ANDRÉ HAEFLIGER

Un aperçu de l'œuvre de Thom en topologie différentielle (jusqu'en 1957)

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 68 (1988), p. 13-18
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1988__68__13_0>

UN APERÇU DE L'ŒUVRE DE THOM EN TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE (jusqu'en 1957)*

par ANDRÉ HAEFLIGER

René Thom est élève à l'École normale supérieure de Paris de 1943 à 1946. Henri Cartan y enseigne depuis 1940 et, de 1945 à 1947, il retourne à Strasbourg. René Thom reçoit un poste d'attaché au C.N.R.S. et suit Cartan à Strasbourg.

Strasbourg était un centre très vivant. Outre Henri Cartan, parmi les professeurs figuraient Ehresmann, Lichnerowicz, Chabauty. Reeb y achevait sa thèse sous la direction d'Ehresmann et Koszul travaillait à la sienne sous la direction de H. Cartan. Plusieurs jeunes Chinois et Japonais (tels Kobayashi, Nomizu et plus tard Wu Wen Tsun) attirés par Ehresmann et Koszul séjournaient à Strasbourg. Le séminaire de topologie d'Ehresmann, où venaient parler de nombreux conférenciers étrangers (tels Hopf, Whitney, etc.), était une source d'information très précieuse sur toutes les nouveautés en topologie qui n'avait pas son équivalent en France.

Cartan propose à Thom d'étudier les mémoires d'Oka sur les idéaux de fonctions analytiques. Ce serait plutôt les idéaux de fonctions différentiables qui intéresseraient Thom, mais rien n'est connu sur ce sujet sur lequel Thom reviendra plus tard. Thom cherche sa voie, et il faut attendre jusqu'en mars 1949 pour que sorte sa première note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences. Il était temps, car les responsables du C.N.R.S. se demandaient s'il fallait continuer à soutenir ce jeune mathématicien si peu productif. A-t-on réalisé à l'époque l'importance de cette courte note [1][1] intitulée « Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété », introduisant une idée fondamentale nouvelle qui a suscité un développement considérable?

Il s'agit d'un raffinement de la théorie de Morse. Thom considère une fonction différentiable f sur une variété compacte n'ayant que des points singuliers non dégénérés et son champ de gradient relativement à une métrique riemannienne bien adaptée à f.

* Texte d'une allocution prononcée lors de la séance d'ouverture du Colloque en l'honneur de René Thom, tenu à Paris du 25 au 30 septembre 1988.

1. Les nombres entre crochets renvoient à la liste de Publications de René Thom, en tête du volume.

Il constate que toute trajectoire de ce champ part d'un point critique et aboutit à un point critique et que la réunion des trajectoires issues d'un point critique d'indice p est une p-cellule ouverte (appelée maintenant la variété instable de ce point critique). Il en déduit notamment une démonstration des inégalités de Morse. Cette note a été généralisée d'abord par Reeb (Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém.*, 27, n° 9, 1952), puis par Smale dans son fameux mémoire On Morse inequalities for dynamical systems, *Bull. A.M.S.*, 66, 1960, 43-49. Cette précision de la théorie de Morse a également conduit à la technique de chirurgie utilisée par Milnor et Kervaire. Dans un article intitulé A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. III, 39-65, A.M.S., 1961, Milnor remercie Thom de lui avoir expliqué le procédé de chirurgie et son utilisation pour tuer les groupes d'homotopie.

Concernant la théorie de Morse, je voudrais également signaler que dans leur article intitulé The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections, *Ann. of Math.*, 69, 1959 (reçu en octobre 1958), 713-717, A. Andreotti et Th. Frankel mentionnent que Thom a donné une démonstration non publiée du théorème de Lefschetz en utilisant la théorie de Morse, et que la démonstration qui figure dans leur article est inspirée de celle de Thom. A ce propos j'ai retrouvé un manuscrit de Thom daté de février 1957 où il montre plus généralement qu'un domaine q-convexe de dimension complexe n se rétracte par déformation sur un CW-complexe de dimension au plus $2n - q - 1$.

Cet exemple, et il y en a beaucoup d'autres, montre bien que les écrits publiés de Thom ne donnent qu'une idée très partielle de sa créativité mathématique. Bouillonnant d'idées, il a été en général peu soucieux de leur donner une forme définitive, de les pousser jusqu'au bout ou d'en revendiquer la paternité. Cependant, ses idées et les problèmes qu'il a posés ont été une source d'inspiration pour toute une génération de mathématiciens.

Revenons en arrière pour examiner la deuxième note de Thom aux Comptes Rendus, soumise à l'académie en janvier 1950 (Classes caractéristiques et i-carrés [2]); elle introduit une autre notion fondamentale qui jouera un rôle considérable dans le développement de la topologie algébrique, à savoir ce que l'on appelle maintenant l'isomorphisme de Thom.

Évoquons d'abord les circonstances. C'est Koszul qui a attiré l'attention de Thom sur le travail de Steenrod, Products of cocycles and Extension of Mappings, *Ann. of Math.*, 48, 1947, 290-320. D'autre part Wu Wen Tsun, élève de Chern, était arrivé à Strasbourg en 1948, il avait déjà publié une démonstration du théorème de dualité de Whitney (qui donne la relation entre les classes de Stiefel-Whitney d'une somme de fibrés vectoriels en fonction de celles des facteurs) publiée dans *Ann. of Math.*, 49, 1948, 641-653. Il avait aussi signalé à Thom le fameux exposé de Whitney : On the Topology of Differentiable Manifolds, *Lectures in Topology*, Univ. of Michigan Press, 1941, que l'on peut considérer comme le point de départ de la topologie différentielle. La note aux Comptes Rendus de Thom est précédée d'une note de H. Cartan où il démontre en particulier la formule de dualité reliant les carrés de Steenrod d'un produit à ceux des facteurs et mentionne que cette formule lui a été suggérée par Thom et Wu Wen Tsun. Dans le premier paragraphe de sa note, Thom considère un fibré E en sphères S^{k-1} de base un complexe cellulaire K et appelle A le fibré en boules B^k associé. Il remarque que, à toute cellule Z_i de dimension p de K correspond par image réciproque de la projection une cellule $Z_i \times b^k$ de dimension $p + k$ de A, et que cette correspondance induit un isomorphisme φ de $H^*(K; Z)$ sur $H^*(A, E; Z')$, où Z' est le système local des entiers tordus par l'orientation du fibré A. En appelant U_k l'image de 1 par cet isomorphisme (la *classe de Thom* du fibré A) et W_r la r-ième classe de Stiefel-Whitney de E, il montre la fameuse formule

$$Sq^r\, U_k = \varphi W_r.$$

Dans une deuxième note parue quinze jours plus tard intitulée « Variétés plongées et i-carrés » [3], Thom montre comment on peut en déduire l'invariance topologique des classes de Stiefel-Whitney d'une variété différentiable V en considérant le plongement diagonal de V dans $V \times V$. En fait, Thom avait d'abord découvert la formule précédente dans ce cas particulier en remplaçant φ par l'*Umkehrung Homomorphismus* de Gysin. Dans une note présentée à la même séance (« Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété », p. 508-511), Wu Wen Tsun déduit de la formule de Thom l'invariance homotopique des classes de Stiefel-Whitney d'une variété en établissant les fameuses formules de Wu.

Ces deux notes de Thom constituent l'essentiel de sa thèse [6] rédigée sous la direction de H. Cartan et dont la forme finale doit beaucoup à ce dernier; elle fut soutenue en 1951 à la Faculté des Sciences de Paris.

C'est aussi pendant ces premières années strasbourgeoises que Thom est reçu très cordialement dans le groupe de Bourbaki comme « cobaye ». Il est invité à participer aux congrès Bourbaki; lorsque les discussions des aînés aboutissaient à une impasse, la coutume était de consulter les cobayes pour obtenir leur avis. Après une discussion interminable sur l'algèbre multilinéaire, au moment de s'adresser au jeune Thom, on constata qu'il s'était endormi et l'on comprit de part et d'autre qu'il n'était pas adapté à ce genre d'exercice.

Une troisième grande idée de Thom apparaît dans un exposé donné au Colloque de Topologie de Strasbourg [4] en mars 1951. C'est là qu'il donne pour la première fois la définition des groupes de cobordisme orienté et non orienté. Il remarque que les nombres de Pontrjagin et de Stiefel-Whitney sont des invariants de cobordisme, ainsi que la signature et il montre en particulier que les groupes de cobordismes des variétés de dimension 3 sont triviaux (résultat démontré indépendamment par Rochlin (*Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 81, 1951, p. 355)).

Thom passe l'année académique 1951-1952 au Graduate College de l'Université de Princeton; il y rencontre Steenrod avec qui il a des rapports très cordiaux. A son retour il fait un exposé dans le Colloque de Topologie de Strasbourg sur « Une théorie intrinsèque des puissances de Steenrod » [5] où il les relie à l'action du groupe cyclique au voisinage de la diagonale X dans XP. Cette idée sera établie plus tard en toute rigueur par Steenrod (Cohomology operations, *Ann. of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, 1962).

Puis seront publiées quatre notes aux *C. R. Acad. Sc.* [7], [8] et [9] qui aboutiront à l'article : Quelques propriétés globales des variétés différentiables [10], paru aux *Comm. Math. Helv.* en 1954. Ce travail monumental qui lui a valu la médaille Fields en 1958 a été le point de départ d'une série impressionnante de travaux. Il présente un caractère achevé (grâce aussi à l'aide de Serre pour certains calculs) qui n'a pas son égal dans l'œuvre de Thom. Après la prédominance pendant et après la guerre des techniques algébriques en topologie, il marque un retour à la géométrie qui n'a fait que se confirmer jusqu'à nos jours. Une idée fondamentale nouvelle y est exploitée : la possibilité de rendre une application d'une variété M dans une variété N transverse à une sous-variété S de N (ceci grâce au théorème de Sard signalé à Thom par G. de Rham). C'est en utilisant cette technique qu'il montre que les groupes de cobordisme sont isomorphes aux groupes d'homotopie stables d'un espace associé au groupe orthogonal appelé maintenant le complexe de Thom. Il montre aussi dans ce mémoire qu'il existe des obstructions de nature cohomologique à réaliser une classe d'homologie par l'image d'une variété, mais que c'est tout de même possible pour un multiple convenable de cette classe. Rappelons que Hirzebruch a immédiatement utilisé la détermination des groupes de cobordisme pour démontrer le théorème de la signature.

Entre 1955 et 1956, Thom trace les grandes lignes de la théorie de l'homotopie rationnelle dans deux articles remarquables (un exposé au Séminaire Cartan intitulé : « Opérations en Cohomologie réelle » [12] et un exposé au Colloque de Topologie de Louvain : « L'homologie des espaces fonctionnels » [14]). Cette théorie a trouvé son plein accomplissement avec Quillen et Sullivan quinze ans plus tard.

Je me permets d'intercaler maintenant quelques souvenirs personnels. En automne 1954, je suis arrivé à Strasbourg comme boursier du gouvernement français avec l'intention de préparer une thèse sous la direction de Ehresmann. A cette époque Wu Wen Tsun et Reeb n'étaient plus à Strasbourg. J'étais le seul étudiant préparant un doctorat. Peu de temps après mon arrivée, Ehresmann partit en voyage pour plusieurs mois, mais j'eus la chance exceptionnelle de rencontrer régulièrement Thom et j'ai tiré un immense profit des conversations que j'ai eues avec lui. En particulier c'est lui qui m'a expliqué les idées de base d'Ehresmann sur l'holonomie des feuilletages. L'année suivante, alors que j'avais suivi Ehresmann à Paris, je revenais régulièrement à Strasbourg pour voir Thom et c'est peu après une conversation avec lui que la non-existence des feuilletages analytiques sur S^3 m'est apparue clairement.

C'est le lieu de rappeler que Thom a souvent répété qu'il devait beaucoup à Ehresmann chez qui il appréciait le goût pour la géométrie. C'est à cette époque (précisément en été 1955) que Thom a commencé à s'intéresser sérieusement aux singularités des applications différentiables (cf. [13]), et la théorie des jets d'Ehresmann était le cadre tout naturel pour cette étude.

L'année 1956 est très productive pour Thom. Outre l'exposé au Colloque de

Topologie algébrique de Louvain mentionné plus haut, il annonce avec Dold dans une note aux *C. R. Acad. Sc. Paris*, 242 (1956), 1680-1682 (voir aussi [18]) le fameux théorème sur l'homotopie des produits symétriques infinis.

Je me souviens d'avoir rencontré Thom en été 1956 à son départ pour le Symposium de Topologie algébrique de Mexico. Il avait dans sa valise deux manuscrits importants. Dans le premier [17], il établissait une définition des classes de Pontrjagin rationnelles d'une variété semi-linéaire utilisant son travail ultérieur sur le cobordisme et le polynôme L de Hirzebruch intervenant dans le théorème de la signature. Ceci montrait l'invariance combinatoire des classes de Pontrjagin rationnelles (peu après, en février 1957, Rochlin et Švarc montraient indépendamment ce même résultat avec une méthode semblable, cf. The combinatorial invariance of Pontrjagin classes, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 114 (1957), 490-493). Cet article de Thom a été le premier pas vers la construction des classes de Pontrjagin rationnelles pour les variétés topologiques données par Novikov en 1965 (Topological invariance of rational Pontrjagin classes, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 163 (1965), 298-230). A ce même colloque, Milnor annonçait l'existence de structures différentiables exotiques sur la sphère de dimension 7; mis ensemble, ces deux résultats montraient l'existence d'une variété combinatoire de dimension 8 sans structure différentiable compatible. A ce propos, en 1958 (cf. [20] et [21]), Thom a esquissé avec témérité pour l'époque une théorie d'obstructions, à valeurs dans les groupes Γ_n des classes d'isotopies de difféomorphismes de S^{n-1}, pour construire une structure différentiable compatible sur une variété triangulée. Cette tentative qui n'a pas abouti immédiatement a été mise au point plus tard, par M. W. Hirsch notamment.

Dans le second manuscrit [15], Thom démontrait le lemme de transversalité dans l'espace des jets. Il s'agit là d'un outil fondamental pour l'étude des singularités des applications différentiables que Whitney, le grand précurseur dans ce domaine, ne possédait pas et que l'on peut considérer comme l'une des idées les plus fécondes de Thom. Dans son article antérieur [13] sur les singularités des applications différentiables, dont parle Teissier dans l'exposé faisant suite à celui-ci, il avait déjà réalisé son importance pour le problème de la stabilité des applications différentiables.

Rappelons que si f est une application différentiable d'une variété M dans une variété N transverse à une sous-variété S de N, alors $f(S)$ est une sous-variété dont la classe de cohomologie duale est l'image par f^* de la classe duale à S. Dans le cas plus général considéré par Thom, S est une sous-variété dans le fibré $J^r(M, N) \to M \times N$ des r-jets d'applications différentiables de M dans N et il s'agit d'approcher une application différentiable de M dans N par une application f dont le r-jet $j^r f$ est transverse à S. Mais pour l'étude des singularités, et c'est là aussi une idée nouvelle très importante, il faut considérer plus généralement le cas où S est un sous-fibré de $J^r(M, N)$ invariant par les difféomorphismes de M et N et dont la fibre est une variété algébrique réelle (par exemple l'adhérence d'une orbite sous le groupe Diff M $\times$ Diff N). Thom esquisse la démonstration qu'une telle variété porte une classe fondamentale modulo 2, et un peu plus tard [16], il démontrera que l'ensemble $(j^r f)^{-1}$ des points singuliers de f de type S porte une classe fondamentale duale à un polynôme universel (appelé *polynôme de Thom*) dans les classes de Stiefel-Whitney de M et les images par f^* de celles de N. De plus, S n'est pas une sous-variété lisse, mais une réunion de sous-variétés lisses (les strates), et l'on veut que $j^r f$ soit transverse à chaque strate. Ces considérations ont motivé tous les travaux postérieurs fondamentaux de Whitney sur les stratifications.

Pour terminer ce bref survol, je voudrais encore signaler une remarque très utile de Thom dans un exposé du séminaire Bourbaki 1957-1958 ([19]), à savoir la propriété d'extension des isotopies d'une sous-variété à la variété ambiante. D'ailleurs dans cet exposé, consacré au théorème des immersions de Smale, Thom a su mettre en évidence les points fondamentaux de la démonstration, ouvrant ainsi la voie à ses multiples généralisations (en particulier la thèse de Gromov).

Ce que je viens de mentionner sur la théorie des singularités n'est que le point de départ d'une étude beaucoup plus profonde que Teissier évoque ci-après, et aussi l'amorce d'une vision beaucoup plus large qui débordera le cadre strict des mathématiques.

Université de Genève
Section de Mathématique
2-4, rue du Lièvre
CH-1211 Genève

Manuscrit reçu le 4 avril 1989.