1847. ANNALEN №. 12
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND LXXII.

I. *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird;*

von G. Kirchhoff.

Ist ein System von n Drähten: $1, 2 \ldots n$ gegeben, welche auf eine beliebige Weise unter einander verbunden sind, und hat in einem jeden derselben eine beliebige elektromotorische Kraft ihren Sitz, so findet man zur Bestimmung der Intensitäten der Ströme, von welchen die Drähte durchflossen werden, $I_1, I_2 \ldots I_n$, die nöthige Anzahl linearer Gleichungen durch Benutzung der beiden folgenden Sätze [1]):

I. Wenn die Drähte $k_1, k_2, \ldots$ eine geschlossene Figur bilden, und w_k bezeichnet den Widerstand des Drahtes k, E_k die elektromotorische Kraft, die in demselben ihren Sitz hat, nach derselben Richtung positiv gerechnet als I_k, so ist, falls $I_{k1}, I_{k2}, \ldots$ alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet werden:

$$w_{k1} I_{k1} + w_{k2} I_{k2} + \ldots = E_{k1} + E_{k2} + \ldots$$

II. Wenn die Drähte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in einem Punkte zusammenstofsen, und $I_{\lambda 1}, I_{\lambda 2}, \ldots$ alle nach diesem Punkte zu als positiv gerechnet werden, so ist:

$$I_{\lambda 1} + I_{\lambda 2} + \ldots. = 0.$$

Ich will jetzt beweisen, dafs die Auflösungen der Gleichungen, welche man durch Anwendung dieser Sätze für $I_1, I_2 \ldots I_n$ erhält, vorausgesetzt, dafs das gegebene System von Drähten nicht in mehrere völlig von einander getrennte zerfällt, sich folgendermafsen allgemein angeben lassen:

Es sey m die Anzahl der vorhandenen Kreuzungspunkte, d. h. der Punkte, in denen zwei oder mehrere Drähte zusammenstofsen, und es sey $\mu = n - m + 1$, dann ist

1) Bd. 64, S. 513 dieser Annalen.

der gemeinschaftliche Nenner aller Gröfsen I die Summe derjenigen Combinationen von w_1, w_2, ... w_n zu je μ Elementen, $w_{k1}.w_{k2}....w_{k_\mu}$, welche die Eigenschaft haben, dafs nach Fortnahme der Drähte k_1, k_2, .. k_μ *keine* geschlossene Figur übrig bleibt,

und es ist der Zähler von I_λ die Summe derjenigen Combinationen von w_1, $w_2 ... w_n$ zu je $\mu - 1$ Elementen, $w_{k1}.w_{k2}....w_{k_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, dafs nach Fortnahme von k_1, k_2, ... $k_{\mu-1}$, *eine* geschlossene Figur übrig bleibt, und dafs in dieser λ vorkommt; eine jede Combination multiplicirt mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden. Die elektromotorischen Kräfte sind hierbei in der Richtung als positiv zu rechnen, in der I_λ als positiv gerechnet ist.

Der leichteren Uebersicht wegen will ich den Beweis, den ich von diesem Satze gebe, in einzelne Abschnitte theilen.

1.

Es sey μ die Zahl, welche angiebt, wie viele Drähte man bei einem beliebigen Systeme *wenigstens* entfernen mufs, damit alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann ist μ auch die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche man durch Anwendung des Satzes I herleiten kann.

Es lassen sich nämlich μ Gleichungen, die von einander unabhängig sind, und aus denen eine jede, die aus dem Satze I folgt, abgeleitet werden kann, auf die folgende Weise aufstellen:

Es seyen $1, 2, ... \mu - 1, \mu$ solche μ Drähte, nach deren Fortnahme keine geschlossene Figur übrig bleibt; nach Fortnahme von $\mu - 1$ derselben bleibt dann *eine* geschlossene Figur; auf die geschlossenen Figuren, welche der Reihe nach übrig bleiben, wenn man

$$\begin{array}{l} 2, 3, ... \mu \\ 1, \quad 3, ... \mu \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1, 2, 3 .. \mu - 1 \end{array}$$

entfernt, wende man den Satz I an.

Von den auf diese Weise gebildeten μ Gleichungen kann keine eine Folge der übrigen seyn, weil eine jede eine Unbekannte enthält, welche in allen übrigen nicht vorkommt; die erste allein enthält I_1, die zweite I_2 u. s. f. Aus diesen Gleichungen läſst sich aber auch eine jede andere bilden, die mit Hülfe des Satzes I abgeleitet werden kann; denn eine Gleichung, die aus einer geschlossenen Figur folgt, welche sich aus mehreren zusammensetzen läſst, muſs aus den Gleichungen, die aus diesen folgen (durch Addition oder Subtraction), gebildet werden können; und, wie wir zeigen wollen, kann eine jede geschlossene Figur aus jenen μ Figuren zusammengesetzt werden. Die sämmtlichen geschlossenen Figuren nämlich des gegebenen Systems, welches wir durch S bezeichnen wollen, lassen sich eintheilen, in solche, in denen der Draht μ vorkommt, und in solche, die in dem Systeme S' enthalten sind, welches aus S entsteht, wenn der Draht μ entfernt wird. Nehmen wir an, daſs alle Figuren, welche der zweiten Klasse angehören, sich aus den $\mu-1$ ersten jener μ Figuren zusammensetzen lassen, so sehen wir ein, daſs eine jede Figur des Systems S' sich aus diesen μ zusammensetzen lassen muſs; denn eine beliebige Figur, in der der Draht μ vorkommt, läſst sich zusammensetzen aus einer bestimmten, in der μ vorkommt, und aus solchen, in denen μ nicht vorkommt. Die über das System S' gemachte Annahme läſst sich aber wieder auf eine ähnliche in Bezug auf S'' zurückführen, wenn S'' das System ist, welches aus S durch Entfernung von μ und $\mu-1$ entsteht; nämlich auf die Annahme, daſs alle in S'' vorkommenden geschlossenen Figuren sich aus den $\mu-2$ ersten jener μ zusammensetzen lassen. Durch Fortsetzung dieser Schluſsweise kommen wir endlich auf das System $S^{(\mu-1)}$; da dieses nur eine geschlossene Figur enthält, so ist die Richtigkeit der Annahme, welche wir in Bezug auf dieses machen müssen, um die Wahrheit unserer Behauptung einzusehen, von selbst klar.

2.

Da die Sätze I und II die zur Bestimmung von $I_1, I_2 \ldots I_n$

nöthige Anzahl von Gleichungen liefern müssen, so werden diese, nach dem, was wir eben bewiesen haben, die folgenden seyn:

$$\alpha_1^{1} w_1 I_1 + \alpha_2^{1} w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^{1} w_n I_n = \alpha_1^{1} E_1 + \alpha_2^{1} E_2 + \ldots + \alpha_n^{1} E_n$$

$$\alpha_1^{2} w_1 I_1 + \alpha_2^{2} w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^{2} w_n I_n = \alpha_1^{2} E_1 + \alpha_2^{2} E_2 + \ldots + \alpha_n^{2} E_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1^{\mu} w_1 I_1 + \alpha_2^{\mu} w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu} w_n I_n = \alpha_1^{\mu} E_1 + \alpha_2^{\mu} E_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu} E_n$$

$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0$$

$$\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1^{n} I_1 + \alpha_2^{n} I_2 + \ldots + \alpha_n^{n} I_n = 0$$

wo die Gröfsen α theils $+1$, theils -1, theils 0 sind, und wo μ dieselbe Bedeutung als vorher hat.

Es geht hieraus hervor, dafs der gemeinschaftliche Nenner der Gröfsen I, d. h. die Determinante dieser Gleichungen, eine homogene Function des μten Grades von w_1, w_2, $\ldots w_n$ ist, welche ein jedes einzelne w nur linear und aufser den w's nur Zahlen enthält. Dieses Resultat können wir auch auf die folgende Weise aussprechen: der gemeinschaftliche Nenner der I's ist die Summe der Combinationen von w_1, $w_2 \ldots w_n$ zu je μ Elementen, eine jede Combination mit einem Zahlencoëfficienten multiplicirt. Eben so sieht man ein, dafs der Zähler eines jeden I die Summe der Combinationen von w_1, w_2, $\ldots w_n$ zu je $\mu - 1$ ist, eine jede Combination mit einer linearen homogenen Function der Gröfsen E_1, E_2, $\ldots E_n$ multiplicirt, deren Coëfficienten Zahlen sind.

3.

Zur Bestimmung der Zahlencoëfficienten des Nenners und der Zähler der Gröfsen I führt die Bemerkung, dafs es einerlei ist, ob wir den Widerstand $w_\varkappa = \infty$ machen, oder ob wir den Draht $\varkappa$ durchschneiden oder entfernen; dafs also die Ausdrücke der I's durch die Substitution $w_\varkappa = \infty$ in die Auflösungen derjenigen Gleichungen übergehen müssen, die wir durch Anwendung der Sätze I und II auf das System von Drähten erhalten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn wir den Draht $\varkappa$ entfernen. $I_\varkappa$ selbst mufs für $w_\varkappa = \infty$ verschwinden.

Wir wollen die Zähler und Nenner der I's durch $w_1 . w_2 \ldots w_{\mu-1}$ dividiren, und dann $w_1 = \infty$, $w_2 = \infty \ldots w_{\mu-1} = \infty$ setzen; dadurch gehe I_λ in (I_λ) über; bezeichnen wir dann die Function der E's, welche im Zähler von I_λ mit

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{\varkappa \mu-1}$$

multiplicirt ist, durch $\overset{\lambda}{A}_{\varkappa 1,\, \varkappa 2,\, \ldots \varkappa \mu-1}$ und den Coëfficienten von $w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{\varkappa \mu}$ im Nenner durch $a_{\varkappa 1,\, \varkappa 2,\, \ldots \varkappa \mu}$, so haben wir:

$$(I_\lambda) = \frac{\overset{\lambda}{A}_{1,\, 2,\, \ldots \mu-1}}{a_{1,\, 2 \ldots \mu-1,\, \mu} . w_\mu + a_{1,\, 2 \ldots \mu-1,\, \mu+1}\, w_{\mu+1} + \ldots + a_{1,\, 2 \ldots \mu\ 1,\, n}\, w_n}$$

Der vorangeschickten Bemerkung zufolge ist, wenn λ unter $1, 2 \ldots \mu - 1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = 0,$$

und, wenn λ nicht unter $1, 2 \ldots \mu - 1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = I'_\lambda,$$

wo I'_λ die Intensität des Stromes bezeichnet, von dem der Draht λ durchflossen wird, wenn die Drähte $1, 2 \ldots \mu - 1$ entfernt sind.

Wir denken uns die Gleichungen aufgestellt, die sich durch Anwendung der Sätze I und II auf das übriggebliebene Drahtsystem zur Bestimmung von I'_μ, $I'_{\mu+1}$, $\ldots$ I'_n ergeben. Der Satz I liefere hier μ' von einander unabhängige Gleichungen; dann ist der gemeinschaftliche Nenner der Gröfsen I' eine Function des μ'ten Grades von w_μ, $w_{\mu+1}$, $\ldots w_n$, und die Zähler derselben sind Functionen des $\mu' - 1$ten Grades in Bezug auf dieselben Argumente. Wegen der Definition von μ ist μ' entweder $= 1$ oder > 1. Ist $\mu' > 1$, so müssen, damit die Gleichung

$(I_\lambda) = I'_\lambda$ bestehen kann, entweder Zähler und Nenner von I'_λ einen gemeinschaftlichen Factor des $\mu' - 1$ten Grades in Bezug auf $w_\mu, w_{\mu+1} \ldots$ haben, oder es mufs $(I_\lambda) = 0$ und $I'_\lambda = 0$ seyn, oder endlich, es mufs (I_λ) die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Stellt sich eine der Gröfsen (I) unter der Form $\frac{0}{0}$ dar, so müssen alle unter derselben erscheinen, da sie einen gemeinschaftlichen Nenner haben, und keine ∞ werden darf. Soll dieser Fall nicht eintreten, so müssen bei einem jeden I' Nenner und Zähler einen gemeinschaftlichen Factor des $\mu' - 1$ten Grades haben; und zwar müssen diese Factoren bei allen Gröfsen I' dieselben seyn. Dieses ist aber unmöglich, wie man auf die folgende Weise zeigen kann.

Wir nehmen an, es gäbe einen Factor der bezeichneten Art, welcher die Gröfse $w_\varkappa$ enthalte; $\varkappa$ mufs dann ein Draht seyn, welcher in einer geschlossenen Figur liegt, weil im anderen Falle $w_\varkappa$ in den Gleichungen für $I_\mu, I_{\mu''}, \ldots$ gar nicht vorkommen könnte. Da die Zähler und der Nenner der Gröfsen I' linear in Bezug auf ein jedes w sind, so erhalten wir für diese durch Forthebung jenes Factors Ausdrücke, welche frei von $w_\varkappa$ sind. Substituiren wir dieselben in eine der Gleichungen, welche $w_\varkappa I'_\varkappa$ enthält, so wird diese eine identische; durch partielle Differentiation derselben nach $w_\varkappa$ erhalten wir:

$$I'_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung kann aber unmöglich immer gelten; sollte dieses der Fall seyn, so müfste sie auch richtig bleiben, wenn man beliebig viele der Gröfsen w ∞ setzt, d. h. wenn man beliebig viele der Drähte entfernt; entfernt man aber so viele Drähte, dafs nur *eine* geschlossene Figur übrig bleibt, in welcher $\varkappa$ liegt, so kann unmöglich $I'_\varkappa$ für beliebige Werthe der Gröfse E verschwinden.

Wir sehen hiernach ein, dafs, wenn $\mu' > 1$ ist, sich $(I_\mu), (I_{\mu+1}) \ldots (I_n)$ unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen müssen;

oder, da wir $(I_1)=0$, $(I_2)=0\,..\,(I_{\mu-1})=0$ gefunden haben, dafs, wenn nach Fortnahme der Drähte 1, 2, .. $\mu-1$ mehr als eine geschlossene Figur bleibt, das Product

$$w_1 . w_2 \ldots w_{\varkappa-1}$$

weder in einem Zähler noch in dem Nenner der Gröfsen $I_1, I_2, \ldots I_n$ vorkommen kann.

4.

Jetzt wollen wir die Factoren zu bestimmen suchen, mit denen das Product $w_1 . w_2 \ldots w_{\mu-1}$ in den Zählern und in dem Nenner der I's multiplicirt vorkommt, wenn die Bedingung erfüllt wird, dafs nach Fortnahme von 1, 2 .. $\mu-1$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt.

Es enthalte die übrigbleibende Figur die Drähte: λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_\nu$; dann ist, falls λ nicht unter diesen vorkommt:

$$I'_\lambda = 0,$$

und falls λ unter denselben vorkommt:

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda 1} + E_{\lambda 2} + \ldots + E_{\lambda \nu}}{w_{\lambda 1} + w_{\lambda 2} + \ldots + w_{\lambda \nu}},$$

wobei $E_{\lambda 1}$, $E_{\lambda 1} \ldots$ nach der Richtung als positiv gerechnet sind, nach welcher I_λ als positiv gerechnet ist.

Der Nenner dieses Werthes kann sich von dem Nenner der Gröfse (I_λ), d. h. von dem Ausdrucke:

$$a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu} w_\mu + a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu+1} w_{\mu+1} + \ldots + a_{1,2,\ldots\mu-1,n} w_n$$

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden; daher müssen von den Gröfsen $a_{1,2\ldots\mu-1,\mu}$, $a_{1,2\ldots\mu-1\ldots\mu+1} \ldots$ alle verschwinden aufser:

$$a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda 1} \quad a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda 2} \quad \ldots \quad a_{1,2\ldots\mu-1,\lambda\nu}$$

und diese müssen einander gleich seyn. Wir schliefsen daraus, dafs der Coëfficient der Combination $w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{\varkappa \mu}$ im Nenner der Gröfsen I nur dann von 0 verschieden seyn kann, wenn durch Fortnahme der Drähte $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden; und, dafs alle Combinationen, welche diese Bedingung erfüllen, und welche $\mu-1$ gemeinschaftliche Factoren w enthalten, denselben Coëfficienten haben müssen.

Mit Hülfe hiervon läfst sich beweisen, dafs irgend zwei Combinationen

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{k\mu} \text{ und } w_{\varkappa' 1} . w_{\varkappa' 2} \ldots w_{\varkappa' \mu}$$

im Nenner der I's denselben Coëfficienten haben müssen, wenn durch Entfernung sowohl der Drähte $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ als der Drähte $\varkappa'_1$, $\varkappa'_2$, $\ldots \varkappa'_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden.

Um diesen Beweis führen zu können, schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus:

Durch Fortnahme der Drähte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\ldots \varkappa_\mu$ mögen alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann mufs ein jeder dieser Drähte wenigstens in einer geschlossenen Figur vorkommen.

In einer jeden geschlossenen Figur mufs aber auch wenigstens einer jener Drähte vorkommen; wissen wir also von dem Drahte $\varkappa'$, dafs er in einer geschlossenen Figur liegt, so mufs dieser wenigstens mit einem der Drähte $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ in derselben geschlossenen Figur liegen.

Ferner mufs ein jeder der Drähte $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\ldots \varkappa_\mu$ in einer geschlossenen Figur vorkommen, in der die $\mu - 1$ anderen Drähte nicht vorkommen, $\varkappa_\mu$ z. B. in derjenigen, welche nach Fortnahme von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\ldots \varkappa_{\mu-1}$ übrig bleibt, und welche wir durch $f_{\varkappa\mu}$ bezeichnen wollen. Liegt in $f_{\varkappa\mu}$ auch der Draht $\varkappa'_\mu$, so werden auch durch Fortnahme von $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \ldots \varkappa_{\mu-1}$, $\varkappa'_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört. Mit Hülfe dieser Bemerkung sieht man leicht ein, dafs, wenn wir irgend eine geschlossene Figur, f, auswählen, sich immer $\mu - 1$ Drähte von der Art finden lassen, dafs nach Fortnahme derselben f als einzige geschlossene Figur übrig bleibt. Kommen nämlich in f von den Drähten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\ldots \varkappa_\mu$ etwa $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ vor, und ist $\varkappa'_2$ ein Draht, der in $f_{\varkappa 2}$, aber nicht in f, und $\varkappa'_3$ ein Draht, der in $f_{\varkappa 3}$, aber auch nicht in f vorkommt, so sind $\varkappa'_2$, $\varkappa'_3$, $\varkappa_4 \ldots \varkappa_\mu$ Drähte der verlangten Art.

Jenen Beweis wollen wir jetzt auf die Weise führen, dafs wir annehmen, die Coëfficienten zweier Combinationen der bezeichneten Art seyen einander gleich, wenn diese ν gemeinschaftliche Factoren w haben, und beweisen, dafs dann auch die Coëfficienten zweier Combinationen, welche nur $\nu - 1$ gemeinschaftliche Factoren haben, einander gleich seyn müssen. Ist uns dieses gelungen, so werden wir die Wahrheit der aufgestellten Behauptung dargethan haben.

Die Art des Beweises bleibt dieselbe, welchen Werth für ν wir auch setzen; wir wollen denselben daher nur für einen Werth von ν, für $\nu = 3$ durchführen. Wir wollen also beweisen, dafs die beiden Combinationen:

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa 3} \ldots w_{\varkappa \mu} \text{ und } w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa' 3} \ldots w_{\varkappa' \mu}$$

denselben Coëfficienten haben müssen.

In dem Systeme von Drähten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn man $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ entfernt, können alle geschlossenen Figuren nicht durch die Fortnahme von weniger als $\mu - 2$ Drähten zerstört werden; sie werden zerstört durch die Fortnahme von $\varkappa_3, \varkappa_4 \ldots \varkappa_\mu$, und durch die Fortnahme von $\varkappa'_3, \varkappa'_4 \ldots \varkappa'_\mu$; hieraus folgt, dafs $\varkappa'_3$ wenigstens mit einem der Drähte $\varkappa_3, \varkappa_4 \ldots \varkappa_\mu$, wir nehmen an mit $\varkappa_3$, in derselben geschlossenen Figur liegt; diese bleibe als einzige übrig, wenn man $\varkappa''_4, \varkappa''_5 \ldots \varkappa''_\mu$ entfernt; dieselbe bleibt dann von dem ursprünglichen Systeme als einzige übrig, wenn man $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa''_4, \varkappa''_5 \ldots \varkappa''_\mu$ entfernt. Es folgt hieraus, dafs die beiden Combinationen:

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa 3} . w_{\varkappa'' 4} . w_{\varkappa'' 5} \ldots w_{\varkappa'' \mu}$$

und
$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa' 3} . w_{\varkappa'' 4} . w_{\varkappa'' 5} \ldots w_{\varkappa'' \mu},$$

welche $\mu - 1$ gemeinschaftliche Factoren w haben, denselben Coëfficienten haben müssen. Unserer Annahme zufolge haben aber auch die Combinationen:

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa 3} . w_{\varkappa 4} \ldots w_{\varkappa \mu} \text{ und } w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa 3} . w_{\varkappa'' 4} \ldots w_{\varkappa'' \mu}$$

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa' 3} . w_{\varkappa' 4} \ldots w_{\varkappa' \mu} \text{ und } w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa' 3} . w_{\varkappa'' 4} \ldots w_{\varkappa'' \mu}$$

paarweise denselben Coëfficienten; es sind also auch die Coëfficienten von

$$w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa 3} \ldots w_{\varkappa \mu} \text{ und } w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} . w_{\varkappa' 3} \ldots w_{\varkappa' \mu}$$

einander gleich.

Wir haben hierdurch bewiesen, dafs der gemeinschaftliche Nenner der I's die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2, \ldots w_n$ zu je μ Elementen, $w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{\varkappa \mu}$ ist, welche die Eigenschaft haben, dafs nach Fortnahme der Drähte $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \ldots \varkappa_\mu$ keine geschlossene Figur übrig bleibt; diese Summe mit einem Zahlencoëfficienten multiplicirt. Den Zahlencoëfficienten können wir $=1$ setzen, wenn wir die Zähler der I's darnach bestimmen.

Diese Zähler lassen sich jetzt sehr leicht finden. Aus den Gleichungen nämlich:

$$(I_\lambda)=0 \text{ und } (I_\lambda)=I'_\lambda,$$

von denen die erste gilt, wenn $\lambda \leqq \mu-1$, die zweite, wenn $\lambda > \mu-1$ ist, folgt:

$$\overset{\lambda}{A}_{1,2,\ldots\mu-1}=E_{\lambda 1}+E_{\lambda 2}+\ldots+E_{\lambda\nu}$$

für den Fall, dafs λ unter λ_1, λ_2, .. λ_ν vorkommt, und

$$\overset{\lambda}{A}_{1,2,\ldots\mu-1}=0$$

für den entgegengesetzten Fall.

Es ist also der Coëfficient des Gliedes $w_1.w_2..w_{\mu-1}$ — von welchem wir schon früher gezeigt haben, dafs er nur dann von 0 verschieden seyn kann, wenn nach Fortnahme von 1, 2, .. $\mu-1$ eine einzige geschlossene Figur übrig bleibt — $=0$, wenn in dieser Figur λ nicht vorkommt; kommt λ in ihr vor, so ist er $=$ der Summe der elektromotorischen Kräfte, die sich auf derselben befinden; diese nach der Richtung positiv gerechnet, nach welcher I_λ als positiv gerechnet ist.

5.

Wir müssen jetzt noch, um unseren Satz, wie wir ihn ausgesprochen, bewiesen zu haben, zeigen, dafs $\mu=n-m+1$ ist. Diese Behauptung gilt nur, wenn das gegebene Drahtsystem nicht in mehrere, völlig von einander getrennte, zerfällt, während die bis jetzt angestellten Betrachtungen eine solche Voraussetzung nicht erforderten.

Wie wir gesehen haben, ist μ die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche sich mit Hülfe des Satzes I ableiten lassen; die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche der Satz II liefert, mufs daher $n-\mu$ seyn. Nun läfst es sich aber zeigen, dafs, unter jener Voraussetzung, diese Anzahl $m-1$ ist; woraus dann $\mu=n-m+1$ folgt.

Mehr als $m-1$ von einander unabhängige Gleichungen lassen sich mit Hülfe des Satzes II nicht ableiten; denn wenden wir denselben auf alle m Kreuzungspunkte an, so kommt in den dadurch entstehenden Gleichungen ein jedes I zwei Mal vor, einmal mit dem Coëfficienten $+1$, das andere Mal mit dem Coëfficienten -1; die Summe sämmtlicher Gleichungen giebt also die identische Gleichung $0=0$. Die Gleichungen, welche man durch Anwendung jenes Satzes auf $m-1$ beliebige Kreuzungspunkte erhält, sind aber von einander unabhängig, denn sie haben die Eigenschaft, dafs, wenn wir beliebige und beliebig viele unter ihnen auswählen, in diesen eine oder einige der Unbekannten nur einmal vorkommen. Nennen wir nämlich die Kreuzungspunkte $1, 2, \ldots m$, einen Draht, durch welchen 2 von ihnen, $\varkappa$ und λ, mit einander verbunden sind $(\varkappa, \lambda)$, so kommt in den Gleichungen, welche durch Betrachtung der Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$ abgeleitet sind, wenn einer derselben, etwa $\varkappa_1$, aufser mit Punkten, die unter $\varkappa_2, \ldots \varkappa_\nu$ vorkommen, noch mit einem anderen, λ, verbunden ist, die Unbekannte $I_{(\varkappa_1, \lambda)}$ nur einmal vor. Einer der Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ mufs aber, aufser mit anderen derselben, noch mit einem Punkte λ verbunden seyn, wenn die Drähte, welche die Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ mit einander verbinden, nicht ein in sich abgeschlossenes System bilden.

Es sey mir erlaubt, noch einige Bemerkungen zu dem eben bewiesenen Satze zu machen.

Ordnet man die Glieder des Zählers von I_λ nach den Gröfsen $E_1, E_2 \ldots E_n$, so wird der Coëfficient von $E_\varkappa$ die Summe der, theils positiven, theils negativen, Combinationen von $w_1, w_2, \ldots w_n$ zu je $\mu-1$, welche im Nenner der I's sowohl mit w_λ als mit $w_\varkappa$ multiplicirt vorkommen; es sind dieses ja gerade die Combinationen $w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{k\mu-1}$, welche die Eigenschaft haben, dafs nach Fortnahme der Drähte $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_{\mu-1}$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt, und dafs in dieser sowohl λ als $\varkappa$ vorkommt; positiv ist $w_{\varkappa 1} . w_{\varkappa 2} \ldots w_{k\mu-1}$ zu nehmen, wenn in der übrigbleibenden Figur die positive Richtung von I_λ mit der Richtung von $E_\varkappa$ zusammenfällt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dafs, wenn wir aus einem beliebigen Systeme zwei Drähte auswählen, die Intensität des Stromes, welcher in dem einen hervorgebracht wird durch eine elektromotorische Kraft in dem zweiten, gerade dieselbe ist als die Intensität des Stromes, welcher in dem zweiten hervorgebracht wird durch eine eben so grofse elektromotorische Kraft in dem ersten.

Die Bedingung, welche wir für das Vorkommen einer Combination in dem Nenner der I's gefunden haben, läfst sich, wie man leicht einsieht, auch auf die folgende Weise aussprechen: die Combination $w_{\varkappa 1}.w_{\varkappa 2}\ldots w_{\varkappa \mu}$ kommt vor, wenn die Gleichungen, welche der Satz I liefert, unabhängig in Bezug auf $I_{\varkappa 1}$, $I_{\varkappa 2}\ldots$, $I_{\varkappa \mu}$ sind; es läfst sich zeigen, dafs diese Bedingung mit der übereinkommt, dafs es zwischen $I_{\varkappa 1}$, $I_{\varkappa 2}\ldots$, $I_{\varkappa \mu}$, oder einigen dieser Gröfsen, keine Gleichung giebt, welche aus den Gleichungen, die durch Anwendung des Satzes II entstanden sind, abgeleitet werden kann. Diese Bemerkung wird es häufig leichter machen, die Combinationen aufzustellen, welche im Nenner der I's fehlen. Stofsen z. B. die Drähte 1, 2, 3 in einem Punkte zusammen, 3, 4, 5 in einem zweiten, 5, 6, 7 in einem dritten (wie in Fig. 4, Taf. V), so fehlen alle Combinationen, welche:

$$w_1.w_2.w_3 \quad , \quad w_3.w_4.w_5 \quad , \quad w_5.w_6.w_7$$
$$w_1.w_2.w_4.w_5 \quad , \quad w_3.w_4.w_6.w_7$$
$$w_1.w_2.w_4.w_6.w_7$$

enthalten.

Der Nenner der I's bei der, in der Figur 5, Taf. V, dargestellten, Combination der Drähte, ist hiernach die Summe aller Combinationen von w_1, $w_2\ldots w_6$ zu je drei Elementen, mit Ausnahme der folgenden:

$$w_1.w_2.w_4 \;,\; w_1.w_3.w_5 \;,\; w_2.w_3.w_6 \;,\; w_4.w_5.w_6.$$