

---

1. *Ueber die Fortpflanzung  
elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes;  
von A. Sommerfeld.*

---

§ 1. Historische Vorbemerkungen.

Das Problem der Fortpflanzung Hertz'scher Wellen längs eines Drahtes ist ohne Frage für die moderne Physik so fundamental, dass eine exacte mathematische Behandlung desselben auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen erwünscht sein dürfte. Die Lösung lässt sich ohne Aufwand eines gar zu complicirten mathematischen Apparates geben; ihre Hauptschwierigkeit besteht in der genauen Discussion einer transcendenten Gleichung, deren Wurzel sowohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie die Dämpfung der Welle in dem Drahte liefert.

Zum ersten Male ist unser Problem bekanntlich von Hertz<sup>1)</sup> behandelt worden. Indessen kann die Hertz'sche Behandlung insofern nicht befriedigen, als hier der Draht unendlich dünn genommen wird und dementsprechend die Bedingungen für die Oberfläche des Drahtes in Fortfall kommen. Damit hängt es zusammen, dass bei Hertz die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle zunächst ganz unbestimmt bleibt, und erst mit Zuhülfenahme der Annahme, dass die Kraftlinien auf der Oberfläche des Drahtes senkrecht stehen sollen, gleich der Lichtgeschwindigkeit gefunden wird. Eigenthümlicherweise trifft aber diese Annahme gerade in dem Grenzfall, wo man den Draht verschwindend dünn wählt, wie wir sehen werden, durchaus nicht zu.

Sodann hat H. Poincaré<sup>2)</sup> die Hertz'sche Behandlung dadurch verbessert, dass er die Dicke des Drahtes berücksichtigt. Dabei wird aber an der Annahme festgehalten, dass

---

1) H. Hertz, Ges. Werke 2. Abh. 9. 1888. Vgl. insbesondere p. 165 ff.

2) H. Poincaré, Compt. rend. 120, p. 1046 u. 1229. 1892.

die Kraftlinien auf der Drahtoberfläche senkrecht stehen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von vornherein der Lichtgeschwindigkeit gleichgesetzt. Im Folgenden wird sich zeigen, dass diese Annahme unter normalen Versuchsbedingungen im allgemeinen zwar sehr nahezu, aber niemals genau erfüllt ist. Auf der anderen Seite werden wir aber auch experimentell realisirbare Fälle angeben können, in denen die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit bis zum vierten Theile der letzteren ansteigt.

Sehr viel vollständiger und befriedigender ist die Theorie der Drahtwellen von J. J. Thomson<sup>1)</sup> entwickelt worden. Die folgenden Betrachtungen, auf die ich übrigens ursprünglich ohne Kenntniss der betreffenden Theile des Thomson'schen Buches geführt worden bin, bieten, wie man sehen wird, mit der Thomson'schen Theorie zahlreiche Berührungspunkte dar.

Thomson berücksichtigt<sup>2)</sup> die Dicke des Drahtes und die Oberflächenbedingungen ganz so, wie es hier geschehen wird. Auch bestimmt er Fortpflanzung und Dämpfung der Welle durch eine transcendente Gleichung. Dabei denkt er sich das den Draht umgebende Dielektricum nach aussen hin durch einen mit dem Draht coaxialen leitenden Cylinder abgeschlossen, welcher bei den verschiedenen hierher gehörigen Problemen, der gewöhnlichen Telegraphie, der Kabeltelegraphie, den Hertz'schen Drahtwellen, bez. der Erde, dem umgebenden Wasser und den Wänden des Laboratoriums entsprechen würde. So wünschenswerth die Berücksichtigung dieser Einflüsse aber an sich sein mag, so werden dadurch die Bedingungen der Aufgabe bedeutend complicirt. Die Folge ist, dass Thomson bei der Discussion seiner transcendenten Gleichung Vernachlässigungen zulassen muss, bei denen die hier zu entwickelnden Details verloren gehen. Der Einfluss des Drahtmaterialies auf Fortpflanzung und Dämpfung fällt dadurch in den Schlussformeln von Thomson<sup>3)</sup> vollständig heraus, sobald man den Radius des äusseren Cylinders unendlich gross werden lässt; gleichzeitig geht die Geschwindigkeit der Fortpflanzung direct

---

1) J. J. Thomson, Notes on recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893.

2) J. J. Thomson, l. c. art. 259 ff.

3) J. J. Thomson, l. c. art. 267.

in die Lichtgeschwindigkeit über. Bei der späteren speciellen Behandlung der Hertz'schen Drahtwellen<sup>1)</sup> wird die Fortpflanzung ohne weiteres gleich der Lichtgeschwindigkeit gesetzt.

Demgegenüber erschien es uns interessant, die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit und den Einfluss des Drahtmaterials in dem einfachen Falle, wo ein äusserer Leiter nicht existirt, numerisch zu bestimmen. Der Einfluss des äusseren Leiters (d. h. bei den Hertz'schen Versuchen der Laboratoriumswände), welchen wir hier vernachlässigen, wird übrigens um so kleiner, je schnellere Schwingungen und je kleinere Wellenlängen man anwendet.

Die folgende Untersuchung ist nach dem eben Gesagten geeignet, die Thomson'schen Entwicklungen zu ergänzen, da bei uns der Einfluss des Drahtmaterials vollständig berücksichtigt, der des äusseren Leiters vernachlässigt wird, bei Thomson dagegen der äussere Leiter in Rechnung gesetzt, bei der Rechnung aber Vernachlässigungen gemacht werden, welche den Einfluss des Drahtmaterials zum Verschwinden bringen.

Auf die zahlreichen Arbeiten, welche zum Theil vom Boden der alten Theorie aus den Erscheinungen der Drahtwellen näherungsweise gerecht zu werden suchen, soll hier nicht ausführlich eingegangen werden. Wir erwähnen nur eine Arbeit von Lord Rayleigh<sup>2)</sup>, in welcher die Abnahme der Kraft nach dem Inneren des Drahtes durch eine sehr geistreiche Anwendung allgemeiner mechanischer Principien richtig ermittelt wird, ferner eine Arbeit von Stefan<sup>3)</sup>, in der das Gleiche durch Betrachtung von Inductionsströmen erreicht wird, sowie eine Abhandlung von Drude<sup>4)</sup>, in welcher die elektrischen Schwingungen in zwei parallelen Drähten untersucht werden. Der Standpunkt in diesen Arbeiten unterscheidet sich wesentlich von dem hier eingenommenen, indem dort mit abgeleiteten Begriffen, wie Selbstinduction, Gesamtwiderstand eines Drahtstückes, Gesamtstromstärke im Draht, gerechnet wird, welche von stationären oder langsam veränderlichen Strömen hergenommen sind und in der reinen Maxwell'schen

---

1) J. J. Thomson, l. c. art. 379.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **21**. p. 369. 1886.

3) Stefan, Wied. Ann. **41**. p. 400. 1890.

4) P. Drude, Wied. Ann. **60**. p. 1. 1897.

Theorie ursprünglich keinen Platz haben. Selbstverständlich ist unsere Meinung nicht die, dass solche angenäherten Behandlungsweisen zu verwerfen sind. Im Gegentheil halten wir sie für ebenso nützlich wie nothwendig, nützlich, weil sie in vielen Fällen zu dem richtigen Resultat führen, nothwendig, weil der exacten Behandlung der Probleme meist unübersteigliche Hindernisse im Wege stehen. Andererseits wird aber die exacte Behandlung einzelner besonders einfach gewählter Probleme auch für die angenäherte Behandlung complicirterer Dinge von wohlthätigem Einflusse sein.

Der Grund, weshalb man überhaupt in den meisten Fällen mit den Begriffen der alten Theorie zu näherungsweise denselben Resultaten kommt, wie mit den Vorstellungen der Maxwell'schen Theorie, bedarf dabei sehr der Aufklärung. Hier liegen offenbar Fragen von ganz ausserordentlichem mathematischen Interesse verborgen.

## § 2. Die Differentialgleichungen des Problems.

Verstehen wir unter  $\mathfrak{E}$  den Vector der elektrischen, unter  $\mathfrak{M}$  den der magnetischen Kraft, so können wir die Maxwell'schen Gleichungen nach Hertz und Heaviside folgendermaassen schreiben:

$$(1) \quad \varepsilon A \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda A \mathfrak{E} = -\text{curl } \mathfrak{M}, \quad \mu A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \text{curl } \mathfrak{E}.$$

Hier bedeuten  $\varepsilon$  und  $\mu$  die Dielektricitäts- und die Magnetisirungsconstante,  $A$  die reciproke Lichtgeschwindigkeit,  $\lambda$  die elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit. Unter curl verstehen wir das bekannte Vectorsymbol, welches sich unabhängig vom Coordinatensystem am besten folgendermaassen erklären lässt: Denkt man sich eine Flüssigkeitsbewegung hergestellt, welche in jedem Punkte des Raumes nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit  $\mathfrak{E}$  aufweist, so bedeutet curl  $\mathfrak{E}$  nach Grösse und Richtung die doppelte zugehörige Drehgeschwindigkeit des einzelnen Raumtheilchens. Analytisch findet man bekanntlich die Componente des Vectors curl  $\mathfrak{E}$  in einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Richtung am einfachsten dadurch, dass man den betreffenden Punkt in einer senkrecht zu der betreffenden Richtung gelegten Ebene mit einer geschlossenen Curve umgiebt und das Linienintegral des Vectors  $\mathfrak{E}$  über diese

Curve im Sinne des Uhrzeigers erstreckt. Die fragliche Componente des Curls wird dann gleich dem Grenzwerthe, welchem das Verhältniss des Linienintegrals zu dem von der Curve umschlossenen Flächeninhalte zustrebt, wenn man die Curve auf den gegebenen Punkt zusammenzieht.

Denkt man sich auf der rechten Seite der Gleichungen (1) die angegebenen Integralwerthe für  $\text{curl } \mathcal{E}$  und  $\text{curl } \mathcal{M}$  eingetragen, so hat man eine vom Coordinatensystem unabhängige Form der Maxwell'schen Gleichungen. Der Uebergang zu besonderen Coordinatensystemen ist darauf Sache einer einfachen Rechnung, wobei es bequem ist, bei der Berechnung des Curls die Umläufe aus Stücken solcher Linien bestehen zu lassen, längs denen zwei der betreffenden Coordinaten constant sind.

Um auf die besonderen Verhältnisse unserer Aufgabe zu kommen, setzen wir voraus, dass es sich um einen einzigen, beiderseits unendlich langen Draht von überall gleichem kreisförmigen Querschnitt mit geradliniger Axe handle. Alsdann ist es offenbar angezeigt, Polarcoordinaten  $z, r, \varphi$  zu benutzen.  $r$  bedeute den kürzesten Abstand des Raumpunktes  $P = (z, r, \varphi)$  von der Axe des Drahtes,  $z$  seinen Abstand von einer beliebigen, senkrecht zur Axe gelegten Ebene  $z=0$ ,  $\varphi$  ein Azimuth, welches, von der positiven  $z$ -Axe gesehen, entgegen dem Sinne des Uhrzeigers um die Drahtaxe gezählt wird. Die Componenten der elektrischen Kraft in Richtung der Coordinaten  $z, r, \varphi$  (d. h. ihre senkrechten Projectionen auf die Richtungen der wachsenden  $z, r, \varphi$ ) mögen  $Z, R, \Phi$ , die der magnetischen Kraft  $\mathcal{Z}, \mathcal{P}, \Psi$  heissen. Für diese Componenten gewinnt man auf dem angegebenen Wege leicht die folgenden Gleichungen in Polarcoordinaten<sup>1)</sup>:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon A \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\lambda AZ = \frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}, \\ \varepsilon A \frac{\partial R}{\partial t} + 4\pi\lambda AR = \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ \varepsilon A \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 4\pi\lambda A \Phi = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}, \end{array} \right.$$

1) Wegen der allgemeineren Aufgabe der Umrechnung der Maxwell'schen Gleichungen in beliebige orthogonale Coordinaten vgl. M. Abraham, Die elektrischen Schwingungen um einen stabförmigen Leiter § 1. Berlin 1897 oder Wied. Ann. 66. p. 438. 1898.

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu A \frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \varphi}, \\ \mu A \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ \mu A \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial Z}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Wir nehmen ferner an, dass der gesammte elektrodynamische Zustand rund um den Draht symmetrisch vertheilt ist und dass die elektrische Kraft überall in die durch die Drahtaxe gelegte Meridianebene falle. Der Zeit nach setzen wir den Zustand als rein periodisch voraus. Alsdann ist  $\partial / \partial \varphi = 0$  und  $\Phi = 0$ ; gleichzeitig folgt aus dem identischen Verschwinden irgend eines Differentialquotienten  $\partial / \partial t$ , dass die betr. Grösse selbst identisch verschwindet. Darauf betrachten wir die beiden ersten Gleichungen des Tripels (2'). Diese geben  $\partial Z / \partial t = 0$  und  $\partial P / \partial t = 0$ , woraus  $Z = 0$ ,  $P = 0$  zu schliessen ist, und es wird die letzte Gleichung des Tripels (2) identisch befriedigt.

Somit bleiben nur die drei zu einander senkrechten Componenten  $Z$ ,  $R$ , und  $\Psi$  übrig, zwischen denen die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon A \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\lambda AZ = \frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi}{\partial r}, \\ \epsilon A \frac{\partial R}{\partial t} + 4\pi\lambda AR = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \\ \mu A \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial Z}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Es ist nun bemerkenswerth, dass man im vorliegenden Falle — ähnlich wie in den Problemen der Elektrostatik — die Kraftvectoren aus einer einzigen scalaren Function  $\Pi$  durch Differentiation herleiten kann. Dies Resultat ist in der oben genannten Arbeit von Hertz angegeben. Wir legen uns davon folgendermaassen Rechenschaft ab:

Wir setzen zunächst, indem wir unter  $\Pi$  eine neue unbekannte Function verstehen:

$$(4) \quad \Psi = \epsilon A \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t} + 4\pi\lambda A \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Dann lassen sich die beiden ersten Gleichungen (3) so schreiben:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon A \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\lambda A\right) Z &= \left(\varepsilon A \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\lambda A\right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r}, \\ \left(\varepsilon A \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\lambda A\right) R &= - \left(\varepsilon A \frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\lambda A\right) \frac{\partial^2 II}{\partial r \partial z}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind ersichtlich befriedigt, wenn wir

$$(5) \quad Z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r}$$

und

$$(6) \quad R = - \frac{\partial^2 II}{\partial r \partial z}$$

wählen. Darauf setzen wir die Ausdrücke (4), (5) und (6) in die dritte der Gleichungen (3) ein und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \varepsilon \mu A^2 \frac{\partial^2 II}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial II}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r} + \frac{\partial^2 II}{\partial z^2} \right),$$

wobei die elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit  $C = \lambda A^2$  an Stelle der elektrostatisch gemessenen eingeführt ist, damit der Buchstabe  $\lambda$  im Folgenden für die Bezeichnung von Wellenlängen verfügbar wird.

Letzterer Gleichung genügen wir dadurch, dass wir  $II$  der Bedingung unterwerfen:

$$(7) \quad \varepsilon \mu A^2 \frac{\partial^2 II}{\partial t^2} + 4\pi\mu C \frac{\partial II}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r} + \frac{\partial^2 II}{\partial z^2},$$

in welcher die rechte Seite, nebenbei bemerkt, gleich dem bekannten zweiten Differentialparameter  $\Delta II$  ist. *Bestimmen wir also  $II$  als Lösung der Differentialgleichung (7), so erhalten wir in den Ausdrücken (4), (5) und (6) solche Werthe unserer drei Kraftkomponenten, welche die Maxwell'schen Gleichungen (3) befriedigen.*

### § 3. Abhängigkeit des Zustandes von der Zeit und von den Coordinaten $z$ und $r$ .

Der Zustand wurde bereits oben der Zeit nach als *rein periodisch* vorausgesetzt. Die Periode sei  $\tau$ . Wir wollen jetzt die Annahme hinzufügen, dass er auch *rein harmonisch* verlaufe, d. h. durch eine einzelne Exponentialfunction von der Form  $e^{2\pi i t / \tau}$  gegeben sei.

Beide Annahmen entsprechen allerdings nicht genau den wirklichen Verhältnissen. Denn einerseits weiss man, dass die successiven Schwingungen je nach der Form des Erregers

schneller oder langsamer an Stärke abnehmen, andererseits wird die Gestalt der einzelnen Schwingung nicht gerade mit der Sinuscurve übereinstimmen.

Es liegt nun vielleicht nahe, die Abhängigkeit von der Zeit nicht als reine, sondern als gedämpfte Sinusschwingung anzusetzen, wie es thatsächlich in vielen Arbeiten geschieht. Dies hat aber sein Missliches. Verfolgt man nämlich eine gedämpfte Sinusschwingung zeitlich weit genug rückwärts, so wachsen die Amplituden schliesslich über alle Grenzen, was physikalisch keinen Sinn hat. Man sage nicht, dass man den Zustand nur von einem Zeitpunkte an betrachtet, an welchem die Amplitude bereits nicht übermässig gross ist. Thatsächlich setzt man in der Formel den Zustand der gedämpften Sinuswelle für alle Zeiten gültig voraus, so dass sich auch die bei negativem  $t$  unendlich wachsenden Amplituden geltend machen und die Ausbreitung der Welle beeinflussen würden. Deshalb halten wir lieber an der rein periodischen Abhängigkeit fest, welche zwar nicht experimentell zutreffend, aber auch nicht physikalisch widersinnig ist.

Das Ideale wäre natürlich die Abhängigkeit von der Zeit folgendermaassen festzulegen: Bis zu einem gewissen Zeitpunkt herrscht Ruhe, von da ab setzt eine gedämpfte Sinuswelle ein. Indessen würde die Behandlung dieses complicirten, nicht durch eine einheitliche Formel bestimmten Abhängigkeitsgesetzes höchst unübersichtlich werden.

Was die Abweichung der einzelnen Schwingung von der rein harmonischen Sinuswelle betrifft, so ist diese unbedenklich. Wir können ja nach Fourier durch Uebereinanderlagerung von rein harmonischen Schwingungen der Periode  $\tau$ ,  $\frac{1}{2}\tau$ ,  $\frac{1}{3}\tau$ ... jede beliebige Curve, also auch die im Experiment stattfindende, während des Intervalls  $\tau$  genau wiedergeben. Jede dieser Schwingungen hätten wir dann nach der im Folgenden anzugebenden Methode gesondert zu behandeln. Diese Zerlegung liegt durchaus in der Natur der Sache. Wie wir nämlich sehen werden, ergiebt sich je nach der Länge der Schwingungsperiode ein etwas verschiedener Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Von einer einheitlichen Grösse der Fortpflanzung kann man bei einer nicht harmonischen Schwingung überhaupt nicht reden.



Wir bemerken noch, dass die *zeitliche* Dämpfung, von der zuletzt die Rede war, nicht verwechselt werden darf mit der *örtlichen* Dämpfung, der Amplitudenverminderung beim Fortschreiten der Welle längs des Drahtes, die später wichtig werden wird.

Sodann specialisiren wir auch die Abhängigkeit des Zustandes von der Coordinate  $z$ : Wir nehmen an, dass auch diese durch eine einfache Exponentialfunction in der Form  $e^{icz}$  dargestellt werde. Diese Annahme ist natürlich an sich willkürlich und kann, wenn überhaupt, nur durch den Erfolg gerechtfertigt werden, nämlich so, dass wir zeigen: Wir können mit dieser speciellen Annahme allen Bedingungen des Problems gerecht werden. Gleichzeitig werden wir aber, wenn dieses möglich ist, sicher sein, mit dieser einfachsten Annahme den einfachsten und physikalisch wichtigsten Zustand zu treffen.

Die soeben eingeführte Constante  $c$  werden wir zunächst (vgl. § 5) als reell ansehen. In diesem Falle setzen wir

$$(8) \quad c = \frac{2\pi}{\lambda},$$

sodass  $\lambda$  die *Wellenlänge der Schwingung*, d. h. den Abstand zweier Punkte bedeutet, welche zu gleicher Zeit gleiche Amplitude und Phase der Schwingung besitzen. Nachdem wir uns dann überzeugt haben werden, dass ein reelles  $c$  zwar formal mathematisch zulässig, aber physikalisch bedeutungslos ist, werden wir  $c$  als complexe Grösse annehmen und

$$(8') \quad c = \frac{2\pi}{\lambda} - i\kappa$$

setzen.  $\lambda$  kann dann immer noch als *Wellenlänge* angesprochen werden, während  $\kappa$  die Stärke der (örtlichen) *Dämpfung* beim Fortschreiten der Welle längs des Drahtes misst.

Für die Function  $II$  ergiebt sich auf solche Weise (unter  $\Re$  den reellen Theil des dahinter stehenden complexen Ausdrucks verstanden) der folgende Ansatz:

$$(9) \quad II = \Re(e^{2\pi it/\tau + icz} u);$$

die Function  $u$  hängt dann nur noch von der einen Variablen  $r$  ab. Die Art dieser Abhängigkeit ist nun festzustellen.

Aus der Differentialgleichung (7) ergibt sich für  $u$  folgende Gleichung:

$$\left\{ -\varepsilon\mu A^2 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + 4\pi\mu C \frac{2\pi i}{\tau} \right\} u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - c^2 u.$$

Hierfür können wir einfacher schreiben:

$$(10) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + (k^2 - c^2) u = 0,$$

wenn wir die Abkürzung einführen:

$$(11) \quad k^2 = \varepsilon\mu A^2 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - 4\pi\mu C \frac{2\pi i}{\tau}.$$

Die Constante  $k^2$  besitzt im Innern des Drahtes einen anderen Werth, wie in der umgebenden Luft, in welcher  $\varepsilon = \mu = 1$  und  $C = 0$  ist. Wir wollen die umgebende Luft als das Medium I von dem Drahte als dem Medium II unterscheiden und wollen entsprechend den Werth von  $k^2$  in I und II mit  $k_1^2$  und  $k_2^2$  bezeichnen. Diese beiden Constanten charakterisiren das elektrodynamische Verhalten der Medien I und II vollkommen.

Ferner werden wir fürs Erste die Möglichkeit offen lassen müssen, dass auch die Constante  $c$  in beiden Medien verschiedene Werthe ( $c_1$  und  $c_2$ ) haben könne. Endlich werden wir für  $u$  in I und II zwei verschiedene Ausdrücke erhalten, welche  $u_1$  und  $u_2$  heissen sollen.

Der Zusammenhang zwischen  $u_1$  und  $u_2$  wird durch die Grenzbedingungen an der Drahtoberfläche vermittelt, welche bekanntlich besagen, dass die in die Grenzfläche fallenden Componenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{M}$  auf beiden Seiten gleich sein müssen. Es sind dieses die Componenten  $Z$  und  $\Psi$ . Wir haben also für die Oberfläche des Drahtes, wo  $r = \rho$  sein möge, zu verlangen:

$$Z_1 = Z_2, \quad \Psi_1 = \Psi_2.$$

Nun folgt aber aus den Werthen (4), (5) und (6) unserer drei Kraftcomponenten, wenn wir hier den Ausdruck (9) für  $H$  eintragen:

$$(12) \quad \begin{cases} Z = \Re e \left( e^{2\pi i t/\tau + i c z} (c^2 - k^2) u \right), \\ R = - \Re e \left( e^{2\pi i t/\tau + i c z} i c \frac{du}{dr} \right), \\ \Psi = \Re e \left( e^{2\pi i t/\tau + i c z} \left( \varepsilon A \frac{2\pi i}{\tau} + \frac{4\pi C}{A} \right) \frac{du}{dr} \right) \\ = \Re e \left( e^{2\pi i t/\tau + i c z} \frac{i \tau k^2}{2\pi \mu A} \frac{du}{dr} \right). \end{cases}$$

Mithin liefern die vorher genannten Oberflächenbedingungen für  $r = \rho$ :

$$e^{i c_1 z} (k_1^2 - c_1^2) u_1 = e^{i c_2 z} (k_2^2 - c_2^2) u_2$$

und

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{d u_1}{d r} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{d u_2}{d r}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen schliessen wir leicht  $c_1 = c_2$ . Da nämlich in

$$e^{i (c_1 - c_2) z} = \frac{(k_2^2 - c_2^2) u_2}{(k_1^2 - c_1^2) u_1}$$

die linke Seite nur von  $z$ , die rechte nur von  $r$  abhängt, so müssen sich beide Seiten auf eine Constante reduciren, welche nur die Einheit sein kann. Wir werden daher in Zukunft für den gemeinsamen Werth von  $c_1$  und  $c_2$  wieder  $c$  schreiben können.

Die vollständigen Bestimmungsgleichungen für unsere Functionen  $u_1$  und  $u_2$  lauten daher folgendermaassen:

$$(I) \quad r > \rho \quad \frac{d^2 u_1}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d u_1}{d r} + (k_1^2 - c^2) u_1 = 0,$$

$$(II) \quad r < \rho \quad \frac{d^2 u_2}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d u_2}{d r} + (k_2^2 - c^2) u_2 = 0,$$

$$(III) \quad r = \rho \quad \begin{cases} (k_1^2 - c^2) u_1 = (k_2^2 - c^2) u_2, \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{d u_1}{d r} = \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{d u_2}{d r}. \end{cases}$$

#### § 4. Vorbemerkungen über die Bessel'schen Functionen.

Die Differentialgleichungen (I) und (II) lassen sich leicht durch geeignete Wahl der unabhängigen Veränderlichen auf die gemeinsame Form der Bessel'schen Differentialgleichung

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d u}{d x} + u = 0$$

bringen. Ihre Lösungen sind die sogenannten Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art,  $J(x)$  und  $K(x)$ , welche man für alle Werthe von  $x$  durch die folgenden Integrale<sup>1)</sup> definiren kann:

1) Vgl. Heine, Handb. d. Kugelf., Gleichung (30a) und (30b). Man bemerke, dass unser  $K$  mit dem Heine'schen nur in der positiv-imaginären Halbebene übereinstimmt. Auf der reellen Axe und in der

$$(14) \quad J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos \alpha} d\alpha, \quad K(x) = \frac{1}{i} \int_0^{\beta + i\infty} e^{ix \cos \alpha} d\alpha.$$

Im zweiten Integral bedeutet  $\beta$  irgend eine Zahl, welche, wenn  $x = r e^{i\varphi}$  gesetzt wird, zwischen  $\varphi$  und  $\varphi - \pi$  liegt.  $K$  ist für alle endlichen Werthe ausser für  $x = 0$ ,  $J$  für alle endlichen Werthe endlich.

Wir werden eine Reihe von Eigenschaften der Bessel'schen Functionen, namentlich auch bei complexen Werthen des Argumentes, nöthig haben, welche wir hier kurz zusammenstellen.

a) Die Function  $J(x)$  gestattet für alle Werthe des Argumentes die Entwicklung<sup>1)</sup>:

$$(a, 1) \quad J(x) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

Diese Reihe ist natürlich nur für hinreichend kleine  $x$  praktisch brauchbar — wir setzen  $|\frac{1}{2}x| < 1$  voraus<sup>2)</sup> — und auch dann nur, wenn man den Fehler beim Abbrechen der Reihe abschätzen kann. Letzteres lässt sich folgendermaassen leicht bewerkstelligen. Wir haben

$$\left| J(x) - \left( 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \pm \frac{1}{k!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right) \right| < \frac{1}{(k+1)!^2} \left| \frac{x}{2} \right|^{2k+2}$$

$$\left( 1 + \left| \frac{x}{2} \right|^2 + \left| \frac{x}{2} \right|^4 + \dots \right) = \frac{1}{(k+1)!^2} \left| \frac{x}{2} \right|^{2k+2} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}.$$

Nehmen wir also, was meistens ausreichen wird,  $k = 1$ , d. h. brechen wir die Reihe mit dem zweiten Gliede ab, so haben wir

$$(a, 2) \quad J(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\mathcal{G}}{4} \left| \frac{x}{2} \right|^4 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1},$$

wo  $\mathcal{G}$  eine unbekannte Zahl vom absoluten Betrage  $< 1$  bedeutet. Ebenso findet man:

$$(a, 2) \quad J'(x) = -\frac{x}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) + \frac{\mathcal{G}}{12} \left| \frac{x}{2} \right|^5 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}.$$

negativ-imaginären Halbebene ist die Heine'sche Definition für uns nicht brauchbar, weil sie sich nicht durch analytische Fortsetzung aus den Werthen der positiv-imaginären Halbebene ergibt.

1) Vgl. Heine, l. c. Gleichung (14c).

2) Das Zeichen  $|\quad|$  deutet, wie üblich, den absoluten Betrag der dazwischen stehenden complexen Grösse an.

Brechen wir die Reihe dagegen schon beim ersten Gliede ab, so können wir schreiben:

$$(a, 3) \quad \begin{cases} J(x) = 1 + \vartheta \left| \frac{x}{2} \right|^2 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}, \\ J'(x) = \vartheta \left| \frac{x}{2} \right| \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}. \end{cases}$$

Natürlich bedeutet in diesen und den folgenden Formeln das Zeichen  $\vartheta$  lauter verschiedene unbekannte Zahlen vom absoluten Betrage  $< 1$ .

Wie diese Abschätzung im Falle  $|\frac{1}{2}x| > 1$  und  $k > 1$  zu modificiren wäre, ist leicht zu sehen.

b) Neben  $J(x)$  (oder ausführlicher geschrieben  $J_0(x)$ ) bezeichnet man auch die Functionen<sup>1)</sup>

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n \left( 1 - \frac{1}{1(n+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{1.2(n+1)(n+2)} \left( \frac{x}{2} \right)^4 - \dots \right)$$

als Bessel'sche Functionen. Aus dieser Reihe findet man leicht, unter der abermaligen Annahme  $|\frac{1}{2}x| < 1$ :

$$|J_n(x)| < \frac{1}{n!} \left| \frac{x}{2} \right|^n \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}.$$

Da ferner allgemein gilt<sup>2)</sup>:

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x),$$

so können wir schreiben:

$$|J_n'(x)| < \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{x}{2} \right|^{n-1} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}.$$

Wir merken uns insbesondere die folgenden Ausdrücke an:

$$(b, 1) \quad J_2(x) = \frac{\vartheta}{2!} \left| \frac{x}{2} \right|^2 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}, \quad J_4(x) = \frac{\vartheta}{4!} \left| \frac{x}{2} \right|^4 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}, \dots$$

$$(b, 2) \quad J_2'(x) = \vartheta \left| \frac{x}{2} \right| \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}, \quad J_4'(x) = \frac{\vartheta}{3!} \left| \frac{x}{2} \right|^3 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} \dots$$

c) Unsere Bessel'sche Function  $K(x)$  gestattet die folgende Darstellung<sup>3)</sup>:

$$K(x) = J(x) \left( \log \frac{2}{x} + \frac{i\pi}{2} + C \right) - 2 \left( J_2(x) - \frac{1}{2} J_4(x) + \frac{1}{8} J_6(x) - \dots \right).$$

1) Vgl. Heine, l. c. Gleichung (14c).

2) Vgl. Heine, l. c. § 61 B.

3) Vgl. Heine, l. c. Gleichung (44f). Man beachte die dort für complexe  $x$  mit positiv-imaginärem Theil angegebene Modification, welche dem Gliede  $i\pi/2$  unserer Formel entspricht.

Die sogenannte Mascheroni'sche Constante  $C$  hat den Werth  $0,577\dots$ . Setzen wir noch  $C = \log \gamma$ , wo  $\gamma = 1,781$  wird, und beachten, dass  $e^{i\pi/2} = i$  ist, so können wir auch schreiben:

$$(c,1) \quad K(x) = J(x) \log \frac{2i\gamma}{x} - 2 \left( J_2(x) - \frac{1}{2} J_4(x) + \frac{1}{3} J_6(x) - \dots \right)$$

und

$$(c,2) \quad \begin{cases} K'(x) = -\frac{1}{x} J(x) + J'(x) \log \frac{2i\gamma}{x} \\ \quad \quad \quad - 2 \left( J_2'(x) - \frac{1}{2} J_4'(x) + \frac{1}{3} J_6'(x) - \dots \right). \end{cases}$$

Für genügend kleine Werthe von  $x$  wird also  $K(x)$  durch  $\log 2i\gamma/x$ ,  $K'(x)$  durch  $-1/x$  dargestellt. Wir müssen ein Urtheil darüber gewinnen, wie genau diese Darstellung ist. Aus (c,1) folgt:

$$\begin{aligned} \left| K(x) - \log \frac{2i\gamma}{x} \right| &< |J(x) - 1| \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| \\ &\quad + 2 \left( |J_2(x)| + |J_4(x)| + \dots \right), \end{aligned}$$

also, wenn wir aus (a,3) und (b,1) einsetzen:

$$\begin{aligned} \left| K(x) - \log \frac{2i\gamma}{x} \right| &< \\ &\left( \left| \frac{x}{2} \right|^2 \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| + \left| \frac{x}{2} \right|^2 + \left| \frac{x}{2} \right|^4 + \dots \right) \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} = \\ &\left| \frac{x}{2} \right|^2 \left\{ \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| + \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aus (c,2) mit Rücksicht auf (a,3) und (b,2):

$$\left| K'(x) + \frac{1}{x} \right| < \left| \frac{x}{2} \right| \left\{ \frac{1}{2} + \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| + 2 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}.$$

Somit gewinnen wir:

$$(c,3) \quad \begin{cases} K(x) = \log \frac{2i\gamma}{x} + \mathcal{O} \left| \frac{x}{2} \right|^2 \left\{ \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| + \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}, \\ K'(x) = -\frac{1}{x} + \mathcal{O} \left| \frac{x}{2} \right| \left\{ \frac{1}{2} + \left| \log \frac{2i\gamma}{x} \right| + 2 \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x}{2} \right|^2 \right)^{-1}. \end{cases}$$

d) Für grosse Werthe von  $x$  bedient man sich zur Berechnung der Bessel'schen Functionen gewisser semiconvergenter Entwicklungen. Wir entnehmen dieselben einer Arbeit

von H. Weber<sup>1)</sup>, in der die für uns nothwendige Fehlerabschätzung bei complexen Werthen des Argumentes durchgeführt ist. Für  $J(x)$  haben wir

$$(d, 1) \quad J(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{1}{2i} \left( e^{i(x + \frac{\pi}{4})} S_1 - e^{-i(x + \frac{\pi}{4})} S_2 \right),$$

wo die Functionen  $S_1$  und  $S_2$ , je nachdem man sie beim ersten oder zweiten Gliede abbricht, mit Hinzufügung der Fehlerabschätzung folgende Bedeutung haben:

$$(d, 2) \quad S_1 = S_2 = 1 + \mathcal{O} \frac{\pi}{8|x|} \frac{(1 + 2/|x|)^2}{(1 - 3/4|x|)^5}$$

bez.

$$(d, 3) \quad \begin{cases} S_1 = 1 + \frac{1}{8ix} + \mathcal{O} \frac{9}{16|x|^2} \frac{(1 + 2/|x|)^2}{(1 - 3/4|x|)^5}, \\ S_2 = 1 - \frac{1}{8ix} + \mathcal{O} \frac{9}{16|x|^2} \frac{(1 + 2/|x|)^2}{(1 - 3/4|x|)^5}. \end{cases}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass  $x$  einen positiv-reellen Theil hat. Bei einem  $x$  mit negativ-reellem Theile bedient man sich der Beziehung  $J(-x) = J(x)$ .

Aehnlich lässt sich der Differentialquotient  $J'(x)$  berechnen.

Es wird

$$(d, 4) \quad J'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{1}{2} \left( e^{i(x + \frac{\pi}{4})} S_1 + e^{-i(x + \frac{\pi}{4})} S_2 \right),$$

wobei jetzt  $S_1$  und  $S_2$  die Bedeutung haben:

$$(d, 5) \quad S_1 = S_2 = 1 + \mathcal{O} \frac{3\pi}{8|x|} (1 - 1/4|x|)^{-3}$$

bez.

$$(d, 6) \quad \begin{cases} S_1 = 1 - \frac{3}{8ix} + \mathcal{O} \frac{15}{32|x|^2} (1 - 1/4|x|)^{-3} \\ S_2 = 1 + \frac{3}{8ix} + \mathcal{O} \frac{15}{32|x|^2} (1 - 1/4|x|)^{-3} \end{cases}$$

Wir erkennen hieraus, dass  $J(x)$  im Unendlichen der reellen Axe verschwindet wie  $x^{-1/2}$ , dagegen überall sonst im Unendlichen der complexen Ebene wie die Exponentialfunction mit positivem

---

1) H. Weber, Zur Theorie der Bessel'schen Functionen, Math. Ann. 37. Vgl. insbesondere Gleichungen (19), (30), (32) und (23), (25).

*Exponenten unendlich wird.* Insbesondere ergibt sich noch für ein  $x$  mit nicht verschwindendem imaginären Theile:

$$(d, 7) \quad \lim_{x=\infty} \frac{J(x)}{J'(x)} = \pm i,$$

je nachdem  $x$  einen positiven oder negativen imaginären Bestandtheil hat.

e) Das Verhalten von  $K(x)$  bei unendlich wachsendem  $|x|$  wird durch die Gleichung gegeben

$$(e, 1) \quad K(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{i\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Dabei ist zu beachten, dass  $K(x)$  keine eindeutige, sondern eine unendlich vieldeutige Function ist, wie schon aus dem Auftreten des Logarithmus in Gleichung (c, 1) hervorgeht. Lässt man nämlich die Variablen einmal um den Nullpunkt der complexen Ebene herumlaufen, so ändert sich dabei  $K$  um  $2\pi i J(x)$ . Daher gilt die letzte Formel nur, wenn man die  $x$ -Ebene vom Nullpunkte aus- und zwar längs der negativ, imaginären Axe aufschneidet. Ueberschreitet man diese Axe, so ist auf der rechten Seite von (e, 1) ein geeignetes Multiplum des asymptotischen Werthes von  $2\pi i J(x)$  hinzuzufügen. Hieraus ergibt sich:

*Unter den unendlich vielen Zweigen, aus denen die Function  $K(x)$  besteht, giebt es einen, welcher im Unendlichen der positiv-imaginären Halbebene und auf der reellen Axe verschwindet, und zwar bez. wie die Exponentialfunction mit negativem Exponenten oder wie  $x^{-1/2}$ .*

Dieser Zweig soll der *Hauptzweig* der Function  $K(x)$  genannt werden. Er entspricht dem sogenannten *Hauptwerthe* des Logarithmus in Gleichung (c, 1), d. h. dem Modulo  $2\pi i$  kleinsten Werthe, welchem der dort vorkommende Logarithmus bei gegebenem  $x$  gleich gesetzt werden kann. *Alle anderen Zweige von  $K(x)$  werden ebenso wie  $J(x)$  überall im Unendlichen der complexen Ebene unendlich gross.*

Die Eigenschaft, im Unendlichen für ein gewisses Gebiet zu verschwinden, verleiht der Function  $K(x)$  vor anderen particulären Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung und dem Hauptzweige dieser Function vor anderen Zweigen derselben Function für unsere Zwecke eine besondere Wichtigkeit.



§ 5. Nachweis der Nothwendigkeit einer örtlichen Dämpfung.  
Die transcendente Gleichung für  $c$ .

Wenn man die Differentialgleichungen I und II vom Schlusse des vorletzten Paragraphen mit der Gleichung (13) vom Beginn des letzten Paragraphen vergleicht, so sieht man, dass jenen durch die Bessel'schen Functionen mit dem Argumente

$$\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r \quad \text{und} \quad \sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot r$$

genügt wird. Wir bekommen daher als allgemeine Lösung von I und II:

$$(15) \quad \begin{cases} u_1 = A_1 K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r) + B_1 J(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r) \\ u_2 = A_2 J(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot r) + B_2 K(\sqrt{k_2^2 + c^2} \cdot r). \end{cases}$$

Die Grössen  $A$  und  $B$  sind näher zu bestimmende Constante. Zunächst sieht man sofort, dass  $B_2$  verschwinden muss, da  $K$  für  $r=0$  unendlich wird und doch andererseits  $u_2$  im Innern des Drahtes durchweg endlich bleiben muss. In  $u_1$  dagegen braucht der Term mit  $K$  nicht zu verschwinden, weil ja  $u_1$  im Innern des Drahtes überhaupt keine physikalische Bedeutung hat.

Wir müssen ferner das Verhalten von  $u_1$  im Unendlichen betrachten (wie sich  $u_2$  im Unendlichen verhält, ist uns dagegen gleichgültig, weil  $u_2$  ausserhalb des Drahtes keine physikalische Bedeutung hat). *Jedenfalls werden wir verlangen müssen, dass  $u_1$  bei wachsendem  $r$  verschwindet.* Das bedeutet jedoch nur eine *vorläufige* und *noch nicht ausreichende Forderung*.

Wir denken uns zunächst  $c$  in bestimmter Weise als reelle Zahl vorgegeben, so zwar, dass  $c^2 < k_1^2$  oder, was nach (8) und (11) dasselbe bedeutet, so, dass  $\lambda/\tau > 1/A$ , d. h. grösser als die Lichtgeschwindigkeit ist. Das Argument der Bessel'schen Functionen in  $u_1$  ist dann reell. Infolge dessen wird  $u_1$  bei beliebigen Werthen von  $A_1$  und  $B_1$  nach den Abschnitten d) und e) des vorigen Paragraphen für  $r = \infty$  verschwinden wie  $r^{-1/2}$ . Die soeben genannte Forderung ist also erfüllt.

Ferner reichen die dann völlig disponiblen Werthe  $A_1, A_2, B_1$  gerade aus, um den Grenzbedingungen III zu genügen, was durch bestimmte Wahl der Verhältnisse  $A_1 : A_2 : B_1$  ge-

schieht. Wir sehen also, dass bei reellem  $c^2 < k_1^2$  die Gleichungen (15) nach richtiger Bestimmung der Verhältnisse  $A_1 : A_2 : B_1$  einen Schwingungszustand vorstellen, der allen bisher geforderten Eigenschaften genügt.

Wir behaupten aber, dass diesem Schwingungszustande keine einfache physikalische Bedeutung zukommt. Er setzt nämlich voraus, dass dem Drahte in radialer Richtung fortgesetzt Energie aus dem Unendlichen zugeführt wird, was im Experimente sicherlich nicht der Fall ist. Vielmehr findet hier die Energiezufuhr lediglich in der Richtung der Drahtaxe statt.

Die Energiezufuhr aus dem Unendlichen berechnen wir auf Grund des Poynting'schen Satzes.<sup>1)</sup> Wir umgeben den Draht mit einem coaxialen Cylinder von sehr grossem Radius  $r$  und betrachten einen Abschnitt desselben, welcher durch die Ebenen  $z = z_0$  und  $z = z_1$  begrenzt wird. Nach Poynting bestimmen wir die in die Oberfläche dieses Cylinders fallenden Componenten von  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{M}$ . Es sind dieses die Grössen  $Z$  und  $\Psi$ . Wir haben das Product dieser Grössen in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Neigungswinkels, welcher in unserem Falle gleich 1 ist, zu bilden, über die Oberfläche des Cylinders zu integriren und mit  $4\pi A$  zu dividiren.

Der Energiefluss durch unseren Cylinderabschnitt wird daher nach dem angezogenen Satze:

$$\frac{r}{2A} \int_{z_0}^{z_1} Z \Psi dz.$$

Nun verschwinden bei reellem Argumente nach den Gleichungen (12) und (15)  $Z$  und  $\Psi$  gerade von der Ordnung  $r^{-1/2}$  bei wachsendem  $r$ . Das Product  $r Z \Psi$  behält daher in der Grenze für  $r = \infty$  im allgemeinen einen von Null verschiedenen Werth; mithin findet beständig ein Energiefluss in radialer Richtung aus dem Unendlichen statt. *Der durch die Gleichungen (15) dargestellte Schwingungszustand ist also bei einem reellem Werthe von  $c^2 < k_1^2$  nur dadurch zu unterhalten, dass wir parallel der Drahtaxe im Unendlichen ein künstliches*

1) Vgl. H. Hertz, l. c. p. 149.

System von elektromagnetischen Energiequellen vertheilen, welches die Energiezufuhr in der angegebenen Weise regelt. Dasselbe würde offenbar dazu dienen, um die im Drahte entwickelte Wärme von aussen her durch neue Energiequanten zu ersetzen und trotz der Wärmeentwicklung den Schwingungszustand längs jeder zur Drahtaxe parallelen Geraden durchschnittlich auf demselben Betrage zu erhalten.

Wir werden weiterhin nicht nöthig haben, auf diesen künstlich unterhaltenen Schwingungszustand einzugehen. Wir werden vielmehr die Möglichkeit eines reellen  $c^2 < k_1^2$ , einer Fortpflanzung ohne Dämpfung ausschliessen, und werden daher das Argument der Bessel'schen Functionen in dem Ausdrucke (15) für  $u_1$  als nicht reell ansehen. Dann aber müssen wir nothwendigerweise  $B_1 = 0$  nehmen, weil doch  $u_1$  für  $r = \infty$  verschwinden soll und  $J(x)$  nach Abschnitt d) des vorigen Paragraphen für ein unendlich wachsendes nicht reelles  $x$  unendlich gross wird. Wir müssen ferner in (15) unter  $K$  den Hauptzweig dieser vieldeutigen Function verstehen und müssen das Vorzeichen der Quadratwurzel in ihrem Argumente so bestimmen, dass der imaginäre Theil des Argumentes positiv wird. Es sei etwa vorübergehend

$$\sqrt{k_1^2 - c^2} = a + ib \quad \text{und} \quad b > 0;$$

alsdann verschwindet  $K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r)$  nach Gleichung (e,1) für  $r = \infty$  im wesentlichen wie  $e^{-br}$ , sodass der Energiefluss durch einen die Drahtaxe coaxial umgebenden Cylinderabschnitt mit wachsendem  $r$  sicher zu Null wird.

Die Lösung (15) nimmt jetzt die folgende Form an:

$$(16) \quad \begin{cases} u_1 = A_1 K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r), \\ u_2 = A_2 J(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot r). \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen lauten nach (III):

$$(17) \quad \begin{cases} A_1 (k_1^2 - c^2) K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho) = A_2 (k_2^2 - c^2) J(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot \rho), \\ A_1 \frac{k_1^2}{\mu_1} \sqrt{k_1^2 - c^2} K'(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho) = A_2 \frac{k_2^2}{\mu^2} \sqrt{k_2^2 - c^2} J'(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot \rho), \end{cases}$$

wo unter  $K'$  und  $J'$  die Differentialquotienten dieser Functionen nach dem Argumente zu verstehen sind.

Damit die Gleichungen (17) zusammen bestehen können, muss die Determinante derselben verschwinden. Wir führen noch die Abkürzungen

$$(18) \quad x_1 = \sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho, \quad x_2 = \sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot \rho$$

ein, dann lautet die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (17):

$$(19) \quad \begin{vmatrix} x_1 K(x_1), & x_2 J(x_2) \\ \frac{k_1^2}{\mu_1} K'(x_1), & \frac{k_2^2}{\mu_2} J'(x_2) \end{vmatrix} = 0$$

oder, anders geschrieben:

$$(20) \quad x_1 \frac{K(x_1)}{K'(x_1)} = \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} x_2 \frac{J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

Diese Bedingung haben wir aufzufassen als eine (allerdings ziemlich complicirte) *transcendente Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten c*. Ist dieselbe gelöst, so ergibt sich das Verhältniss der Constanten  $A_1 : A_2$  etwa aus der ersten der Gleichungen (17). Die Werthe  $A_1, A_2$  selbst sind nur bis auf einen gemeinsamen willkürlichen Factor bestimmt, welcher der für irgend einen Punkt des Raumes willkürlich vorzuschreibenden Amplitude und Phase der Schwingung entspricht. Indem wir diesen Factor mit  $\alpha$  bezeichnen, können wir etwa setzen:

$$(21) \quad A_1 = \frac{\alpha}{c^2 - k_1^2} \frac{1}{K(x_1)}, \quad A_2 = \frac{\alpha}{c^2 - k_2^2} \frac{1}{J(x_2)}.$$

Wir sehen also, dass wir auch jetzt, wo wir  $c$  als eine disponible Unbekannte ansehen, allerdings auf ganz andere Weise wie oben, zu einem möglichen Schwingungszustande gelangen, welcher (bis auf die in einem beliebigen Punkte willkürlich vorzuschreibende Amplitude und Phase) vollkommen bestimmt ist, und welcher sich von dem früheren Zustande dadurch unterscheidet, dass seine Unterhaltung keine radiale Energiezufuhr aus dem Unendlichen erfordert.

Wir können das Resultat dieses Paragraphen auch folgendermaassen mit Worten umschreiben: Der anfangs vorausgesetzte Fall einer im übrigen willkürlichen und nur der Bedingung  $\lambda / \tau > 1 / A$  entsprechend gewählten Wellenlänge

entspricht einer Schwingung, welche sich ohne Dämpfung mit einer willkürlichen, die Lichtgeschwindigkeit übertreffenden Geschwindigkeit längs des Drahtes fortpflanzt. Indem wir diesen Vorgang mit Zuhülfenahme der Poynting'schen Vorstellung als unmöglich erkannten, haben wir die *Nothwendigkeit der Dämpfung* und die *Nothwendigkeit eines ganz bestimmten* und, wie wir später sehen werden, *unterhalb der Lichtgeschwindigkeit gelegenen Werthes der Fortpflanzungsgeschwindigkeit streng bewiesen.*

§ 6. Discussion der transcendenten Gleichung für  $c$ .  
Inbetrachtung zweier Grenzfälle.

Während die bisherigen Untersuchungen ganz allgemein gehalten waren und bei beliebigen elektrodynamischen Constanten des Drahtes und beliebiger Schwingungsfrequenz gültig waren, müssen wir nun die besonderen Verhältnisse des Experimentes berücksichtigen. Unsere transcendenten Gleichung (20) ist nämlich so complicirt, dass ihre allgemeine Lösung unmöglich sein dürfte. Wir betrachten daher Grenzfälle, welche sich bei besonderer Wahl der Umstände einstellen. In diesen Grenzfällen vereinfacht sich die Gleichung erheblich, sodass sie eine bequeme Lösungsmethode zulässt. Die Wurzeln der vereinfachten Gleichung geben dann in den uns interessirenden Fällen gute Näherungswerthe für die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung, welche man durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung gegebenenfalls weiter corrigiren kann. Die Grenzfälle, die wir vornehmlich betrachten wollen, sind, zunächst etwas unbestimmt ausgedrückt:

1.  $|x_1|$  klein,  $|x_2|$  gross;
2.  $|x_1|$  klein,  $|x_2|$  klein.

Der erste Grenzfall ist in vieler Hinsicht als ein normaler zu betrachten. Er stellt sich immer dann ein, wenn das Leitungsvermögen des Drahtes hinreichend gross und das Verhältniss des Drahradius zur Wellenlänge nicht zu klein ist und *führt auf eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche sich von der Lichtgeschwindigkeit nur sehr wenig unterscheidet, und auf einen sehr geringen Betrag der örtlichen Dämpfung.* Der zweite Grenz-

fall kann dadurch realisirt werden, dass man die Leitfähigkeit des Drahtes wiederum ziemlich gross voraussetzt und das Verhältniss des Drahradius zur Wellenlänge möglichst klein nimmt. *In diesem zweiten Falle werden wir Abweichungen von der Lichtgeschwindigkeit bis zu einem Viertel derselben berechnen; gleichzeitig geht dann auch die Dämpfung beim Fortschreiten der Welle sehr viel schneller vor sich, wie im ersten Grenzfall.*

1. Wenn  $|x_1|$  hinreichend klein und  $|x_2|$  hinreichend gross ist, können wir in erster Annäherung für  $K(x_1)$  und  $K'(x_1)$  die im § 4 sub c), für  $J(x_2)$  und  $J'(x_2)$  die ebendasselbst sub d) angegebenen Grenzwerte eintragen. Da  $x_2 = \rho \sqrt{k_2^2 - c^2}$  durch eine Quadratwurzel, also nur bis auf das Vorzeichen defint ist, können wir annehmen, dass  $x_2$  einen negativen imaginären Bestandtheil hat. Alsdann haben wir einfach (vgl. § 4, Gl. (d, 7))

$$\lim_{x_2 = \infty} \frac{J(x_2)}{J'(x_2)} = -i$$

und

$$K(x_1) = \log \frac{2i\gamma}{x_1}, \quad K'(x_1) = -\frac{1}{x_1}.$$

Wir können aber gleich noch eine weitere Vereinfachung einführen. Da nämlich  $|x_1| = |\sqrt{\rho^2 k_1^2 - \rho^2 c^2}|$  klein sein sollte und da überdies  $\rho k_1$ , d. h. das mit  $2\pi$  multiplicirte Verhältniss des Drahradius zur Wellenlänge bei den Hertz'schen Versuchen allemal klein ist, so wird auch  $\rho c$  eine kleine Zahl werden. Andererseits sollte  $|x_2| = |\sqrt{\rho^2 k_2^2 - \rho^2 c^2}|$  gross sein. Wir werden daher die kleine Zahl  $\rho^2 c^2$  gegen die grosse  $\rho^2 k_2^2$  streichen und einfach  $x_2 = \rho k_2$  setzen können, umso mehr, als es sich zunächst um nichts Definitives, sondern nur um ein versuchsweises Bestimmen von Näherungswerthen handelt.

Unsere transcendente Gleichung geht hiernach über in

$$x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} = i \rho \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1}.$$

Hierfür schreiben wir der Reihe nach

$$\frac{x_1^2}{2} \log \left( \frac{x_1}{2i\gamma} \right)^2 = -i \rho \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1},$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2 \log\left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2 = \frac{iQ}{2\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1},$$

oder endlich

$$(22) \quad x \log x = y,$$

indem wir die Abkürzungen benutzen:

$$(22') \quad x = \left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2, \quad y = \frac{iQ}{2\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1}.$$

Wir sind somit von der complicirten Gleichung (20) zu der ziemlich einfachen Gleichung (22) übergegangen. Wenn die letztere eine Wurzel  $x$  von hinreichend kleinem absoluten Betrage besitzt, so wird diese gleichzeitig einen Näherungswerth für die Wurzel der ursprünglichen Gleichung abgeben.

2. Wenn sowohl  $|x_1|$  wie  $|x_2|$  hinreichend klein sind, können wir sowohl die Bessel'schen Functionen zweiter, wie die erster Art durch ihre Grenzwerte bei *kleinem* Argument ersetzen, d. h.

$$K(x_1) = \log \frac{2i\gamma}{x_1}, \quad K'(x_1) = -\frac{1}{x_1}, \quad J(x_2) = 1, \quad J'(x_2) = -\frac{x_2}{2}$$

nehmen. Alsdann fällt  $x_2$  aus unserer Gleichung vollständig heraus und wir erhalten:

$$x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} = 2 \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1},$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2 \log\left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1},$$

oder endlich

$$(23) \quad x \log x = y,$$

indem wir schreiben

$$(23') \quad x = \left(\frac{x_1}{2i\gamma}\right)^2, \quad y = \frac{1}{\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1}.$$

Wir haben also dieselbe Gleichung, wie im Falle 1, nur mit veränderter Bedeutung von  $y$ .

Wiederum werden wir erwarten können, dass eine hinreichend kleine Wurzel  $x$  unserer vereinfachten Gleichung, sofern eine solche existirt, einen Näherungswerth für die Lösung der ursprünglichen Gleichung liefern wird.

§ 7. Qualitative und quantitative Behandlung der vereinfachten Gleichung.

Wir behandeln jetzt die Gleichung (22), auf welche die Grenzfälle 1 und 2 des vorigen Paragraphen führten, unter der in den folgenden Beispielen zutreffenden Annahme, dass  $y$  eine Zahl von sehr kleinem absolutem Betrage im zweiten Quadranten der complexen Ebene ist. Indem wir die numerischen Details für die folgenden Paragraphen aufsparen, geben wir hier ein allgemeines Schema für die Auflösung an.

Ein erster Ueberschlag über Lage und Grösse der Wurzeln lässt folgendes erkennen. Wenn  $y$  und daher auch  $x \log x$  eine sehr kleine Zahl ist, so muss entweder  $\log x$  oder  $x$  nahezu Null, d. h.  $x$  nahezu 1 oder 0 sein. Der letztere Fall sondert sich dabei in eine unendliche Reihe von Unterfällen. Je nachdem wir nämlich für  $\log x$  den „Hauptwerth“ (vgl. § 4) oder einen der unendlich vielen anderen Werthe nehmen, welche sich von dem Hauptwerth um Multipla von  $2\pi i$  unterscheiden, wird sich für  $x$  eine unendliche Serie von Werthen ergeben, welche nach Null abnehmen, derart, dass das Product dieser Werthe mit  $\log x$  allemal gleich der gegebenen Grösse  $y$  wird. Wir haben hiernach eine Wurzel in der Nähe von 1 und unendlich viele Wurzeln in der Nähe des Nullpunktes der  $x$ -Ebene zu erwarten.

Diese Erwartung wird durch das Ergebniss der geometrischen Ueberlegung bestätigt.

Wir lösen die Gleichung (22), nachdem wir sie durch  $x$  dividirt haben, in einen reellen und imaginären Theil auf. Setzen wir  $x = r e^{i\varphi}$ ,  $y = \rho e^{i\psi}$ , so entsteht:

$$(24) \quad \log r = \frac{\rho}{r} \cos(\psi - \varphi),$$

$$(24') \quad \varphi = \frac{\rho}{r} \sin(\psi - \varphi).$$

Jeder von diesen beiden Gleichungen entspricht in der complexen  $x$ -Ebene, deren Punkte wir uns durch die Polarcoordinaten  $r$  und  $\varphi$  unterschieden denken, eine (übrigens aus mehreren Aesten bestehenden) Curve.



Um die Gestalt beider Curven anzugeben, markiren wir uns den Punkt  $y = (\varrho, \psi)$  und schlagen folgende Kreise den Kreis  $K$  mit dem Radius 1 um den Punkt 0,

- „ „  $K_1$  „ „ „  $\frac{\varrho}{2}$  „ „ „  $\frac{y}{2}$ ,
- „ „  $K_2$  „ „ „  $\frac{\varrho}{2}$  „ „ „  $-\frac{y}{2}$ ,
- „ „  $K_3$  „ „ „  $\frac{\varrho}{2}$  „ „ „  $-\frac{iy}{2}$ ,
- „ „  $K_4$  „ „ „  $\frac{\varrho}{2}$  „ „ „  $\frac{iy}{2}$ .

Alsdann besteht die Curve des reellen Theiles, Gl. (24), aus zwei Aesten, von denen der eine innerhalb des Kreises  $K_2$

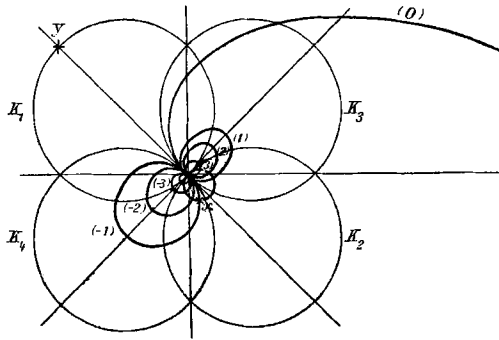


Fig. 1.

verläuft und die Gestalt eines von dem Nullpunkt auslaufenden und dahin zurückkehrenden Ovals hat, während der andere durchweg ziemlich genau mit dem Kreise  $K$  zusammenfällt. In Fig. 1, in welcher wie bei dem darauf folgenden ersten Beispiele der zu  $y$  gehörige Winkel  $\psi$  gleich  $3\pi/4$  angenommen wurde, ist nur der erste dieser Aeste, und zwar punktirt verzeichnet, während der zweite wegen des ausserordentlich grossen Maassstabes unserer Figur nicht mehr Platz gefunden hat.

Andererseits besteht die Curve des imaginären Theiles, Gl. (24), aus unendlich vielen Aesten. Ein erster Ast (in der Figur durch die Zahl (0) charakterisirt) findet sich in dem Sector  $0 < \varphi < \psi$  vor. Er schliesst sich im Unendlichen an die Axe  $\varphi = 0$  asymptotisch an und läuft in der Richtung

$\varphi = \psi$  in den Nullpunkt ein. Sodann haben wir eine unendliche Serie von Aesten (in der Figur durch (1), (2), (3), . . . bezeichnet) in den Gebieten  $\psi + \pi < \varphi < \psi + 2\pi$ ,  $\psi + 3\pi < \varphi < \psi + 4\pi$ ,  $\psi + 5\pi < \varphi < \psi + 6\pi$ , . . . . Alle diese Aeste haben die Gestalt eines Ovals und legen sich an den Nullpunkt an. Jeder folgende ist von dem vorhergehenden und alle sind von dem Kreise  $K_3$  umschlossen. Endlich giebt es noch eine zweite unendliche Serie von Aesten (in der Figur die Bögen  $(-1)$ ,  $(-2)$ ,  $(-3)$ , . . .), bez. in den Gebieten  $\psi - \pi > \varphi > \psi - 2\pi$ ,  $\psi - 3\pi > \varphi > \psi - 4\pi$ ,  $\psi - 5\pi > \varphi > \psi - 6\pi$ , . . . . Diese Aeste haben eine analoge Gestalt und gegenseitige Lage wie die vorher genannten, sind aber nicht in den Kreis  $K_3$ , sondern in  $K_4$  eingeschlossen. Das Gesamtbild, welches die Curve des imaginären Theiles darbietet, ist das eines Stieles (0), welcher in seinem Endpunkte links und rechts eine unendliche Serie übereinander liegender Blättchen von den Contouren (1), (2), (3), . . . und  $(-1)$ ,  $(-2)$ ,  $(-3)$ , . . . trägt.

Auf den elementaren, analytisch-geometrischen Beweis aller dieser Angaben brauchen wir kaum näher einzugehen.

Suchen wir nun die Schnittpunkte der Curve des reellen mit der des imaginären Theiles auf, so liefern uns diese die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (22). Diese Schnittpunkte sind, wie man sieht, in unendlicher Anzahl vorhanden; auf jedem der Aeste (0), (1), (2), . . .  $(-1)$ ,  $(-2)$ , . . . liegt je ein Schnittpunkt.

Unser jetziges Resultat stimmt daher mit der am Anfang dieses Paragraphen gegebenen provisorischen Ueberlegung überein.

*Wir haben nun zu zeigen, dass von diesen Schnittpunkten und den dadurch gegebenen Wurzeln unserer Gleichung alle bis auf einen für unsere Zwecke auszuschneiden sind.*

Es giebt zwei Gesichtspunkte, nach welchen das Ausschneiden unbrauchbarer Wurzeln stattzufinden hat. Erstens nämlich können wir nur solche Wurzeln brauchen, welche einen sehr kleinen absoluten Betrag haben, da nur für solche Werthe von  $x$  sowohl im Grenzfalle 1 wie 2 unsere vereinfachte Gleichung (22) mit der ursprünglichen (20), auf welche es uns ja eigentlich ankommt, approximativ zusammenfällt. Zweitens aber

kommen unter den Wurzeln mit sehr kleinem absoluten Betrage auch nur diejenigen für uns in Betracht, welche zu einem Werthe  $x_1$  Veranlassung geben, der einen positiv imaginären Bestandtheil hat und der, zum Argument der Function  $K$  genommen, einen Functionswerth  $K(x_1)$  liefert, welcher dem Hauptzweige dieser unendlich vieldeutigen Functionen angehört. Setzen wir also  $x_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ , so muss  $\varphi_1$  zwischen 0 und  $\pi$  enthalten sein. Da nun nach Gleichung (22')  $x = r e^{i\varphi}$  mit  $x_1$  folgendermaassen zusammenhängt:

$$r e^{i\varphi} = \left(\frac{r_1}{2\gamma}\right)^2 e^{2i(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})},$$

so erkennt man, dass bei einer für uns brauchbaren Wurzel der Winkel  $\varphi$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  liegen muss.

Der erste dieser beiden Gesichtspunkte gestattet uns sofort diejenige Wurzel auszuschneiden, welche auf dem Aste (0) gelegen ist und als Schnittpunkt dieses mit dem in der Nähe des Einheitskreises  $K$  verlaufenden Aste der Curve des reellen Theiles erhalten wird. In der That ist der absolute Betrag  $r$  dieser Wurzel nicht klein; er beträgt vielmehr nahezu 1.

Der zweite Gesichtspunkt ferner berechtigt uns, alle auf den Aesten (1), (2), (3), (-2), (-3) . . . gelegenen Schnittpunkte für unbrauchbar zu erklären. Denn bei den Schnittpunkten (1), (2), (3), . . . ist der Winkel  $\varphi$  durchweg grösser als  $\pi$ , bei den Schnittpunkten (-2), (-3), . . . durchweg  $< -\pi$ .

*Sonach bleibt nur die auf dem Aste (-1) in der Nähe des Nullpunktes gelegene Wurzel übrig, welche allen unseren Anforderungen genügt.*

Wir haben nun zu fragen, wie wir die brauchbare Wurzel unserer Gleichung in praktischer Weise numerisch berechnen. Hierzu bietet sich das folgende eigenthümliche Näherungsverfahren dar.

Wir setzen der kürzeren Schreibweise wegen  $-y = z$  und etwa  $-\log x = \text{Lg } x$ . Sodann berechnen wir eine theoretisch nicht abbrechende Reihe von Näherungswerthen

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$$

durch die folgenden Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} x^{(0)} = z \\ x^{(1)} \text{ Lg } x^{(0)} = z \\ x^{(2)} \text{ Lg } x^{(1)} = z \\ x^{(3)} \text{ Lg } x^{(2)} = z \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Convergiren die Näherungswerthe  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  nach einer festen Grenze, sodass  $\text{Lim } x^{(n)} = \text{Lim } x^{(n+1)} = x$  wird, so genügt diese letztere Grösse der Gleichung

$$\lim x^{(n)} \cdot \lim \text{Lg } x^{(n+1)} = z,$$

d. h. der Gleichung

$$x \text{ Lg } x = z \text{ oder } x \log x = y.$$

Wir gewinnen also in dem Grenzwerte  $x$  eine Wurzel der vorgelegten Gleichung. Und zwar wird sich die Wurzel  $(-1)$ , oder eine der Wurzeln  $(1), (2), (3), \dots (-2), (-3)$ , ergeben, je nachdem wir bei der successiven Berechnung der Näherungswerthe  $x_1, x_2, x_3, \dots$  für  $\text{Lg } x^{(1)}$  fortgesetzt den Hauptwerth oder einen der von jenem um  $2\pi i, 4\pi i, \dots -2\pi i, -4\pi i, \dots$  verschiedenen Werthe des Logarithmus benutzen. Für unsere Zwecke haben wir natürlich den Hauptwerth, d. h. den Modulo  $2\pi i$  kleinsten Werth des Logarithmus zu wählen.

Das Resultat unseres Annäherungsprocesses lässt sich auch in der Gestalt des folgenden, nicht abbrechenden kettenbruchähnlichen Ausdruckes schreiben:

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{z}{\text{Lg } \frac{z}{\text{Lg } \frac{z}{\text{Lg } \frac{z}{\dots}}}} \end{aligned} \right.$$

Die anschliessenden Convergenzfragen sollen hier nicht berührt werden. Sie sind in einer besonderen Note<sup>1)</sup> (wenigstens bei reellem  $y$ ) vollständig erledigt. Uebrigens erweist sich die Güte der Convergenz durch die folgenden numerischen Rechnungen aufs Deutlichste von selbst.

---

1) Vgl. A. Sommerfeld, Gött. Nachr. December 1898.

§ 8. **Erstes Beispiel: Kupferdraht von 4 mm Durchmesser, Schwingungsdauer  $\tau = 10^{-9}$ .**

Ein erstes Beispiel wählen wir so, dass es dem oben betrachteten Grenzfalle 1 recht nahe kommt. Bei diesem werden sich die allgemein üblichen Vorstellungen über den Ablauf der Drahtwellen durchaus bestätigen.

Wir betrachten einen guten Leiter, nämlich Kupfer, und setzen die Schwingungsfrequenz ziemlich hoch voraus, nämlich  $10^9$  pro Secunde. Die „normale Wellenlänge“, welche dieser Schwingungsfrequenz bei Nichtvorhandensein des Drahtes und freier Ausbreitung in der Luft entspricht, heisse  $\lambda_0$ . Sie berechnet sich, wenn wir mit  $V_0$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen, nach der Formel  $\lambda_0 = \tau V_0$  zu  $\lambda_0 = 30$  cm. Den Radius  $\rho$  des Drahtes denken wir uns ziemlich gross, nämlich gleich 0,2 cm gewählt. Wegen der geringen Genauigkeit der in Betracht kommenden Experimente wird es genügen, die Rechnungen nur bis auf 1 Proc. des ganzen Werthes durchzuführen. Wir wenden durchweg absolutes Maasssystem an.

Zunächst berechnen wir  $k_1^2$  und  $k_2^2$ . Da für Luft  $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$  ist, so wird

$$k_1^2 = \left(\frac{2\pi A}{\tau}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{30}\right)^2.$$

Sodann haben wir für Kupfer  $\mu_2 = 1$ . Die Leitfähigkeit  $C$  des Kupfers ist ca. 55 Mal so gross, wie die des Quecksilbers, welche im absoluten Maasssystem, auf zwei Decimalen abgekürzt, gleich  $1,06 \cdot 10^{-5}$  ist. Hieraus folgt

$$C = 5,83 \cdot 10^{-4}.$$

Der imaginäre Theil von  $k_2^2$  wird hiernach (vgl. Gl. (11),

$$-2i(2\pi)^2 \mu_2 C / \tau = -2i(2\pi)^2 5,83 \cdot 10^5.$$

In dem reellen Theil von  $k_2^2$  kommt die ziemlich problematische Dielektricitätsconstante des Kupfers vor. Zum Glück verschwindet dieser Theil, selbst wenn wir die Dielektricitätsconstante sehr hoch greifen, vollständig gegen den viel grösseren imaginären Theil. Wir werden daher  $k_2^2$  direct gleich seinem imaginären Theil setzen und erhalten:

$$k_2 = (1 - i) 2\pi \cdot 764.$$

Der grosse Betrag von  $\rho k_2 = (1 - i) 4\pi \cdot 76,4$ , welcher bei nicht zu grossem Werthe von  $c$  mit dem Betrage von  $x_2 = \rho \sqrt{k_2^2 - c^2}$  übereinstimmen wird, legt es nahe, die Formeln des Grenzfalles 1 ( $|x_2|$  gross) zu benutzen.

Wir berechnen demnach  $y$  nach Gleichung (22'). Da  $\gamma$  gleich 1,78 war, erhalten wir

$$y = \frac{i\rho}{2\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1} = \frac{(-1 + i) 2\pi \cdot 10^{-3}}{18 \cdot (1,78)^2 \cdot 764} = (-1 + i) 1,44 \cdot 10^{-7}.$$

Der Werth von  $y$  ist, wie wir sehen, eine ausserordentlich kleine Zahl des zweiten Quadranten, entsprechend den im vorigen Paragraphen zu Grunde gelegten Verhältnissen.

Wir bestimmen nun die Reihe der Näherungswerthe  $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ , . . . nach den Formeln (24). Es ergibt sich:

$$x^{(0)} = (1,44 - 1,44i) 10^{-7}, \quad \text{Lg } x^{(0)} = 15,41 + 0,79i.$$

$$x^{(1)} = (0,87 - 0,98i) 10^{-8}, \quad \text{Lg } x^{(1)} = 18,15 + 0,85i,$$

$$x^{(2)} = (0,75 - 0,83i) 10^{-8}, \quad \text{Lg } x^{(2)} = 18,31 + 0,84i.$$

Für  $x^{(3)}$  kommt bereits in den ersten zwei Decimalen derselbe Werth heraus, wie für  $x^{(2)}$ . Wir haben also in

$$x = (0,75 - 0,83i) 10^{-8}$$

eine Wurzel der Gleichung  $x \log x = y$  gefunden.

Aus  $x$  berechnet sich  $x_1$  nach der Formel (22') zu

$$x_1 = 2i\gamma \sqrt{x} = (1,61 + 3,62i) 10^{-4}, \quad |x_1| = 3,97 \cdot 10^{-4}.$$

Da ferner  $x_1^2 = \rho^2(k_1^2 - c^2)$  war, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{k_1^2 - \frac{x_1^2}{\rho^2}} = k_1 \left( 1 - \frac{x_1^2}{2k_1^2 \rho^2} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + (0,27 - 0,30i) 10^{-4}). \end{aligned}$$

Berechnen wir endlich mit diesem Werthe von  $c$  die Grösse  $x_2 = \rho \sqrt{k_2^2 - c^2}$ , so stimmt diese ersichtlich bis auf

Grössen, welche bei der hier eingehaltenen Genauigkeit völlig verschwinden, mit  $\rho k_2$  überein. Wir haben daher

$$x_2 = \rho k_2 = (1 - i) \cdot 960 \quad \text{und} \quad |x_2| = 1358.$$

Hiermit sind wir aber noch nicht fertig. Wir dürfen nämlich den gefundenen Werth von  $c$  zunächst nur als einen Näherungswerth für die Wurzel der exacten Gleichung ansehen und müssen uns überzeugen, indem wir die entsprechenden Werthe von  $x_1$  und  $x_2$  in jene Gleichung eintragen, wie weit diese Näherung geht, um eventuell noch weitere Correctionen zu berechnen. Letzteres wird in unserem Falle allerdings nicht nöthig sein.

Wir berechnen zunächst die Werthe von  $K(x_1)$ ,  $K'(x_1)$  nach den Näherungsformeln (c, 3) von p. 246. In der mit dem Factor  $\vartheta$  ( $|\vartheta|$  kleiner als 1) behafteten und übrigens sehr gross bemessenen Fehlerabschätzung setzen wir die für  $x_1$  gefundene Zahl oder vielmehr geeignete grössere bez. kleinere Zahlen ein, welche für die Rechnung bequemer sind und einen noch grösseren Fehler liefern würden, als er nach den Angaben des § 4 zu erwarten ist. Der unbekannte Factor  $\vartheta$  ist dabei in dem Sinne geändert zu denken, dass er eine Zahl von noch kleinerem absoluten Betrage wie vorher bedeutet. Wir erhalten auf diese Weise:

$$\begin{aligned} K(x_1) &= \log \frac{2i\gamma}{x_1} \\ &+ \vartheta \left| \frac{x_1}{2} \right|^2 \left\{ \left| \log \frac{2i\gamma}{x_1} \right| + \left( 1 - \left| \frac{x_1}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x_1}{2} \right|^2 \right)^{-1} \\ &= \log \frac{2i\gamma}{x_1} + 4 \vartheta \cdot 10^{-7} = \log \frac{2i\gamma}{x_1} (1 + \vartheta \cdot 10^{-7}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'(x_1) &= - \frac{1}{x_1} \\ &+ \vartheta \left| \frac{x_1}{2} \right| \left\{ \frac{1}{2} + \left| \log \frac{2i\gamma}{x_1} \right| + 2 \left( 1 - \left| \frac{x_1}{2} \right|^2 \right)^{-1} \right\} \left( 1 - \left| \frac{x_1}{2} \right|^2 \right)^{-1} \\ &= - \frac{1}{x_1} + 20 \vartheta \cdot 10^{-4} = - \frac{1}{x_1} (1 + \vartheta \cdot 10^{-6}). \end{aligned}$$

In entsprechender Weise berechnen wir die Werthe von  $J(x_2)$  und  $J'(x_2)$  nach den Formeln (d, 1, 2) und (d, 4, 5) des § 4. Dabei werden wir aber von vornherein den mit dem Factor  $e^{-ix_2}$  versehenen Summanden gegen den mit dem Factor  $e^{+ix_2}$  versehenen streichen können, da letzterer nur ein

ganz ausserordentlich kleinen Bruchtheil ( $< 10^{-800}$ ) des ersteren ausmacht. Wir erhalten so:

$$J(x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_2}} \frac{1}{2i} e^{i(x_2 + \frac{\pi}{4})} (1 + 3 \vartheta \cdot 10^{-4})$$

$$J'(x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_2}} \frac{1}{2} e^{i(x_2 + \frac{\pi}{4})} (1 + 9 \vartheta \cdot 10^{-4}).$$

Daraufhin wird die linke Seite der Gleichung (20):

$$x_1 \frac{K(x_1)}{K'(x_1)} = -x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} (1 + \vartheta \cdot 10^{-7})(1 + \vartheta \cdot 10^{-6}),$$

während die rechte Seite übergeht in:

$$\frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)} = -i \varrho k_2 \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} (1 + 3 \vartheta \cdot 10^{-4})(1 + 9 \vartheta \cdot 10^{-4}).$$

Nun ist aber  $x_1$  vermöge unserer vereinfachten Gleichung so berechnet worden, dass auf den rechten Seiten der beiden vorhergehenden Gleichungen die Ausdrücke vor den Klammern einander gleich sind. Mithin stimmt auch die rechte und linke Seite unserer exacten Gleichung bis auf die Klammer-Factoren überein, welche erheblich weniger als 1 Proc. des ganzen Werthes betragen. Das heisst aber: *Durch den gefundenen Werth von  $x_1$  bez. von  $c$  ist auch unsere exacte Gleichung mit einer Genauigkeit von 1 Proc. erfüllt.*

Nunmehr sind wir in der Lage, aus der Grösse von  $c$  weitere zuverlässige Schlüsse zu ziehen. Wir lösen  $c$  in seinen reellen und imaginären Theil auf und bekommen mit den Bezeichnungen von Gleichung (8):

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + 0,27 \cdot 10^{-4}), \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} 0,30 \cdot 10^{-4} = 2\pi \cdot 10^{-6}.$$

Aus dem Werthe von  $\lambda$  ergibt sich

$$\lambda = \lambda_0 (1 - 0,27 \cdot 10^{-4}) \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = 0,27 \cdot 10^{-4}.$$

*Die Differenz zwischen der Wellenlänge unserer Drahtwelle und der normalen Wellenlänge bei gleicher Schwingungsfrequenz beträgt also weniger als den 30000 Theil der letzteren.*

Da  $\lambda_0$  gleich 30 cm war, so können wir unsere letzte Gleichung auch so schreiben:

$$\lambda_0 - \lambda = 8,1 \cdot 10^{-4}$$

und können sagen:

*Die besagte Differenz ist kleiner als  $\frac{1}{100}$  mm.*



Dividiren wir noch durch  $\tau = 10^{-9}$  und setzen  $\lambda_0 / \tau = V_0$  gleich der Lichtgeschwindigkeit,  $\lambda / \tau = V$  gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unserer Drahtwelle, so ergibt sich:

$$V_0 - V = 8,1 \cdot 10^5 \text{ cm.}$$

*Die Differenz zwischen der Lichtgeschwindigkeit und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unserer Drahtwelle beträgt also nur ca. 8 Kilometer pro Secunde.*

Es ist hiernach klar, dass man bei den heutigen Messmethoden unter den hier vorausgesetzten Verhältnissen durchaus keine Aussicht hat, einen Unterschied zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Drahtwelle und der Lichtgeschwindigkeit experimentell zu constatiren. Immerhin ist es theoretisch interessant, dass ein Unterschied auch unter den hier gemachten Voraussetzungen vorhanden ist und dass man ihn exact berechnen kann.

Wir machen uns ferner die Bedeutung der Grösse von  $\kappa$  klar. Gehen wir um  $z$  Einheiten in der Richtung der abnehmenden  $z$  vorwärts, so sinkt dabei die Amplitude der Schwingung auf den  $e^{-\kappa z}$ ten Werth ihres Betrages. Hiernach giebt

$$z = \frac{1}{\kappa} = \frac{10^9}{2\pi} = 1,60 \cdot 10^5$$

diejenige Wegstrecke an, nach deren Durchlaufung die Welle um  $1/e$  geschwächt ist.

*Die Dämpfung ist in unserem Falle also so schwach, dass sie die Welle erst nach etwas über  $1\frac{1}{2}$  km Weges auf den  $e^{\text{ten}}$  Theil ihrer Amplitude reducirt hat.*

Wir haben damit zwei Thatfachen rechnerisch nachgewiesen und numerisch belegt, die den Physikern längst geläufig sind, nämlich die äusserst geringe Dämpfung der Drahtwellen und die fast genaue Uebereinstimmung ihrer Fortpflanzung mit der Lichtgeschwindigkeit. Man muss sich aber hüten, diese Thatfachen vorschnell zu generalisiren. In der That wird das nächste Beispiel lehren, dass unter anderen Umständen sich wesentlich andere Verhältnisse ergeben können.

Wir bemerken hier nur noch, dass die oben gefundenen Resultate im wesentlichen auch dann bestehen bleiben, wenn wir statt Kupfer einen schlechteren metallischen Leiter, z. B. Platin, wählen,

die übrigen Umstände (Drahtradius, Schwingungsdauer) aber festhalten. In diesem Falle berechnen wir nämlich nach der oben angegebenen Methode für die *Differenz der Wellenlängen*  $\lambda_0 - \lambda$  rund  $\frac{1}{30}$  mm, für die *Wegstrecke, auf der die Amplitude sich auf  $1/e$  reducirt*, rund 0,5 km.

§ 9. **Zweites Beispiel.** Platindraht von 0,004 mm Durchmesser. Schwingungsdauer  $\tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ .

Unser zweites Beispiel wählen wir so, dass es unserem zweiten Grenzfall möglichst nahe kommt.

Wir nehmen einen Leiter, der grösseren Widerstand besitzt wie Kupfer und sich besonders dünn ausziehen lässt, nämlich Platin. Den Radius wählen wir so klein, als er heutzutage irgend hergestellt werden kann, nämlich  $2 \cdot 10^{-4}$  cm.<sup>1)</sup> Die Schwingungsdauer sei grösser wie vorher, nämlich gleich  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ . Alle diese Umstände, namentlich aber die Dünneheit des Drahtes, wirken dahin, die Dämpfung zu vergrössern und die Fortpflanzung gegenüber der Lichtgeschwindigkeit zu verzögern.

Aus  $\tau = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$  folgt zunächst die normale Wellenlänge  $\lambda_0 = 100$  cm und

$$k_1^2 = \left(\frac{2\pi}{100}\right)^2.$$

Die Leitfähigkeit des Platins ist 6,5 mal so gross, wie die des Quecksilbers, also wird im absoluten Maasssystem

$$C = 6,90 \cdot 10^{-5}.$$

Der imaginäre Theil von  $k_2^2$ , gegen welchen der reelle wieder unbedingt vernachlässigt werden kann, wird hiernach

$$-2i(2\pi)^2 \mu_2 \cdot C/\tau = -2i(2\pi)^2 \cdot 2,07 \cdot 10^4.$$

Hieraus folgt

$$k_2 = (1 - i) 2\pi \cdot 144.$$

Nehmen wir an, was sich bestätigen wird, dass  $c$  klein

---

1) In dem physikalischen Laboratorium zu Hannover habe ich sogar noch um die Hälfte dünnere Platindrähte gesehen.

gegen diesen immerhin ziemlich grossen Werth ist, so können wir provisorisch setzen

$$x_2 = \rho k_2 = (1 - i) 4\pi \cdot 1,44 \cdot 10^{-2}, \quad |x_2| = 0,256.$$

Es ist klar, dass wir dem wahren Sachverhalt in diesem Falle nahe kommen werden, wenn wir für  $J(x_2)$  und  $J'(x_2)$  die Näherungswerthe bei kleinem Argumente benutzen.

Dementsprechend setzen wir, wie im Grenzfalle 2 (vgl. p. 255)

$$y = \frac{1}{\gamma^2} \frac{k_2^2 \mu_2}{k_1^2 \mu_1} = \frac{i 10^{-8}}{2(1,78)^2 \cdot 2,07} = 7,62 i 10^{-10},$$

sodass  $y$  eine ausserordentlich kleine Zahl an der Grenze des zweiten Quadranten ist.

Um nun die Wurzel der Gleichung  $x \log x = y$  zu bestimmen, berechnen wir nach der Vorschrift des § 7 die folgenden Näherungswerthe:

$$x^{(0)} = - \quad 7,62 i \cdot 10^{-10}, \quad \text{Lg } x^{(0)} = 20,99 + 1,57 i,$$

$$x^{(1)} = - (0,27 + 3,60 i) 10^{-11}, \quad \text{Lg } x^{(1)} = 24,04 + 1,65 i,$$

$$x^{(2)} = - (0,22 + 3,15 i) 10^{-11}, \quad \text{Lg } x^{(2)} = 24,18 + 1,64 i,$$

$$x^{(3)} = - (0,21 + 3,14 i) 10^{-11}, \quad \text{Lg } x^{(3)} = 24,18 + 1,64 i.$$

Der folgende Werth  $x^{(4)}$  wird dem zuletzt berechneten gleich. Wir haben also

$$x = (- 0,21 - 3,14 i) 10^{-11}.$$

Hieraus berechnet sich

$$x_1 = 2i\gamma \sqrt{x} = (1,46 + 1,36 i) 10^{-5}, \quad |x_1| = 2,00 \cdot 10^{-5}$$

und

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{\rho}\right)^2} = \sqrt{3,95 \cdot 10^{-3} - (0,66 + 9,95 i) 10^{-3}} \\ &= (8,30 - 6,00 i) 10^{-2}. \end{aligned}$$

Dieser Werth von  $c$  ist so klein gegen  $k_2$ , dass wir an dem früher angenommenen Werthe von  $x_2 = \rho k_2$  (statt  $\rho \sqrt{k_2^2 - c^2}$ ) nichts zu corrigiren haben.

Machen wir nun abermals die Probe, indem wir in die exacte Gleichung einsetzen. Die linke Seite lautet, wenn wir

dieselben Näherungsformeln mit Fehlerabschätzung wie im vorigen Paragraphen benutzen:

$$\frac{x_1 K(x_1)}{K'(x_1)} = -x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} (1 + 2\vartheta \cdot 10^{-10})(1 + 3\vartheta \cdot 10^{-9});$$

auf der rechten Seite berechnen wir die Bessel'schen Functionen durch die *beiden* ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung und fügen die dann sich ergebenden Fehlerabschätzungen aus den Gleichungen (a, 2) hinzu; so entsteht:

$$\frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)} = -2 \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} (1 + \vartheta \cdot 10^{-3})(1 + \vartheta \cdot 10^{-3}).$$

Nun stimmen wieder die Ausdrücke vor den Klammern vermöge unserer Wahl von  $x_1$  auf 1 Proc. genau überein. Da überdies die hinzutretenden Klammern um weniger als 1 Proc. von der Einheit abweichen, so sind auch die rechte und linke Seite unserer ursprünglichen Gleichung vom Standpunkte der Genauigkeit von 1 Proc. einander gleich. Wir werden also den oben bestimmten Werth von  $x_1$  bez. von  $c$  als den wahren Wurzelwerth unserer ursprünglichen Gleichung ansehen dürfen.

Die weiteren Schlüsse, die wir aus der Grösse von  $c$  ziehen werden, sind auf den ersten Blick sehr überraschend. Lösen wir nämlich  $c$  in seinen reellen und imaginären Theil auf, so bekommen wir

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 8,30 \cdot 10^{-2}, \quad \alpha = 6,00 \cdot 10^{-2}.$$

Mithin wird

$$\lambda = \frac{200\pi}{8,30} = 75,6,$$

während  $\lambda_0$  gleich 100 angenommen wurde.

*Die Wellenlänge unserer Drahtwelle ist also nur wenig grösser als 75 Proc. der normalen Wellenlänge bei gleicher Schwingungsfrequenz. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist ca. gleich drei Viertel der Lichtgeschwindigkeit!*

An einem so ausserordentlich dünnen Platindrahte, wie wir ihn hier vorausgesetzt haben, muss sich also die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit aufs Deutlichste experimentell darthun. Schwierigkeiten könnte dabei höchstens der grosse Betrag der Dämpfung machen, welcher sich aus dem angegebenen Werthe von  $\alpha$  ergibt.

Es bedeutet nämlich wieder

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{100}{6} = 16,67$$

diejenige Strecke, bei deren Durchlaufung die Amplitude sich auf den  $e^{\text{ten}}$  Theil reducirt.

*Die Dämpfung ist also jetzt so stark, dass sie die Welle bereits nach einem Wege von weniger als 17 cm um  $1/e$  geschwächt hat.*

Diese Resultate bilden das strikteste Gegentheil zu den Resultaten des vorigen Paragraphen und zu den allgemein geltenden Vorstellungen über Drahtwellen. Sie verlieren indessen theilweise ihren paradoxen Charakter, wenn man bedenkt, dass eine Welle von 1 m Wellenlänge, die sich längs eines Platindrahtes von  $2 \cdot 10^{-3}$  mm Radius fortbewegt, sich ebenso verhalten muss, wie eine solche von  $10^3$  m Wellenlänge, welche an einem Drahte von 2 mm Radius und tausendmal schlechter leitendem Material entlang läuft. Dass aber auf eine so lange Welle und auf ein so schlecht leitendes Material die Vorstellungen und Beobachtungen von den kurzen Hertz'schen Wellen und von den guten metallischen Leitern ungeändert übertragen werden können, wird niemand behaupten wollen.

#### § 10. Drittes und viertes Beispiel.

**Platindraht von  $\frac{1}{100}$  und  $\frac{1}{10}$  mm Durchmesser.  $\tau = \frac{1}{3} 10^{-8}$ .**

Wir betrachten nun noch zwei Beispiele, welche gewissermaassen die Brücke schlagen zwischen dem Grenzfall 1 und 2 in §§ 8 und 9. Das Material sei Platin, die normale Wellenlänge  $\lambda_0 = 100$  cm, wie im vorigen Paragraphen. Der Radius des Drahtes aber werde das eine Mal 10, das andere Mal 100 mal so gross genommen, wie im vorigen Falle.

a)  $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ . Wir machen wieder die Annahme, die sich bestätigen wird, dass  $c$  klein gegen  $k_2 = (1 - i) 2\pi \cdot 144$  sei und setzen dementsprechend

$$x_2 = \rho k_2 = (1 - i) 4\pi \cdot 0,144, \quad |x_2| = 2,56.$$

Ferner machen wir wieder provisorisch die  $K(x_1)$ ,  $K'(x_1)$  den Grenzwerten bei kleinem Argumente gleich, während eine entsprechende Vereinfachung für die Functionen  $J(x_2)$ ,  $J'(x_2)$

jetzt offenbar nicht am Platze ist. Unsere transcendente Gleichung schreiben wir daher so:

$$x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} = - \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)}$$

oder

$$x \log x = y, \quad x = \left( \frac{x_1}{2i\gamma} \right)^2, \quad y = - \frac{1}{2\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

Hier berechnen wir  $J(x_2)$  und  $J'(x_2)$  durch die Potenzreihe (a, 1) von p. 244, indem wir diejenigen Glieder (die ersten 5) beibehalten, welche die zweite Decimale noch beeinflussen und uns überzeugen, dass der relative Fehler kleiner ist, also  $10^{-3}$ . Wir erhalten:

$$J(x_2) = 0,35 + 1,51 i,$$

$$J'(x_2) = - \frac{x_2}{2} (0,78 + 0,78 i)$$

und

$$- \frac{x_2}{2} \frac{J(x_2)}{J'(x_2)} = 1,19 + 0,74 i.$$

Hiernach wird

$$y = \frac{1}{\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} (1,19 + 0,74 i) = (- 5,65 + 9,08 i) 10^{-10}.$$

Durch dreimalige Anwendung des oft genannten Processes ergibt sich als Wurzel unserer vereinfachten Gleichung

$$x = (2,20 - 3,91 i) 10^{-11}.$$

Hieraus folgt:

$$x_1 = (1,20 + 2,06 i) 10^{-5}, \quad |x_1| = 2,39 \cdot 10^{-5},$$

$$c = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + (0,89 - 1,56 i) 10^{-2}).$$

Der kleine Werth von  $x_1$  und der geringe Betrag des Verhältnisses  $c^2 : k_2^2$  bringt es mit sich, dass die somit bestimmte Wurzel der vereinfachten Gleichung auch die ursprüngliche Gleichung hinlänglich genau erfüllt, sodass der angegebene Werth von  $c$  als definitiv anzusehen ist.

Setzen wir wieder  $c = (2\pi/\lambda) - i\kappa$ , so wird

$$\lambda_0 - \lambda = \lambda_0 \cdot 0,89 \cdot 10^{-2} = 0,89 = \text{ca. } 9 \text{ mm}$$

und

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot 1,56 \cdot 10^{-2} = 9,79 \cdot 10^{-4}.$$

Jetzt beträgt also die Differenz zwischen der normalen Wellenlänge und der Länge unserer Drahtwelle nur 9 mm. Hinter der Lichtgeschwindigkeit bleibt die Fortpflanzung der Welle um etwas weniger als 3000 Kilometer pro Secunde zurück.

Hand in Hand damit geht ein ziemlich geringer Betrag der Dämpfung, der aus der folgenden Angabe ersichtlich ist:

Die Amplitude der Schwingung ist nach 7 m Weges auf die Hälfte, nach 10 m auf den  $e^{\text{ten}}$  Theil ihres Betrages herabgesunken.

Im Experimente dürfte unter den vorliegenden Verhältnissen die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit noch messbar, die Dämpfung dagegen nicht mehr nachweisbar sein.

b)  $\rho = 2 \cdot 10^{-2}$ , d. h. zehnmal so gross, wie im vorigen Beispiel. Setzen wir voraus, dass  $c$  klein gegen  $k_2$  ausfallen wird, so haben wir

$$x_2 = \rho k_2 = (1 - i) 4\pi \cdot 1,44, \quad |x_2| = 25,6.$$

Unter der weiteren Voraussetzung eines hinreichend kleinen  $|x_1|$  schreiben wir unsere transcendente Gleichung wieder in der vereinfachten Form:

$$x_1^2 \log \frac{2i\gamma}{x_1} = - \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} x_2 \frac{J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

Bei der Berechnung der rechten Seite ergibt sich insofern ein Unterschied gegen den vorherigen Fall, als jetzt wegen des zehnmal grösseren Werthes von  $x_2$  die Anwendung der convergenten Reihe (a, 1) zur Berechnung von  $J$  und  $J'$  sehr unbequem wäre. Deshalb greifen wir auf die semiconvergenten Reihen (d, 3) und (d, 6) zurück. Diese geben mit einem Fehler vom absoluten Betrage  $< 10^{-3}$ :

$$\frac{J(x_2)}{J'(x_2)} = 0,01 - 1,01 i,$$

d. h. bereits nahezu den Werth  $-i$  des Grenzfalles 1, wo wir nur die ersten Glieder der semiconvergenten Entwicklungen zu berücksichtigen brauchten.

Schreiben wir unsere Gleichung wieder in der Form

$$x \log x = y,$$

so wird

$$x = \left( \frac{x_1}{2i\gamma} \right)^2, \quad y = (-0,70 + 0,69 i) 10^{-3}.$$

Als Wurzel dieser Gleichung finden wir nach der uns nunmehr geläufigen Methode

$$x = (3,14 - 3,34 i) 10^{-10}.$$

Der zugehörige Werth von  $c$ , welcher zugleich wieder als Wurzel der ursprünglichen exacten Gleichung angesehen werden darf, lautet:

$$c = \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 + (0,13 - 0,14 i) 10^{-2}).$$

Hieraus folgt

$$\lambda_0 - \lambda = \lambda_0 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ mm}, \quad \alpha = 0,88 \cdot 10^{-4}.$$

*Die Abweichung der Wellenlänge von ihrer normalen Grösse beträgt also jetzt nur noch 1 mm, die Abweichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit 300 km. Nach einem Wege von 79 m ist die Welle auf die Hälfte, nach 114 m auf 1/e ihres Betrages gedämpft.*

Alles in allem haben wir uns mit diesem Beispiele dem Grenzfalle 1 bereits erheblich genähert. So mussten wir hier bei der Berechnung von  $J(x_2)$  und  $J'(x_2)$  die Näherungsformeln für grosse Werthe des Arguments benutzen und kamen dabei zu dem Ergebniss, dass die Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit und die Grösse der Dämpfung wie im Grenzfalle 1) sozusagen unmerklich klein ausfallen.

#### § 11. Allgemeines über die Abhängigkeit der Fortpflanzung und Dämpfung einer Drahtwelle von den Constanten des Problems.

Wir wollen nun auf Grund der vorangehenden Einzelfälle versuchen, uns ein allgemeines Urtheil über die Function zu verschaffen, welche die Fortpflanzung und Dämpfung einer Drahtwelle in ihrer Abhängigkeit von den Daten des Problems darstellt.

Wir haben in den obigen, möglichst verschieden gewählten Beispielen gesehen, dass allemal die Grösse  $x_1 = \rho \sqrt{k_1^2 - c^2}$  eine sehr kleine Zahl ist, die mindestens mit dem Factor  $10^{-4}$  behaftet war. Die Kleinheit rührte entweder davon her, dass  $c$  ausserordentlich wenig von  $k_1$  verschieden war (Grenzfall 1) oder davon, dass  $\rho$  ausserordentlich klein, oder besser gesagt, ausserordentlich klein gegen den in  $k_1$  vorkommenden Nenner  $\lambda_0$  war (Grenzfall 2). Deshalb dürfen wir uns jetzt für berechtigt



halten, allgemein  $K(x_1)$  und  $K'(x_1)$  durch die Näherungsformeln bei kleinem Argument zu ersetzen. Unsere transcendente Gleichung (20) kann dann jedenfalls so geschrieben werden:

$$x \log x = y, \quad x = \left( \frac{x_1}{2i\gamma} \right)^2, \quad y = - \frac{1}{2\gamma^2} \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)}.$$

Die rechte Seite ist vollständig bekannt, wenn wir, was in den sämtlichen vorangehenden Beispielen und überhaupt bei allen metallischen Leitern gestattet ist,  $c^2$  gegen  $k_2^2$  streichen, also  $x_2$  durch  $\rho k_2$  ersetzen. Die Lösung dieser Gleichung lässt sich, wie wir sahen, nur durch einen unendlichen Process darstellen, den wir in die für das Folgende bequeme Form zusammenfassen:

$$x = - \Theta \cdot y, \\ \Theta = \frac{1}{\text{Lg}} \frac{x}{\text{Lg}} \frac{x}{\text{Lg}} \dots, \quad (z = -y, \quad \text{Lg} = -\log).$$

Wir haben damit die Wurzel in einen Factor ( $y$ ) gespalten, der uns in der Hauptsache die Abhängigkeit von den Constanten des Drahtes anzeigt, und einen zweiten ( $\Theta$ ), der sich nur wenig, nämlich logarithmisch ändert, wenn wir die Daten des Problems abändern. In unseren Beispielen schwankt dieser Factor zwischen  $1/20$  und  $1/30$  und ist nahezu reell. Wir werden daher in diesem Paragraphen  $\Theta$  als eine constante reelle Zahl behandeln, wodurch die folgende qualitative Discussion nicht wesentlich fehlerhaft wird.

Aus unserer nunmehrigen Schreibweise von  $x$  folgt weiter:

$$x_1^2 = 4\gamma^2 \Theta y \\ \text{und} \\ (26) \quad c^2 = k_1^2 - \frac{4\gamma^2 \Theta y}{\rho^2} = k_1^2 \left( 1 + \frac{2\Theta \mu_2}{\rho^2 k_2^2 \mu_1} \frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)} \right).$$

Wir müssen nun abermals an die beiden Grenzfälle des § 6 erinnern. In dem einen wurde  $|x_2| = \rho |k_2|$  als hinreichend gross, im anderen als hinreichend klein vorausgesetzt. Lassen wir den Zusatz „hinreichend“ fort, so bekommen wir eine Einteilung der Erscheinungen in zwei Klassen, welche zwar den Zwischenfällen, wo  $|x_2|$  weder sehr gross, noch sehr klein ist,

nicht völlig gerecht wird, welche aber doch eine mehr oder minder zutreffende Uebersicht gestattet.

Führen wir noch die Abkürzung

$$(27) \quad k = 2\pi \sqrt{\frac{\mu C}{\epsilon}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu C}{\lambda_0 A}}$$

ein, so wird nach Gleichung (11) (unter Weglassung des unwesentlichen reellen Bestandtheiles von  $k_2^2$ ):

$$k_2^2 = -2ik^2, \quad k_2 = (1-i)k.$$

Die Unterscheidung zwischen unseren beiden Klassen können wir dann auch nach der Grösse von  $\rho k$ , welche eine reelle absolute Zahl bedeutet, vornehmen und können sagen: Die Fälle, in denen  $\rho k$  gross ist (z. B.  $> 10$ ) rechnen wir der ersten Klasse, die Fälle, wo  $\rho k$  klein ist (z. B.  $< 1$ ) der zweiten Klasse zu. Auf die dazwischen liegenden Fälle sind die folgenden Bemerkungen nicht ohne weiteres anwendbar.

1. Wenn  $\rho k$  und mithin auch  $|x_2|$  gross ist, wird nach Gl. (d, 7)  $J(x_2):J'(x_2) = -i$ ; Gl. (26) ergibt daher, wenn wir  $\mu_1 = 1$  und  $k_1 = 2\pi/\lambda_0$  einsetzen:

$$c^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \left(1 - \frac{2i\Theta\mu_2}{\rho k_2}\right).$$

Da der zweite Term der Klammer klein gegen 1 ist, so können wir die Quadratwurzel nach dem binomischen Satz ausziehen und bekommen

$$c = \frac{2\pi}{\lambda} - i\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i\Theta\mu_2}{\rho k_2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(1 + \frac{\Theta\mu_2}{2\rho k} - i\frac{\Theta\mu_2}{2\rho k}\right).$$

Zerlegen wir in den reellen und imaginären Theil, so ergibt sich

$$(28) \quad \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Theta\mu_2}{2\rho k}, \quad \kappa\lambda_0 = \frac{\pi\Theta\mu_2}{\rho k}.$$

Die Grössen der letzten Formel sind absolute Zahlen, welche das Verhältniss der Wellenlängendifferenz zur Wellenlänge, bez. die Dämpfung pro Wellenlänge bedeuten. Ihr numerischer Werth hängt, wenn wir  $\Theta$  als unveränderlich ansehen dürfen, ausser von der Magnetisirungsconstanten von der Grösse der Zahl  $\rho k$  ab, welche uns bereits die Haupteintheilung in zwei Klassen lieferte. *Da  $\rho k$  als gross vorausgesetzt wurde, sind die beiden Zahlen  $(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0$  und  $\kappa\lambda_0$  in allen zur ersten Klasse gehörigen Fällen klein.* Berücksichtigen wir

noch die in (27) angegebene Bedeutung von  $k$ , so können wir sagen: *Unsere beiden Zahlen sind um so kleiner, je besser unter sonst gleichen Umständen die Leitfähigkeit, je geringer die Magnetisirbarkeit, je kleiner die normale Wellenlänge und namentlich je grösser der Radius des Drahtes ist.*

Um einige specielle Consequenzen zu nennen, würden also bei einem weichen Eisendraht, wenn wir  $\mu_2 = 100$  nehmen und von Erscheinungen wie Hysterese etc. absehen, die fraglichen Zahlen zehnmal so gross sein, wie etwa bei Platindraht. Bei sehr kurzen elektrischen Wellen wird man eine Abweichung von der Lichtgeschwindigkeit etc. schwerer beobachten können wie bei längeren, umsomehr, als für die Messung nicht die relative Wellenlängendifferenz  $(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0$ , sondern die absolute  $\lambda_0 - \lambda$  in Frage kommen dürfte, welche in unserer Formel mit dem Factor  $\lambda_0^{3/2}$  behaftet ist. Die Abhängigkeit der Wellenlängendifferenz von  $\lambda_0$  bestätigt überdies eine frühere Bemerkung, nach der man bei einer nichtharmonischen Schwingung von einem einheitlichen Werthe der Fortpflanzung überhaupt nicht reden kann, vielmehr für jede harmonische Partialschwingung, aus der sich die nichtharmonische Schwingung zusammensetzt, einen je nach der Schwingungsdauer verschiedenen (freilich nur ausserordentlich wenig verschiedenen) Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit findet. Die Abhängigkeit der Wellenlängendifferenz von der Leitfähigkeit  $C$  lässt die Richtigkeit der folgenden Behauptung erkennen, welche man häufig ausgesprochen findet: Dass für vollkommene Leiter ( $C = \infty$ ) die Fortpflanzung gleich der Lichtgeschwindigkeit wird. In der That folgt aus  $C = \infty$  auch  $k = \infty$  und daher nach (28)  $\lambda_0 = \lambda$  und  $V_0 = V$ . Die Art der Abhängigkeit (umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus  $C$ ) kommt zum Vorschein, wenn man Beispiel 1 mit den Angaben vom Schlusse des § 8 vergleicht, wonach für einen Platindraht die Wellenlängendifferenz und Dämpfung ca. dreimal so klein ist, wie unter gleichen Umständen für den Kupferdraht des Beispiels 1, dem Umstande entsprechend, dass die Quadratwurzel aus dem Verhältniss der Leitfähigkeiten beider Metalle gleich  $\sqrt{55}/6,5 = \text{ca. } 3$  ist. Die Abhängigkeit unserer Zahlen von der Dicke des Drahtes endlich, welche die vornehmste ist, da  $\rho$  in der  $(-1)^{\text{ten}}$  Potenz vorkommt, macht sich in unseren früheren

Beispielen aufs Deutlichste geltend. Natürlich darf man aber, wenn man die vorhergehenden Formeln anwenden will,  $\rho$  nur soweit variiren, dass  $\rho k$  eine grosse Zahl bleibt.

Wollen wir eine besonders bequeme Formel haben, so können wir für  $\Theta$  als mittleren Werth etwa  $1/25$  einsetzen und bekommen:

$$(28') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{2\mu_2}{\rho k} 10^{-2} = \frac{1,8}{\rho} \sqrt{\frac{\mu_2 \lambda_0}{C}} 10^{-8}, \\ \kappa \lambda_0 = \frac{1,26 \mu_2}{\rho k} 10^{-1} = \frac{1,1}{\rho} \sqrt{\frac{\mu_2 \lambda_0}{C}} 10^{-7}. \end{array} \right.$$

Dabei ist natürlich zu betonen, dass man ganz zuverlässige Werthe, zumal in den oben genannten Zwischenfällen, nur durch wirkliche Ausrechnung der jedesmaligen transcendenten Gleichung gewinnt.

2. Wenn  $\rho k$  und daher auch  $|x_2|$  als klein angesehen werden kann, haben wir nach § 4a näherungsweise

$$\frac{x_2 J(x_2)}{J'(x_2)} = -2,$$

also nach Gleichung (26)

$$c^2 = k_1^2 \left( 1 - \frac{2i\Theta\mu_2}{\rho^2 k^2} \right).$$

Das Ausziehen der Quadratwurzel durch Reihenentwicklung wäre hier nicht berechtigt, weil die im Nenner vorkommende Grösse  $\rho^2 k^2$  als klein vorausgesetzt wurde, also der Bruch  $\Theta\mu_2/\rho^2 k^2$  möglicherweise von der Grössenordnung 1 sein kann. Wir müssen daher schreiben:

$$(29) \quad \frac{2\pi}{\lambda} - i\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2i\Theta\mu_2}{\rho^2 k^2}}.$$

Obwohl quantitativ verschieden, ist die Abhängigkeit doch qualitativ die nämliche wie vorher. Da nämlich die Abweichung der Fortpflanzung von der Lichtgeschwindigkeit und die Dämpfung nach unserer letzten Formel verschwinden, wenn der mit  $\Theta$  behaftete Factor verschwindet, so werden unsere Zahlen  $(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0$  und  $\kappa \lambda_0$  auch jetzt um so grösser werden, je kleiner die Zahl  $\rho k$  ist, oder, ausführlicher gesagt, je grösser die Magnetisirungsconstante und die normale Wellenlänge und je kleiner der Radius und die Leitfähigkeit des Drahtes ist.

Wir wollen schliesslich noch die Formel (28') auf eine Beobachtungsreihe der Herren Sarasin und de la Rive<sup>1)</sup> anwenden und zusehen, ob die von diesen gefundenen kleinen Differenzen zwischen der Wellenlänge am Draht und der in der Luft durch die vorangehende Theorie erklärt werden können. Die fraglichen Beobachtungen sind in den ersten drei Zeilen angegeben; die nach Formel (28') berechneten Werthe sind in der vierten Zeile enthalten. Der bei den Beobachtungen benutzte Kupferdraht hatte einen Radius von 0,9 mm.

$\lambda_0$	800	600	400	300	232
$\lambda$	768	592	392	292	224
$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$ beob.	$4 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$ ber.	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$

Die beobachteten Differenzen sind, wie man sieht, verglichen mit den berechneten durchweg viel zu gross. Es müssen daher noch anderweitige verzögernde Ursachen vorgelegen haben, die in unserer Theorie nicht berücksichtigt sind.

## § 12. Vertheilung der elektrischen und magnetischen Kraft im Innern und in der Umgebung des Drahtes.

Es wird jetzt leicht sein, ein vollständiges Bild des elektrodynamischen Gesamtzustandes zu gewinnen. Wir setzen dabei die Verhältnisse des Grenzfalles (1) ( $\rho k$  gross) voraus; wo wir numerische Daten geben, greifen wir auf unser erstes Beispiel (Kupferdraht von 4 mm Radius, Wellenlänge gleich 30 cm) zurück.

1. Vor allem ist das schnelle Abnehmen der elektrischen und magnetischen Kraft nach dem Innern des Drahtes hin bemerkenswerth. Um dieses numerisch zu controliren, drücken wir die Kräfte  $Z$ ,  $R$  und  $\Psi$  nach (12) durch  $u_2$  und  $u_2$  nach (16) und (21) durch die Bessel'sche Function  $J$  aus. Dabei wollen wir mit  $Z'$ ,  $R'$  und  $\Psi'$  die unter dem Zeichen  $\Re$  stehenden complexen Grössen unter Absehung von dem gemein-

1) Ed. Sarasin u. L. de la Rive, Arch. de Genève (3) 23. und 29.

samen Factor  $e^{2\pi i t/\tau + i c z}$  bezeichnen. Ausserdem wollen wir sogleich  $c$  gegen  $k_2$  streichen. Wir erhalten dann:

$$Z' = \alpha \frac{J(k_2 r)}{J(k_2 \varrho)}, \quad R' = \frac{i c \alpha}{k_2} \frac{J'(k_2 r)}{J(k_2 \varrho)}, \quad \Psi' = -\frac{i \tau k_2 \alpha}{2 \pi \mu_2 A} \frac{J'(k_2 r)}{J(k_2 \varrho)}.$$

Im Grenzfalle 1 wird das Argument der Bessel'schen Functionen in der Oberfläche und nahe der Oberfläche des Drahtes als gross vorausgesetzt, sodass wir die Näherungsformeln aus § 4, d anwenden können. Beschränken wir uns auf den wesentlichen Bestandtheil dieser Formeln und schreiben wir wie im vorigen Paragraph  $k_2 = (1 - i)k$ , so ergibt sich

$$Z' = \alpha \sqrt{\frac{\varrho}{r}} e^{-(1+i)k(\varrho-r)}, \quad R' = -\frac{c \alpha}{k_2} \sqrt{\frac{\varrho}{r}} e^{-(1+i)k(\varrho-r)},$$

$$\Psi' = \frac{k_2 \alpha}{k_1 \mu_2} \sqrt{\frac{\varrho}{r}} e^{-(1+i)k(\varrho-r)}.$$

Wir bilden nun die absoluten Beträge dieser Grössen, welche bis auf den Dämpfungsfactor

$$|e^{i c z}| = e^{\alpha z}$$

mit den Amplituden von  $Z$ ,  $R$  und  $\Psi$  übereinstimmen und erhalten z. B. für  $|Z'|$

$$|Z'| = |\alpha| \sqrt{\frac{\varrho}{r}} e^{-k(\varrho-r)}.$$

*Die Amplitude der Z-Componenten nimmt also ausserordentlich schnell, nämlich wie eine Exponentialfunction, nach dem Innern zu ab und zwar um so schneller, je grösser  $k$ , d. h. nach Gleichung (27), je besser die Leitfähigkeit und je höher die Schwingungsfrequenz ist. Auch würde etwaige Magnetisirbarkeit des Drahtes die Abnahme beschleunigen.*

Von dem Radius des Drahtes ist die Abnahme unabhängig, solange überhaupt ein Fall der Klasse 1 vorliegt, d. h. solange  $\varrho k$  eine grosse Zahl ist. Ebenso wenig kommt es hier auf den Werth von  $c$  an. Es ist daher verständlich, dass Stefan (vgl. § 1) ohne tieferes Eingehen auf die Differentialgleichungen des Problems und die transcendente Gleichung zur Bestimmung von  $c$  die Abnahme der elektrischen Kraft mit der Tiefe richtig ermitteln konnte.

Numerisch liegen die Dinge in unserem ersten Beispiele (und überhaupt im Grenzfalle 1, falls das Material Kupfer und die Schwingungsdauer  $\tau = 10^{-9}$  ist) folgendermaassen: Nach den Angaben des § 8 wird  $k$  ca. gleich 4800. Sehen wir also von dem langsam veränderlichen Factor  $\sqrt{\rho/r}$  ab, so können wir sagen:

*In der Tiefe von  $\rho - r = 1/480$  mm beträgt die Amplitude nur noch den  $e^{10}$  Theil des in der Oberfläche statthabenden Werthes.*

Eine kleine Rechnung zeigt ferner:

*Auf den hundertsten, zehntausendsten, millionsten Theil ihres Oberflächenwerthes ist die Amplitude bereits in einer Tiefe von weniger als  $1/100$ ,  $2/100$ ,  $3/100$  mm herabgesunken.*

Der  $Z$ -Componente der elektrischen Kraft ist die Componente der Stromstärke in Richtung der  $z$ -Axe proportional. Von dieser gilt also die gleiche Aussage. Dasselbe Gesetz regelt aber auch das Maass, in dem die Amplituden der  $R$ - und  $\Psi$ -Componente mit der Tiefe abnehmen, da sich ja die Grössen  $R'$  und  $\Psi'$  von  $Z'$  nur um einen constanten Factor unterscheiden. Letzterer ist ziemlich klein bei  $R'$ , ziemlich gross bei  $\Psi'$ . Wir sehen also:

*Die radial gerichtete Componente der elektrischen Schwingung ist im Innern des Drahtes klein gegen die axial gerichtete, während die magnetische Kraft gross gegen diese Componente ist. Die Abnahme der Kraft mit zunehmender Tiefe erfolgt bei allen drei Componenten in demselben, oben geschilderten Verhältniss.*

Der ganze Vorgang spielt sich also, soweit er überhaupt merklich, sagen wir  $>1/100$  des Oberflächenwerthes ist, in einer ausserordentlich dünnen *Oberflächenschicht* ab. Die Dicke  $d$  dieser Schicht berechnet sich aus der Gleichung  $k d = \log 100$  und ist etwa gleich  $4,6/k$ .

Alle diese Schlüsse sind ja allerdings aus den Näherungsformeln der Bessel'schen Function  $J(x)$  für grosse Argumentwerthe gezogen. Die Berechtigung hierzu folgt aus unserem Resultat, wonach der Vorgang schon für sehr grosse Werthe des Argumentes  $k_2 r$ , wo unsere Näherungsformeln noch sicher mit grosser Genauigkeit gelten, so gut wie vollständig erlischt und kleine Werthe überhaupt nicht in Betracht gezogen werden brauchen.

Auf den Grenzfall 2, wo  $\rho k$  eine kleine Zahl war, dürfen diese Resultate natürlich nicht ausgedehnt werden. Nehmen wir z. B. nur  $\rho k < 4,6$  so bedeutet dieses nach einer kurz vorher gemachten Bemerkung  $\rho < d$ . *Die Oberflächenschicht hat dann also nicht Platz, sich frei zu entwickeln; es müssen in der Axe des Drahtes gegenseitige Beeinflussungen stattfinden, welche den Charakter des ganzen Vorganges verändern.* Hierin können wir einen plausibeln Grund dafür erblicken, weshalb im Grenzfall 2 messbare Abweichungen der Fortpflanzung von der Lichtgeschwindigkeit vorkommen.

2. Ganz anders wie im Innern liegen die Verhältnisse ausserhalb des Drahtes. Die für unsere Discussion wesentlichen Bestandtheile  $Z$ ,  $R$ ,  $\Psi$  der drei Kraftcomponenten sind hier nach den Gleichungen (12), (16) und (21):

$$Z' = \alpha \frac{K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r)}{K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho)}, \quad R' = \frac{i c \alpha}{\sqrt{k_1^2 - c^2}} \frac{K'(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r)}{K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho)},$$

$$\Psi' = - \frac{i k_1 \alpha}{\sqrt{k_1^2 - c^2}} \frac{K'(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r)}{K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho)}.$$

Nun war, wie wir sahen,  $x_1 = \rho \sqrt{k_1^2 - c^2}$  unter allen Umständen (und zwar sowohl im Grenzfall 1 wie 2) eine sehr kleine Zahl, welche mindestens mit dem Factor  $10^{-4}$  behaftet war. Ebenso wird  $r \sqrt{k_1^2 - c^2}$  selbst dann noch als kleine Zahl behandelt werden dürfen, wenn  $r$  bis hundertmal grösser als  $\rho$  genommen wird. Infolge dessen werden wir unter der Voraussetzung  $r \leq 100 \rho$  die Näherungsformeln aus § 4, c anwenden können und erhalten:

$$Z' = \alpha \left( 1 - L \log \frac{r}{\rho} \right), \quad R' = - \frac{i c \alpha L}{k_1^2 - c^2} \frac{1}{r}, \quad \Psi' = \frac{i k_1 \alpha L}{k_1^2 - c^2} \frac{1}{r},$$

wobei die Constante  $L$  zur Abkürzung für

$$1/K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho) = 1/\log \frac{2 i \gamma}{\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \rho}$$

gesetzt ist und als das Reciproke des Logarithmus einer sehr grossen Zahl selbst eine mässig kleine Grösse bedeutet. Nehmen wir den absoluten Betrag von  $Z$ ,  $R$  und  $\Psi$ , so bekommen wir (bis auf den unwesentlichen Factor  $e^{\pm z}$ ) die Schwingungs-



amplituden der betreffenden Componenten. Wir sehen nun aus der Form der vorstehenden Ausdrücke:

*Ausserhalb des Drahtes nimmt die Amplitude mit wachsender Entfernung von der Oberfläche ziemlich langsam ab, nämlich bei  $R$  und  $\Psi$  umgekehrt proportional der Entfernung, bei  $Z$  sogar nur logarithmisch.*

So sind z. B. in der Entfernung  $r = 100 \rho$  die Amplituden von  $R$  und  $\Psi$  auf den hundertsten Theil ihres Oberflächenwerthes herabgesunken; gleichzeitig rechnet man unter den Verhältnissen des ersten Beispiels unschwer aus, dass die Amplitude von  $Z$  für  $r = 100 \rho$  sogar noch ungefähr die Hälfte ihres Werthes bei  $r = \rho$  besitzt.

In sehr viel grösserer Entfernung vom Drahte treten natürlich die exponentiellen Näherungsformeln für grosse Werthe des Argumentes in ihr Recht, welche eine schnellere Abnahme der Amplituden bewirken. Indessen tritt dies erst für solche Entfernungen von der Drahtoberfläche ein, für die der Vorgang ohnehin unmerklich geworden ist.

Diese Aussagen gelten auch noch im Falle unseres zweiten Beispiels, des „Grenzfalles 2“; nur wird hier das Gebiet  $r \leq 100 \rho$ , für welches die vorstehenden Näherungsformeln aufgestellt waren, wegen des ausserordentlich kleinen Werthes von  $\rho$  auf die nächste Umgebung des Drahtes zusammenschrumpfen.

3. Von Interesse ist sodann das Grössenverhältniss der radialen elektrischen Componente  $R$  zu der axialen  $Z$  ausserhalb des Drahtes. Die Amplitude von  $R$  hat im Nenner den ausserordentlich kleinen Factor  $|k_1^2 - c^2|$  der bei  $|Z|$  fehlt. Infolge dessen wird  $|Z|$  von  $|R|$  im allgemeinen ganz erheblich an Grösse übertroffen werden. Z. B. berechnen wir in unserem ersten Beispiele für  $r = \rho$ :

$$|Z| = |\alpha| |R| = \frac{|\alpha| |c| |L|}{|k_1^2 - c^2|} \frac{1}{\rho} = |\alpha| \cdot 3,5 \cdot 10^4.$$

Bekanntlich liefert das jeweilige Verhältniss  $Z : R$  die Richtung der durch den gerade betrachteten Punkt zu der gerade betrachteten Zeit hindurchlaufenden elektrischen Kraftlinie. Obwohl dieses Verhältniss auch von der Phasendifferenz der  $Z$ - und  $R$ -Schwingung sowie von der Zeit abhängt, so er-

kennen wir doch schon allein aus dem Grössenverhältniss der Amplituden  $|Z|$  und  $|R|$ , dass  $Z:R$  im allgemeinen sehr klein sein, d. h. dass die Kraftlinien auf der Oberfläche des Drahtes nahezu senkrecht stehen werden. (Allerdings giebt es in jedem Intervall von der Länge  $\frac{1}{2} \lambda$  eine Stelle, wo  $R = 0$  wird, in deren Umgebung also die Kraftlinien einen sehr kleinen Winkel gegen die Oberfläche des Drahtes bilden. Aber in unmittelbarer Nachbarschaft dieser Stelle richtet sich wegen des überwiegenden Werthes von  $|R|$  die Kraftlinie bereits wieder nahezu senkrecht.) In unserem ersten Beispiele beträgt die durchschnittliche Abweichung der Kraftlinienrichtung von der senkrechten Lage, wie man aus den zuletzt angegebenen Zahlen leicht ersieht, weniger als 1'. Nehmen wir hinzu, was oben über das Grössenverhältniss der Amplituden von  $Z$  und  $R$  im Innern des Drahtes gesagt wurde, so erkennen wir:

*Nach aussen hin verlaufen die elektrischen Kraftlinien von der Oberfläche des Drahtes aus durchschnittlich sehr nahezu senkrecht, nach innen hin sehr nahezu tangential.*

Dies gilt jedoch durchaus nicht mehr in dem Grenzfall 2, wo  $\rho k$  eine kleine Zahl war. So ist in unserem zweiten Beispiele, wo die Abweichung der Fortpflanzungs- von der Lichtgeschwindigkeit sehr erheblich war, auch von einer angenähert senkrechten Lage der äusseren Kraftlinien gegen die Drahtoberfläche keine Rede mehr, wie man leicht nachrechnen kann.

4. Zur weiteren Veranschaulichung des Vorganges geben wir in den Figuren 2 bis 5 eine graphische Darstellung der Amplituden  $|Z|$ ,  $|R|$  und  $|\Psi|$  und der elektrischen Kraftlinien im Anschluss an die numerischen Daten unseres ersten Beispiels.

In den Figuren 2 bis 4 bedeutet die Abscisse den Abstand  $r - \rho$  von der Oberfläche des Drahtes. Dabei mussten wir (wegen der ausserordentlich schnellen Abnahme der Kraft nach dem Innern und der relativ langsamen Abnahme nach dem Aeusseren hin), um deutliche Figuren zu erhalten, innerhalb einen anderen Maassstab zu Grunde legen wie ausserhalb. In der Zeichnung beträgt das Verhältniss der Längeneinheiten  $10^4$ , sodass dieselbe Strecke, welche im Aeusseren ( $r > \rho$ )  $100 \rho$  bedeutet, im Inneren ( $r < \rho$ ) nur  $1 / 100 \rho$  darstellt.

Ferner musste auch auf der Ordinatenaxe (wegen des ausserordentlich kleinen Werthes von  $|Z|/|R|$  und  $|Z|/|\Psi|$  im Aeusseren des Drahtes) in Fig. 2 mit einem anderen Maassstab gemessen werden, wie in Figg. 3 und 4. Die Maassstabsverkleinerung beim Uebergang von Fig. 2 zu Fig. 3 und 4 beträgt abermals  $10^4$ .

Die wahren Grössenverhältnisse wird man hiernach erhalten, wenn man die Figuren 2 bis 4 nach rechts hin von  $r = \rho$  ab auf das Hundertfache auseinandergezogen, nach links hin auf das Hundertfache zusammengeschoben, und wenn man überdies Figg. 3 und 4 nach oben hin auf das Zehntausendfache gestreckt denkt. Darauthin wird man in den folgenden Figuren unsere früheren Angaben über den Verlauf der Kraftcomponenten wiederfinden.

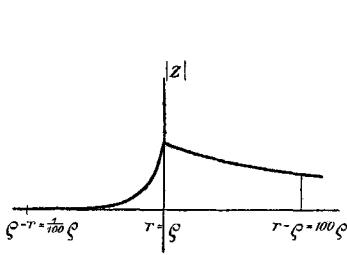


Fig. 2.

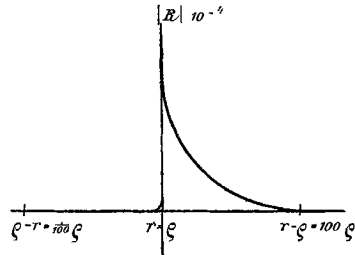


Fig. 3.

In Fig. 2 nimmt die Amplitude der  $Z$ -Componente ausserhalb des Drahtes von  $r = \rho$  bis  $r = 100 \rho$  nur ungefähr um die Hälfte ihres Werthes ab. Innerhalb des Drahtes dagegen sinkt sie nach früherem von  $r = \rho$  bis  $\rho - r = \rho / 100$  bereits bis auf den zehntausendsten Theil, so dass die Curve hier bereits mit der Abscissenaxe vollständig zusammenfällt. Für  $r = \rho$  schliessen sich die beiden Aeste  $r > \rho$  und  $r < \rho$  stetig aneinander, da nach der Grenzbedingung die zur Drahtoberfläche tangential elektrische Componente auf beiden Seiten gleich sein muss.

In Fig. 3 ist der das Aeussere charakterisirende Curvenast eine gleichseitige Hyperbel, entsprechend der oben gegebenen Formel  $|R| = \text{const.}/r$ . Für  $r = 100 \rho$  beträgt die Ordinate der Curve den hundertsten Theil der für  $r = \rho$  gezeichneten Ordinate; für  $r = \rho$  steht die Tangente nahezu vertical. Der auf das Innere des Drahtes bezügliche Ast der

$R$ -Componente ist von absolut verschwindenden Dimensionen, weil, wie wir sahen, im Innern  $|R|$  klein gegen  $|Z|$  ist. Für  $r = \varrho$  schliessen sich die beiden Aeste durchaus nicht stetig aneinander an, was ja in der That bei einer zur Oberfläche senkrechten Componente nicht erforderlich ist. Den Sprung in den Werthen von  $R$  beim Uebergang vom Aeusseren nach dem Inneren kann man als elektrische Ladung der Drahtoberfläche ansprechen.

In Fig. 4 verläuft die Curve für  $r > \varrho$  ebenso wie in Fig. 3. Für  $r < \varrho$  dagegen erscheint die Curve gegen Fig. 3

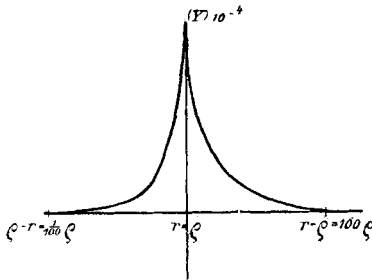


Fig. 4.

soweit vergrössert, dass ein stetiger Anschluss des äusseren und des inneren Astes in der Oberfläche des Drahtes stattfindet. Auch hier ist die Abnahme nach innen so stark, dass beispielsweise für  $\varrho - r = \varrho / 100$  die Grösse der Ordinate nur noch den zehntausendsten Theil der Oberflächenordinate beträgt.

In Fig. 5 endlich haben wir den Verlauf der elektrischen Kraftlinien in einer beliebigen, durch die Axe des Drahtes gelegten Meridianebene dargestellt.

Man leitet diese, wie bereits Hertz<sup>1)</sup> bemerkt hat, aus der charakteristischen Function  $II$  am bequemsten folgendermaassen ab. Nach Gleichung (5) und (6) können wir schreiben:

$$Z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r}, \quad R = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} r \frac{\partial II}{\partial r};$$

mithin haben wir:

$$Z/R = - \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial II}{\partial r} / \frac{\partial}{\partial x} r \frac{\partial II}{\partial r}.$$

Die Richtung  $Z/R$ , d. i. die Richtung der elektrischen Kraftlinien, stimmt hiernach überall überein mit der Richtung der in der gerade betrachteten Meridianebene verlaufenden Curven  $r(\partial II / \partial r) = \text{const.}$  Auf Grund der Gleichungen (9),

1) H. Hertz, Ges. Werke 2. Abh. 9. p. 150. 1888.

(16) und (21) sind also die Kraftlinien zu einer bestimmten Zeit  $t_0$  innerhalb bez. ausserhalb des Drahtes gegeben durch:

$$r \operatorname{Re} \left\{ e^{2\pi i t_0/\tau + 2\pi i z/\lambda + \kappa z} \frac{\alpha}{\sqrt{k_2^2 - c^2}} \frac{J'(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot r)}{J(\sqrt{k_2^2 - c^2} \cdot \varrho)} \right\} = \text{const.}$$

bez.

$$r \operatorname{Re} \left\{ e^{2\pi i t_0/\tau + 2\pi i z/\lambda + \kappa z} \frac{\alpha}{\sqrt{k_1^2 - c^2}} \frac{K'(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot r)}{K(\sqrt{k_1^2 - c^2} \cdot \varrho)} \right\} = \text{const.}$$

Setzt man hier für die Bessel'schen Functionen die geeigneten Näherungsformeln ein, so gewinnt man, allerdings nicht ohne einige Weitläufigkeit, das nebenstehende Kraftliniendiagramm, welches wiederum den numerischen Verhältnissen des Beispiels 1 entspricht. Auf der Ordinatenaxe und den ausserhalb des Drahtes gelegenen Partien der Abscissenaxe ist mit demselben Maassstab, dagegen auf dem nach innen gerichteten Theile der

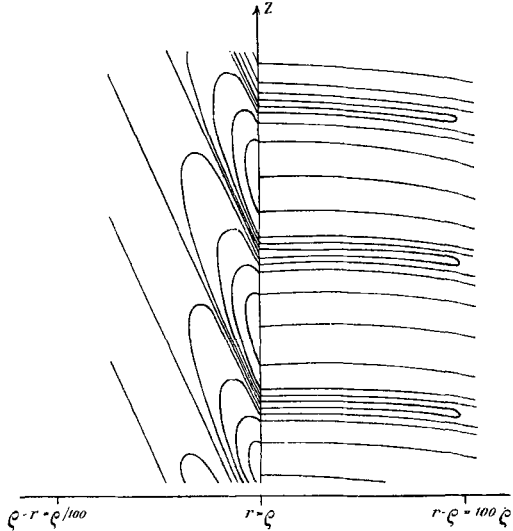


Fig. 5.

Abscissenaxe mit einem um  $10^{-4}$  verkleinerten Maassstabe gemessen. Trotz der sich hieraus ergebenden sehr starken Vergrösserung der Figur in Richtung des Drahradius sieht man die Kraftlinien im Innern des Drahtes als ziemlich flache Einstülpungen verlaufen, die zwischen je zwei Kraftlinien von annähernd geradliniger Gestalt eingebettet sind. Die letzteren schliessen mit der  $z$ -Axe Winkel ein, dessen Tangente in Wirklichkeit nur  $1/23000$ , einen bei der Wahl unseres Maassstabes also  $1/2,3$  beträgt. Der in Richtung der  $z$ -Axe gemessene Abstand je zweier solcher Kraftlinien beträgt eine halbe Wellenlänge. Aus dem ausserordentlich flachen Verlauf dieser Geraden erkennt man bei-

läufig, wie schnell die Phase der Schwingung mit dem Abstände von der Oberfläche wechselt. In der That gelangt man nach dem Passiren jeder dieser Geraden in ein Gebiet, in welchem die umgekehrte Phase herrscht wie vor demselben. Da die Welle in Richtung der negativen  $z$ -Axe, d. h. in der Figur von oben nach unten fortschreitet, so haben die Kraftlinien, wie wir sagen können, im Innern des Drahtes die Tendenz, hinter der Wellenfront an der Oberfläche zurückzubleiben.

Unsere Figur zeigt ferner, dass die nach aussen verlaufende Kraftlinien, wie schon mehrfach bemerkt, auf der Drahtoberfläche sehr nahezu senkrecht stehen. (In der Fig. 5 ist sogar die Abweichung von der senkrechten Richtung noch etwas übertrieben.) Die Abweichung findet in dem Sinne statt, dass die Kraftlinien ausserhalb gegenüber den an die Drahtoberfläche anstossenden Partien etwas voranzueilen scheinen. Auch in sehr grossen Entfernungen von der Drahtoberfläche, welche hier nicht mitgezeichnet sind, beträgt die Abweichung von der senkrechten Richtung wenig mehr, wie in der Nähe des Drahtes. Auf jede halbe Wellenlänge kommt eine Kraftlinie, welche sich ins Unendliche verliert, ohne zu dem Drahte zurückzukehren. Die übrigen schliessen sich paarweise zusammen, wobei sie im allgemeinen einen sehr weiten Weg machen. In der Figur konnte auf jedes Intervall  $\lambda/2$  nur eine Kraftlinie gezeichnet werden, welche innerhalb des Gebietes  $r - \rho < 100\rho$  umbiegt und zum Drahte zurückkehrt. Der von dieser Linie umschlossene, äusserst schmale Streifen ist von ähnlich verlaufenden Linien durchfurcht zu denken. Im allgemeinen können die Kraftlinien ausserhalb des Drahtes als Ausstülpungen beschrieben werden, welche entweder sehr lang, oder, wie die zuletzt genannten, sehr schmal sind.

Die magnetischen Kraftlinien verlaufen offenbar in Kreisen um die Drahtaxe herum.

Das ganze Kraftliniensystem schiebt sich natürlich mit der etwas unterhalb der Lichtgeschwindigkeit gelegenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $V$  unter unwesentlichen, nur durch die örtliche Dämpfung hervorgerufenen Gestaltsveränderungen längs des Drahtes fort.

## § 13. Resultate und anschliessende Desiderata.

Wir haben im Vorstehenden die Fortpflanzung und Vertheilung einer periodischen und harmonischen elektrodynamischen Störung in der Umgebung eines beiderseits unendlichen Drahtes von geradliniger Axe und kreisförmigem Querschnitt studirt. Die Differentialgleichungen für die elektrischen und magnetischen Kraftcomponenten im Innern und Aeussern des Drahtes liessen sich leicht integriren und führten auf Bessel'sche Functionen. Wenn wir die Möglichkeit einer die Lichtgeschwindigkeit übertreffenden Fortpflanzung ohne Dämpfung ausschlossen, welche eine im Experiment nicht vorhandene radiale Energiezufuhr aus dem Unendlichen voraussetzen würde, so lieferten die Oberflächenbedingungen eine transcendente Gleichung, deren Wurzel die Wellenlänge  $\lambda$  (und damit zugleich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $\lambda/\tau$ ) der Drahtwelle, sowie die Constante der örtlichen Dämpfung  $\kappa$  in der complexen Verbindung  $(2\pi/\lambda) - i\kappa$  bestimmte. Die Discussion dieser transcendenten Gleichung machte es nöthig, zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem die Zahl  $\rho k$  ( $\rho =$  Drahtradius,  $k = 2\pi\sqrt{C\mu/\tau}$ ,  $C =$  elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit,  $\mu =$  Magnetisirungsconstante,  $\tau =$  Schwingungsdauer) gross oder klein war. Der erste Fall tritt bei metallischen Leitern in der Regel ein, nämlich immer dann, wenn die Schwingung nicht zu langsam erfolgt und der Draht nicht zu dünn ist. In beiden Fällen liess sich die ursprünglich sehr complicirte transcendente Gleichung so vereinfachen, dass sie durch einen zwar nicht abbrechenden, aber schnell convergenten Process gelöst werden konnte. Im ersten Falle entsprach die Lösung den allgemein verbreiteten Vorstellungen über die Natur der Drahtwellen: Die Abweichung der Fortpflanzung von der Lichtgeschwindigkeit, sowie die Dämpfung der Welle beim Fortschreiten längs des Drahtes waren sehr gering, und zwar um so geringer, je grösser  $\rho k$  war. So ergab sich bei einem Kupferdraht von 4 mm Dicke und einer Schwingungsfrequenz von  $10^9$  pro Secunde, dass die Drahtwelle hinter der Lichtgeschwindigkeit nur um 8 km zurückblieb und dass sie erst nach  $1\frac{1}{2}$  km Weges auf den  $e^{\text{ten}}$  Theil ihres Werthes gedämpft wurde. Im zweiten Falle dagegen konnte die Ab-

weichung von der Lichtgeschwindigkeit sehr erheblich werden; gleichzeitig wurde auch die Dämpfung viel stärker, beides in um so höherem Grade, je kleiner  $\rho k$  war. Z. B. wurde bei einem Platindraht von  $\frac{4}{1000}$  mm Durchmesser und bei einer Schwingungsfrequenz von  $3 \cdot 10^8$  pro Secunde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nahezu gleich drei Viertel der Lichtgeschwindigkeit und die Dämpfung so stark, dass sie die Schwingungsamplitude schon nach einem Wege von 17 cm auf den  $e^{\text{ten}}$  Theil reducirt. Natürlich giebt es zwischen den Fällen 1 und 2 eine continuirliche Folge von Uebergängen. Auch die Vertheilung der elektrischen und magnetischen Kräfte entsprach im Falle 1 und widersprach im Falle 2 den darüber verbreiteten Vorstellungen. Im Falle 1 nehmen die Kräfte von der Oberfläche aus nach innen hin sehr rasch ab. Der ganze Vorgang, soweit er nicht unter den hundertsten Theil der Oberflächenintensität herabgesunken ist, spielt sich in einer Schicht von der Dicke  $4,6/k$ , d. i. bei Kupferdraht und einer Schwingungsfrequenz von  $10^9$  pro Secunde, in einer Schicht von der Dicke  $< \frac{1}{100}$  mm ab. Nach aussen hin nehmen die Kräfte ziemlich langsam ab. Im Innern stehen die elektrischen Kraftlinien nahezu tangential, im Aeussern fast genau senkrecht zur Drahtoberfläche. Im Falle 2 dagegen kann sich die genannte Oberflächenschicht, weil der Draht zu dünn ist, nicht frei entwickeln. Die Kraftlinien verlaufen nach aussen hin auch nicht näherungsweise senkrecht zum Drahte.

In allen Fällen, wo  $\rho k$  gross ist, konnten wir sonach die bisher durch Theorie und Experiment gewonnenen Anschauungen bestätigen, bez. durch genaue numerische Angaben präcisiren. Gleichzeitig konnten wir durch Betrachtung der Fälle, wo  $\rho k$  klein ist, die Grenzen für die Richtigkeit dieser Anschauungen festlegen.

Zum Schluss mögen eine Reihe hier nicht erledigter Fragen namhaft gemacht werden.

1. Während wir einen einzigen unendlich langen Draht voraussetzten und uns um die Zurückleitung der Welle nicht kümmerten, benutzt man im Experimente zwei parallele Drähte, welche durch eine Brücke verbunden sind. Den Einfluss dieser Anordnung auf Fortpflanzung und Dämpfung mathematisch exact festzustellen, dürfte sehr schwer sein. Am ehesten



möchte dieses angehen, wenn man den Draht als Parabel gebogen annimmt. Je nachdem man dann den Parameter der Parabel gross oder klein voraussetzt, erhält man den Fall eines einzigen oder zweier in geringem Abstände parallel laufender Drähte.

2. Die Stelle, an welcher die Wellen erregt werden, ein etwaiges freies Ende des Drahtes, ein in das Feld gebrachter Resonator würden Störungen hervorrufen, von denen wir hier abgesehen haben und deren exacte Behandlung neue und zum Theil sehr erhebliche mathematische Schwierigkeiten bereiten würden.

3. Während wir hier ausschliesslich periodische Zustände betrachteten, könnte man andererseits nach dem Ablauf einer einmaligen Störung fragen, oder man könnte allgemeiner die aus einem beliebig vorgeschriebenen Anfangszustande der elektrischen und magnetischen Kraft resultirenden Vorgänge untersuchen. Z. B. liesse sich so das allmähliche Entstehen eines stationären elektrischen Stromes im einzelnen verfolgen. Die Schwierigkeit würde hierbei weniger in der Aufstellung hinreichend allgemeiner Formeln, als in deren Discussion und übersichtlichen Zusammenfassung liegen.

4. Neben den metallischen wird man auch flüssige Leiter (z. B. Schwefelsäure in einer dünnen Glasröhre) zu behandeln wünschen. Es scheint, dass sich diese nicht unter einen der hier unterschiedenen beiden Hauptfälle einordnen, sondern für die Discussion unserer transcendenten Gleichung neue Verhältnisse schaffen.

5. Umgibt man den metallischen Draht statt mit Luft mit einem anderen Dielectricum oder auch mit einem schlechten Leiter, so gelten unsere Formeln im wesentlichen un geändert fort.

6. Wir haben nur bewiesen, dass unsere transcendenten Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt stets eine, aber nicht, dass sie nur eine brauchbare Wurzel besitzt, und haben überhaupt keinen Eindeutigkeitsbeweis erbracht. Der Vergleich mit den akustischen Schwingungen lässt es nicht ganz ausgeschlossen erscheinen, dass neben dem hier gefundenen noch andere Werthe der Wellenlänge existiren könnten oder dass eine den freien Schwingungen der Akustik analoge Be-

wegung sich den hier betrachteten erzwungenen Schwingungen überlagern könnte.

7. Eine experimentelle Bestätigung der Differenz zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen und der Lichtgeschwindigkeit scheint in den bisherigen Beobachtungen nicht vorzuliegen (vgl. die Bemerkungen von p. 277 über die Beobachtungen von Sarasin und de la Rive). Es kann aber kein Zweifel sein, dass eigens zu diesem Zwecke angestellte und von der Theorie geleitete Experimente die Voraussagungen der Theorie bestätigen müssen.

Clausthal, im November 1898.

(Eingegangen 22. November 1898.)

---