Un calcul symbolique non commutatif pour les asservissements non linéaires et non stationnaires

Michel FLIESS(+)
Université Paris VIII
et
Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris

Sommaire

Introduction
I.-Rappels sur les séries formelles non commutatives
a)Définitions et propriétés générales
b)Produit de Hurwitz
c)Systèmes d'équations
II.-Asservissements non linéaires et séries formelles
a)Asservissements réguliers (ou bilinéaires)
b)Séries de Volterra
c)Approximations des asservissements
III.-Résolution d'équations différentielles non linéaires
a)Théorie
b)Exemples pratiques
c)Cas stochastique
Bibliographie

(+) Travail sous contrat de recherche n° 75.133 de l'IRIA.

Introduction

Le but de cette Note est de promouvoir l'utilisation des polynômes et des séries formels en indéterminées non commutatives comme outil de calcul privilégié pour les asservissements non linéaires et (ou) non stationnaires.

Après divers rappels, nous montrons comment ces êtres algébriques peuvent représenter des systèmes donnés souvent, jusqu'alors, sous forme d'une série de Volterra. Aux séries rationnelles, introduites en théorie des automates et langages par M.P. Schützenberger (cf. [9]), correspondent les systèmes réguliers (ou bilinéaires) réalisables, étudiés selon d'autres méthodes par Brockett [4 , 6] , Bruni, DiPillo, Koch [8] , d'Alessandro, Isidori, Ruberti [1] . Polynômes et séries rationnelles permettent d'approcher uniformément, dans tout domaine compact donné, tout asservissement continu, ce tant dans la topologie des fonctions continues que de carré sommable. Ces faits ayant déjà été démontrés par l'auteur [15, 18, 19] , nous ne ferons que les passer en revue.

Le résultat original de cette Note concerne la résolution d'équations intégrales ou différentielles non linéaires en régime forcé. L'emploi des indéterminées non commutatives permet un calcul algorithmique bien plus facile que ceux proposés avec les séries de Volterra, notamment dans le cas non stationnaire (cf. Flake [14]). Ces méthodes sont applicables dans le cas stochastique à condition, évidemment, d'utiliser l'intégrale de Stratonovich [26] .

I.-Rappels sur les séries formelles non commutatives

a) Définitions et propriétés générales

Soient X un ensemble fini, non vide, l'alphabet, X^* le monoïde libre qu'il engendre. Un élément de X^* est un mot, l'élément neutre, ou mot vide, est noté "1". K étant un corps commutatif, soient $K\langle X\rangle$ et $K\langle\langle X\rangle\rangle$ les anneaux des polynômes et des séries formels, à coefficients dans K, en les indéterminées associatives $x \in X$ (non commutatives si card $X \geqslant 2$). Un élément $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est noté

$$s = \sum \left\{ (s,w)w \mid w \in X^* \right\} .$$

L'addition et le produit sont définis par:

$$s_1 + s_2 = \sum \left\{ ((s_1,w)+(s_2,w))w \mid w \in X^* \right\} ,$$

$$s_1 s_2 = \sum \left\{ \left(\sum_{w_1 w_2 = w} (s_1,w_1)(s_2,w_2) \right) w \mid w \in X^* \right\} .$$

$s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est inversible ss'il existe une série s^{-1} telle que $ss^{-1}=1=s^{-1}s$. Comme dans le cas commutatif, s est inversible ssi son terme constant $(s,1)$ est non nul. Un sous-anneau R de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est dit rationnellement clos ssi l'inverse de toute série inversible de R appartient encore à R. L'anneau $K\langle(X)\rangle$ des séries <u>rationnelles</u>, introduit par Schützenberger [25], est le plus petit sous-anneau rationnellement clos de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ qui contienne $K\langle X\rangle$.

<u>Remarque</u>.-Lorsque X est réduit à une seule lettre x, une série rationnelle n'est autre que le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle de la forme P/Q, où $P,Q \in K[x]$, $Q(0)\neq 0$.

Soit $K^{N\times M}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K, à N lignes et M colonnes. Une représentation (linéaire) $\mu : X^* \to K^{N\times N}$ est un homomorphisme du monoïde X^* dans le monoïde multiplicatif des matrices carrées d'ordre N. Le résultat fondamental suivant est connu sous le nom de théorème de Kleene-Schützenberger (cf. [25, 17]):

<u>Théorème 1.1</u>.-Une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationnelle si et seulement s'il existe un entier $N \geqslant 1$, une représentation $\mu : X^* \to K^{N\times N}$, des matrices ligne $\lambda \in K^{1\times N}$ et colonne $\gamma \in K^{N\times 1}$ tels que

$$r = \sum \{ (\lambda \mu w \gamma) w \mid w \in X^* \} .$$

<u>Remarque</u>.-Un <u>langage</u> (<u>formel</u>) est une partie d'un monoïde libre X^*. Il peut être considéré comme série formelle en les indéterminées $x \in X$, à condition de prendre les coefficients dans le semi-anneau de Boole $\mathcal{B}=\{0,1\}$, avec $1+1=1$, ou le semi-anneau $\underline{N}$ des entiers non négatifs, si l'on tient compte de l'ambiguïté. Sur de tels semi-anneaux, le concept de séries rationnelles se définit sans grand changement. Le théorème 1.1, dû à Schützenberger [25], y est encore valable. Il généralise le résultat original de Kleene d'après lequel un langage est rationnel ss'il est accepté par un automate fini. Pour plus de détails sur les liens des séries avec l'informatique et la linguistique mathématiques, nous renvoyons à Chomsky, Schützenberger [9], Eilenberg [12], Cohn [10].

La <u>matrice de Hankel</u> d'une série $s \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ est le tableau infini $\mathcal{H}(s)$ dont lignes et colonnes sont indexées par X^*, de sorte que le coefficient d'indice $(u,v) \in X^* \times X^*$ est (s,uv). Le rang est immédiat à définir. Le théorème suivant généralise une propriété classique dans le cas d'une seule indéterminée. La démonstration peut se faire (cf. [17]) à l'aide de modules gauches ou droits sur $K\langle X\rangle$ qui sont l'analogue des modules introduits pour les systèmes linéaires par R.E. Kalman.

<u>Théorème 1.2</u>.-K étant un corps, une condition nécessaire et suffi-

sante pour qu'une série $r \in K\langle\langle X\rangle\rangle$ soit rationnelle est que la matrice de Hankel soit de rang fini $\bar{N}$. Il existe alors une représentation $\bar{\mu} : X^* \longrightarrow K^{\bar{N}\times\bar{N}}$, des matrices ligne $\bar{\lambda} \in K^{1\times\bar{N}}$ et colonne $\bar{\gamma} \in K^{\bar{N}\times 1}$, telles que

$$r = \sum \{(\bar{\lambda}\,\bar{\mu}\,w\,\bar{\gamma})w \mid w \in X^*\} .$$

Soient un entier $N \geqslant 1$, une représentation $\mu : X^* \longrightarrow K^{N\times N}$, des matrices ligne $\lambda \in K^{1\times N}$ et colonne $\gamma \in K^{N\times 1}$ tels que

$$r = \sum \{(\lambda\,\mu\,w\,\gamma)w \mid w \in X^*\} .$$

Alors $N \geqslant \bar{N}$. Si $N = \bar{N}$, il existe une matrice inversible $P \in K^{\bar{N}\times\bar{N}}$ telle que $P\mu w P^{-1} = \bar{\mu} w$, $\bar{\lambda} P = \lambda$, $P\gamma = \bar{\gamma}$ (les représentations $\bar{\mu}$ et μ sont donc semblables). $\bar{\mu}$ est dite <u>réduite</u> (ou <u>minimale</u>).

<u>Application</u>.-Une représentation $\mu : X^* \longrightarrow K^{N\times N}$ est dite <u>nilpotente</u> ssi, pour tout mot non vide w, la matrice μw l'est. D'après un résultat dû à Levitzki, la représentation peut être triangularisée, en ce sens que toutes les matrices μw peuvent l'être simutanément.

<u>Proposition 1.3</u> (cf. [19]).-Une série rationnelle de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ est un polynôme si et seulement si elle peut être produite par une représentation nilpotente. Alors, la représentation réduite est nilpotente.

<u>b) Produit de Hurwitz</u>

Le produit de séries formelles défini au début, dit parfois <u>produit de Cauchy</u>, n'est pas le seul possible. Le <u>produit de Hurwitz</u> ou <u>d'intercalement</u> (en anglais <u>shuffle product</u>) se définit par récurrence sur la longueur des mots:

$1 ⧢ 1 = 1$, $\forall_X\ x\ \ 1 ⧢ x = x ⧢ 1 = x$, $\forall_X\ x,y\ \ \forall_{X^*}\ u,v\ \ ux ⧢ vy = (u ⧢ vy)x + (ux ⧢ v)y$.

Il se prolonge par linéarité à $K\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$s_1 ⧢ s_2 = \sum \{(s_1,u_1)(s_2,u_2)u_1 ⧢ u_2 \mid u_1,u_2 \in X^*\} .$$

Ce produit est associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition; il a pour élément neutre 1. Le produit de Hurwitz de deux polynômes est un polynôme. Par ailleurs, on peut démontrer (cf. [16]):

<u>Proposition 1.4</u>.-Le produit de Hurwitz de deux séries rationnelles est une série rationnelle.

<u>c) Systèmes d'équations</u>

Soit $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_M\}$ un ensemble de M lettres, les inconnues. Soit le système (E) de M équations $\xi_i = A_i$ $(i=1,\ldots,M)$, où A_i est une expression formée par la somme, possiblement infinie, de monômes où figurent la concaténation et le produit de Hurwitz des lettres de X et Ξ. Exemple: $x_1 ⧢ (x_0 \xi_1)$. De plus, on impose aux monômes ne contenant que des ξ_j d'être nuls. A_i peut comprendre un

terme constant non nul $A_i(0)$

Proposition 1.5.-Le système d'équations (E) admet un M-uple solution et un seul de séries de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ que l'on peut obtenir par itération. Les coefficients des mots de longueur inférieure ou égale à k de l'itéré d'ordre k coïncident avec ceux de la solution.

Preuve.-La méthode est en tout point identique à celle utilisée pour les systèmes d'équations algébriques, étudiés en [9 , 10], et qui généralisent les grammaires de Chomsky pour les langages algébriques ou context-free. Elle repose sur le fait que, $K\langle\langle X\rangle\rangle$ étant complet pour la topologie (X)-adique, on définit par substitution aux ξ_i d'éléments de $K\langle\langle X\rangle\rangle$ une contraction dans l'ensemble des M-uples de $K\langle\langle X\rangle\rangle$, où le terme constant de la i^e série est $A_i(0)$. Le M-uple solution est le point fixe.

II.-Asservissements non linéaires et séries formelles

K est désormais le corps $\underline{R}$ des réels ou celui $\underline{C}$ des complexes.

a) Asservissements réguliers (ou bilinéaires)

Un asservissement régulier (ou bilinéaire) réalisable a une description par espace d'état de la forme

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \dot{q}(t)\ (=dq/dt) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda q(t) \end{cases},$$

où $q(t)$ [$q(0)$ donné] appartient au K-espace vectoriel d'état Q de dimension ici finie (d'où le terme réalisable), $A_0, A_1, \ldots, A_n : Q \to Q$, $\lambda : Q \to K$ sont des applications K-linéaires, $u_1, \ldots, u_n : \underline{R}_+ \to K$ ($\underline{R}_+ = [0, \infty[$) sont les entrées (ou commandes, ou gouvernes, ou contrôles) que l'on suppose localement intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue.

Deux asservissements sont dits indiscernables ssi, pour les mêmes entrées, on obtient les mêmes sorties. On montre (cf. [3]) que tout asservissement linéaire

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = F\eta(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t) g_i \\ y(t) = H\eta(t) \end{cases},$$

d'espace d'état N de dimension finie, où $g_i \in N$ $(i=1,\ldots,n)$ et $F : N \to N$, $H : N \to K$ sont des applications K-linéaires, est indiscernable d'un asservissement régulier réalisable.

Posons $\xi_0(t) = t$, $\xi_i(t) = \int_0^t u_i(\tau)d\tau$ $(i=1,\ldots,n)$. La formule de Peano-Baker conduit à écrire:

$$(2.2)\qquad y(t) = \lambda\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_k,\ldots,j_1=1}^{n} A_{j_k}\ldots A_{j_1} \int_0^t d\xi_{j_k}\ldots d\xi_{j_1}\right] q(0) \quad ,$$

où l'intégrale est définie par récurrence sur la longueur:

$$\int_0^t d\xi_j = \xi_j(t) \quad (j=0,1,\dots,n), \quad \int_0^t d\xi_{j_k}\dots d\xi_{j_1} = \int_0^t d\xi_{j_k}(\tau)\int_0^\tau d\xi_{j_{k-1}}\dots d\xi_{j_1}.$$

Soit l'alphabet $X=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ où x_j correspond à ξ_j. Guidés par (2.2), introduisons la série rationnelle $\underline{G}\in K\langle\langle X\rangle\rangle$ donnée par la représentation $\mu : X^* \longrightarrow K^{N\times N}$ définie par $\mu\, x_j = A_j$, de sorte que

$$\underline{G} = \sum \{(\lambda\,\mu\, w q(0))w \mid w\in X^*\} \quad .$$

$\underline{G}$ est dite série <u>génératrice</u> de (2.1), qu'elle définit à une indiscernabilité près (cf. [15, 19]).

Le théorème 1.2 donne la nature de la réalisation réduite d'un asservissement régulier (cf. [15, 19]), résultat obtenu aussi par Brockett [3], Bruni, DiPillo, Koch [8], et d'Alessandro, Isidori, Ruberti [1] .

<u>Théorème 2.1</u>.-Il y a bijection canonique entre les asservissements réguliers réalisables, définis à une indiscernabilité près, et les séries rationnelles non commutatives. Un asservissement régulier réalisable, dont la matrice de Hankel de la série génératrice est de rang fini $\overline{N}$, est indiscernable de $(\overline{\Sigma})$

$$\begin{cases} \dot{\overline{q}}(t) = (\overline{A}_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\overline{A}_i)\overline{q}(t) \\ y(t) = \overline{\lambda}\,\overline{q}(t) \end{cases},$$

d'espace d'état $\overline{Q}$ de dimension $\overline{N}$. Tout asservissement régulier

$$\begin{cases} \dot{q}'(t) = (A'_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A'_i)q'(t) \\ y(t) = \lambda' q'(t) \end{cases},$$

indiscernable des précédents, a un espace d'état Q' de dimension $N' \geqslant \overline{N}$. Si $N'=\overline{N}$, il existe un isomorphisme $P: Q' \longrightarrow \overline{Q}$, tel que:

$$PA'_jP^{-1} = \overline{A}_j \quad (j=0,1,\dots,n), \quad \overline{\lambda}P = \lambda', \quad Pq'(0) = \overline{q}(0) \quad .$$

$(\overline{\Sigma})$ est dit réduit.

<u>Application</u>.-Lorsque la série génératrice est un polynôme, on obtient un asservissement régulier, dit <u>nilpotent</u>, que la proposition 1.3 permet de caractériser ainsi:

<u>Proposition 2.2</u>.-Un asservissement régulier est nilpotent si et seulement s'il est indiscernable de l'asservissement

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)A_i)q(t) \\ y(t) = \lambda\, q(t) \end{cases},$$

où le semi-groupe engendré par les matrices $A_0, A_1, \dots, A_n$ est nilpotent.

D'après le théorème de Levitzki, $A_0, A_1, \dots, A_n$ peuvent être simultanément triangularisées.

<u>Remarque</u>.-Marcus [23] utilise le terme nilpotent dans un sens légèrement plus général.

b)Séries de Volterra

Wiener [28], dès 1942, a tenté de mettre les asservissements non linéaires sous forme d'une série de Volterra (cf. [2]):

$$(2.3)\quad y(t)=h_0(t)+\int_0^t h_1(t,\tau_1)u(\tau_1)d\tau_1+\int_0^t\int_0^t h_2(t,\tau_2,\tau_1)u(\tau_2)u(\tau_1)d\tau_2 d\tau_1 + \dots ,$$

où, pour simplifier, l'entrée et la sortie $u,y:\underline{R}_+\longrightarrow K$ sont supposées scalaires.

Les nombreux travaux, tant théoriques que pratiques, qui leur ont été consacrés, ont achoppé sur la détermination effective des noyaux $h_0,h_1,h_2,\dots$.

A une série $\underline{G}\in K\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$, associons, par comparaison à (2.2), le système entrée-sortie donné par

$$y(t)=(\underline{G},1)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j_k,\dots,j_1=0,1}(\underline{G},x_{j_k}\dots x_{j_1})\int_0^t d\xi_{j_k}\dots d\xi_{j_1} ,$$

où $\xi_0(t)=t,\ \xi_1(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau$.

Un asservissement, ainsi décrit par une série non commutative, est dit <u>analytique</u>. La série, dite encore <u>génératrice</u>, le caractérise à une indiscernabilité près.

<u>Théorème 2.3</u> (cf. [18,19]).-Un asservissement est analytique si et seulement s'il peut être défini par une série de Volterra, dont les noyaux sont des fonctions analytiques.

<u>Remarques</u>.-(i)Pour ne pas alourdir l'exposé, nous n'étudierons pas les questions de convergence liées au développement en série non commutative.

(ii)Il y a stationnarité, c'est-à-dire invariance par translation temporelle, ssi le support de la série génératrice $\underline{G}$, défini par

$$\text{supp}\ \underline{G}=\{w\mid w\in X^*,(\underline{G},w)\neq 0\} ,$$

est de la forme

$$\text{supp}\ \underline{G}\subseteq\{x_0,x_1\}^*x_1 .$$

La multiplication de deux asservissements d'entrée u et de sorties y_1,y_2 est l'asservissement d'entrée u et de sortie, à l'instant t, $y_1(t)y_2(t)$. Une simple intégration par parties conduit à énoncer:

<u>Proposition 2.4</u> (cf. [18,19]).-L'asservissement multiple de deux asservissements analytiques est analytique, de série génératrice le produit de Hurwitz des deux séries génératrices.

En vertu de la proposition 1.4, il vient si l'on appelle <u>rationnel</u>, <u>polynômial</u> un asservissement analytique dont la série génératrice l'est:

<u>Corollaire 2.5</u> (cf. [18,19]).-L'asservissement multiple de deux asservissements analytiques rationnels (ou plynômiaux) est de même nature.

c)Approximations des asservissements

C'est la généralisation fonctionnelle,due à Fréchet (cf. [21], p. 78),du théorème d'approximation de Weierstrass qui justifie l'introduction par Wiener des séries de Volterra (cf. [2]).En effet, d'après ce résultat,les séries de Volterra tronquées,c'est-à-dire avec un nombre fini de noyaux non nuls,permettent d'approcher tout asservissement continu.On a un résultat analogue avec les asservissements anlytiques par application du théorème d'approximation de Weierstrass-Stone.

Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions de $\underline{R}_+$ dans K que l'on suppose être l'ensemble des fonctions:
-continues muni de la topologie de la convergence compacte,
-localement de carré sommable par rapport à la mesure de Lebesgue, muni de la topologie suivante:la suite u_n tend vers zéro ssi,pour tout $t>0$,$\lim \int_0^t u_n^2(\tau)d\tau = 0$.

Un asservissement peut être considéré comme une application de $\underline{R}_+ \times \mathcal{F}$ dans K obeissant au principe de causalité:la sortie y(t) ne dépend de l'entrée $u(\tau)$ que pour $0 \leq \tau \leq t$.Un asservissement est dit continu ssi c'est une application continue de $\underline{R}_+ \times \mathcal{F}$ dans K.

Théorème 2.6.-Dans tout domaine compact de $\underline{R}_+ \times \mathcal{F}$,tout asservissement continu peut être uniformément approché par des asservissements analytiques que l'on peut choisir rationnels ou polynômiaux.

Corollaire 2.7.-Dans tout domaine compact de $\underline{R}_+ \times \mathcal{F}$,tout asservissement continu peut être uniformément approché par des asservissements réguliers réalisables,que l'on peut choisir nilpotents.

Remarque.-Ces résultats d'approximations,démontrés en [19] ,avaient été énoncés en [18] pour la topologie de la convergence compacte des fonctions continues.Indépendamment et peu après,ils ont été retrouvés par Sussmann [27] pour la topologie de la convergence vague,fait qui implique le résultat de [18].Par ailleurs,Krener[20] a prouvé que tout système de la forme

$$\begin{cases} \dot{q}(t)=f(q(t))+u(t)g(q(t)) \\ y(t)=h(q(t)) \end{cases},$$

où f,g,h sont des fonctions C^∞,peut être approché par un asservissement régulier réalisable.

III.-Résolution d'équations différentielles non linéaires

a)Théorie

Soit l'asservissement,où l'entrée figure linéairement,décrit par:

$$(3.1)\quad \begin{cases} q(t)=q(0)+ta(t)+\displaystyle\int_0^t \Big[f(t,q(t))+\sum_{i=1}^{n} u_i(t)g_i(t,q(t))\Big]\,dt \\ y(t)=h(t,q(t)) \end{cases},$$

où le vecteur d'état q appartient à un K-espace vectoriel Q de dimension finie N, et où $a,f,g_1,\dots,g_n,h$ sont des fonctions analytiques dans un voisinage de l'origine contenant $(0,q(0))$ ((3.1) est un système intégrale à la Volterra généralisant (2.1)).

<u>Proposition 3.1</u>.-(3.1) définit un asservissement analytique dont la série génératrice peut être calculé par itération. On obtient ainsi une suite d'approximations par asservissements polynômiaux.

<u>Preuve</u>.-Soient $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_N,\xi_{N+1}\}$ où $\xi_1,\dots,\xi_N$ correspondent aux N coordonnées de q et ξ_{N+1} à y. Rappelons que la multiplication à gauche par x_0 correspond à intégrer, celle par x_i à multiplier par u_i puis intégrer; de plus le produit des valeurs donne le produit de Hurwitz (cf. proposition 2.4). (3.1) conduit alors à écrire, sous forme matricielle:

$$(3.2)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix}=q(0)+x_0 \sqcup\!\sqcup A(x_0)+x_0F(x_0,\xi_1,\dots,\xi_N) \\ \qquad\qquad +\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iG_i(x_0,\xi_1,\dots,\xi_N) \\ \xi_{N+1}=H(x_0,\xi_1,\dots,\xi_N) \end{cases},$$

où A,B,F,G,H sont des séries en les variables $x_0,\xi_1,\dots,\xi_N$ où le produit qui intervient est celui de Hurwitz.

La résolution par itération selon le § I.c de (3.2) est possible et correspond, de façon claire, à la méthode itérative de Picard pour les équations intégrales (ou différentielles).

D'après la proposition 1.5, on obtient un algorithme fournissant une suite de polynômes de degré inférieur ou égal au pas d'itération, dont les coefficients coïncident avec ceux de la série génératrice solution. Ces polynômes définissent des asservissements analytiques polynômiaux, ou réguliers nilpotents, qui convergent vers (3.1) dans l'une des topologies du § II.c.

<u>Remarques</u>.-(i) Brockett [5] a étudié les équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot q(t)=f(t,q(t))+\sum u_i(t)g_i(t,q(t)) \\ y(t)=h(t,q(t)) \end{cases}.$$

Il a prouvé que la solution pouvait se mettre sous la forme d'une série de Volterra lorsque f,g,h sont analytiques en q et seulement continues en t. Toutes les considérations qu'il développe sur le rayon de convergence et la prolongation analytique sont immédia-

tement transposables ici.

(ii)Une limitation importante de notre approche provient du fait que l'entrée est linéaire en (3.1).S'il n'en n'est pas ainsi,on peut, avec Brockett [7],prendre pour nouvelles entrées $v_1,\dots,v_n$ où v_i est la dérivée de u_i et rajouter n dimensions q_{N+i} à l'espace d'état de sorte que

$$q_{N+i}(t)=u_i(t)=u_i(0)+\int_0^t v_i(\tau)d\tau.$$

(iii)Des équations assez semblables à (3.2) ont été rencontrées par Cori [11] pour définir des séries non commutatives associées à certains graphes planaires.

b)Exemples pratiques

Il importe parfois d'obtenir de manière explicite la solution d'un système de la forme (3.1).Lorsque le système est autonome,la transformation de Laplace multidimensionnelle offre un outil d'une certaine efficacité pour le calcul des noyaux de la série de Volterra.Si l'on n'utilise pas cet outil,et,dans le cas non autonome, on ne peut le faire,on aboutit à des équations aux dérivées partielles souvent inextricables liant les noyaux (cf. Flake [13,14]). Dans tous les cas,le calcul itératif de la série génératrice nous semble bien plus simple.

Exemple 1 (cf. Barrett [2]).-Soit l'équation dite de Duffing

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by + ey^3=u(t) \quad .$$

Elle peut être réécrite sous la forme:

$$y(t)+a\int_0^t y(\tau)d\tau +b\int_0^t d\tau\int_0^\tau y(\tau')d\tau' \quad +e\int_0^t d\tau\int_0^\tau y^3(\tau')d\tau'=\int_0^t d\tau\int_0^t u(\tau')d\tau'+ \alpha +\beta t,$$

où $y(0)=\alpha$,$\dot{y}(0)=\beta -a\alpha$ .La série génératrice $\underline{G}\in K\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$ satisfait à l'équation:

$$\underline{G}+ax_0\underline{G}+bx_0^2\underline{G}+ex_0^2(\underline{G}\sqcup\!\sqcup\underline{G}\sqcup\!\sqcup\underline{G})=x_0x_1+\beta x_0+\alpha \quad .$$

On approxime par la suite de polynômes de $K\langle x_0,x_1\rangle$,qui définissent des asservissements polynômiaux ou réguliers nilpotents:

$-\alpha$;

$-\alpha +(\beta -a\alpha)x_0$;

$-\alpha +(\beta -a\alpha)x_0+(a^2\alpha -a\beta -b\alpha -e\alpha^3)x_0^2+ x_0x_1$;

$-\alpha +(\beta -a\alpha)x_0+(a^2\alpha -a\beta -b\alpha -e\alpha^3)x_0^2+x_0x_1-ax_0^2x_1+$terme en x_0^3 ;etc....

Remarque.-Par d'autres méthodes,on a cherché à développer un calcul itératif des noyaux de séries de Volterra correspondant à des équations différentielles de forme identique (cf. Reddy,Reddy [24]).

Exemple 2 (cf. Brockett [5]).-Soit l'équation

$$\dot{y} = \sin y + u(t) \quad ,$$

où,pour simplifier les calculs,on suppose $y(0)=0$.Elle peut être

réécrite sous la forme:

$$y(t)=\int_0^t \sin y(\tau)d\tau \quad +\int_0^t u(\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n+1}(\tau)/(2n+1)!\,d\tau \quad +\int_0^t u(\tau)d\tau \quad .$$

La série génératrice $\underline{G}\in K\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$ satisfait à:

$$\underline{G}=x_0\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\underline{G}\sqcup\!\sqcup\ldots\sqcup\!\sqcup\underline{G}}_{2n+1\text{ fois}}\Big)+x_1 \ .$$

On approxime par la suite de polynômes de $K\langle x_0,x_1\rangle$:

- 0 ;
- x_1 ;
- $x_1+x_0x_1$;
- $x_1+x_0x_1-6x_0x_1^3-18x_0^2x_1^3-6x_0x_1^2x_0x_1$;etc... .

<u>Exemple 3</u> (cf. Flake [14]).-Soit l'équation

$$\ddot{y}+t\dot{y}+y+y^2=u(t) \qquad (\ y(0)=\dot{y}(0)=0\ ) \quad .$$

Elle peut être réécrite sous la forme:

$$\dot{y}(t)+\int_0^t \tau\dot{y}(\tau)d\tau \quad +\int_0^t d\tau\int_0^t \dot{y}(\tau')d\tau'+\int_0^t\Big(\int_0^\tau \dot{y}(\tau')d\tau'\Big)^2 d\tau \quad =\int_0^t u(\tau)d\tau \quad .$$

La série génératrice $\underline{G}\in K\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$ de y satisfait à:

$$\dot{\underline{G}}+x_0(x_0\sqcup\!\sqcup\dot{\underline{G}})+x_0^2\dot{\underline{G}}+x_0\left[(x_0\dot{\underline{G}})\sqcup\!\sqcup(x_0\dot{\underline{G}})\right] \ = \ x_1 \ .$$

La série génératrice $\underline{G}$ de y est donnée par:

$$\underline{G}=x_0\dot{\underline{G}} \quad .$$

On approxime par la suite de polynômes de $K\langle x_0,x_1\rangle$:

- 0 ;
- x_0x_1 ;
- $x_0x_1-2x_0^3x_1-x_0^2x_1x_0$;
- $x_0x_1-2x_0^3x_1-x_0^2x_1x_0+8x_0^4x_1+5x_0^3x_1x_0+2x_0^2x_1x_0^2-4x_0^4x_1^2$;etc... .

<u>c)Cas stochastique</u>

Lorsque l'entréée est une diffusion markovienne,on peut appliquer à (3.1) les méthodes itératives précédentes,cela sans changement à condition d'utliser l'intégrale stochastique de Stratonovich [26], qui,à l'inverse de celle d'Itô,obeit aux règles de calcul habituelles.Par une démonstration analogue,la proposition 3.1 reste valable et l'on obtient une suite d'asservissements plynômiaux,ou réguliers nilpotents,convergeant vers la solution en moyenne quadratique sur tout intervalle de temps borné.

Si,pour l'intégrale de Stratonovich,à un asservissement analytique rationnel correspond une système régulier donné par (2.1), rappelons que ce n'est pas aussi simple avec le calcul d'Itô.La première ligne de (2.1) est alors remplacée par:

$$\dot{q}(t)=\left[\left(A_0+1/2\sum_{i,j} R_{ij}(t)A_iA_j\right)+\sum_i A_iu_i(t)\right]q(t)\ ,$$

si $u={}^t(u_1,\dots,u_n)$ (^{t} indique la transposition matricielle) est un bruit blanc centré vérifiant $E(u(t)\,{}^tu(s))=R(t)\,\delta(t-s)$ (cf. Lo [22]).

Application.-Dans de nombreux problèmes, nos méthodes d'approximations devraient permettre un filtrage statistique non linéaire sous-optimal par utilisation des asservissements polynômiaux ou réguliers nilpotents. Illustrons nos dires par le résultat suivant de Marcus [23] :

Soit $\dot{u}(t)=F(t)u(t)+G(t)b(t)$, où b est un bruit blanc indépendant de la variable aléatoire gaussienne $u(0)$. La meilleure estimée de la sortie d'un asservissement polynômial, connaissant $z^t=\{z(\tau)\,|\,0\leq\tau\leq t\}$, défini par $z(t)=H(t)u(t)+R^{1/2}(t)b'(t)$ ($R>0$, b' bruit blanc indépendant de b et $u(0)$, (F,G,H) complètement commandable et observable), peut être calculée par un système d'équations différentielles de dimension finie, conduit par l'innovation $d\nu(t)=dz(t)-H(t)\hat{u}(t|t)$ (la meilleure estimée $\hat{u}(t|t)$ de u est, bien sûr, fournie par un filtre de Kalman-Bucy).

Bibliographie

1.-d'Alessandro (P.), Isidori (A.) et Ruberti (A.).-Realization and structure theory of bilinear systems. SIAM J. Control, 12, 1974, p. 567-615.

2.-Barrett (J.F.).-The use of functionals in the analysis of nonlinear physical models. J. Electronics Control, 15, 1963, p. 567-615.

3.-Brockett (R.W.).-On the algebraic structure of bilinear systems, in "Theory and Applications of Variable Structure Systems" (R.R. Mohler et A. Ruberti, éd.), p. 153-168. Academic Press, New York, 1972.

4.-Brockett (R.W.).-Lie algebras and Lie groups in control theory, in "Geometric Methods in System Theory" (D.Q. Mayne et R.W. Brockett, éd.), p. 43-82. D. Reidel, Dordrecht, 1973.

5.-Brockett (R.W.).-Volterra series and geometric control theory. Proc. 6th IFAC Congr., Cambridge (Mass.), 1975.

6.-Brockett (R.W.).-Nonlinear systems and differential geometry. Proc. IEEE, 63, 1975.

7.-Brockett (R.W.).-Functional expansions and higher order necessary conditions in optimal control, in "Algebraic System Theory" (G. Marchesini, éd.). Lect. Notes Math., Springer-Verlag, Berlin, à paraître.

8.-Bruni (C.), DiPillo (G.) et Koch (G.).-Bilinear systems: an appealing class of "nearly linear" systems in theory and applicatio applications. IEEE Trans. Autom. Contr., 19, 1974, p. 334-348.

9.-Chomsky (N.) et Schützenberger (M.P.).-The algebraic theory of context-free languages,in "Computer Programming and Formal Systems" (P. Braffort et D. Hirschberg,éd.),p. 118-161.North-Holland, Amsterdam,1963.
10.-Cohn (P.M.).-Algebra and language theory.Bull. London Math. Soc., 7,1975,p. 1-29.
11.-Cori (R.).-Un code pour les graphes planaires.Astérisque n° 27, 1975.
12.-Eilenberg (S.).-Automata,languages and machines,vol. A.Academic Press,New York,1974.
13.-Flake (R.H.).-Volterra series representation of nonlinear systems.AIEE Trans.,81,1963,p. 330-335.
14.-Flake (R.H.).-Volterra series representation of time varying nonlinear systems,Proc. 2nd IFAC Congr. (Bâle,1963),p. 91-99. Butterworths,London et R. Oldenbourg,Munich,1964.
15.-Fliess (M.).-Sur la réalisation des systèmes dynamiques bilinéaires.C.R. Acad. Sc. Paris,A-277,1973,p. 923-926.
16.-Fliess (M.).-Sur divers produits de séries formelles.Bull. Soc. Math. France,102,1974,p. 181-191.
17.-Fliess (M.).-Matrices de Hankel.J. Math. Pures Appl.,53,1974, p. 197-222.
18.-Fliess (M.).-Séries de Volterra et séries formelles non commutatives.C.R. Acad. Sc. Paris,A-280,1975,p. 965-967.
19.-Fliess (M.).-Un outil algébrique:les séries formelles non commutatives,in "Algebraic System Theory"(G. Marchesini,éd.).Lect. Notes Math.,Springer-Verlag,Berlin,à paraître.
20.-Krener (A.J.).-Bilinear and nonlinear realizations of input-output maps.SIAM J. Control,13,1975,p. 827-834.
21.-Lévy (P.).-Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle.Gauthier-Villars,Paris,1951.
22.-Lo (J. T.-H.).-Signal detection on Lie groups,in "Geometric Methods in System Theory"(D.Q. Mayne et R.W. Brockett,éd.),p. 295-304.D. Reidel,Dordrecht,1973.
23.-Marcus (S.I.).-Estimation and analysis of nonlinear stochastic systems.Ph. D. Thesis,Dept. Electrical Engin. Comput. Sci.,M.I.T., Cambridge (Mass.),1975.
24.-Reddy (P.K.) et Reddy (D.C.).-Volterra kernels in nonlinear systems.Electronics Lett.,9,1973,p. 426-427.
25.-Schützenberger (M.P.).-On the definition of a family of automata. Inform. Control,4,1961,p. 245-270.
26.-Stratonovich (R.L.).-A new representation for stochastic inte-

grals and equations (traduit du russe).SIAM J. control,4,1966,p. 362-371.

27.-Sussmann (H.J.).-Semigroup reprsentation,bilinear approximation of input-output maps,and generalized inputs,in "Algebraic System Theory"(G. Marchesini,éd.).Lect. Notes Math.,Springer-Verlag, Berlin,à paraître.

28.-Wiener (N.).-Nonlinear problems in random theory.M.I.T. Press, Cambridge(Mass.),1958.