Ueber Systeme von Kegelschnitten.

Von

E. Study in Marburg.

In gegenwärtiger Abhandlung sollen die Anschauungen, die vom Verfasser in seiner Schrift „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ (Leipzig 1889) dargelegt worden sind, auf ein besonderes Problem aus der Geometrie der Kegelschnitte angewendet werden.

Zunächst wird die Gleichung eines vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems in eine solche Form gebracht, dass man alle invarianten linearen Mannigfaltigkeiten solcher Systeme ohne Weiteres übersehen kann. Die gewonnenen Resultate werden sodann angewendet auf die Theorie der Fläche F_2^4 des fünffach ausgedehnten Raumes, deren Projection in den gewöhnlichen Raum die Steiner'sche Fläche ist.

Nach derselben Methode und mit ähnlichem Erfolg kann man noch zahlreiche andere Gegenstände behandeln; z. B. die Theorie der Systeme von Flächen 2. Grades, und die Theorie der Flächen n. O. des Raumes, unter Zugrundelegung der projectiven Gruppe einer Raumcurve 3. O. Einige auf den erstgenannten Gegenstand bezügliche Sätze, die den hier entwickelten analog sind, hat der Verfasser bereits hingestellt, freilich in einem ganz anderen, besonderen Forderungen angepassten Gewande.*) Die Theorie der Raumcurve 3. O. aber soll das Thema einer späteren Untersuchung bilden.

1.

Analytische Darstellung eines Kegelschnittsystems.

Um ein System von Kegelschnitten in einfacher Weise analytisch ausdrücken zu können, fassen wir den Kegelschnitt zunächst nur als Curve 2. Ordnung auf.

*) S. die Abhandlung „Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen“, Sitzungsber. d. K. Sächs. Academie, Sitzung vom 9. Mai 1892.

Wir bezeichnen mit $(LX)^2$ eine ternäre quadratische Form, mit $(U\Lambda)^2 = \frac{1}{2}(LL'U)^2$ ihre quadratische Covariante, und mit $J = \frac{1}{3}(L\Lambda)^2$ ihre Invariante.

Bekanntlich können in jede Form, die einen symbolischen Factor vom Typus $(LL'U)$ hat, mit Hülfe der Identität

$$(1) \qquad (LL'U)(LX)(L'Y) = (U\Lambda)(\Lambda XY)$$

Symbole Λ eingeführt werden; und ausserdem wird jede Form, die einen symbolischen Factor $(L\Lambda)$ oder $(\Lambda\Lambda'X)$ enthält, reducibel vermöge der Identitäten

$$(2) \qquad (L\Lambda)(LX)(U\Lambda) = (UX) \,.\, J,$$

$$(3) \qquad (\Lambda\Lambda'X)(U\Lambda)(V\Lambda') = (LX)(LUV) \,.\, J.$$

Hat man daher eine simultane Invariante der Form $(LX)^2$ und beliebiger anderer ternärer Grundformen zu bilden, so darf man annehmen, dass in ihr symbolische Factoren der drei Typen

$$(LL'U), \quad (L\Lambda), \quad (\Lambda\Lambda'X)$$

nicht vorkommen.

Wir betrachten jetzt das allgemeinste Kegelschnittsystem, das durch eine Gleichung vom Grade l' zwischen den Coefficienten der Form $(LX)^2$ vorgestellt wird. Ein solches System kann durch den gleich Null gesetzten symbolischen Ausdruck

$$(4) \qquad [(L\Pi)^2]^{l'}$$

dargestellt werden, sofern man annimmt, dass die Coefficienten der ternären quadratischen Form $(U\Pi)^2$ Symbole höherer Ordnung sind, die erst zu je l' vereinigt eine wirkliche Bedeutung erlangen.

Wenden wir auf die Form (4) den Evectantenprocess l' mal an, so entsteht eine gewöhnliche ternäre Form mit l' verschiedenen Veränderlichen $U_1 \ldots U_{l'}$, deren jede quadratisch auftritt. Entwickeln wir diese Form nach Elementarcovarianten, und führen wir nachträglich wieder Symbole L ein, so geht (4) über in eine Summe von simultanen Invarianten der Form $(LX)^2$ und einer Reihe von Normalformen, wobei in jedem Gliede der Summe nur eine Normalform linear auftritt.

Die wirkliche Durchführung dieses Gedankens dürfte ihre Schwierigkeiten haben (ausser bei kleinen Werthen der Zahl l'), wegen der verwickelten Rechnungen, zu denen sie Anlass bieten muss.

Man kann aber das Ergebniss, soweit es für unseren Zweck nothwendig ist, übersehen, ohne die Reihenentwickelung wirklich vorzunehmen.

Die Form (4) ist, wie gesagt, darstellbar als Summe von simultanen Invarianten der Form $(LX)^2$ und je einer Normalform

$(BX)^m\,(UP)^n$, worin diese Normalformen immer nur linear auftreten. Es gelingt nun ohne Weiteres, die allgemeine Gestalt einer solchen Invariante hinzuschreiben. Da ein Factor (BP) nicht auftreten kann, da ferner nach Obigem auch Factoren der Typen $(LL'U)$, $(L\Lambda)$, $(\Lambda\Lambda'X)$ ausgeschlossen werden können, so wird die fragliche Invariante ein Product von Factoren der Typen $(L\Lambda)^2$, $(B\Lambda)^2$, $(LP)^2$. Daraus folgt, dass in unserer Reihenentwickelung nur solche Normalformen auftreten, deren Ordnungszahlen m und n beide gerade sind. Setzen wir also $m = 2j'$, $n = 2j$, so nimmt der Ausdruck (4) die Form

$$\sum J^k[(LP)^2]^j\,[(B\Lambda)^2]^{j'} \tag{5}$$

an, worin man sich die Symbole B und P zur Unterscheidung der einzelnen Glieder noch mit den beiden Indices j und j' ausgestattet denken mag. Die Summe (5) ist zu erstrecken über alle von einander verschiedenen Werthsysteme der Zahlen j, j', k, die der Bedingung

$$j + 2j' + 3k = l' \tag{6}$$

genügen; denn es entspricht auch umgekehrt jeder so beschaffene Ausdruck von der Form (5) einem Kegelschnittsystem von der Form (4).

Jedes Kegelschnittsystem, das durch eine Gleichung l'^{ten} Grades in den Symbolen (oder Coefficienten) einer ternären quadratischen Form $(LX)^2$ dargestellt werden kann, kann demnach (wie unsere Herleitung zeigt) auf eine und nur eine Weise dadurch erhalten werden, dass man einen Ausdruck von der Form (5) gleich Null setzt.

Wir wenden uns nun zur Erklärung der *Charakteristiken* λ, λ' eines Kegelschnittsystems.

Wir sagen, unser Kegelschnittsystem habe die Charakteristiken λ, λ', wenn $l' = \lambda + 2\lambda'$ angenommen wird, die Summe (5) keinen Factor J hat, und der Ausdruck (5), kurz gesagt, im Grade λ' verschwindet, wenn man für $(LX)^2$ das Quadrat einer wirklichen linearen Form setzt.

Um die letzte Bedingung genauer auszusprechen, bezeichnen wir mit V eine Gerade von allgemeiner Lage, und mit $(L_1X)^2 = 0$ die Gleichung eines unbestimmten Kegelschnittes. Unsere Forderung ist dann die, dass bei Substitution von $(VX)^2 + t(L_1X)^2$ an Stelle von $(LX)^2$ in (5) die Potenz $t^{\lambda'}$, aber keine höhere Potenz von t als Factor vor das Ganze tritt.†)

Drückt man dies analytisch aus, so findet sich, dass in (5) nur solche Glieder vorkommen können, die der Bedingung

$$2k + j' \geqq \lambda' \tag{7}$$

genügen, und dass mindestens ein Glied vorhanden sein muss, das

---

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 27, S. 86, 87.

der *Gleichung* $2k + j' = \lambda'$ entspricht. Hierzu kommt noch die Bedingung, dass ein Glied vorhanden sein muss, dem der Werth $k = 0$ zugehört.

Wir wollen nun zeigen, dass der dualistisch entsprechende Begriff zu einem Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ' und λ ist; mit anderen Worten, dass die Zahlen λ und λ' einfach ihre Rolle wechseln, wenn man nicht, wie wir es gethan haben, $(U\Lambda)^2$ als Covariante von $(LX)^2$ auffasst, sondern umgekehrt $(LX)^2$ als Covariante von $(U\Lambda)^2$.

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, stellen wir unsere bisherige Grundform $(LX)^2$ als Covariante einer Form 2. Classe $(U\overline{\Lambda})^2$ dar:

$$(LX)^2 = \frac{1}{2}(\overline{\Lambda}\overline{\Lambda}'X)^2 = (\overline{L}X)^2.$$

Dann wird

$$(U\Lambda)^2 = \frac{1}{2}(LL'U)^2 = \frac{1}{3}(\overline{L}\overline{\Lambda})^2 \, . \, (U\overline{\Lambda})^2 = \overline{J} \, . \, (U\overline{\Lambda})^2,$$

$$J = \frac{1}{3}(L\Lambda)^2 = \frac{1}{3}\overline{J} \, . \, (\overline{L}\overline{\Lambda})^2 = \overline{J}^2,$$

wenn $\overline{J} = \frac{1}{3}(\overline{L}\overline{\Lambda})^2$ die Invariante der neuen Grundform $(U\overline{\Lambda})^2$ bedeutet.

Setzen wir nun diese Werthe von $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ und J in (5) ein, so entsteht zunächst die Summe

$$\sum \overline{J}^{2k+j'} \, . \, [(\overline{L}P)^2]^j \, [(B\overline{\Lambda})^2]^{j'}.$$

Hier lässt sich aber wegen der Bedingung (7) der Factor $\overline{J}^{\lambda'}$ abscheiden. Setzen wir daher

(8) $$k' = 2k + j' - \lambda', \quad \text{also} \quad k = 2k' + j - \lambda,$$

so wird unser Kegelschnittsystem dargestellt durch die Summe

(9) $$\sum \overline{J}^{k'} \, . \, [(\overline{L}P)^2]^j \, [(B\overline{\Lambda})^2]^{j'},$$

worin die Zahlen k', j, j' den folgenden Bedingungen zu genügen haben:

Es ist für alle Glieder der Summe

(10) $$j' + 2j + 3k' = l = \lambda' + 2\lambda,$$

(11) $$2k' + j \geqq \lambda,$$

und es ist mindestens ein Glied vorhanden, das dem Werthe $k' = 0$, und mindestens ein Glied, das der Gleichung $2k' + j = \lambda$ entspricht

Wie man sieht, ist die nunmehr gefundene Darstellung des Kegelschnittsystems genau dualistisch zu der ursprünglichen: Es haben in allen unseren Bedingungsgleichungen und Ungleichungen einfach die Zahlen λ und λ', j und j' ihre Rolle gewechselt; und an Stelle der

Zahlen k und l' sind dabei neue Zahlen k' und l getreten. Bedeutet also Y einen Punkt von allgemeiner Lage, und $(U\overline{\Lambda}_1)^2 = 0$ die Gleichung einer unbestimmten Curve 2. Classe, so hebt sich bei Substitution von $(UY)^2 + t(U\overline{\Lambda}_1)^2$ an Stelle von $(U\overline{\Lambda})^2$ in (9) die Potenz t^λ, und keine höhere Potenz von t als Factor heraus. Dies ist der zu beweisende Satz.

Indem wir das Ergebniss unserer Untersuchung nunmehr zusammenfassen, bringen wir zugleich unsere Bedingungen in eine Form, bei der die vollkommene Dualität der beiden Darstellungen (5) und (9) klar hervortritt.

Um das allgemeinste Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' zu finden, bestimme man alle Systeme von positiven ganzen Zahlen j, j', k, k', die den Gleichungen genügen

$$(12) \qquad \begin{cases} j + 2j' + 3k = \lambda + 2\lambda', \\ j' + 2j + 3k' = \lambda' + 2\lambda. \end{cases}$$

Bedeutet sodann $(LX)^2$ eine ternäre Form 2. O., $(U\Lambda)^2$ ihre Covariante und J ihre Invariante, $(U\overline{\Lambda})^2$ eine Form 2. Cl., $(\overline{L}X)^2$ ihre Covariante und $\overline{J}$ ihre Invariante, ist endlich $(UP)^{2j}(BX)^{2j'}$ eine Normalform, so stellt jede der beiden Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} \sum J^k \,.\, [(LP)^2]^j \, [(B\Lambda)^2]^{j'} = 0, \\ \sum \overline{J}^{k'} \,.\, [(\overline{L}P)^2]^j \, [(B\overline{\Lambda})^2]^{j'} = 0 \end{cases}$$

das fragliche Kegelschnittsystem dar; und zwar kann jede dieser beiden Gleichungsformen nur auf eine Weise hergestellt werden.

Umgekehrt bedeutet eine Gleichung von der Form (13) *ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ', wenn alle Glieder der Summe den Bedingungen* (12) *genügen, und wenn ausserdem ein Glied vorhanden ist, das dem Werthe $k = 0$, und ein Glied, das dem Werthe $k' = 0$ entspricht.*

Sind die beiden letzten Forderungen nicht erfüllt, so scheidet sich entweder bei der ersten Darstellung der Factor J oder bei der zweiten der Factor $\overline{J}$ ab, und die übrig bleibende Mannigfaltigkeit ist ein Kegelschnittsystem mit anderen Charakteristiken.

Die Zahl der linear-unabhängigen Normalformen $(UP)^{2j}(BX)^{2j'}$ ist $(2j+1)(2j'+1)(j+j'+1)$; also ist die Zahl der homogenen Constanten, die in (13) vorkommen,

$$(14) \qquad N(\lambda, \lambda') = \sum (2j+1)(2j'+1)(j+j'+1),$$

die Summe erstreckt über alle Werthepaare (j, j'), die in den Lösungen der Gleichungen (12) vorkommen. Da diese Constanten in (13) nur linear auftreten, so folgt:

Durch $N(\lambda, \lambda') - 1$ Kegelschnitte von hinreichend allgemeiner Lage lässt sich ein einziges Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' legen.

Die Zahl $N(\lambda, 0) = N(0, \lambda)$ hat den einfachen Werth $\binom{\lambda+5}{5}$; und es ist wahrscheinlich, dass die Zahl $N(\lambda, \lambda')$ sich auch im allgemeinen Falle als ganze rationale Function von λ und λ' schreiben lässt.

2.

Fortsetzung. — Besondere Kegelschnittsysteme.

Die hier zu Grunde gelegte Definition der Charakteristiken eines Kegelschnittsystems ist im Wesentlichen dieselbe, von der der Verfasser bei seinen bereits erwähnten älteren Untersuchungen über diesen Gegenstand ausgegangen ist; sie stimmt aber nicht überein mit der Darstellung bei Clebsch (Math. Ann. Bd. VI, S. 9 u. ff. (§ 5)). In der That sind die von Clebsch angegebenen Kriterien nicht richtig*). Wohl aber ist richtig seine Folgerung:

Jedes Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' kann durch eine Gleichung dargestellt werden, die homogen ist vom Grade λ in den Coefficienten von $(LX)^2$ und homogen vom Grade λ' in den Coefficienten von $(U\Lambda)^2$.

Es geht das auch aus unseren jetzigen Formeln unmittelbar hervor.

Um nämlich in (5) jedes Glied zunächst mit möglichst wenigen Symbolen von $(LX)^2$ und möglichst vielen Symbolen von $(U\Lambda)^2$ zu schreiben, haben wir folgende Mittel:

1) Wir ersetzen möglichst viele Factorenpaare $J.(LP)^2$ durch je einen Factor $\frac{1}{2}(\Lambda\Lambda'P)^2$. (Vgl. Formel (3)).

2) Wir ersetzen hierauf möglichst viele Factoren J^2 durch je einen Factor $\frac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2$.

3) Wir schreiben den etwa noch übrigen Factor J in der Form $\frac{1}{3}(L\Lambda)^2$.

Ist nun $k \leqq j$, so wird die Zahl der Symbole von $(U\Lambda)^2 = j' + 2k$, also $\geqq \lambda'$, und sie wird insbesondere bei den Gliedern, die der Gleichung $j' + 2k = \lambda'$ entsprechen, geradezu $= \lambda'$. Ist ferner $k > j$, so wird die fragliche Zahl

$$= j' + 2j + 3\,\frac{k-j}{2} \quad \text{oder} \quad = j' + 2j + 3\,\frac{k-j-1}{2} + 1,$$

---

*) Auf diesen früher von mir übersehenen Umstand wurde ich im Jahre 1886 durch Halphen aufmerksam gemacht.

je nachdem λ gerade oder ungerade ist; und dies ist wieder $\geqq \lambda'$ (Nr. 12, § 1).

Ersetzt man dann nachträglich, soweit es nöthig ist, wieder einzelne Symbole von $(U\Lambda)^2$ durch Symbole von $\frac{1}{2}(LL'U)^2$, so wird der ganze Ausdruck homogen in $(LX)^2$ vom Grade λ und in $(U\Lambda)^2$ vom Grade λ'; und zwar ist λ' die grösste Zahl von Symbolen von $(U\Lambda)^2$, die auf diese Art eingeführt werden können, was auch von vornherein deutlich ist. —

Die beiden Zahlen λ und λ' haben für ein System von Kegelschnitten ganz dieselbe Bedeutung, wie etwa die Ordnung einer algebraischen Fläche (eines Systems von Punkten) für diese Fläche. Die Mannigfaltigkeit aller Kegelschnittsysteme mit denselben Charakteristiken ist zu vergleichen der Mannigfaltigkeit aller algebraischen Flächen von derselben Ordnung*). Es besteht aber ein charakteristischer Unterschied. Während nämlich in der linearen Mannigfaltigkeit aller Flächen *n.* O. keine kleinere lineare Mannigfaltigkeit enthalten ist, deren Flächen von den collinearen Transformationen des Raumes nur unter einander vertauscht würden, enthält die lineare Mannigfaltigkeit aller Kegelschnittsysteme mit den Charakteristiken (λ, λ') thatsächlich kleinere lineare Mannigfaltigkeiten, die gegenüber den collinearen Transformationen der Ebene invariant sind. Die Untersuchung des § 1 setzt uns offenbar in den Stand, *alle* diese Mannigfaltigkeiten von vornherein anzugeben. *Jede invariante lineare Mannigfaltigkeit von Kegelschnittsystemen lässt sich durch Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den in* § 1 *eingeführten Zahlen* j, j' *kennzeichnen.*

Um dies durch ein einfaches *Beispiel* zu erläutern, wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen ein Kegelschnittsystem (λ, λ') die Mannigfaltigkeit aller ∞^3 Linienelement-Kegelschnitte (s. S. 552) s-fach enthält, oder unter welchen Umständen die in der vorangehenden Abhandlung Nr. I (S. 554) besprochene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$, das Bild unseres Kegelschnittsystems, s mal durch die invariante Mannigfaltigkeit M_3 hindurchläuft.

Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass von den $\lambda + \lambda'$ Kegelschnitten, die das System mit einem Büschel einander vierpunktig berührender Kegelschnitte gemein hat, sich s Kegelschnitte mit dem Linienelement-Kegelschnitt des Büschels vereinigen. Sei also V eine Gerade von allgemeiner Lage, und sei $(L_1X)^2 = 0$ ein im Uebrigen unbestimmter Kegelschnitt, der die Gerade V berührt, so muss sich

*) In diesem Zusammenhang müssen natürlich die Systeme, von denen sich bei der Darstellung durch die Formeln (13), § 1 der Factor J oder J abscheidet, noch als (reducibele) Systeme (λ, λ') gezählt werden.

bei Substitution von $(VX)^2 + t(L_1 X)^2$ an Stelle von $(LX)^2$ in den Ausdruck (5), § 1 nicht nur der Factor $t^{\lambda'}$, sondern der Factor $t^{\lambda'+s}$, aber keine höhere Potenz von t abscheiden. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn für alle Glieder unserer Summe die Bedingung

$$j' + 3k \geqq \lambda' + s \quad \text{oder} \quad j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s$$

erfüllt ist, und wenn für mindestens ein Glied die Gleichung

$$j + j' = \lambda + \lambda' - s$$

besteht. Soll diese Bedingung einem Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' auferlegt werden können, ohne dass es zerfällt, d. h., ohne dass sich von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ eine der Mannigfaltigkeiten M_4 und M_4' abscheidet, so sind die Zahlen λ, λ' und s nicht ganz willkürlich. Es wird nämlich dann, nach dem Satze des § 1, ein Glied vorhanden sein müssen, das dem Werthe $k = 0$ entspricht. Für dieses Glied hat man

$$j + 2j' = \lambda + 2\lambda', \quad j' \geqq \lambda', \quad j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s,$$

und hieraus folgt $\lambda \geqq 2s$. Ebenso ergibt sich $\lambda' \geqq 2s$ — ein Resultat, das auch unmittelbar aus der in der vorausgehenden Abhandlung I (S. 4) erwähnten geometrischen Bedeutung der Charakteristiken λ und λ' hervorgeht. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so gibt es auch wirklich Kegelschnittsysteme von der verlangten Art. Ein solches System ist z. B. jedes, in dessen Reihenentwickelung die beiden Glieder

$$(j = \lambda - 2s, \quad j' = \lambda' + s),$$
$$(j = \lambda + s, \quad j' = \lambda' - 2s)$$

vorkommen. Wir haben also bewiesen:

Ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' (nämlich ein System, von dem weder die Mannigfaltigkeit aller Punktepaare, noch die Mannigfaltigkeit aller Linienpaare sich abscheiden soll), kann nur dann die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte s-fach enthalten, wenn die Ungleichungen

(1) $$\lambda \geqq 2s, \quad \lambda' \geqq 2s$$

erfüllt sind. In der Reihenentwickelung eines solchen Systems kommen nur Glieder vor, die der Bedingung

(2) $$j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s \quad \text{oder} \quad k + k' \geqq s$$

genügen.

Im Falle $s = 1$ verlangt dieser Satz nur das Verschwinden der einzigen Elementarcovariante:

$$(UP)^{2\lambda}\ (BX)^{2\lambda'}:$$

Die Forderung, dass ein System (λ, λ') die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte enthalte, zählt für

$$(2\lambda + 1)(2\lambda' + 1)(\lambda + \lambda' + 1)$$

lineare Bedingungsgleichungen.

Ist $s = 2$, so wird das Verschwinden von zwei weiteren Elementarcovarianten gefordert, nämlich der folgenden:

$$(UP)^{2\lambda-4}(BX)^{2\lambda'+2}, \quad (UP)^{2\lambda+2}(BX)^{2\lambda'-4},$$

man hat also im Ganzen

$$12\lambda\lambda'(\lambda + \lambda') + 2(\lambda^2 + \lambda'^2) - 15(\lambda + \lambda') + 19$$

lineare Bedingungsgleichungen zu erfüllen, u. s. w.

In ähnlicher Weise, wie wir hier die Bedingung dafür gefunden haben, dass die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ durch M_3 hindurchgeht, kann man weiter die Bedingung dafür aufsuchen, dass sie M_4 oder M_4' noch ausserdem längs M_3 berührt, u. dgl. m.

Wir schliessen mit einem *Zahlenbeispiel*, indem wir alle Kegelschnittsysteme mit den Charakteristiken (2, 2) hinschreiben. Sie werden dargestellt durch die Summe

$$[(LP_0)^2]^2\,[(B_0\Lambda)^2]^2 + \frac{1}{2}\,[(LP_1)^2]^2\,(P_1\Lambda\Lambda')^2 + \frac{1}{2}\,[(B_2\Lambda)^2]^2\,(B_2LL')^2$$
$$+ \frac{1}{3}\,(L\Lambda)^2 \cdot (LP_3)^2\,(B_3\Lambda)^2 + \frac{1}{9}\,[(L\Lambda)^2]^2 \cdot C_4.$$

Die einzelnen Glieder hängen ab von einem Normalconnex (4, 4), einer Curve 6. Classe, einer Curve 6. Ordnung, einem Normalconnex (2, 2) und einer Constanten C_4. Soll unser Ausdruck wirklich einem Kegelschnittsystem (2, 2) entsprechen, und nicht etwa einem System (3, 0) oder einem System (0, 3), so muss entweder das erste Glied von Null verschieden sein, oder das zweite und das dritte Glied müssen beide zugleich von Null verschieden sein. Die Constantenzahl unseres Systems ist

$$N(2, 2) = 125 + 28 + 28 + 27 + 1 = 209,$$

d. h., durch 208 passend gewählte Kegelschnitte *geht ein* System (2, 2). Soll aber das System die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte enthalten, so muss das *erste Glied verschwinden*, und man kann nur noch 208 — 125 = 83 weitere Kegelschnitte willkürlich annehmen. Das System enthält dann, ausser den Linienelement-Kegelschnitten, gar keine ausgearteten Curven mehr.

3.

Anwendung auf die Theorie der Fläche F_2^4.

Es ist eine interessante und in mancher Hinsicht wichtige Aufgabe der Algebra, in einem Raum R_n von n Dimensionen die algebraischen Gebilde zu studiren, die sich als Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^2 2. Ordnung darstellen lassen. Auf wievielen und welchen linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^r r. Ordnung liegt ein solches Gebilde? Auf welchen unter ihnen ist es mehrfach enthalten? Diese und ähnliche Fragen übersteigen wohl in den meisten Fällen die Kräfte unserer heutigen Analysis. Es gibt aber eine Reihe solcher Gebilde, zu denen man von der Invariantentheorie aus gelangt, die einer verhältnissmässig einfachen und in gewissem Sinn erschöpfenden Behandlung fähig sind. Zu ihnen gehört die in der vorausgehenden Abhandlung I betrachtete Mannigfaltigkeit M_5 sowohl als die Fläche F_2^4, die bei der Abbildung der Curven 2. Classe in der Ebene auf die Punkte eines linearen R_5 den Punkten der Ebene entspricht. Sie beide können mit den in § 1 und § 2 gegebenen Hülfsmitteln in obigem Sinn behandelt werden.

Wir beschränken uns hier auf den zweiten Fall, die Theorie der Fläche F_2^4, weil er der einfachere ist, und weil er ausreicht, um die Tragweite der Methode zu zeigen.

Wir beginnen damit, die in § 6 der Abhandlung „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte" angegebenen und durch den Inhalt von § 1 und § 2 der gegenwärtigen Untersuchung bestätigten Sätze in eine neue Form zu bringen, die besonders geeignet scheint, den geometrischen Kern dieser Theorie klar hervortreten zu lassen. Wir gelangen zu der neuen Formulirung, wenn wir die mit T bezeichnete quadratische Transformation mit den ∞^8 dualistischen Transformationen des Raumes R_5 zusammensetzen, die den dualistischen Transformationen der Ebene entsprechen, und die die Mannigfaltigkeiten F_2^4 und Φ_2^4 mit einander vertauschen.

Wir kommen dann fast unmittelbar zu dem folgenden Satz:

Mit der Fläche F_2^4 sind zwei Schaaren $\mathfrak{g}_8$, $\mathfrak{h}_8$, von je ∞^8 Cremonaschen Transformationen verknüpft, die zusammen eine zur Gruppe der collinearen und dualistischen Transformationen der Ebene eindeutig isomorphe) Gruppe bilden.*

Die Schaar $\mathfrak{g}_8$ ist die Gruppe aller collinearen Transformationen der Fläche F_2^4; die Schaar $\mathfrak{h}_8$ aber, die den dualistischen Transformationen der Ebene entspricht, besteht aus quadratischen Transformationen, deren singuläre Stellen die Punkte von F_2^4 sind.

Durch die Transformationen von $\mathfrak{h}_8$ wird eine Punktmannigfaltigkeit l. Ordnung M_4^l von R_5, die die Fläche F_2^4 λ-mal enthält, übergeführt in eine Mannigfaltigkeit l'. Ordnung $M_4^{l'}$, auf der die Punkte

---

*) Wir gestatten uns für die eindeutig-umkehrbar isomorphe Beziehung zweier Transformationsgruppen den Ausdruck „eindeutig-isomorph" anzuwenden, da nach den Definitionen von S. Lie für „holoedrischen" Isomorphismus eindeutige Zuordnung der endlichen Transformationen der Gruppen nicht erforderlich ist.

von F_2^4 λ'*-fach enthalten sind, wobei zwischen den Zahlen* l, l', λ, λ' *die Relationen bestehen*

$$l = 2\lambda + \lambda', \quad l' = 2\lambda' + \lambda.$$

Dabei entsprechen linear-abhängigen oder unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l *in gleicher Weise linear-abhängige oder unabhängige Mannigfaltigkeiten* $M_4^{l'}$.

Es ist dies im Grunde nur ein anderer Ausdruck des Satzes, dass aus einem Kegelschnittsystem (λ, λ') durch eine dualistische Transformation ein System (λ', λ) hervorgeht.

Wir betrachten nun eine beliebige Punktmannigfaltigkeit l. Ordnung M_4^l in R_5, und gleichzeitig eine R_4^1-Mannigfaltigkeit l. Classe M_4^l. Diesen mögen in der Ebene die Kegelschnittsysteme

$$[(B\mathsf{\Lambda})^2]^l = 0 \quad \text{und} \quad [(L\mathsf{\Pi})^2]^l = 0$$

entsprechen. Drücken wir aus, dass die Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l *conjugirt* sind, d. h., dass ihre zur allgemeinen projectiven Gruppe des R_5 gehörige bilineare Invariante verschwindet, so erhalten wir die folgende einfache Bedingungsgleichung

$$[(B\mathsf{\Pi})^2]^l = 0.$$

(S. a. a. O., § 3, Formel II). Uebertragen wir jetzt die beiden Reihenentwickelungen, die nach Formel (5) und (6) des § 1 aus den Formen $[(B\mathsf{\Lambda})^2]^l$ und $[(L\mathsf{\Pi})^2]^l$ hervorgehen, in die Sprache der Geometrie des R_5, so gelangen wir zu dem Satz:

Jede Form l. Ordnung in R_5 *lässt sich in bestimmter Weise als Summe von Formen darstellen, von denen jede einzelne einer kleinsten bei den Transformationen von* $\mathfrak{g}_8$ *invarianten linearen Schaar angehört.*

Jede Form l. Classe in R_5 *lässt sich in bestimmter Weise als Summe von Formen darstellen, von denen jede einzelne einer kleinsten bei den Transformationen von* $\mathfrak{g}_8$ *invarianten linearen Schaar angehört.*

Jedes Glied der Reihe links ist identisch conjugirt zu jedem Glied der Reihe rechts, mit Ausnahme des einen Gliedes, das ihm selbst dualistisch gegenübersteht.

Unter einer *kleinsten* invarianten linearen Schaar von Mannigfaltigkeiten l. O. ist hier eine solche zu verstehen, in der keine lineare Schaar mehr enthalten ist, die ebenfalls invariant wäre, also eine Schaar, die (nach Ersetzung von l' durch l) einem Lösungssystem der Gleichung (6), § 1 entspricht.

Wir wollen von den zahlreichen Folgerungen des letzten Satzes nur eine einzige anführen, die sich auf das erste Glied der Reihenentwickelung der Invariante $[(B\mathsf{\Pi})^2]^l$ bezieht.

Durch eine jede auf F_2^4 gelegene Curve $4l$. Ordnung kann eine einzige Mannigfaltigkeit M_4^l l. O. derart hindurchgelegt werden, dass alle Φ_2^4 eingeschriebenen Mannigfaltigkeiten M_4^2 2. Classe zu M_4^l apolar sind.

Einer jeden Curve $4l$. Classe der Mannigfaltigkeit Φ_2^4 kann eine einzige Mannigfaltigkeit M_4^l l. Cl. derart eingeschrieben werden, dass alle durch F_2^4 gehenden Mannigfaltigkeiten M_4^2 2. Ordnung zu M_4^l apolar sind.

Die Gesammtheit aller so bestimmten Mannigfaltigkeiten l. Ordnung (l. Classe) bildet eine bei den Transformationen von $\mathfrak{g}_8$ invariante lineare Schaar, entsprechend der linearen Schaar aller ebenen Curven $2l$. Ordnung ($2l$. Classe); und zwar ist diese die einzige kleinste invariante lineare Schaar, deren Mannigfaltigkeiten die Fläche F_2^4 nicht enthalten (Φ_2^4 nicht eingeschrieben sind).

Die Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l sind dann und nur dann conjugirt, wenn die zugehörigen ebenen Curven conjugirt sind.

Der grösste Theil vom Inhalte dieses Satzes ergibt sich so unmittelbar aus dem Anblick unserer Reihenentwicklung, dass wir nichts weiter darüber zu sagen brauchen. Einer Erläuterung bedarf nur die eine Behauptung, dass die den ebenen Curven $2l$. Ordnung $(CX)^{2l}=0$ entsprechende Schaar $[(C\Lambda)^2]^l=0$ von Mannigfaltigkeiten M_4^l dadurch definirt werden kann, dass alle Φ_2^4 eingeschriebenen Mannigfaltigkeiten 2. Classe zu M_4^l apolar sind.

Dies können wir auf verschiedene Arten einsehen. Ein erster, sehr einfacher Beweis ist der folgende.

Die Schaar der zu den Curven $(CX)^{2l}=0$ gehörigen Mannigfaltigkeiten M_4^l kann nach dem vorigen Satze (S. 573) definirt werden als die Schaar aller der Mannigfaltigkeiten M_4^l, die conjugirt sind zu allen aus der Reihenentwickelung der Form $[(L\Pi)^2]^l$ hervorgehenden M_4^l, mit Ausnahme derer, die aus dem ersten von einer Curve $2l$. Classe abhängigen Glied entspringen. Alle jene M_4^l aber sind der Mannigfaltigkeit Φ_2^4 eingeschrieben, und daher in der Form $F_1\Phi_1+\cdots+F_6\Phi_6$ darstellbar, sofern $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ die sechs Φ_2^4 eingeschriebenen linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten 2. Classe bedeuten (Vgl. Math. Ann. Bd. 39, S. 532). Daher kann unsere den ebenen Curven $2l$. Ordnung zugeordnete Schaar von M_4^l definirt werden als die Schaar aller der M_4^l, zu denen $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ apolar sind.

Umständlicher ist es, den Satz durch Rechnung abzuleiten. Wir wollen aber auch diesen Weg beschreiten, da die Rechnung selbst nicht ohne Interesse, und, als Beispiel für solche Rechnungen überhaupt, hier sehr wohl am Platze ist.

Wir bezeichnen die beiden Kegelschnittsysteme, die zwei Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l entsprechen, mit

$$[(C\Lambda)^2]^l = 0$$

und

$$[(L\Pi)^2]^l = 0.$$

Dann ist, wie bemerkt, die Bedingung des Conjugirtseins von $\mathfrak{M}_4{}^l$ und $\mathsf{M}_4{}^l$ diese:

(1) $$[(C\Pi)^2]^l = 0.$$

Wir drücken nun aus, dass $\mathsf{M}_4{}^l$ zerfällt in eine $\mathsf{M}_4{}^{l-2}$ und eine $\Phi_2{}^4$ eingeschriebene $\mathsf{M}_4{}^2$:

(2) $$[L\Pi)^2]^l = (LL'G)^2 \,.\, [(LQ)^2]^{l-2}.$$

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in diese:

(3) $$(CC'G)^2\,[(CQ)^2]^{l-2} = 0.$$

Die Frage ist, unter welchen Umständen diese Bedingung *identisch* erfüllt ist, bei ganz beliebiger Wahl der Curve 2. O. $(GX)^2 = 0$ und des Systems von Curven 2. O. $[(LQ)^2]^{l-2} = 0$.

Um dies zu entscheiden, denken wir uns $[(C\Lambda)^2]^l$ durch Normalformen ausgedrückt,

(4) $$[(C\Lambda)^2]^l = \sum\left[\tfrac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2\right]^{k'}\left[\tfrac{1}{2}(P\Lambda\Lambda')^2\right]^{j}[(B\Lambda)^2]^{j'}$$
$$(j'+2j+3k'=l)$$

und führen dann, durch zweimalige Anwendung des Aronhold'schen Processes, neben dem Kegelschnitt $(U\Lambda)^2 = 0$ einen weiteren Kegelschnitt $(U\Delta)^2 = 0$ ein:

$$l(l-1)\,[(C\Lambda)^2]^{l-2}[(C\Delta)^2]^2$$
$$= \sum\left[\tfrac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2\right]^{k'}\left[\tfrac{1}{2}(P\Lambda\Lambda')^2\right]^{j}[(B\Lambda)^2]^{j'}$$
$$\cdot\Big\{6k'\frac{(\Lambda\Delta\Delta')^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2} + 9k'(k'-1)\frac{[(\Lambda\Lambda'\Delta)^2]^2}{[(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2]^2} + 2j\,\frac{(P\Delta\Delta')^2}{(P\Lambda\Lambda')^2}$$
$$+ 4j(j-1)\frac{[(P\Lambda\Delta)^2]^2}{[(P\Lambda\Lambda')^2]^2} + j'(j'-1)\frac{[(B\Delta)^2]^2}{[(B\Lambda)^2]^2} + 4jj'\frac{(P\Lambda\Delta)^2(B\Delta)^2}{(P\Lambda\Lambda')^2(B\Lambda)^2}$$
$$+ 12k'j\frac{(\Lambda\Lambda'\Delta)^2(P\Lambda\Delta)^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2(P\Lambda\Lambda')^2} + 6k'j'\frac{(\Lambda\Lambda'\Delta)^2(B\Delta)^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2(B\Lambda)^2}\Big\}.$$

Wir ersetzen nun $(C\Lambda)^2$ durch $(CQ)^2$ und $[(C\Delta)^2]^2$ durch $(CC'G)^2$. Dann wird, wenn $(U\mathsf{H})^2 = 0$, $(U\Theta)^2 = 0$ beliebige Curven 2. Classe bedeuten

$$(\Delta\mathsf{H}\Theta)^2(C\Delta)^2 = (CG\widehat{\mathsf{H}\Theta})^2 \qquad \text{(Vgl. „Methoden“ S. 77.)}$$
$$= (C\mathsf{H})^2(G\Theta)^2 - 2(C\mathsf{H})(G\Theta)(C\Theta)(G\mathsf{H}) + (C\Theta)^2(G\mathsf{H})^2,$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2(C\Delta)^2 &= 2(C\mathrm{H})^2(G\mathrm{H})^2 - 2[(C\mathrm{H})(G\mathrm{H})]^2,\\
(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2(\Delta \mathrm{H}\Theta)^2 &= (\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)^2(G\mathrm{H})^2 + \tfrac{1}{3}(\mathrm{H}\mathrm{H}'\mathrm{H}'')^2(G\Theta)^2,\\
[(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2]^2 &= \tfrac{4}{3}(\mathrm{H}\mathrm{H}'\mathrm{H}'')^2(G\mathrm{H})^2,\\
[(\Delta \mathrm{H}\Theta)^2]^2 &= (\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)^2(G\Theta)^2 + (\Theta\Theta'\mathrm{H})^2(G\mathrm{H})^2\\
&\quad - 2(\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)(\Theta\Theta'\mathrm{H}')(G\mathrm{H})(G\Theta'),\\
(\Delta\Delta'\mathrm{H})^2 &= 3(G\mathrm{H})^2.
\end{aligned}
$$

Mit Hülfe dieser Formeln finden wir nun, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Formen $(UP)^{2j}\,(BX)^{2j'}$ sämmtlich Normalformen sind,

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\binom{l}{2}(CC'G)^2\,[(CQ)^2]^{l-2}\\
&= \sum \left[\tfrac{1}{6}(QQ'Q'')^2\right]^{k'}\left[\tfrac{1}{2}(PQQ')^2\right]^{j}[(BQ)^2]^{j'}\\
&\cdot\Big\{(1+2j+2j'+2k')\left[3k'\frac{(GQ)^2}{(QQ'Q'')^2}+j\frac{(GP)^2}{(PQQ')^2}\right]\\
&\qquad - 6k'j'\frac{[(BQ)(GQ)]^2}{(QQ'Q'')^2(BQ)^2}\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Das identische Verschwinden des Ausdrucks auf der rechten Seite, worin $(GX)^2=0$ und $(UQ)^2=0$ veränderliche Kegelschnitte vorstellen, ist also äquivalent mit dem Bestehen der Gleichung (3).

Es ist von vorn herein deutlich, und der Anblick der Formel (5) macht es überdies augenscheinlich, dass man auf das Verschwinden einer Reihe von Normalformen geführt wird, die zu den auf der rechten Seite von (4) auftretenden Elementarcovarianten des Kegelschnittsystems $[(C\Lambda)^2]^l=0$ gehören.

Wir behaupten, dass in Folge des Verschwindens von (5) überhaupt *alle* Elementarcovarianten verschwinden müssen, mit Ausnahme der einzigen, die von der Curve $2l$. O. $(CX)^{2l}$ abhängt, so dass man

$$(6)\qquad [(C\Lambda)^2]^l = \left[(CX)^{2l},\,[(U\Lambda)^2]^l\right]$$

setzen kann, wenn $[F,\Phi]$ das Zeichen für die letzte Ueberschiebung von F und Φ ist.

Zunächst bemerken wir, dass diese erste Elementarcovariante thatsächlich nicht verschwindet zufolge des Verschwindens von (5). Sie entspricht nämlich dem Werthepaar $k'=0$, $j'=0$, und ein hierzu gehöriges Glied kommt in (5) nicht vor. Alle anderen Elementarcovarianten treten aber in (5) wirklich auf.

Wählen wir die Form $(GX)^2$ speciell, als Covariante von $(UQ)^2$:

$$(GX)^2 = \tfrac{1}{2}(QQ'X)^2,$$

so geht der Ausdruck (5) über in

$$\frac{1}{2}\sum\{(1+2j+2j'+2k')(j+3k')-k'j'\}\cdot$$
$$\cdot\left[\frac{1}{6}(QQ'Q'')^2\right]^{k'}\left[\frac{1}{2}(PQQ')^2\right]^{j}[(BQ)^2]^{j'}.$$

Der Zahlencoefficient irgend eines Entwickelungsgliedes verschwindet hier nur dann, wenn $k'=0$, $j=0$ ist; es müssen also wirklich alle Elementarcovarianten unseres Kegelschnittsystems verschwinden, mit Ausnahme jener einen.

Dies ist der zu beweisende Satz. —

Zum Schluss geben wir noch einige ganz specielle Folgerungen unserer Theorie, Sätze von der zu Eingang des § besprochenen Art.

Die Fläche F_2^4 liegt auf

$$\binom{l+5}{5}-(l+1)(2l+1)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l l. Ordnung.

Man erhält diese Mannigfaltigkeiten, wenn man in der Reihenentwicklung (4) das erste, dem Werthe $j'=l$ entsprechende Glied weglässt.

Verlangen wir weiter, dass jeder Punkt von F_2^4 ein Doppelpunkt von M_4^l ist, so wird ein weiteres Glied der Reihenentwickelung ausgeschlossen, nämlich das von der Normalform $(BX)^{2l-4}(UP)^2$ abhängige Glied. Es gibt also auch nur *eine* kleinste invariante Schaar von M_4^l, die die Fläche F_2^4 nur einfach enthalten, und wir kommen zu dem weiteren Satz:

Die Fläche F_2^4 ist auf

$$\binom{l+5}{5}-(2l-1)(4l-1)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten l. O. doppelt enthalten.

Ebenso ergibt sich:

Die Fläche F_2^4 ist auf

$$\binom{l+5}{5}-3(2l-3)(3l-4)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l l. O. ($l>3$) in der Weise doppelt enthalten, dass die von den Sehnen von F_2^4 erfüllte invariante Mannigfaltigkeit 3. O. längs der ganzen Fläche F_2^4 von den M_4^l berührt wird (mit anderen Worten, dass der Tangentialkegel von M_4^l in einem Punkte von F_2^4 übereinstimmt mit dem Tangentialkegel jener invarianten Mannigfaltigkeit).

Hier und in ähnlichen Fällen erlaubt unsere Analyse nicht nur Zahlen zu bestimmen, wie sie in den letzten Sätzen angegeben sind, sondern auch die in Rede stehenden Mannigfaltigkeiten wirklich hinzuschreiben.

In derselben Weise, wie hier die Mannigfaltigkeiten M_4^l behandelt worden sind, die durch die Fläche F_2^4 hindurchlaufen, kann man auch die identischen Relationen behandeln, die zwischen den Coefficienten einer ternären, quaternären oder senären orthogonalen Substitution bestehen.

Marburg, 21. April 1892.

Berichtigungen zu dem Aufsatze:

Ueber Covarianten ebener Collineationen von P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Seite	93,	Zeile	16	v. o.	ist nach dem mit dem Worte „an" schliessenden Satze der folgende einzuschalten: Von einem Netze der im System χ für $\varkappa=1$, $\lambda=0$, $\mu=0$ auftretenden identischen Collineation $u_x=0$ kann nicht gesprochen werden, da $C_\xi^2(u_x)\equiv 0$ ist; dieses ist im Folgenden stets zu berücksichtigen.
„	93,	„	20	„ „	lies: $=\lambda^3$ statt $=\lambda^2$.
„	93,	„	1	v. u.	ist das Eingeklammerte zu streichen, ebenso die hier gemachte Anm. 2.
„	94,	„	8	v. o.	lies: die 3 Werthe statt die Werthe.
„	94,	„	25	„ „	lies: $\mu f^2(xu)$ statt $\mu f(xu)$.
„	95,	„	9	„ „	sind die Worte „und sämmtlich zu abc" überflüssig und deshalb zu streichen.
„	95,	„	24	„ „	lies: liegen in statt in.
„	96,	„	1	„ „	ist 2) und
„	97,	„	2	„ „	das Eingeklammerte zu streichen.

Verbesserung zu Pasch.

Seite 150, Zeile 7 v. u. ist am Ende hinzuzufügen: von Null verschieden.