V. *Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere; von J. Stefan.*

(Aus den Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 98, Abth. IIa. vom 4. Juli 1889; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Von mehreren polaren Expeditionen wurden Messungen über das Wachsen des Eises im Laufe des Winters angestellt. In den Contributions to our knowledge of the Meteorology of the arctic regions, vol. I, London 1885, sind solche Beobachtungsreihen mitgetheilt, welche im Gulf of Boothia (1829—32), in der Assistance Bay (1850—51), in Port Bowen (1824—25), in der Balker Bay (1851—52), Cambridge Bay (1852—53), Camden Bay (1853—54), auf den Princess Royal-Inseln (1850—51) und in der Mercy Bay (1851—53) ausgeführt worden sind. Die zweite deutsche Nordpolfahrt in den Jahren 1869—70 hat ebenfalls solche Messungen vorgenommen und die Resultate in dem zweiten Bande ihres Berichtes (Leipzig 1874) veröffentlicht. Der verehrte College Hr. J. Hann hatte die Güte, mich auf diese Publicationen aufmerksam zu machen und mir dieselben mitzutheilen.

Die Eisbildung ist ein Vorgang des Wachsthums, dessen Bedingungen genau angegeben werden können. Die Theorie dieses Wachsthums bildet ein Problem der Theorie der Wärmeleitung von besonderer Art. In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich zuerst eine solche Aufgabe behandelt. Dieselbe bezieht sich auf folgenden Fall.

Es sei eine ausgedehnte Wassermasse gleichförmig auf die Temperatur ihres Gefrierpunktes abgekühlt. Fällt die Temperatur der Luft über ihr auf a Grade unter den Gefrierpunkt des Wassers und bleibt unveränderlich auf diesem Stande, so beginnt gleichzeitig an der Oberfläche des Wassers die Eisbildung, und diese schreitet nach unten fort, sodass die Eisschichte mit wachsender Zeit immer dicker

---

1) J. Stefan, Wien. Ber. 98. Abth. IIa. p. 473. 1889.

wird. Die Dicke des Eises ist durch eine sehr einfache Formel bestimmt. Dieselbe ist der Quadratwurzel aus der Zeit, welche seit dem Beginne der Eisbildung verflossen ist, proportional.

Zu diesem Gesetze und auch zu einem angenäherten Werthe der in ihm enthaltenen Constanten führt aber auch eine ganz elementare Betrachtung. Es genügt, anzunehmen, dass die Kälte innerhalb der Eisdecke von dem Werthe a, den sie in der Oberfläche hat, bis zum Gefrierpunkte an der unteren Begrenzungsebene des Eises nach dem Gesetze einer geraden Linie abfalle. Nimmt man den Gefrierpunkt als Nullpunkt der Kältescala an und bezeichnet die Dicke des Eises zur Zeit t mit h, so ist $a:h$ das Gefälle der Kälte. Bedeutet K das Wärmeleitungsvermögen des Eises, so ist $Ka/h.dt$ die Wärmemenge, welche in der Zeit dt durch das Eis dem Wasser entzogen und an die Oberfläche geführt oder, was dasselbe bedeutet, die Kältemenge, welche durch das Eis dem Wasser zugeführt wird. Diese Kältemenge erzeugt eine Schichte Eis von der Dicke dh und ist:

$$(1)\qquad \lambda\sigma dh = \frac{Ka}{h}dt.$$

λ bedeutet die latente Wärme, σ das specifische Gewicht des Eises. Aus dieser Gleichung folgt:

$$(2)\qquad h^2 = \frac{2Kat}{\lambda\sigma}.$$

Die exacte Behandlung der Aufgabe liefert für den Factor von t in dieser Formel einen etwas kleineren Werth. Die Annahme des linearen Abfalles der Kälte entspricht eben nur annähernd den thatsächlichen Verhältnissen. Das Gefälle der Kälte ist in der Wirklichkeit an der Oberfläche grösser, als an der Berührungsfläche von Wasser und Eis. Das letztere Gefälle bestimmt die Geschwindigkeit des Wachsthums des Eises. Mit diesem Wachsthum ist aber zugleich eine weitere Abkühlung der voranliegenden Eisschichten verbunden und um die dazu erforderliche Kältemenge ist das Gefälle der Kälte an der Oberfläche grösser. Dass die Annahme des constanten Gefälles eine für viele Fälle ausreichende Approximation bietet, ist aber darin begründet, dass die specifische Wärme des Eises $c = 0{,}5$ gegen seine latente

Wärme $\lambda = 79$ eine kleine Grösse ist. Die zur Abkühlung des Eises nöthige Kälte ist also auch klein gegen diejenige, welche zur Bildung desselben erforderlich ist.

Der Fehler, welchen man bei der Anwendung der Formel (2) begeht, ist um so geringer, je kleiner a ist. Es ist aber selbst für $a = 30^0$ C. der Factor von t in der Formel nur um 6 Proc. zu gross; die nach dieser Formel berechnete Eisdicke würde also den wahren Werth nur um 3 Proc. übersteigen.

Der Fall, auf welchen sich die Beobachtungen über die Eisbildung im Polarmeere beziehen, ist jedoch viel complicirter, als der eben behandelte. Die Temperatur der Oberfläche ist nicht constant, sondern in der Weise veränderlich, dass die Kälte mit dem Nullwerthe beginnt, allmählich bis zu einem Maximum steigt und dann etwas rascher, als der Anstieg war, wieder bis zum Nullwerthe herabsinkt. Neben der einen Ursache, welche in dem vorhin betrachteten Falle die Abweichung des Kältegefälles von dem Gesetze der geraden Linie bedingte, gibt es nun noch die zweite, dass die Veränderungen der Temperatur an der Oberfläche sich nicht plötzlich in der ganzen Eismasse in der ihrem Betrage entsprechenden Weise fühlbar machen, sondern in den tieferen Schichten später, als in den oberen. Bei zunehmender Kälte ist auch aus diesem zweiten Grunde ihr Gefälle an der Oberfläche grösser, als an der unteren Grenzfläche des Eises. Mit wachsender Eisdicke nimmt diese Differenz zu, sie wird aber später, wenn die Kälte ihrem Maximum nahe kommt, wieder geringer, weil dann die Variationen der Kälte selbst klein werden.

Die deutsche Expedition hat auch Messungen über die Temperatur des Eises in verschiedenen Tiefen desselben angestellt, aus welchen das Kältegefälle in diesen Tiefen abgeleitet werden kann. Am 11. November wurde die Temperatur an der Oberfläche des Eises $= -17{,}2$ R. beobachtet, in den Tiefen von 8, 12, 14, 24 Zoll wurden die Temperaturen $-14{,}6$, $-11{,}6$, $-8{,}3$, $-4{,}2$ gefunden. Die gesammte Eisdicke betrug 31 Zoll, die Temperatur des Meerwassers $-1{,}7$ R. Daraus folgen für das Gefälle der Kälte der Reihe nach die Zahlen 0,325, 0,750, 0,550, 0,683, 0,343. Am

24. November wurden an der Oberfläche und in den Tiefen von 7,5, 13, 16,5, 23, 27,5, 30 Zollen die Temperaturen — 14,2, — 11,2, — 8,7, — 6,9, — 5,4, — 4,7, — 3,6 beobachtet. Die gesammte Eisdicke betrug 36,5 Zoll. Für das Gefälle erhält man daraus die Zahlen 0,400, 0,455, 0,327, 0,333, 0,155, 0,440, 0,293. Man sieht aus dieser und der früheren Reihe, dass die Annahme eines constanten Gefälles der Kälte mit den Beobachtungen, die ja eine grosse Genauigkeit nicht besitzen können, in angenäherter Uebereinstimmung steht. Grösser sind die Abweichungen einer späteren Beobachtungsreihe vom 18. Februar. An der Oberfläche und in den Tiefen von 14,4, 19, 35,9, 45,6 und 50,6 Zollen wurden die Temperaturen — 21,7, — 17,4, — 15,9, — 10,9, — 9,8 und — 7,2 gefunden. Die Dicke des Eises war 57 Zoll. Daraus erhält man für das Gefälle die Zahlen 0,299, 0,326, 0,296 0,113, 0,520, 0,859.

Wenn für die ersten Wintermonate angenommen werden kann, dass die Annahme eines gleichförmigen Gefälles für eine approximative Berechnung des Wachsthums des Eises ausreichen wird, so ist dies für die Zeit der abnehmenden Kälte von vornherein nicht zu erwarten. In dieser Zeit sind die Vorgänge anders gestaltet, als in der früheren. Die wesentlichste Aenderung, welche allerdings nicht sofort, sondern erst später eintritt, ist die, dass das Eis durch die Oberfläche nicht mehr Kälte aufnimmt, sondern abgibt. Der Ort der grössten Kälte liegt dann innerhalb des Eises, von diesem Orte fliesst die Kälte nach oben und nach unten ab, wo die weitere Eisbildung lediglich auf Kosten der im Eise aufgespeicherten Kälte erfolgt. Würde die Kälte, nachdem sie ihr Maximum erreicht hat, sehr rasch absinken, so müsste dieser Fall mit dem Beginne dieses Absinkens eintreten. Erfolgt aber die Abnahme der Kälte so langsam, wie es in der Wirklichkeit geschieht, so tritt die zweiseitige Bewegung der Kälte erst später ein. Es geht dies auch aus den Beobachtungen über das Wachsthum des Eises hervor. Die Zunahme der Eisdicke in der Periode der fallenden Kälte ist nämlich um Vieles grösser, als sie der ganzen zur Zeit des Kältemaximums im Eise vorhandenen Kälte entsprechend sein könnte. Es muss also durch einen längeren Zeitraum dieser Periode noch fortwährend Kälte durch die Oberfläche aufgenommen werden.

Es liegt auch eine Beobachtung der deutschen Expedition vor, welche den zweifachen Abfall der Kälte nach oben und nach unten zeigt. Am 21. Mai wurden an der Oberfläche und in den Tiefen 17, 26,5, 31, 38 Zollen die Temperaturen $-2,3$, $-3,8$, $-2,6$, $-2,6$, $-2,3$ gefunden.

Trotz dieser Complicationen, welche das Problem darbietet, führt die exacte Behandlung desselben, welche am Schlusse dieser Abhandlung mitgetheilt wird, doch zu dem Resultate, dass die Formel, welche unter der Annahme eines constanten Gefälles der Kälte gewonnen wird, nicht nur für die Zeit der wachsenden, sondern auch für die Zeit der sinkenden Kälte die Eisdicke in grosser Annäherung angibt.

Ich will daher zunächst die Gl. (1) auf den vorliegenden Fall anwenden. In dieser Gleichung ist nunmehr a eine von der Zeit t abhängige Grösse. In dem Integral dieser Gleichung tritt dann an die Stelle des Ausdruckes at in der Formel (2) das von o bis t genommene Integral von adt. Dieses Integral bedeutet die Kältesumme für die Zeit t oder auch, wenn man die Temperaturen vom Gefrierpunkte abwärts zählt, die mittlere Temperatur in der Zeit t multiplicirt mit dieser Zeit. Bezeichnet man die Kältesumme mit T, so ist:

$$h^2 = \frac{2KT}{\lambda\sigma}. \tag{3}$$

Eine grössere Annäherung gewährt die Formel:

$$h^2\left(1 + \frac{cf}{3\lambda}\right) = \frac{2KT}{\lambda\sigma}, \tag{4}$$

in welcher f die Temperatur an der Oberfläche des Eises am Ende der Zeit t bedeutet. Die an der Formel (3) anzubringende Correction erhält ihren grössten relativen Werth, wenn die Kälte im Maximum sich befindet; sie nimmt dann mit sinkender Kälte ab. Es gilt dies nicht in gleicher Weise für den absoluten Betrag der Correction, da auf diesen auch die immer wachsenden Werthe von h einen Einfluss nehmen. Diese absoluten Werthe der Correctionen kommen in Betracht, wenn man, wie es im Folgenden geschehen soll, die Differenzen der zu verschiedenen Zeiten beobachteten Eisdicken berechnet. Handelt es sich aber nur um die Berechnung der Eisdicke, welche sich vom Beginne bis zum Ende des Winters entwickelt hat, so genügt dazu die Formel (3).

Der Zeitpunkt des Beginnes der Eisbildung ist gewöhnlich nicht angegeben. In der citirten englischen Publication sind auch die Tagestemperaturen nicht angegeben, sondern nur die monatlichen Mittel. Es kann also der absolute Werth von T nicht bestimmt werden. Ist jedoch für einen anderen Zeitpunkt t_1 die Dicke h_1 des Eises gegeben, so besteht neben (4) die Gleichung:

$$h_1^2\left(1+\frac{cf_1}{3\lambda}\right)=\frac{2KT_1}{\lambda\sigma},$$

worin T_1 die Kältesumme für die Zeit t_1 bedeutet. Die Differenz der beiden Gleichungen gibt:

$$h^2\left(1+\frac{cf}{3\lambda}\right)-h_1^2\left(1+\frac{cf_1}{3\lambda}\right)=\frac{2K}{\lambda\sigma}(T-T_1),$$

und ist $T-T_1$ die auf das Zeitintervall $t-t_1$ entfallende Kältesumme. Da die Beobachtungen der Eisdicken meist zu Anfang der Monate gemacht wurden, so kann man aus den Monatmitteln der Temperaturen unmittelbar die Werthe von $T-T_1$ ableiten. Zur Berechnung der Correctionen der Quadrate der Eisdicken ist die Kenntniss der Temperaturen an den ersten Monatstagen erforderlich. Da diese nicht angegeben sind, habe ich für dieselben die halbe Summe aus der Temperatur des vorhergehenden und folgenden Monates angenommen. Im Folgenden sind die Ergebnisse, zu welchen die Anwendung der vorstehenden Gleichung auf die Beobachtungen geführt hat, enthalten.

Gulf of Boothia. Die Messungen wurden im Winter 1831—32 gemacht und sind p. 48 der Eingangs citirten Publication mitgetheilt.

Dicke des Eises am 31. Oct. = 19, 30. N. = 33, 31. D. = 48, 3. F. = 60, 31. März = 84 Zoll.

Mittlere Temperatur des Monates Oct. = +8,9, N. = −1,2, D. = −24,0, J. = −27,6, F. = −33,7, M. = −31,4, A. = −4,6 Fahr.

Der Gefrierpunkt des Meerwassers liegt 4° F. unter jenem des reinen Wassers, also bei +28° der Scala von Fahrenheit.

Bei der Bildung der Kältesummen ist also jeder der angegebenen negativen Temperaturzahlen 28 hinzuzufügen.

Bildet man die Quadrate der Eisdicken, corrigirt dieselben in der angegebenen Weise und nimmt die Differenzen dieser corrigirten Werthe, so geben diese durch die den entsprechenden Zeitintervallen zukommenden Kältesummen dividirt folgende

Quotienten: 0,878, 0,812, 0,740, 1,079.

Mittel = 0,877.

Assistance Bay, p. 153.

Dicke des Eises am 2. Oct. = 15,75, 3. N. = 30, 3. D. = 40,5, 3. J. = 51, 1. F. = 64, 3. M. = 72,75, 3. A. = 85, 11. Mai 91 Zoll.

Mittlere Temperatur im Sept. = + 21,4, O. = + 1,5, Nov. = − 6,8, D. = − 21,5, J. = − 29,0, F. = − 30,2, M. = − 22,1, A. = − 3,3, M. = + 12,3.

Quotienten: 0,789, 0,754, 0,679, 0,974, 0,719, 1,277, 0,766.

Mittel = 0,851.

Port Bowen, p. 312.

Dicke des Eises am 1. Jan. = 45,3, 2. F. = 55,9, 2. M. = 73,0, 2. A. = 82,0, 4. Mai = 86,5 Zoll.

Mittlere Temperatur im Dec. = − 19,0, J. = − 28,9, Feb. = − 27,3, M. = − 28,4, A. = − 6,5, M. = + 17,6.

Quotienten: 0,633, 1,516, 0,787, 0,541.

Mittel = 0,869.

Walker Bay, p. 379.

Dicke des Eises am 1. Nov. = 6, 23. D. = 34, 2. F. = 52, 1. M. = 65, 1. A. = 67,5, 1. M. = 63 Zoll.

Mittlere Temperatur im Oct. = + 14,1, N. = − 5,0, Dec. = − 16,9, J. = − 18,1, F. = − 16,3, M. = − 22,6, A. = + 9,9.

Quotienten: 0,597, 0,862, 1,299, 0,178.

Der letzte der Quotienten ist auffallend klein, entsprechend dem geringen Wachsthum des Eises im Monate März, welcher doch nach der mittleren Temperatur als der kälteste Monat erscheint. Eine noch grössere Anomalie bietet die Beobachtung am 1. Mai dar, welche eine Abnahme der Eisdicke im Monate April ergibt, obgleich die mittlere Temperatur dieses Monates 18,1 unter dem Eispunkte liegt. Es gibt sich also in den Beobachtungen gegen das Ende des

Winters eine bedeutende Störung kund. Nimmt man nur die ersten drei Quotienten als verwerthbar an, so geben sie ein Mittel = 0.919.

Cambridge Bay, p. 391.

Dicke des Eises am 1. Nov. = 19, 1. D. = 32,5, 1. J. = 48,5, 1. F. = 66, 1. A. = 79, 1. Mai = 98 Zoll.

Mittlere Temperatur im Oct. = + 4,4, N. = − 7,2, Dec. = − 29,9, J. = − 36,2, F. = − 29 3, M. = − 17,0, A. = − 2,9, M. = + 17,1, J. = + 32,5.

Quotienten: 0,700, 0,784, 1,078, 0,617, 3,583.

Mittel = 0,780.

Bei der Berechnung dieses Mittels ist der letzte ungewöhnlich grosse Werth des Quotienten weggelassen worden. Die Angabe der Eisdicke = 98 Zoll für den 1. Mai ist mit den vorhergehenden nicht vereinbar. Die Eisdicke nahm in den beiden Monaten Februar und März zusammen nur um 13 Zoll zu, während für den Monat April allein eine Zunahme von 19 Zoll angegeben ist. Auch ist noch eine Messung angeführt, welche die Dicke des Eises am 1. Juni = 86 Zoll angibt, also um 12 Zoll kleiner, als am 1. Mai, dessen mittlere Temperatur + 17,1, also noch 11° unter dem Eispunkte war.

Camden Bay, p. 403.

Dicke des Eises am 1. Oct. = 7, 1. N. = 26, 1. D. = 35, 1. J. = 52, 1. F. = 60, 1. M. = 72, 1. A. = 74, 1. Mai = 84,5 Zoll.

Mittlere Temperatur im Sept. = + 20,4, O. = − 0,8, Nov. = − 9,5, D. = − 24,9, J. = − 15,2, F. = − 30,6, M. = − 18,8, A. = − 1,2, Mai = + 22,4.

Quotienten: 0,730, 0,522, 0,955, 0,732, 1,016, 0,149, 1,788.

Mittel aus den fünf ersten Quotienten = 0,791.

Princess Royal Islands, p. 414.

Dicke des Eises am 2. Nov. = 20, 4. J. = 44, 3. F. = 57,5, 3. M. = 67,75, 1. A. = 77, 1. Mai = 83 Zoll.

Mittlere Temperatur im Oct. = + 0,2, N. = − 10,2, Dec. = − 23,4, J. = − 32,4, F. = − 37,7, M. = − 28,8, A. = − 4,8, Mai = + 18,9.

Quotienten: 0,577, 0,821, 0,744, 0,802, 0,832.

Mittel = 0,755.

Mercy Bay, p. 428.

Beobachtungen im Winter 1851—52.

Dicke des Eises am 3. Nov. = 18, 1. März = 67,5, 1. April = 76, 1. Mai = 80 Zoll.

Mittlere Temperatur im Oct. = +3,3, N. = −14,4, Dec. = −20,0, J. = −27,3, F. = −25,8, M. = −28,4, A. = +1,4, Mai = +10,3.

Quotienten: 0,754, 0,706, 0,638.

Mittel = 0,700.

Beobachtungen im Winter 1852—53.

Dicke des Eises am 1. Nov. = 18, 1. Jan. = 52, 1. F. = 71, 1. M. = 80, 30. A. = 86 Zoll.

Mittlere Temperatur im Oct. = −5,6, N. = −16,6, Dec. = −26,1, J. = −43,8, F. = −38,5, M. = −25,4, A. = −4,0, Mai = +15,2.

Quotienten: 0,850, 1,144, 0,752, 0,495.

Mittel = 0,810.

Deutsche Nordpolfahrt.

Dicke des Eises am 28. Sept. = 7, 11. Oct. = 15, 11. N. = 31, 24. N. = 36,5, 20. J. = 53, 18. F. = 57, 21. Mai = 79 Zoll.

Der Bericht über diese Fahrt enthält eine Tafel der Tagestemperaturen in Graden Réaumur. Nach dieser wurden die Kältesummen unter der Annahme des Gefrierpunktes = $-1,7^0$ R. berechnet und für obige Intervalle = 84, 364, 172, 839, 434, 1183 gefunden. Für den 11. N., 24. N., 20. J., 18. F. und 21. Mai sind die Temperaturen der Oberfläche des Eises = −17,2, −14,2, −14,3, −21,7, −2,3 angegeben und wurden diese bei der Berechnung der Correctionen benützt, für den 29. Sept. und 11. Oct. die Lufttemperaturen −4,9 und −10,3.

Quotienten: 2,151, 2,116, 2,185, 1,819, 1,194, 2,393.

Mittel: 1,976.

Um diesen Mittelwerth mit den früheren auf gleiches Maass zu bringen, hat man ihn mit der Verhältnisszahl der Réaumur'schen zu den Fahrenheit'schen Graden, also mit $^4/_9$, zu multipliciren und erhält:

Mittel = 0,878.

Die Werthe der Quotienten, welche aus den Beobachtungen derselben Station gefunden werden, zeigen zum Theil sehr grosse Abweichungen voneinander. Es ist dies schon aus der Natur der Messungen erklärlich, welche eine grosse Genauigkeit nicht zulassen. Auch greifen Störungen in die Eisbildung ein. Eine bedeutende Störung kann, namentlich in den ersten Wintermonaten, der Schnee verursachen, welcher das Eis bedeckt, die Kältezufuhr vermindert und damit die Eisbildung verlangsamt. Es sollte die Oberfläche des Eises freigehalten oder aber die Temperatur der Oberfläche des Eises von Tag zu Tag beobachtet werden.

Es scheint mir umsomehr bemerkenswerth, dass die Mittelwerthe der Quotienten von vier Beobachtungsreihen, welche keine Anomalien darbieten, sehr nahe zusammenfallen. Es liefert Gulf of Boothia den Quotienten 0,877, Assistance Bay 0,851, Port Bowen 0,869 und die Station der deutschen Nordpolfahrt 0,878. Die Stationen, bei welchen sich grosse Unregelmässigkeiten ergaben, liefern Walker Bay 0,919, Cambridge Bay 0,780, Camden Bay 0,791. Die kleinsten Quotienten liefern Princess Royal Islands 0,755 und Mercy Bay 0,700 für den ersten Winter, dagegen gibt letztere Station für den zweiten Winter den grösseren Werth 0,810.

Wenn man die Beobachtungen an den vier ersten Stationen als maassgebend annimmt, so kann man sagen, dass die Formel (4) eine hinreichend genaue Darstellung des Vorganges der Eisbildung im Polarmeere darbietet und man:

$$h^2\left(1+\frac{cf}{3\lambda}\right)=0{,}869\,T$$

setzen kann.

Gibt eine Beobachtungsreihe für den Factor von T einen beträchtlich kleineren Werth, so kann man daraus schliessen, dass an dem Beobachtungsorte Verhältnisse walten, welche der Eisbildung ungünstig sind, dass z. B. der Beobachtungsort in dem Bereiche einer Strömung sich befindet, durch welche wärmeres Wasser zugeführt und dadurch das Wachsthum der Eisdecke verlangsamt wird.

Der Zahl 0,869 liegen der Fahrenheit'sche Grad, der englische Zoll und der Tag als Einheiten zu Grunde. Will man die Temperaturen nach der hundertheiligen Scala und die Längen nach Centimetern messen, so ist die Zahl 0,869 mit $^9/_5$ und $(2{,}54)^2$ zu multipliciren. Man erhält die Zahl 10,092.

Es ist von Interesse, diese Zahl mit dem Werthe zu vergleichen, welcher ihr nach der Formel (4) zukommt. Dazu ist die Kenntniss des Wärmeleitungsvermögens des Eises nothwendig. Die Angaben der Physiker über diese Grösse gehen jedoch sehr weit auseinander. In Everett's „Physikalische Einheiten und Constanten" sind zwei Werthe angeführt, $k = 0{,}0057$ nach Neumann und 0,00223 nach Forbes. Nach einer neueren Bestimmung von Mitchell[1]) ist $k = 0{,}005$. Die Einheiten der Länge und Zeit, welche diesen Zahlen zu Grunde liegen, sind Centimeter und Secunde. Diese Bestimmungen beziehen sich auf das aus reinem Wasser gebildete Eis. Das aus dem Meerwasser gebildete hat eine andere Structur, ist vor Allem nicht so hart, es kann daher sein Leitungsvermögen von dem des reinen Eises verschieden sein. Bei dieser Sachlage scheint es mir angemessen, den Factor von T in der Formel (4) nicht aus den vorhandenen Daten zu berechnen, sondern umgekehrt aus diesem Factor den Werth des Leitungsvermögens des Eises abzuleiten. Setzt man in:

$$\frac{2K}{\lambda\sigma} = 10{,}092$$

für λ den Werth 79 und $\sigma = 10/11$, so folgt $K = 362{,}4$. Diese Zahl gilt für den Tag als Zeiteinheit. Wählt man als solche die Secunde, so ist diese Zahl durch 86400 zu dividiren, und man erhält $K = 0{,}0042$. Dieser Werth schliesst sich der Bestimmung von Mitchell am nächsten an und kann als ein angenäherter Werth des Leitungsvermögens des Polareises angesehen werden.

Die Bewegung der Kälte im Eise ist durch die Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \frac{du}{dt} = k\frac{d^2u}{dx^2}$$

1) Mitchell, Proc. Roy. Soc. Edinburg 1885—86. p. 592. Beibl. 12. p. 45. 1888.

bestimmt. u bedeutet den Kältegrad der Schichte, welche in der Tiefe x unter der Oberfläche sich befindet. k ist der Coëfficient der Temperaturleitung des Eises gleich dem Wärmeleitungsvermögen K, dividirt durch die specifische Wärme der Volumeneinheit des Eises $= c\sigma$, wenn c dessen specifische Wärme, σ das specifische Gewicht desselben bedeuten.

Für die Oberfläche, d. i. für $x = 0$, ist u als Function der Zeit, etwa $u = f(t)$ gegeben. An der unteren Grenzebene der Eisdecke ist $u = 0$. Die Lage dieser Grenzebene ist ebenfalls eine Function der Zeit, deren Bestimmung den wesentlichen Theil der Aufgabe bildet. Ist h die Abscisse dieser Ebene zur Zeit t, so ist der Zuwachs dh, welchen h in der Zeit dt erhält, einerseits durch die latente Wärme λ, andererseits durch die zugeführte Kälte bestimmt, sodass die Gleichung:

$$\lambda\sigma\frac{dh}{dt} = -K\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=h}$$

oder, da $K = kc\sigma$ ist, die Gleichung:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{kc}{\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)_h \tag{6}$$

besteht. Diese Gleichung kann man noch in eine andere Form bringen. Hat man u als Function von x und t dargestellt, so muss $u = 0$ werden, wenn man in seinem Ausdrucke $x = h$ setzt. Dies gilt für jeden beliebigen Werth der Zeit t. Es muss also auch das totale Differential von u nach der Zeit t der Null gleich sein, d. h. es ist:

$$\frac{du}{dt} + \left(\frac{du}{dx}\right)_h \cdot \frac{dh}{dt} = 0.$$

Man kann aus dieser und der Gl. (6) dh/dt eliminiren und erhält:

$$\frac{du}{dt} = \frac{kc}{\lambda}\left(\frac{du}{dx}\right)_h^2. \tag{7}$$

Eine einfache Auflösung des Problems bietet die Formel:

$$u = A\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz, \tag{8}$$

in welcher A und α zwei Constanten bedeuten. Setzt man $x = 0$, so nimmt u einen constanten Werth an. Soll dieser einem gegebenen Werthe a gleich sein, so hat man A so zu wählen, dass:

(9) $$a = A\int\limits_0^\alpha e^{-z^2}\,dz$$

wird.

u wird $= 0$, wenn man $x/2\sqrt{kt} = \alpha$ annimmt; es gibt also:

(10) $$h = 2\alpha\sqrt{kt}$$

das Gesetz an, nach welchem die Eisdicke wächst. Die noch unbestimmte Constante α folgt aus der Gl. (7). Man erhält aus (8):

$$\frac{du}{dt} = A e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cdot \frac{x}{4t\sqrt{kt}}, \qquad \frac{du}{dx} = -A e^{-\frac{x^2}{4kt}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{kt}}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken $x = h = 2\alpha\sqrt{kt}$ und führt dieselben in die Gl. (7) ein, so erhält man:

$$A e^{-\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{2t} = \frac{kc}{\lambda} A^2 e^{-2\alpha^2} \cdot \frac{1}{4kt}$$

oder mit Berücksichtigung der Gl. (9):

(11) $$\alpha e^{\alpha^2} \int\limits_0^\alpha e^{-z^2}\,dz = \frac{ac}{2\lambda},$$

und diese Gleichung dient zur Bestimmung von α. In erster Annäherung gibt diese Gleichung:

$$\alpha^2 = \frac{ac}{2\lambda},$$

es folgt also in gleicher Annäherung aus (10) auch:

$$h^2 = \frac{2ackt}{\lambda},$$

welche Gleichung identisch ist mit der Gl. (2) im Eingange dieser Abhandlung. Eine zweite Annäherung bietet die Gl. (11) in der Form:

$$\alpha^2\left(1 + \frac{2\alpha^2}{3}\right) = \frac{ac}{2\lambda},$$

aus der man: $$\alpha^2 = \frac{ac}{2\lambda} : \left(1 + \frac{ac}{3\lambda}\right)$$

erhält. Es ist also auch h^2 kleiner, als der Ausdruck (2) es angibt, in dem Verhältnisse, in welchem 1 kleiner ist, als $1 + ac/3\lambda$. Aus einer für den Ausdruck auf der linken Seite der Gl. (11) berechneten Tafel kann für jeden Werth von

$ac/2\lambda$ der zugehörige Werth von a gefunden, das Wachsthum der Eisdicke also genau berechnet werden. Die exacte Lösung stimmt in diesem Falle mit der approximativen in der Form des Gesetzes vollständig überein, der Unterschied zwischen beiden liegt nur in dem Werthe der Constanten.

Eine zweite einfache Auflösung der Gleichungen (5) und (7) gibt die Formel:

$$u = \frac{A}{a}(e^{at-mx} - 1), \tag{12}$$

in welchem A, a und m constante Grössen bedeuten. Damit dieser Ausdruck ein Integral der Gl. (5) darstellt, muss:

$$a = km^2$$

genommen werden.

Der Nullwerth von u ist durch $at - mx = 0$ bestimmt, es wächst also:

$$h = \frac{at}{m} \tag{13}$$

gleichförmig mit der Zeit. Die Gl. (7) liefert die Bedingung:

$$A = \frac{kcm^2A^2}{\lambda a^2} = \frac{cA^2}{\lambda a},$$

welche zwischen a und A die Beziehung:

$$a = \frac{Ac}{\lambda} \tag{14}$$

fordert.

Für $x = 0$ erhält man unter Berücksichtigung der letzteren Relation:

$$u = At + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{A^2t^2}{1.2} + \frac{c^2}{\lambda^2}\frac{A^3t^3}{1.2.3} + \cdots. \tag{15}$$

Soll also h eine lineare Function der Zeit sein, so muss u an der Oberfläche rascher, als nach dem Gesetze der geraden Linie wachsen, und zwar in der durch die vorstehende Formel bestimmten Weise.

Um diese Ergebnisse mit der approximativen Formel (3) vergleichen zu können, hat man zunächst (13) in:

$$h^2 = \frac{a^2t^2}{m^2} = akt^2 = \frac{2K}{\lambda\sigma} \cdot \frac{At^2}{2}$$

zu transformiren und aus (15) das Integral von udt, d. i. T zu bilden. Es ist:

$$T = \frac{At^2}{2}\left[1 + \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{At}{3} + \frac{c^2}{\lambda^2} \cdot \frac{A^2t^2}{12} + \cdots\right].$$

sonach kann man die vorhergehende Formel durch:

$$h^2\left(1+\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{At}{3}+\frac{c^2}{\lambda^2}\cdot\frac{A^2t^2}{12}+\cdots\right)=\frac{2KT}{\lambda\sigma}$$

ersetzen. Der Vergleich mit der Formel (3) lehrt, dass dieselbe auch in diesem Falle h^2 zu gross gibt. Der corrigirende Factor ist jedoch nicht, wie in dem ersten Falle, constant, sondern wächst mit der Zeit. Es unterscheiden sich im vorliegenden Falle die approximative und die exacte Lösung durch die Form des Gesetzes für das Wachsthum von h.

Ich gehe nun zu einer allgemeinen Auflösung der Aufgabe über. Die allgemeinen Lösungen der Gl. (5) lassen sich in geschlossener Form als bestimmte Integrale darstellen. Sie enthalten entweder eine oder zwei willkürliche Functionen. Die Integrale, welche Lösungen des vorliegenden Problems sein sollen, müssen zwei solche Functionen enthalten. Hier handelt es sich vor Allem darum, zu einfachen, für die Berechnung geeigneten Resultaten zu kommen. Ich glaube, dass sich für diesen Zweck von den verschiedenen Lösungen der Gl. (5) am besten die Reihe:

$$u=f+\frac{x^2}{2!k}f'+\frac{x^4}{4!k^2}f''+\cdots+xF+\frac{x^3}{3!k}F'+\frac{x^5}{5!k^2}F''+\cdots$$

eignet. Darin bedeuten f und F zwei beliebige Functionen der Zeit t, f', F', f'', F'', ... ihre Ableitungen nach t. Dieses Integral der Gl. (5) hat die Eigenschaft, dass u für $x=0$ in f übergeht. Ist f vorgeschrieben, so genügt es dieser ersten Bedingung. Setzt man darin für x die erst zu bestimmende Function h, so soll $u=0$ werden. Man hat somit:

$$(16)\qquad 0=f+\frac{h^2}{2!k}f'+\cdots+hF+\frac{h^3}{3!k}F'+\cdots$$

Es muss aber u für $x=h$ auch noch der zweiten Bedingung, welche durch die Gl. (6) oder (7) ausgedrückt ist, genügen. Ich nehme diese Bedingung in der ersteren Form an. Sie lautet:

$$(17)\qquad \frac{\lambda h'}{ck}=-\frac{h}{k}f'-\frac{h^3}{3!k^2}f''-\cdots-F-\frac{h^2}{2!k}F'-\cdots$$

Die Gleichungen (16) und (17) dienen zur Bestimmung der Function h und auch der Function F. Letztere gibt den Werth an, welchen du/dx für $x=0$ hat. Durch sie ist also die vom Eise durch die Oberfläche aufgenommene Kältemenge bestimmt und ihre Ermittelung bildet gleichfalls einen Theil der Aufgabe.

Soll zuerst h bestimmt werden, so handelt es sich darum, aus den Gleichungen (16) und (17) die Function F und ihre Ableitungen zu eliminiren. Multiplicirt man die zweite der Gleichungen mit h und addirt sie zur ersteren, so fällt F aus und es bleibt:

$$\frac{\lambda h h'}{ck} = f - \frac{1 . h^2}{2! k} f' - \frac{3 h^4}{4! k^2} f'' - \cdots - \frac{2 h^3}{3! k} F' - \cdots \tag{18}$$

Diese Gleichung gibt die approximative, in der Formel (3) enthaltene Lösung, wenn man auf ihrer rechten Seite nur das erste Glied f beibehält.

Man erhält eine zweite Gleichung, welche F nicht enthält, wenn man (16) nach t differenzirt und mit (17) verbindet. Man gelangt zu derselben auch, wenn man aus der Gl. (6) und der folgenden $(du/dx)_h$ eliminirt. Sie ist:

$$\frac{\lambda h'^2}{ck} = f' + \frac{h^2}{2! k} f'' + \cdots + h F' + \frac{h^3}{3! k} F'' + \cdots \tag{19}$$

Aus dieser und der Gl. (18) kann man nunmehr auch F' eliminiren und bekommt:

$$\frac{\lambda h h'}{ck} \left(1 + \frac{h h'}{3k}\right) = f - \frac{h^2}{6k} f' + \frac{h^4}{24 k^2} f'' + \cdots + \frac{h^5}{45 k^2} F'' + \cdots \tag{20}$$

Man kann in dieser Weise fortfahren und der Reihe nach F'', F''' u. s. w. eliminiren. In die resultirenden Gleichungen treten dann auch die höheren Differentialquotienten von h ein. Ich will jedoch die Rechnungen in dieser Weise nicht fortführen, sondern mich auf einige Bemerkungen beschränken, welche sich an die letzte Gleichung anknüpfen lassen.

Nimmt man an, dass die Veränderungen der Functionen f und F sehr langsam vor sich gehen und man die zweite Seite der Gleichung auf ihre zwei ersten Glieder beschränken kann, so bietet die Gleichung:

$$\frac{\lambda h h'}{ck} \left(1 + \frac{h h'}{3k}\right) = f - \frac{h^2}{6k} f' \tag{21}$$

eine zweite approximative Auflösung der Aufgabe.

Man kann zunächst diese Gleichung so deuten, dass die Geschwindigkeit des Wachsthums von h zur Zeit t nicht durch die zur selben Zeit in der Oberfläche vorhandene Temperatur f bestimmt ist, sondern durch den Werth, welchen diese Temperatur zu einer um $h^2/6k$ früheren Zeit hatte. Man kann nämlich annähernd:

$$f - \frac{h^2}{6k} f' = f\left(t - \frac{h^2}{6k}\right)$$

setzen. Die Veränderungen der Temperatur in der Oberfläche machen sich in der unteren Grenzfläche des Eises erst nach einer Zeit fühlbar, welche mit der Tiefe h im quadratischen Verhältnisse wächst. Nimmt man $k = 770$ an, so findet man für $h = 100$ und 200 cm diese Zeit = 2,2 und 8,7 Tage. Dieser Umstand hat auch zur Folge, dass das Wachsthum des Eises noch einige Zeit fortdauert, nachdem die Kälte an der Oberfläche schon den Nullwerth erreicht hat.

Betrachtet man den Factor von $\lambda h h'/ck$ in der Gl. (21) als eine von der Einheit wenig verschiedene Grösse, so kann man:

$$\frac{\lambda h h'}{ck} = \left(f - \frac{h^2}{6k} f'\right)\left(1 - \frac{hh'}{3k}\right)$$

oder auch:

$$\frac{\lambda h h'}{ck} = f - \frac{d}{dt}\left(\frac{h^2 f}{6k}\right)$$

setzen und erhält daraus:

$$\frac{\lambda h^2}{2ck} = T - \frac{h^2 f}{6k}$$

oder:

$$(22) \qquad h^2\left(1 + \frac{cf}{3\lambda}\right) = \frac{2KT}{\lambda\sigma},$$

worin T das von 0 bis t genommene Integral von $f\,dt$, also die Kältesumme für die Zeit t bedeutet.

Diese Formel ist oben zur Berechnung der Beobachtungen verwendet worden. Es ist zu bemerken, dass das f enthaltende Correctionsglied für das Ende des Winters, wenn $f = 0$ wird, ganz wegfällt. Es bleibt aber doch auch für diesen Fall eine Correction übrig, welche von den bei der Ableitung der Formel (22) vernachlässigten Gliedern herrührt. Behält man auch die Glieder zweiter Ordnung bei, so findet man die Gleichung:

$$h^2\left(1 + \frac{cf}{3\lambda} - \frac{c^2(4f^2 + 7f'T)}{90\lambda^2}\right) = \frac{2KT}{\lambda\sigma}.$$

Man gelangt zu derselben am einfachsten, wenn man erst die Gl. (18) nach t integrirt. Das Resultat ist:

$$\frac{\lambda h^2}{2ck} = T - \frac{h^2}{2!k} f - \frac{3h^4}{4!k^2} f' - \dots - \frac{2h^3}{3!k} F - \frac{4h^5}{5!k^2} F' - \dots$$

Verbindet man damit die Gl. (16) in der Weise, dass die Function F ausfällt, so folgt:

$$\frac{\lambda h^2}{2ck} = T - \frac{h^2}{6k} f + \frac{h^4}{24k^2} f'' + \cdots + \frac{h^5}{45k^2} F' + \cdots,$$

zu welcher Gleichung man übrigens auch durch Integration von (18) kommt. Führt man in dieselbe den entsprechenden Näherungswerth von F' ein, so kann man das Resultat auf die obige Formel reduciren.

Ich will an einem Beispiele die Werthe nachweisen, welche diese Correctionen erreichen. Es sei $f = a \sin bt$ gegeben und $a = 30^0$ C. für $bt = \pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ und π wird die erste Correction $= 0{,}0447$, $0{,}0633$, $0{,}0447$ und 0, die zweite Correction $= -0{,}00138$, $-0{,}00160$, $+0{,}00258$, $+0{,}00560$. Daraus ist zu ersehen, dass zur Berechnung von Beobachtungen, wie die oben mitgetheilten, die Formel (22) wohl eine genügende Genauigkeit gewährt. Die Glieder zweiter Ordnung kämen erst bei den Beobachtungen in der letzten Zeit des Winters in Betracht.

Eliminirt man aus den Gleichungen (16) und (19) die Function F', so kann die resultirende Gleichung zur Bestimmung von F verwendet werden. Man erhält in erster Annäherung:

$$hF = -f - \frac{c}{6\lambda}(f^2 + 4f'T).$$

Nimmt man wieder das obige Beispiel $f = a \sin bt$ und $a = 30^0$ C., so findet man, dass für $bt = 166^0 = 180^0 - 14^0$ die Function $F = 0$ wird. Die durch diesen Werth von bt bestimmte Zeit ist diejenige, zu welcher das Eis aufhört, Kälte von aussen aufzunehmen, und anfängt, solche dahin abzugeben. Da die ganze Dauer des Winters durch den Bogenwerth 180^0 dargestellt ist, so liegt dieser Zeitpunkt um $14/180$ oder um $7/90$ der ganzen Dauer des Winters vor dem Ende desselben. Nimmt man diese Dauer zu neun Monaten an, so tritt der bezeichnete Wechsel 21 Tage vor dem Ende des Winters ein und ist die gleichzeitige Temperatur des Eises an der Oberfläche $-7{,}26^0$ C. unter dem Gefrierpunkte.