die Centren fallen nach d_1, d_2, d_3, die Axen nach resp. $d_2 d_3$, $d_3 d_1$, $d_1 d_2$.

Hat f aber nur zwei Doppelpunkte, also $\tau = 0$ eine Doppelwurzel, so besitzt auch $\omega = 0$ eine Doppelwurzel und es treten nur zwei Serien

---

*) Dieselbe tritt bei der Bestimmung der Doppelpunkte von f auf.

**) Es ist auch:

$$\det C_\xi^2(f) = -\frac{1}{4}\sum \pm\, \xi_1 f(\xi)_2 f^2(\xi)_3.$$

perspectiver Collineationen auf im System χ; besitzt f nur einen Doppelpunkt, so tritt im System χ nur eine Serie perspectiver Collineationen auf.

§ 2.

1) Wir können jetzt den Satz*) beweisen:

„Aus einem Dreieck abc, welches auf einem Kegelschnitt des Netzes von f liegt, geht durch Anwendung der Collineationen des Systems

$$\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

eine Doppelserie von Dreiecken hervor, welche zu je zweien und sämmtlich zu abc perspectivisch liegen. Jedes dieser Dreiecke bestimmt mit den übrigen doppelt unendlich viele Perspectivitäts-Axen und Centren, die ersteren umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck eingeschrieben ist, die letzteren liegen auf einem Kegelschnitt, welcher demselben umgeschrieben ist.“

Aus § 1 Abschnitt 4, β) folgt zunächst, dass *jedes Dreieck* der Doppelserie auf einem Kegelschnitt des Netzes von f liegt. Ist A ein beliebiges dieser Dreiecke, so geht es in ein anderes A' der Doppelserie durch eine Collineation der Form $\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$ über. $\big($§ 1, 4, α)$\big)$; diese Collineation wird aber entweder perspectivisch oder ihr Netz ist identisch mit dem von f. (Hauptsatz in § 1, 4); also liegen in jedem Fall A und A' perspectivisch (§ 1, 1). q. e. d.

Die *„uneigentlichen“* Collineationen des Systems, vermittelt durch die Formen desselben mit verschwindender Determinante, liefern uneigentliche Dreiecke. Die Ecken eines solchen in einer Geraden (oder fallen zusammen in einen Doppelpunkt). Ein eigentliches Dreieck geht in ein uneigentliches durch eine (uneigentliche) Collineation des Systems über, liegt also nach Vorstehendem $\big($§ 1, 1) und 4), (e)$\big)$ zu diesem perspectiv, woraus sich einfach die Perspectivität zweier uneigentlicher Dreiecke ergiebt. Für ein degenerirtes Dreieck zerfällt der betr. Kegelschnitt der Centren u. s. w. *Alle Formen des Systems kommen sonach in Betracht.*

2) Entspricht dem Punkte a ein a' in f, ein A in $\varkappa u_x + \lambda f + \mu f^2 = 0$, so sind die Geraden aa' und aA homologe Geraden einer Collineation.**) Denn jeder Geraden ist so eine Gerade eindeutig zugeordnet; gehen aa', bb', ... durch einen Punkt, so gehen auch aA, bB, ... durch einen Punkt; die Beziehung zwischen aA, aa' ist collinear und durch:

$$\lambda u_x + \mu \psi(xu) = 0$$

gegeben, $\big(\omega(\lambda\mu) \neq 0$, f nicht perspectivisch$\big)$.

*) Schnell, l. c. S. 24.

**) Pasch, l. c. S. 429.

2) Betrachten wir also zwei nicht perspective Collineationen χ_1 und χ_2 des Systems und bezeichnen den Punkt

$$\chi_1(ua) \equiv \varkappa_1 u_a + \lambda_1 f(au) + \mu_1 f^2(au) = 0$$

mit A_1, analog:

$$\chi_2(ua) \equiv \varkappa_2 u_a + \lambda_2 f(au) + \mu_2 f^2(au) = 0$$

mit A_2, so gilt der Satz:

„*Die Geraden aA_1 und aA_2 sind homologe Geraden einer Collineation des Systems $\varkappa u_1 + \lambda f + \mu f^2 = 0$.*“

Man beweist denselben auch direct in folgender Weise: a und b, A_1 und B_1 sind homologe Punkte, aA_1 und bB_1, aA_2 und bB_2 sind homologe Geraden einer Collineation χ_α des Systems.*) Heisst χ_β die Collineation des Systems, welche aA_1 in aA_2 überführt, so geht über:

die Gerade aA_1 in aA_2 durch χ_β, aA_2 in bB_2 durch χ_α,
" " aA_1 " bB_1 " χ_α, bB_1 " bB_2 " χ_β,

weil χ_α und χ_β vertauschbar sind. (§ 1, 4, α)).

Anderer Beweis:

Liegen die Punkte $a, A_1, A_2, A_3 \ldots$ geradlinig, so gilt dies auch für die Punkte $b_1, B_1, B_2, B_3, \ldots$, wenn man obige Bezeichnungsweise beibehält.*) In Folge des ebenfalls gültigen dualen Satzes gehen die Geraden aA_2, bB_2, $cC_2 \ldots$ durch einen Punkt, wenn aA_1, bB_1, $cC_1 \ldots$ durch einen Punkt gehen; denn aA_1 und bB_1, aA_2 und bB_2 sind homologe Geraden einer Collineation, aA_1 und cC_1, aA_2 und cC_2 einer zweiten Collineation des Systems, somit stehen aA_1 und aA_2 in collinearer Beziehung, wenn χ_1 und χ_2 nicht perspectiv sind.

3) Die eben entwickelten Sätze gestatten eine directe Anwendung auf die zu einer Collineation f covarianten Collineationen, welche bekanntlich sämmtlich in der Form:

$$\varkappa \Delta u_x + \lambda i_\varphi f(xu) + \mu i f^2(xu) = 0$$

darstellbar sind.

„*Alle zu f covarianten Collineationen besitzen dasselbe Netz v Kegelschnitten.*“

Denn die Gleichung:

$$\omega(\lambda\mu) = 0,$$

von § 1, 5), verwandelt sich im jetzigen Falle in eine Relation zwischen den Fundamentalinvarianten von f; wir setzen aber f allgemein voraus, also ist im Allgemeinen

$$\omega(\lambda\mu) \neq 0.$$

Deshalb lässt sich der Anfangs dieses Paragraphen ausgesprochene Satz für die Covarianten auch so fassen:

„*Aus einem Dreieck geht durch Anwendung der zu f covarianten*

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 430. Anm. 1.

Collineationen eine Schaar von Dreiecken hervor; liegen zwei dieser Dreiecke perspectiv, so liegt jedes Dreieck zu jedem anderen (und zu dem gegebenen Dreieck) perspectiv."

Dieser Satz *umfasst* und *verallgemeinert* einen von Herrn Pasch über die Wiederholung einer Collineation und einen zweiten von Herrn Keller über das Involutionsviereck gegebenen Satz.*)

α) Fasst man nämlich nur die Covarianten ins Auge, welche die Potenzen von f darstellen, so hat man die Verallgemeinerung des ersteren Satzes.

Die Collineationen $f^{\varkappa}$ ($\varkappa = -\infty$ bis $+\infty$) liefern eine Serie von Dreiecken.

Liegen zwei Dreiecke der Serie perspectiv, so gilt dies für irgend zwei derselben.

Jedes bestimmt mit allen anderen unendlich viele Centren und Axen, erstere liegen auf einem Kegelschnitt, welcher dem Dreieck umgeschrieben ist, letztere umhüllen einen solchen, welcher dem Dreieck eingeschrieben ist (§ 2, 1)). Man kann auch sagen: „der Punkt $(a a^{(\varkappa)}, b b^{(\varkappa)}) = p$ beschreibt bei variirendem $\varkappa$ einen Kegelschnitt."

β) Um den Keller'schen Satz zu verallgemeinern, brauchen wir unserem allgemeinen Satze nur folgende Fassung zu geben:

„*Bestimmen die Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ eine Collineation f, die Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$, $abcd$ eine zu f covariante Collineation χ und es liegen zwei dieser Vierecke perspectiv, so liegen sie auch perspectiv zum dritten.*"

Für
$$\chi = \psi(xu) = iu_x - f(xu)$$
wird $\alpha\beta\gamma\delta$ das Involutionsviereck von $abcd$ und $a'b'c'd'$**) und man hat den Satz von Herrn Keller. Zugleich folgt:

„*Jedes dieser drei Vierecke liegt mit den Perspectivitätscentren, welche es mit den beiden anderen bestimmt, auf einem Kegelschnitt.*"

Construirt man zu $abcd$, $\alpha\beta\gamma\delta$ und $a'b'c'd'$, $\alpha\beta\gamma\delta$ die weiteren Involutionsvierecke, so liegen diese unter sich und jedes zu den andern drei Vierecken perspectiv u. s. w.

4) Sämmtliche (eigentliche) Collineationen, welche ein Dreieck abc in ein Dreieck $a'b'c'$ überführen, bilden ein dreigliedriges System:
$$\varkappa u_{a'}(bcx) + \lambda u_{b'}(cax) + \mu u_{c'}(abx) = 0.$$
(Durch weitere Zuordnung der Punkte d und d' wird im System eine Collineation
$$u_{a'}(bcx)(dab)(dac)(b'c'd') + u_{b'}(cax)(dbc)(dba)(c'd'a') \\ + u_{c'}(abx)(cda)(cdb)(d'a'b) = 0$$

*) M. Pasch, Math. Ann. 1891. Bd. 38, S. 32. A. Keller: Ueber gewisse Vierecke u. s. w. Dissert. Giessen 1888.

**) Die nöthigen Litteraturnachweise siehe bei Pasch, l. c. S. 37.

bestimmt. *Dies ist die einfachste algebraische Darstellung einer durch die Zuordnung* $[a\,b\,c\,d,\ a'b'c'd']$ *festgelegten Collineation).*

„*Wendet man auf ein Dreieck A, welches mit $a\,b\,c$ auf einem Kegelschnitt liegt, die sämmtlichen Collineationen dieses Systems an, so erhält man eine Doppelserie von zu je zweien perspectiv liegenden Dreiecken.*"

Jedes dieser Dreiecke kann nämlich durch eine Doppelserie von Collineationen χ, welche dieselben Doppelpunkte a', b', c' haben, in die übrigen übergeführt werden und liegt ausserdem mit $a'b'c'$ auf einem Kegelschnitt, also auf einem Kegelschnitt des Netzes von χ (§ 1, 5)); somit ergiebt sich unser Satz aus § 2, 1). Für die Centren und Axen der perspectiven Dreiecke gilt natürlich das l. c. Ausgeführte.

Schlussbemerkung.

Im Raume lassen sich den obigen analoge Untersuchungen anstellen. Man kann dabei Identitäten zu Grund legen, welche neue Interpretationen der zu einer Collineation covarianten Collineationen ermöglichen. Z. B. ist (bei analoger Bezeichnung wie oben)

$$\sum \pm\, \psi(\xi)_1\, x_2\, f(x)_3\, f^2(x)_4 \equiv \sum \pm\, \xi_1\, x_2\, f(x)_3\, f^3(x)_4.$$

Also:

„*Schneiden sich die Ebenen $a\,a'a'''$, $b\,b'b'''$, $c\,c'c'''$ in einem Punkte α, die Ebenen $a\,a'a''$, $b\,b'b''$; $c\,c'c''$ in einem Punkte A, so sind α und A homologe Punkte in $\psi(xu)$*) $= i\,u_x - f(xu) = 0$.*"

Ferner beweist man:

Die Ebenen $a\,a^{(n)}a^{(m)}$ und $a\,a^{(r)}a^{(s)}$ sind homologe Ebenen einer zu f covarianten Collineation. U. s. w.

Osthofen, im Juli 1891.

---

*) Ueber ψ vergleiche man P. Muth, Invarianten räumlicher Collineationen und Recipr. Math. Ann. 1889. Bd. 33, S. 494 und 499.