Ueber gewisse in der Theorie der A bel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle — Source link

Heinrich Weber

Published on: 01 Mar 1878 - Mathematische Annalen (Springer-Verlag)

Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle.

Von Heinrich Weber in Königsberg in Pr.

In dem vorliegenden Aufsatz beabsichtige ich gewisse besondere Classen von algebraischen Functionen hervorzuheben, welche bezüglich der zugehörigen algebraischen Integrale und Thetafunctionen ausgezeichnete Eigenschaften haben, von denen die speciellsten auf die hyperelliptischen Integrale führen.

Wir definiren nach Riemann eine algebraische Function s von z vom Geschlecht p durch eine irreducible algebraische Gleichung zwischen beiden Variablen

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

welche die Eigenschaft hat, dass die Verzweigung von s sich durch eine $(2p+1)$-fach zusammenhängende Riemann'sche Fläche T darstellen lässt, und diese Fläche sei durch ein normales Querschnittsystem a_ν, b_ν in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zerlegt.

In die Thetafunction

$$\vartheta(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_n) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_h\right)^p e^{\overset{i}{\underset{1,p}{\Sigma}} \overset{k}{\underset{1,p}{\Sigma}} a_{i,k} h_i h_k + 2 \overset{i}{\underset{1,p}{\Sigma}} h_i v_i}$$

substituiren wir für die Moduln $a_{i,k}$ die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale erster Gattung an den Querschnitten b_i und für die Argumente $v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p$ die um Constanten vermehrten Normalintegrale erster Gattung selbst:

$$\int_\varepsilon^\zeta du_1 - e_1, \quad \int_\varepsilon^\zeta du_2 - e_2, \cdot\cdot, \int_\varepsilon^\zeta du_p - e_p,$$

worin ε, ζ zwei beliebige Punkte in der Fläche T bedeuten, von denen der letztere als veränderlich betrachtet wird. Die so entstandene Function

(1) $$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_\varepsilon^\zeta du_h - e_h\right)\right)$$

ist eine in T' stetige Function von ζ, welche, falls sie nicht identisch verschwindet, in p Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Diese Nullpunkte $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot, \eta_p$ genügen der Congruenz

$$(2) \qquad (e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\int_{\varepsilon}^{\eta_1} du_h + \int_{\varepsilon}^{\eta_2} du_h + \cdot\cdot + \int_{\varepsilon}^{\eta_p} du_h + k_h\right)\right),$$

worin das Grössensystem k_h von e_h unabhängig ist, und diese Congruenz wird für gegebene e_h nur durch die Punkte η_h befriedigt. Verschwindet aber (1) identisch, so kann die Congruenz (2) ebenfalls befriedigt werden, es bleiben von den Punkten η_h aber einer oder einige willkürlich. Ist das Grössensystem e_h so beschaffen, dass $\vartheta(e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p)$ verschwindet, so fällt einer der Punkte η_h, etwa η_p, mit ε zusammen, und es genügt den beiden Congruenzen

$$(3) \qquad \begin{cases} (e_1, \quad e_2, \cdot\cdot, \quad e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\sum\limits_{1, p-1}^{\nu} \int_{\varepsilon}^{\eta_\nu} du_h + k_h\right)\right), \\ (-e_1, -e_2, \cdot\cdot, -e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\sum\limits_{1, p-1}^{\nu} \int_{\varepsilon}^{\eta'_\nu} du_h + k_h\right)\right) \end{cases}$$

ein durch eine Gleichung $\varphi(s, z) = 0$ verknüpftes, von ε unabhängiges Punktsystem η_ν, η'_ν. Addirt man die beiden Congruenzen (3), so folgt:

$$(4) \quad (-2k_1, -2k_2, \cdot\cdot, -2k_p) = \left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\sum_{1, p-1}^{\nu} \int_{\varepsilon}^{\eta_\nu} du_h + \sum_{1, p-1}^{\nu} \int_{\varepsilon}^{\eta'_\nu} du_h\right)\right),$$

worin nun η_ν, η'_ν ein beliebiges, durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpftes Punktsystem bedeutet. Die Congruenz (4) dient zur Bestimmung des Grössensystems k_h. (Vergl. meine Schrift über die „Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3" § 10 bis 12.)

Bedeutet nun $f_1, f_2, \cdot\cdot, f_p$ ein Grössensystem von denselben Eigenschaften wie $e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p$, so ist der Quotient

$$(5) \qquad \frac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - e_h\right)\right) \; \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + e_h\right)\right)}{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - f_h\right)\right) \; \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}} \left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + f_h\right)\right)}$$

eine wie T verzweigte Function von ζ, die sich als Quotient zweier Functionen von φ, $\varphi_1 : \varphi_2$, darstellen lässt, und umgekehrt lässt sich der Quotient zweier Functionen φ durch einen Ausdruck von der Form (5) darstellen, abgesehen von denjenigen besonderen Fällen, in denen eine der Thetafunctionen im Zähler oder Nenner von (5) identisch (für alle Lagen von ε, ζ) verschwindet.

Wir nehmen nun an, dass die Grössensysteme e, f den Bedingungen genügen:

$$(e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p) \equiv (-e_1, -e_2, \cdot\cdot, -e_p),$$
$$(f_1, f_2, \cdot\cdot, f_p) \equiv (-f_1, -f_2, \cdot\cdot, -f_p),$$

oder, was dasselbe ist, den Congruenzen:

$$(e_1, e_2, \cdot\cdot, e_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\ (\tfrac{1}{2}\mu_h \pi i + \tfrac{1}{2}\nu_1 a_{1,h} + \tfrac{1}{2}\nu_2 a_{2,h} + \cdot\cdot + \tfrac{1}{2}\nu_p a_{p,h})\right)$$
$$\equiv (\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p),$$

$$(f_1, f_2, \cdot\cdot, f_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\ (\tfrac{1}{2}\mu'_h \pi i + \tfrac{1}{2}\nu'_1 a'_{1,h} + \tfrac{1}{2}\nu'_2 a_{2,h} + \cdot\cdot + \tfrac{1}{2}\nu'_p a_{p,h})\right)$$
$$\equiv (\tfrac{1}{2}\varpi'_1, \tfrac{1}{2}\varpi'_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi'_p),$$

worin die Zahlensysteme μ, ν, μ', ν' aus 0 und 1 zusammengesetzt angenommen werden können. Mit ϖ_h, ϖ'_h werden zur Abkürzung Systeme zusammengehöriger Perioden bezeichnet, und die Zahlencomplexe

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdot\cdot & \nu_p \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdot\cdot & \mu_p \end{pmatrix} = (\varpi), \qquad \begin{pmatrix} \nu'_1 & \nu'_2 & \cdot\cdot & \nu'_p \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \cdot\cdot & \mu'_p \end{pmatrix} = (\varpi')$$

heissen die Charakteristiken der halben Periodensysteme $\frac{1}{2}\varpi_h$, $\frac{1}{2}\varpi'_h$, welche gerade oder ungerade genannt werden, je nachdem die Summen $\Sigma\nu_i\mu_i$, $\Sigma\nu'_i\mu'_i$ gerade oder ungerade sind. Jeder Charakteristik (ϖ) entspricht eine Thetafunction, welche eine gerade oder eine ungerade Function der Argumente ist, je nachdem die Charakteristik gerade oder ungerade ist:

$$\vartheta\left\{\varpi\right\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$$
$$= e^{\frac{1}{4}\sum\limits_{1,p}^{i}\sum\limits_{1,p}^{k} a_{i,k}\nu_i\nu_k + \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_{1,p}^{i}\mu_i\nu_i + \sum\limits_{1,p}^{i}\nu_i v_i}\ \vartheta(v_1 + \tfrac{1}{2}\varpi_1, \cdot\cdot, v_p + \tfrac{1}{2}\varpi_p).$$

Die Anzahl der ungeraden Thetafunctionen ist $2^{p-1}(2^p - 1)$, die der geraden $2^{p-1}(2^p + 1)$. Im Allgemeinen verschwinden nur die ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, dagegen verschwinden die ersten Ableitungen der geraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente, und daraus ergiebt sich, dass, wenn in einem besonderen Fall eine Thetafunction mit gerader Charakteristik (ϖ) für die Nullwerthe der Argumente verschwindet, dann die Function

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\bullet}^{\zeta} du_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

identisch für alle Lagen der Punkte ε, ζ verschwindet, nach einem von Riemann bewiesenen Satz. (Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, Riemann's Werke p. 198.)

Kehren wir nun zurück zu den Quotienten (5), so ergiebt sich aus den gemachten Annahmen, dass die Nullpunkte des Zählers sowohl als des Nenners paarweise zusammenfallen und es entstehen Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden. Die Quadratwurzeln aus diesen Functionen nennen wir *Abel'sche Functionen* im engeren Sinn. Hieraus ergiebt sich:

Wenn von den 2^{2p} Functionen

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} d u_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \quad \textit{oder} \quad \vartheta\{\varpi\}\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} d u_h\right)\right)$$

keine identisch für alle Lagen von ε, ζ verschwindet, so existiren $2^{p-1}(2^p-1)$ Abel'sche Functionen.

Die Ausnahmefälle, die nun hier betrachtet werden sollen, sind diejenigen, in denen von den Functionen

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right)$$

eine oder einige identisch verschwinden, und es handelt sich vor allem um das Verhalten der Abel'schen Functionen in diesen Fällen.

Wir machen gleich die allgemeine Annahme, dass für irgend eine Zahl m eine Function

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} d u_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \tag{6}$$

identisch (für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}, \zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$) verschwinde, dagegen

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} d u_h \pm \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \tag{7}$$

nicht identisch verschwinde, wofür nach Riemann (über das Verschwinden der Thetafunctionen) die nothwendige und hinreichende Bedingung die ist, dass die Function $\vartheta\{\varpi\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$ mit ihren sämmtlichen Derivirten bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung einschliesslich, dagegen nicht mehr sämmtliche Derivirte der m^{ten} Ordnung für

$$(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p) = (0, 0, \cdot\cdot, 0)$$

verschwinden.

Nach diesen Voraussetzungen werden also, wenn die Punkte ε_i, ζ_i beliebig angenommen sind, die beiden Functionen

$$(8)\qquad \begin{cases} \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h - \sum\limits_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h - \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right), \\ \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\zeta} du_h + \sum\limits_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\right)\right) \end{cases}$$

als Functionen von ζ nicht identisch verschwinden, und daher verschwindet jede von ihnen ausser in ε in $p-1$ Punkten, beide zusammen in $2p-2$ Punkten, welche durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind.

Unter den Nullpunkten der ersten dieser Functionen sind aber die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$, die übrigen seien mit $\eta_m, \eta_{m+1}, \cdot\cdot, \eta_{p-1}$ bezeichnet. Ebenso sind unter den Nullpunkten der zweiten Function (8) die Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}$ und die übrigen seien mit $\eta'_m, \eta'_{m+1}, \cdot\cdot, \eta'_{p-1}$ bezeichnet. Demnach existirt eine Function φ mit den Nullpunkten

$$(9)\quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1},\ \zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1},\ \eta_m, \eta_{m+1}, \cdot\cdot, \eta_{p-1},\ \eta'_m, \eta'_{m+1}, \cdot\cdot, \eta'_{p-1}.$$

Andererseits bestehen nach (2) die Congruenzen:

$$(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\right)\right),$$

$$(-\tfrac{1}{2}\varpi_1, -\tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, -\tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\zeta_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon}^{\eta'_i} du_h + k_h\right)\right),$$

und durch Subtraction dieser beiden Congruenzen:

$$(10)\qquad \left(\overset{p}{\underset{1}{h}}\left(\sum_{1,m-1}^{i} \int\limits_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \sum_{m,p-1}^{i} \int\limits_{\eta_i}^{\eta'_i} du_h \equiv 0\right)\right).$$

Es existirt also, wie aus dem Abel'schen Theorem folgt, eine rationale Function σ von s, z, welche unendlich klein in der ersten Ordnung wird in den Punkten

$$(11)\qquad \zeta_1\, \zeta_2 \cdot\cdot \zeta_{m-1}\ \eta'_m \cdot\cdot \eta'_{p-1},$$

unendlich gross in der ersten Ordnung in den Punkten

$$(12)\qquad \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_{m-1}\ \eta_m \cdot\cdot \eta_{p-1},$$

ausserdem stetig und von Null verschieden bleibt, und zwar ist diese Function darstellbar als Quotient zweier Functionen φ. Ist nun φ die in den Punkten (9) verschwindende Function, so werden die beiden φ-Functionen

$$\sigma\varphi = \varphi_1, \quad \frac{\varphi}{\sigma} = \varphi_2$$

unendlich klein in der zweiten Ordnung, resp. in den Punkten

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}, \eta'_m, \cdot\cdot, \eta'_{p-1} \text{ und } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot\cdot, \varepsilon_{m-1}, \eta_m, \cdot\cdot, \eta_{p-1},$$

und sind daher die Quadrate von Abel'schen Functionen. Diese Abel'schen Functionen genügen der Bedingung

$$(13) \qquad \sqrt{\varphi_1\varphi_2} = \varphi.$$

Wählen wir die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \cdot\cdot, \zeta_{m-1}$ anders, so erhalten wir beliebig viele Abel'sche Functionen dieser Art, $\sqrt{\varphi_1}$, $\sqrt{\varphi_2}$, $\sqrt{\varphi_3}$, $\cdot\cdot$, welche die Eigenschaft haben, dass das Product von je zweien derselben rational und zwar gleich einer Function φ ist. Von den Nullpunkten einer solchen Abel'schen Function können $m-1$, aber nicht mehr, beliebig gewählt werden.

Setzen wir nun, indem wir unter $a_1, a_2, \cdot\cdot$ unbestimmte Constanten verstehen:

$$\sqrt{\varphi'} = a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdots,$$

so ist, da das Product zweien der Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdots$ rational ist, φ' eine φ-Function, welche der Bedingung genügt:

$$\sqrt{\varphi_1\varphi'} = \varphi; \quad \varphi_1\varphi' = \varphi^2,$$

woraus sich ergiebt, dass, da die Nullpunkte von φ' paarweise zusammenfallen, $\sqrt{\varphi'}$ eine Abel'sche Function ist.

Aus der Willkürlichkeit von $m-1$ Nullpunkten der Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdot\cdot$ schliessen wir, dass es mindestens m linear unabhängige Functionen dieser Art giebt, und da nicht mehr als $m-1$ Nullpunkte beliebig sind, so folgt, dass auch nicht mehr als m dieser Functionen linear unabhängig sein können. Hieraus ergiebt sich, dass das ganze System Abel'scher Functionen, welches zur Charakteristik (ϖ) gehört, linear darstellbar ist durch m specielle Functionen dieser Art, also in der Form:

$$a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdot\cdot + a_m\sqrt{\varphi_m},$$

worin $a_1, a_2, \cdot\cdot, a_m$ willkürliche Constanten sind.

Die hier bewiesenen Sätze lassen sich nun in folgender Weise umkehren. Nehmen wir an, es existire ein System von m linear unabhängigen Abel'schen Functionen $\sqrt{\varphi_1}, \sqrt{\varphi_2}, \cdot\cdot, \sqrt{\varphi_m}$, welches die Eigenschaft hat, dass jede lineare Verbindung derselben mit beliebigen constanten Coefficienten

$$(14) \qquad \sqrt{\varphi'} = a_1\sqrt{\varphi_1} + a_2\sqrt{\varphi_2} + \cdot\cdot + a_m\sqrt{\varphi_m}$$

wieder eine Abel'sche Function ist, so ergiebt sich zunächst aus der Willkürlichkeit der Coefficienten a, dass das Product je zweier dieser

Functionen $\sqrt{\varphi_i\varphi_k}$ eine φ-Function ist; also gilt das Gleiche von dem Product zweier beliebiger Functionen (14), $\sqrt{\varphi'\varphi''}$, welche sich durch die Werthe der Constanten a von einander unterscheiden. Daher ist auch das Verhältniss zweier solcher Functionen $\sqrt{\varphi'} : \sqrt{\varphi''}$ eine rationale Function von s und z, welche in je $p-1$ Punkten $\eta_1, \eta_2, \cdot\cdot, \eta_{p-1}$, resp. $\eta_1', \eta_2', \cdot\cdot, \eta_{p-1}'$ unendlich klein und unendlich gross von der ersten Ordnung wird; und von diesen Punkten können je $m-1$ beliebig gewählt werden.

Lassen wir nun in der Congruenz (4) das Punktsystem η_h, η_h' zusammenfallen mit dem doppelt gezählten Punktsystem η_h, in welchem eine Function $\sqrt{\varphi'}$ unendlich klein wird, so ergiebt sich, dass sich ein System zusammengehöriger halber Perioden bestimmen lassen muss von der Art, dass die Congruenz

$$(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p) \equiv \Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,p-1}^{i}\int_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\Big)\Big)$$

durch ein Punktsystem η_i befriedigt werden kann, von welchem $m-1$ Punkte beliebig angenommen werden können; und dies ist gleichbedeutend damit, dass die Congruenz

$$\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big) \equiv \Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,p-1}^{i}\int_{\varepsilon}^{\eta_i} du_h + k_h\Big)\Big)$$

für beliebige Lagen der $2m-2$ Punkte ε_i, ζ_i befriedigt werden kann, oder dass die Function

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

identisch, für alle Lagen von ε_i, ζ_i, verschwindet.

Das hierdurch Bewiesene fassen wir folgendermassen zusammen:

Wenn die Function

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,m-1}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

identisch für alle ε_i, ζ_i *verschwindet, dagegen*

$$\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{h}}\Big(\sum_{1,\,m}^{i}\int_{\varepsilon_i}^{\zeta_i} du_h + \tfrac{1}{2}\varpi_h\Big)\Big)$$

nicht identisch für alle ε_i, ζ_i *verschwindet, oder, was dasselbe ist, wenn für die Argumentwerthe* $(\tfrac{1}{2}\varpi_1, \tfrac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \tfrac{1}{2}\varpi_p)$ *die Function* ϑ *mit ihren sämmtlichen Derivirten bis zur* $m-1^{\text{ten}}$ *Ordnung einschliesslich, aber nicht sämmtlichen Derivirten der* m^{ten} *Ordnung verschwindet, so ent-*

spricht der Charakteristik (ϖ) *ein ganzes System Abel'scher Functionen, welche linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus* m *solchen Functionen zusammengesetzt sind.*

Und umgekehrt.

Wenn ein System von Abel'schen Functionen existirt, welches linear und homogen mit willkürlichen constanten Coefficienten aus m *linear unabhängigen Abel'schen Functionen zusammensetzbar ist, so lässt sich eine Charakteristik* (ϖ) *bestimmen von der Eigenschaft, dass die Function* ϑ *sammt allen ihren Derivirten bis zur Ordnung* $m-1$ *einschliesslich verschwindet für die Argumentwerthe* $(\frac{1}{2}\varpi_1, \frac{1}{2}\varpi_2, \cdot\cdot, \frac{1}{2}\varpi_p)$.

Wir können noch beifügen, dass, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Charakteristik (ϖ) gleichfalls gerade oder ungerade sein wird, denn für ein gerades (ϖ) verschwinden die Derivirten ungerader Ordnung der Function $\vartheta\{\varpi\}(v_1, v_2, \cdot\cdot, v_p)$ alle von selbst für die Nullwerthe der Argumente, und für ein ungerades (ϖ) gilt dasselbe von den Derivirten gerader Ordnung.

Wir machen von diesem Satze eine Anwendung auf die hyperelliptischen Functionen. Für diese sind die Integrale erster Gattung darstellbar in der Form:

$$\int \frac{\overset{p-1}{\varphi(z)}\, dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+2})}}.$$

Die Functionen φ sind ganze rationale Functionen der Veränderlichen z, welche den $p-1^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigen. Die zu Grunde liegende Riemann'sche Fläche ist eine zweiblättrige mit den Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot, \alpha_{2p+2}$ und die Nullpunkte der Functionen φ fallen paarweise in über einander liegende Punkte der beiden Blätter. Es fallen daher dann und nur dann zwei Nullpunkte einer solchen Function zusammen, wenn dieselben in einen Verzweigungspunkt rücken, oder wenn die betreffende Function φ einen quadratischen Factor hat. Bezeichnen wir daher mit $\beta_1, \beta_2, \cdot\cdot, \beta_q$ irgend eine Combination von q verschiedenen der Verzweigungspunkte $\alpha_1, \alpha_2, \cdot\cdot, \alpha_{2p+2}$, so ergeben sich folgende Classen von Abel'schen Functionen, von denen nur die erste Classe nicht Systeme bildet, sondern einzelne bestimmte Functionen liefert.

Abel'sche Functionen:	Anzahl der Systeme:
1) $\sqrt{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\cdot(z-\beta_{p-1})}$,	$\frac{p+4\cdot p+5\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot p-1}$,
2) $\sqrt{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\cdot(z-\beta_{p-3})}\,(a_0+a_1 z)$,	$\frac{p+6\cdot p+7\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-3}$,
3) $\sqrt{z-\beta_1)\cdot\cdot(z-\beta_{p-5})}\,(a_0+a_1 z+a_2 z^2)$,	$\frac{p+8\cdot p+9\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-5}$,
etc. etc.	

wenn die $a_0, a_1, a_2, \cdot\cdot$ willkürliche Constanten sind. Diese Reihe setzt sich soweit fort, bis die Wurzelgrösse entweder ganz wegfällt (bei ungeradem p) oder nur noch einen Factor enthält (bei geradem p). In ersterem Falle wird die letzte Classe von Abel'schen Functionen aus den ganzen rationalen Functionen vom Grade $\frac{p-1}{2}$ gebildet und diese Classe enthält nur ein System.

Aus der Anzahl der unbestimmten Constanten, von welchen diese Systeme abhängen, ergiebt sich nun folgender Satz für die hyperelliptischen Functionen vom Geschlecht p.

Es existiren $\frac{p+4\cdot p+5\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot p-1}$ *ungerade Thetafunctionen, deren erste Derivirten nicht sämmtlich*

$\frac{p+6\cdot p+7\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-3}$ *gerade Thetafunctionen, welche zwar selbst, aber nicht mit sämmtlichen Derivirten zweiter Ordnung,*

$\frac{p+8\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-5}$ *ungerade Thetafunctionen, welche mit ihren ersten, nicht aber mit sämmtlichen dritten Derivirten,*

$\frac{p+10\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-7}$ *gerade Thetafunctionen, welche mit ihren zweiten, nicht aber mit sämmtlichen vierten Derivirten etc. etc.*

für die Nullwerthe der Argumente verschwinden.

Da die Anzahl sämmtlicher Charakteristiken 2^{2p} ist, so bleiben

$$2^{2p}-\frac{p+4\cdot p+5\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-1}-\frac{p+6\cdot p+7\cdot\cdot 2p+2}{1\cdot 2\cdot\cdot p-3}-\cdot\cdot=\frac{p+2\cdot p+3\cdot\cdot 2p+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot p}$$

Thetafunctionen übrig, welchen keine Abel'schen Functionen entsprechen, und diese müssen gerade Thetafunctionen sein, welche für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden.

Die Anzahl und Beschaffenheit der vorhandenen Systeme von unendlich vielen Abel'schen Functionen begründet eine Reihe von Ausnahmefällen, von denen die hyperelliptischen Functionen die speciellste Classe bilden. Um wenigstens für die ersten Werthe von p diese Unterscheidung durchzuführen, ist zunächst erforderlich, auf die zwischen den Functionen φ bestehenden Relationen einzugehen.

Es sei $\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p$ ein System von linear unabhängigen φ-Functionen, und man bilde aus diesen ganze homogene Functionen zweiten Grades:

$$F_0(\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p), \quad F_1(\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p), \quad F_2(\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p), \cdot\cdot\cdot.$$

Die Quotienten je zweier solcher Functionen $F_1 : F_0$, $F_2 : F_0$, $\cdot\cdot$ sind rationale Functionen von s und z, welche in $4p-4$ Punkten der Fläche T unendlich gross von der ersten Ordnung werden, und zwar, wenn der Nenner F_0 derselbe ist, alle in denselben Punkten. Daraus folgt nach einem Riemann'schen Satze über die Anzahl der Constanten in den wie T verzweigten Functionen, dass alle diese Functionen durch $3p-4$ von ihnen linear ausdrückbar sind, oder dass zwischen $3p-2$ der Functionen F eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten besteht. Wählt man für die Functionen F die $\frac{p \cdot \overline{p+1}}{2}$ Quadrate und Producte $\varphi_1^2, \varphi_1\varphi_2, \cdots$, so folgt hieraus, dass zwischen den linear unabhängigen Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$

$$\frac{p \cdot \overline{p+1}}{2} - 3p + 3 = \frac{\overline{p-2} \cdot \overline{p-3}}{2}$$

homogene Gleichungen zweiten Grades bestehen müssen. Diese Zahl aber giebt nur eine untere Grenze. In besonderen Fällen können mehr solcher Gleichungen bestehen.

Im Falle $p = 3$ ist diese Zahl Null, und es besteht im Allgemeinen zwischen den drei Functionen φ eine Relation vierten Grades, welche zur Definition der betreffenden Classe algebraischer Functionen dienen kann, wenn man die zwei Verhältnisse der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ als Veränderliche einführt.

Im Falle $p = 4$ besteht zwischen den vier Functionen φ nur eine Relation zweiten Grades und es ergiebt sich ausserdem auf dem gleichen Wege eine homogene Gleichung dritten Grades zwischen diesen Grössen. Diese beiden Gleichungen bestimmen wieder vollständig eine Classe algebraischer Functionen vom Geschlecht 4.

Im Falle $p = 5$ ist die Zahl der homogenen Gleichungen zweiten Grades 3, und diese reichen im Allgemeinen aus, um die Functionenclasse zu definiren. Wir werden diese bemerkenswerthe Thatsache dadurch beweisen, dass wir zeigen, wie umgekehrt aus drei allgemeinen homogenen Gleichungen zweiten Grades durch Elimination zweier Variabeln eine Gleichung entsteht, die zum Geschlecht 5 gehört. Es seien also die drei homogenen Gleichungen zweiten Grades gegeben:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= 0, \\ \Phi_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= 0, \end{aligned}$$

die wir als allgemein voraussetzen. Statt der Variabeln x_i führen wir die neuen Variabeln p, q, x, y, z ein mittelst der linearen Substitution

$$x_i = m_i p + n_i q + a_i x + b_i y + c_i z,$$

von der wir voraussetzen, dass die Substitutionscoefficienten m_i, n_i den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(m) = 0, \quad \Phi_2(m) = 0, \quad \Phi_3(m) = 0, \\ &\Phi_1(n) = 0, \quad \Phi_2(n) = 0, \quad \Phi_3(n) = 0, \end{aligned}$$

dann lassen sich die transformirten Gleichungen in die Form setzen:

$$pq = f, \quad p\xi_1 + q\eta_1 = f_1, \quad p\xi_2 + q\eta_2 = f_2,$$

worin f, f_1, f_2 homogene Functionen zweiten, ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 homogene Functionen ersten Grades von x, y, z sind. Die Elimination von p, q ergiebt die homogene Gleichung sechsten Grades zwischen x, y, z:

$$f(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + (f_1\xi_2 - f_2\xi_1)(f_1\eta_2 - f_2\eta_1) = 0.$$

Um das Geschlecht dieser Gleichung zu ermitteln, haben wir noch die Anzahl der Doppelpunkte der durch dieselbe dargestellten Curve festzustellen. Da unsere quadratischen Gleichungen allgemein sein sollten, so ist ein Doppelpunkt nur dann vorhanden, wenn einem Werthsystem von x, y, z zwei Werthsysteme von p, q entsprechen, und dies findet dann und nur dann statt, wenn

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$$

und zugleich

$$f_1\xi_2 - f_2\xi_1 = 0, \quad f_1\eta_2 - f_2\eta_1 = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen zwei Curven dritten Grades dar, welche sich in 9 Punkten schneiden. Von diesen sind aber vier die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f_1 = 0$, $f_2 = 0$; in den fünf andern ist $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$. Die Anzahl der Doppelpunkte ist also 5 und das Geschlecht der betrachteten Functionenclasse ist ebenfalls 5.

Ist p grösser als 5, so übersteigt die Zahl der quadratischen Gleichungen zwischen den Functionen φ die Anzahl der aus denselben zu bestimmenden Functionen und diese Gleichungen können daher nicht mehr im allgemeinsten Sinne von einander unabhängig sein. Gleichwohl besteht keine lineare Abhängigkeit zwischen denselben, und nur in ihrer Gesammtheit können sie ausreichend sein, eine Classe algebraischer Functionen zu definiren. Die Gleichungen müssen in der Weise zusammen bestehen, dass noch mindestens zwei der Variablen $\varphi_1, \varphi_2, \cdot\cdot, \varphi_p$ unbeschränkt veränderlich bleiben; die übrigen können durch diese quadratischen Gleichungen als algebraische Functionen dieser beiden unabhängigen bestimmt sein.

Diese Darstellung der algebraischen Functionen durch die Gesammtheit der Relationen zwischen den Functionen φ bietet den Vortheil, dass es möglich ist, die Anzahl der unbestimmten Constanten, von denen die Functionenclasse abhängt, durch *lineare Transformation* auf eine möglichst kleine zu reduciren, und dass also die Frage nach den Moduln der Classe der gewöhnlichen Invariantentheorie zugänglich wird. Für den Fall $p = 5$ ergiebt sich hiernach folgende Aufgabe:

Man substituire für x_i neue Variable x_i' durch eine lineare Substitution. Es soll über die Substitutionscoefficienten und ausserdem über die Coefficienten $\alpha_i^{(k)}$ so verfügt werden, dass in den transformirten Functionen:

$$(15)\quad \begin{cases} \Phi_1' = \alpha_1^{(1)}\Phi_1 + \alpha_2^{(1)}\Phi_2 + \alpha_3^{(1)}\Phi_3\,, \\ \Phi_2' = \alpha_2^{(1)}\Phi_1 + \alpha_2^{(2)}\Phi_2 + \alpha_3^{(2)}\Phi_3\,, \\ \Phi_3' = \alpha_3^{(1)}\Phi_1 + \alpha_3^{(2)}\Phi_3 + \alpha_3^{(3)}\Phi_3 \end{cases}$$

eine möglichst grosse Anzahl von Coefficienten vorgeschriebene Werthe haben. Bezeichnen wir mit s_1, s_2, s_3 unbestimmte Coefficienten, und setzen:

$$(16)\quad \begin{cases} s_1 = \alpha_1^{(1)} s_1' + \alpha_2^{(1)} s_2' + \alpha_3^{(1)} s_3'\,, \\ s_2 = \alpha_1^{(2)} s_1' + \alpha_2^{(2)} s_2' + \alpha_3^{(2)} s_3'\,, \\ s_3 = \alpha_1^{(3)} s_1' + \alpha_2^{(3)} s_3' + \alpha_3^{(3)} s_3'\,, \end{cases}$$

so können wir diese drei Gleichungen (15) in die eine zusammenfassen:

$$(17)\qquad s_1'\Phi_1' + s_2'\Phi_2' + s_3'\Phi_3' = s_1\Phi_1 + s_2\Phi_2 + s_3\Phi_3\,,$$

und für die Möglichkeit dieser Transformation ergiebt sich, wenn wir, was frei steht, die Substitutionsdeterminante $=1$ annehmen, und wenn wir mit A_{ν_1,ν_2,ν_3}, A'_{ν_1,ν_2,ν_3} die simultanen Invarianten der drei Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, resp. Φ_1', Φ_2', Φ_3' bezeichnen, die Bedingung:

$$(18)\qquad \sum_{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3} A_{\nu_1,\nu_2,\nu_3} = \sum_{\nu_1\,\nu_2\,\nu_3} s_1'^{\,\nu_1} s_2'^{\,\nu_2} s_3'^{\,\nu_3} A'_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}\,,$$

worin sich die Summen auf alle solche Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 zu erstrecken haben, deren Summe $= 5$ ist. Es muss also die linke Seite von (18) durch die Substitution (16) in die rechte Seite transformirt werden, und man kann daher die absoluten Invarianten der ternären Form fünften Grades (18), deren es zwölf von einander unabhängige giebt, als die Classenmoduln betrachten.

Kehren wir nun zu den oben besprochenen Ausnahmefällen zurück und untersuchen zunächst den Fall $p=3$. Wenn in diesem Falle ein System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existirt, oder wenn eine gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente verschwindet, so besteht zwischen den drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 eine Gleichung zweiten Grades, welcher die Form gegeben werden kann:

$$\varphi_1\varphi_3 = \varphi_2^2 \quad\text{oder}\quad \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)^2.$$

Da nun die Function $\varphi_1 : \varphi_2$ nicht in mehr als vier Punkten unendlich gross und unendlich klein werden kann, so kann $\varphi_2 : \varphi_3$ nur in zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein werden, und durch die Substitution $z_1 = \varphi_2 : \varphi_3$ wird die Riemann'sche Fläche auf eine zweiblättrige abgebildet. Im Falle $p=3$ genügt also das Verschwinden einer geraden Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente, um die Functionenclasse zu einer hyperelliptischen zu machen, und umgekehrt verschwindet auch bei den hyperelliptischen Functionen nur *eine* gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente.

Im Falle $p=4$ bestehen im Allgemeinen eine homogene Gleichung zweiten und dritten Grades zwischen den vier Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Wenn ein System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existiren soll, so muss zwischen drei Functionen φ eine quadratische Gleichung bestehen, $\varphi_1\varphi_3 = \varphi_2^2$, und es verschwindet eine gerade Thetafunction für die Nullwerthe der Argumente. Die Gleichungen zweiten und dritten Grades repräsentiren dann geometrisch eine Raumcurve sechster Ordnung, welche der Durchschnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einem Kegel zweiter Ordnung ist, die auf eine ebene Curve fünfter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Doppelpunkten projicirt werden kann. Das System von unendlich vielen Abel'schen Functionen entspricht den Tangentialebenen des Kegels.

Wenn nun noch ein weiteres System von unendlich vielen Abel'schen Functionen existirt, so besteht ausser der Gleichung

$$(19)\qquad \varphi_1\varphi_3 = \varphi_2^2$$

zwischen den vier Functionen φ noch eine weitere Gleichung zweiten Grades, welche in einer der beiden Formen:

$$(20)\qquad \varphi_4^2 = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3);$$

$$(21)\qquad \varphi_4(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3) = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

worin F homogene Functionen zweiten Grades bedeuten, enthalten sein muss.

Es seien die Nullpunkte von φ_1: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,
„ „ „ φ_3: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$,
„ „ „ φ_2: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Im Falle (20) ergiebt sich für die drei Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, in welchen φ_1, φ_2 verschwindet, eine Gleichung von der Form:

$$(\varphi_4 - \lambda\varphi_3)(\varphi_4 + \lambda\varphi_3) = 0,$$

woraus hervorgeht, dass einer der beiden Factoren, etwa $\varphi_4 + \lambda\varphi_3$ in zweien der Punkte α, etwa in α_1, α_2, verschwindet. Ebenso folgt, dass sich ein Factor μ derart bestimmen lässt, dass $\varphi_4 + \mu\varphi_1$ in den Punkten β_1, β_2 verschwindet, und daraus folgt, dass die Function

$$\frac{\varphi_4 + \mu\varphi_1 + \lambda\varphi_3}{\varphi_2}$$

in nur zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein wird.

Wenn ein Punkt α mit einem Punkte β zusammenfällt, so ist

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \sqrt{\frac{\varphi_3}{\varphi_1}}$$

eine Function, die nur in zwei Punkten unendlich gross und unendlich klein wird, und wenn wir diesen Fall ausschliessen, so ergiebt sich leicht, dass in (21) nicht die beiden Constanten a_1, a_3 verschwinden können, da zwischen φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 keine lineare Gleichung besteht. Ist also etwa a_3 von Null verschieden, so ergiebt sich aus (21) für die Punkte α_1, α_2, α_3

$$\varphi_3(\varphi_4 + \lambda\varphi_3) = 0,$$

so dass $\varphi_4 + \lambda\varphi_3$ in diesen Punkten verschwinden muss. Daher lässt sich in dem Quotienten

$$\frac{\varphi_4 + \lambda\varphi_3 + \mu\varphi_1}{\varphi_2}$$

μ so bestimmen, dass auch diese Function nur in zwei Punkten Null und unendlich wird. Daraus ergiebt sich, dass alle diese Fälle auf hyperelliptische Functionen führen. Wenn also bei $p = 4$ zwei gerade Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, so gehört die Functionenclasse zu den hyperelliptischen und es folgt das Verschwinden von 8 weiteren geraden Thetafunctionen.

Königsberg, im September 1877.