

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire. (Problème de Cauchy. IV.)

Bulletin de la S. M. F., tome 90 (1962), p. 39-156

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__39_0

© Bulletin de la S. M. F., 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN PROLONGEMENT DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE
QUI TRANSFORME LA SOLUTION UNITAIRE
D'UN OPÉRATEUR HYPERBOLIQUE
EN SA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE ⁽⁰⁾
(PROBLÈME DE CAUCHY, IV) ⁽¹⁾ ;

PAR

JEAN LERAY

(Paris).

INTRODUCTION.

Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients holomorphes, à partie principale réelle et dont le cône caractéristique n'a pas de singularité réelle; nous allons donner l'expression suivante de sa solution élémentaire $E(x, y)$:

$$(1) \quad E(x, y) = \mathcal{L}[U^*(\xi, y)];$$

$U^*(\xi, y)$ désigne la solution unitaire [II] de l'adjoint a^* de a ; \mathcal{L} désigne un prolongement de la transformation inverse de Laplace.

L'allure de $E(x, y)$ résulte de celles de \mathcal{L} et U^* : voir n° 14.

Une expression explicite de $E(x, y)$ par quadratures résulte aussi de (1), quand $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, dont l'ordre est m , a ses coefficients d'ordres m , $m - 1$ et $< m - 1$ respectivement linéaires, constants et nuls; par exemple quand a est l'opérateur de Tricomi (voir n° 15).

Nous nous limitons ici au cas où a est hyperbolique, la solution élémentaire $E(x, y)$ étant alors celle qui s'annule quand x est hors de la nappe externe du demi-cône caractéristique de sommet y : on sait qu'elle résout les problèmes de Cauchy bien posés (voir par exemple [9], chap. VII). Le cas

⁽⁰⁾ Je remercie vivement L. GÄRDING d'avoir relu, corrigé et clarifié ce travail, au cours de rencontres que nous ont permis l'Institute for Advanced Study (Princeton), l'Institut des hautes Études scientifiques (Paris) et le Collège de France.

⁽¹⁾ Nous désignons cette série d'articles par [I], ..., [VI] : voir la Bibliographie, p. 156.

général se traite en modifiant convenablement la définition de \mathcal{X} ; son étude est en cours avec la collaboration de L. GÅRDING. Quand α est elliptique, la formule (1) a déjà été établie et employée par F. JOHN [8].

1. **Notations.** — \mathcal{X} est un domaine d'un espace *affin, réel*, de dimension réelle

$$\dim_r \mathcal{X} = l;$$

on le suppose suffisamment petit ⁽²⁾.

Ξ est l'espace vectoriel des fonctions linéaires, définies sur \mathcal{X} , à valeurs numériques *complexes*; la dimension complexe de Ξ est

$$\dim_c \Xi = l + 1.$$

x et y sont des points de \mathcal{X} ; ξ et η sont des points de Ξ ; la valeur de ξ en x est notée :

$$\xi \cdot x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_l x_l,$$

(x_1, \dots, x_l) étant les coordonnées de x et $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)$ celles de ξ ; η et y sont supposées liées par la relation

$$\eta \cdot y = 0.$$

Nous définirons en outre : l'espace projectif Ξ^* image de $\Xi - 0$; deux espaces Φ et $\tilde{\Phi}$; des projections de domaines de Φ et $\tilde{\Phi}$ dans Ξ et Ξ^* ; l'uniformisation. Ces définitions figurent déjà implicitement dans l'énoncé du théorème d'uniformisation de la solution unitaire (théorème 1 de [II]).

2. **L'espace projectif complexe Ξ^*** a pour points les sous-variétés analytiques planes, de codimension 1, de l'espace affine contenant \mathcal{X} : à tout point $\xi \neq 0$ de Ξ correspond un point ξ^* de Ξ^* ; c'est la variété de l'espace affine contenant \mathcal{X} qui a l'équation

$$\xi^* : \xi \cdot x = 0.$$

On a

$$\dim_c \Xi^* = l.$$

Sur Ξ définissons deux formes différentielles extérieures :

$$\omega^*(\xi) = \sum_{j=0}^l (-1)^j \xi_j d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_{j-1} \wedge d\xi_{j+1} \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

$$\omega'(\xi) = \sum_{j=1}^l (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{j-1} \wedge d\xi_{j+1} \wedge \dots \wedge d\xi_l;$$

les transformations linéaires, unimodulaires de Ξ les laissent invariantes.

⁽²⁾ Autrement dit : nous remplaçons plusieurs fois \mathcal{X} par une boule quelconque, contenue dans \mathcal{X} et de diamètre donné.

Soit $f(\xi)$ une fonction *holomorphe*, homogène de degré $-n$ (n : entier positif, négatif ou nul); comme l'explique le n° 9 de [III] :

si $n = l + 1$, alors $f(\xi) \omega^*(\xi)$ est une forme holomorphe et fermée de ξ^* ; elle s'annule sur toute sous-variété analytique de Ξ^* ;

si $n = l$, alors $f(\xi) \omega'(\xi)$ est une forme holomorphe de ξ^* ; elle est fermée sur toute sous-variété analytique de Ξ^* ; elle s'annule sur une telle sous-variété de codimension > 1 .

Les points x et y de X ont pour images les deux sous-variétés planes x^* et y^* de Ξ^* ayant les équations

$$x^* : \xi \cdot x = 0; \quad y^* : \eta \cdot y = 0.$$

3. Les espaces Φ et $\tilde{\Phi}$. — Soit une droite numérique complexe, compactifiée par l'adjonction d'un point à l'infini; soit un espace vectoriel complexe, de dimension l ; soit Φ leur produit topologique muni du groupe de transformations, à un paramètre numérique complexe $\theta \neq 0$, que voici : soient t et (η_1, \dots, η_l) les coordonnées de cette droite et de cet espace vectoriel : un point φ de Φ a donc les coordonnées

$$(t, \eta) = (t, \eta_1, \dots, \eta_l),$$

t pouvant valoir ∞ ; θ transforme φ en

$$(3.1) \quad \theta\varphi = (\theta^{1-m}t, \theta\eta_1, \dots, \theta\eta_l),$$

m étant un entier, que le n° 4 devra choisir > 1 .

Bien entendu, le produit par θ de $\xi \in \Xi$ est

$$(3.2) \quad \theta\xi = (\theta\xi_0, \theta\xi_1, \dots, \theta\xi_l).$$

L'espace projectif Ξ^* est le quotient de $\Xi - 0$ par le groupe de ses homothéties θ . Notons $\tilde{\Phi}$ le quotient de la partie de Φ où $\eta \neq 0$ par le groupe des transformations θ : un point $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\Phi}$ est l'image de l'ensemble des transformés d'un point (t, η) de Φ tel que $\eta \neq 0$; par abus de langage (t, η) désignera souvent $\tilde{\varphi}$.

La sous-variété de $\tilde{\Phi}$ d'équation $t = 0$ est un espace projectif complexe, que nous identifierons à y^* , en définissant donc η_0 par la relation $\eta \cdot y = 0$.

$\tilde{\Phi}$ est un *espace fibré*, la base du point $\tilde{\varphi}$ étant η^* : la base de $\tilde{\Phi}$ est y^* et sa fibre est la droite projective complexe.

NOTE 3.1. — Le point $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\Phi}$, image du point (t, η) de Φ , est donc à *base réelle* quand le point η^* de y^* est réel.

NOTE 3.2. — Nous emploierons sur Φ la forme différentielle extérieure

$$(3.3) \quad \omega(t, \eta) = (1 - m) t d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l - dt \wedge \omega'(\eta).$$

Soit $f(t, \eta)$ une fonction holomorphe de (t, η) telle que

$$f(\theta^{1-m}t, \theta\eta) = \theta^{m-l-1}f(t, \eta);$$

on voit aisément que

$$f(t, \eta) \varpi(t, \eta)$$

est une forme holomorphe et fermée de $\tilde{\Phi}$; elle s'annule sur toute sous-variété analytique de $\tilde{\Phi}$.

4. Les projections. — Nommons *projection* toute application *holomorphe*

$$\xi(t, \eta, y) : \Psi \times X \rightarrow \Xi$$

ayant les propriétés suivantes :

1° Ψ est un voisinage de la partie y^* de Φ où $t = 0$; son équation est

$$\Psi : |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_0 \quad (c_0 : \text{constante});$$

$$2^\circ \xi(0, \eta, y) = \eta;$$

$$3^\circ \xi(t, \eta, y) = 0 \text{ si et seulement si } \eta = 0;$$

$$4^\circ \xi(\theta^{1-m}t, \theta\eta, y) = \theta\xi(t, \eta, y);$$

par suite

$$\tilde{\xi}(t, \eta, y) : \tilde{\Psi} \times X \rightarrow \tilde{\Xi} \quad (\tilde{\Psi} : \text{image de } \Psi \text{ dans } \tilde{\Phi});$$

$$5^\circ \tilde{\xi}(t, \eta, y) \text{ est réel pour } (t, \eta) \text{ réel.}$$

On voit aisément que pour $\tilde{\xi} = \xi(t, \eta, y)$:

$$(4.1) \quad \omega^*(\tilde{\xi}) = \frac{D(\tilde{\xi})}{D(t, \eta)} \varpi(t, \eta).$$

Notons g la valeur, pour $t = 0$, du déterminant fonctionnel de la projection $\tilde{\xi}$:

$$(4.2) \quad g(y, \eta) = - \frac{D(\tilde{\xi}(t, \eta, y))}{D(t, \eta)} \Big|_{t=0},$$

c'est-à-dire

$$(4.3) \quad g(y, \eta) = - \frac{\partial \tilde{\xi}_0(t, \eta, y)}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial \tilde{\xi}_1}{\partial t} y_1 - \dots - \frac{\partial \tilde{\xi}_l}{\partial t} y_l.$$

Vu 4°, $g(y, \eta)$ est un *polynôme homogène* en (η_1, \dots, η_l) , de degré m , à coefficients fonctions holomorphes de y ; on le nomme *polynôme de la projection*.

La sous-variété \tilde{x} de $\tilde{\mathbb{P}}^r$ est définie par l'équation

$$\tilde{x} : \xi(t, \eta, \gamma) \cdot x = 0;$$

ξ la projective donc sur x^* .

$\tilde{\gamma}$ se décompose en deux variétés : l'une est l'espace projectif complexe

$$\gamma^* : t = 0;$$

elles se coupent suivant la variété algébrique projective

$$g^*(\gamma) : t = g(\gamma, \eta) = 0.$$

$g^*(\gamma)$ sera souvent noté g^* ; $\text{Re } g^*$ désignera la partie réelle de g^* .

Bien entendu $\tilde{x} \cap \gamma^*$ est plane :

$$\tilde{x} \cap \gamma^* : t = \eta \cdot x = 0.$$

Les hypothèses suivantes seront faites :

$\text{Re } g^*$ n'a pas de point singulier ⁽³⁾ et sa courbure totale ne s'annule pas; c'est-à-dire

$$(4.4)_1 \quad \text{Hess}_{\eta}[g(\gamma, \eta)] \neq 0 \quad \text{pour } g(\gamma, \eta) = 0, \quad \eta \text{ réel.}$$

(Hess_{η} désigne le Hessien : déterminant des dérivées secondes en η); aucun hyperplan de γ^* ne touche $\text{Re } g^*$ en plus d'un point ⁽⁴⁾; c'est-à-dire

$$(4.4)_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{\eta}(\gamma, \eta) = g_{\eta}(\gamma, \eta'), \quad g(\gamma, \eta) = g(\gamma, \eta') = 0; \\ \text{implique le parallélisme des vecteurs réels } \eta \text{ et } \eta'. \end{array} \right.$$

Le cône $C(\gamma)$. — Nous notons $C(\gamma)$ l'ensemble des points x de \tilde{x} tels que \tilde{x} touche $\text{Re } g^*$; c'est un cône de sommet γ dont les génératrices correspondent biunivoquement aux points de $\text{Re } g^*$; cette correspondance entre la génératrice du point x de $C(\gamma)$ — γ et le point η^* de $\text{Re } g^*$ est définie par l'une quelconque des trois conditions équivalentes :

$$(4.5) \quad x - \gamma = t g_{\eta}(\gamma, \eta) \quad \left[g_{\eta} = \text{grad } g = \left(\frac{\partial g}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \eta_l} \right) \right];$$

$$\tilde{x} \text{ touche } \text{Re } g^* \text{ en } \eta^*;$$

$$\eta^* \text{ touche } C(\gamma) \text{ en } x.$$

Les nappes de $C(\gamma)$. — Si l est impair, si $x \in C(\gamma)$ et si (t, η) est réel et vérifie (4.5), alors la condition

$$(4.6) \quad t \text{Hess}_{\eta}[g(\gamma, \eta)] (\eta_1 dx_1 + \dots + \eta_l dx_l) > 0$$

⁽³⁾ c'est-à-dire : g est de type principal (au sens de Hörmander).

⁽⁴⁾ Cette hypothèse (4.4)₂ n'est pas essentielle; elle simplifie l'exposé. Elle sert à prouver (nos 36 et 37) que \tilde{x} a au plus un point singulier réel. Si on la supprime, les nappes de $C(\gamma)$ peuvent se couper, sans se toucher; de même celles de $K(\gamma)$; en un point d'intersection de plusieurs nappes de $K(\gamma)$, la singularité de $\mathcal{E}[f]$ est la somme de celles que portent ces nappes.

est indépendante du choix de (t, η) : en effet, si l'on multiplie η par θ , il faut, pour préserver (4.5), multiplier t par θ^{1-m} et le premier membre de (4.6) se trouve multiplié par $\theta^{(l-1)(m-2)}$ qui est > 0 , car θ est réel; les vecteurs dx , issus de $x \in C(y)$ et vérifiant (4.6) sont dirigés d'un même côté de $C(y)$: nous le nommerons *côté positif de $C(y)$* .

Si l est pair, alors $\text{Hess}_\eta [g(y, \eta)]$ est un polynôme en η , homogène, de degré pair; vu (4.4), il a un signe constant sur chacune des nappes de $\text{Re } g^*$; nous nommerons nappes positives (ou négatives) de $\text{Re } g^*$ celles de ces nappes où

$$(4.7) \quad \text{Hess}_\eta [g(y, \eta)] > 0,$$

c'est-à-dire celles dont *la courbure totale est négative* (ou positive); nous nommerons nappes positives (ou négatives) de $C(y)$ les nappes correspondantes de $C(y)$.

Le conoïde $K(y)$. — Nous notons $K(y)$ l'ensemble des points x tels que la sous-variété \tilde{x} de $\tilde{\Psi}$ ait une singularité réelle. Les nos 36 et 37 prouvent ceci : Si $x \in K(y) - y$, alors cette singularité réelle de \tilde{x} consiste en un seul point (t, η) ; c'est un point double quadratique; $\xi^*(t, \eta, y)$ est l'hyperplan tangent en x à $K(y) - y$, qui est une sous-variété de A régulière, analytique et de codimension 1; y est un point conique de $K(y)$, dont le cône des tangentes en y est $C(y)$. Pour que $\xi^*(t, \eta, y)$ touche $K(y) - y$, il faut et il suffit que

$$\frac{D(\xi_0(t, \eta, y), \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} = 0.$$

Si l est impair, la condition

$$(4.8) \quad t \text{ Hess}_\eta [g(y, \eta)] (\xi_1 dx_1 + \dots + \xi_l dx_l) > 0.$$

[[(t, η) point singulier réel de \tilde{x} ; $\xi = \xi(t, \eta, y)$]]

définit des vecteurs dx , issus de $x \in K(y)$, dirigés d'un même côté de $K(y)$, qui sera nommé *côté positif de $K(y)$* : il correspond au côté positif de $C(y)$.

Si l est pair, nous nommons *nappes positives* (ou négatives) de $K(y)$ celles où

$$(4.9) \quad \text{Hess}_\eta [g(y, \eta)] > 0,$$

elles sont tangentes en y aux nappes positives (ou négatives) de $C(y)$.

NOTE 4. — Si $l = 2$, toutes les nappes de $K(y)$ sont négatives : on le déduit aisément de la formule d'Euler relative aux fonctions homogènes.

EXEMPLE. — La projection la plus simple est la *projection polynomiale*

$$(4.10) \quad \xi_0 = \eta_0 - t g(\eta), \quad \xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad \xi_l = \eta_l$$

$[g(\eta) : \text{polynôme en } (\eta_1, \dots, \eta_l), \text{ homogène, de degré } m_l^*];$

alors $K(y) = C(y)$. Cette projection joue un rôle fondamental.

5. **L'uniformisation.** — DÉFINITION. — Soit $f(\xi, y)$ une fonction homogène en ξ de degré $-n$, holomorphe au point (ξ, y) quand $\xi^* \in y^* - g^*$. Nous disons que la projection $\xi(t, \eta, y)$ l'uniformise quand $f(\xi(t, \eta, y), y)$ est une fonction de (t, η, y) holomorphe sur $\Psi \times \mathcal{A}$.

Nous disons que cette projection uniformise la forme différentielle

$$f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

quand, pour $dy = 0$,

$$f(\xi(t, \eta, y), y) d\xi_0(t, \eta, y) \wedge \dots \wedge d\xi_l(t, \eta, y)$$

est une forme de (t, η) , fonction de y , holomorphe sur $\Psi \times \mathcal{A}$, c'est-à-dire quand

$$f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)}$$

est une fonction de (t, η, y) holomorphe sur $\Psi \times \mathcal{A}$. Alors, vu (4.1) :

$$f(\xi(t, \eta, y), y) \omega^*(\xi(t, \eta, y))$$

est holomorphe sur $\Psi \times \mathcal{A}$; si $n = l + 1$, c'est une forme différentielle holomorphe sur $\tilde{\Psi}$, près de y^* ; elle est fonction de y .

Des fonctions ou des formes qui peuvent être uniformisées (par une même projection) sont dites (*simultanément*) *uniformisables*.

Des fonctions $f(\xi, y)$ ou des formes $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ sont dites *rationnellement (et simultanément) uniformisables* si, quel que soit le polynôme homogène $b(\xi_1, \dots, \xi_l) = b(\xi)$, les fonctions ou les formes

$$\frac{1}{b(\xi)} f(\xi, y) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b(\xi)} f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

sont (*simultanément*) *uniformisables* par des projections de polynôme $b(\xi) g(y, \xi)$, g étant indépendant de b ; g est appelé le polynôme de f . Nous choisirons b tel que le polynôme bg vérifie nos hypothèses (4.4).

Énonçons trois propositions que prouvera le chapitre 5 :

PROPOSITION 5.1. — Si $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisé, et si $f(\xi, y)$ s'annule p fois pour $\xi \cdot y = 0$, $g(y, \xi) \neq 0$, alors il existe une fonction rationnelle de ξ_1, \dots, ξ_l à coefficients fonctions holomorphes de y , $r(\xi, y)$, telle que

$$(5.1) \quad \frac{p! f(\xi, y)}{(-\xi \cdot y)^p} = r(\xi, y) \quad \text{pour} \quad \xi \cdot y = 0 \quad (p \geq 0);$$

$r(\xi, y)$ a pour dénominateur $g^{p+1}(\xi, y)$; donc $n \leq mp + m - p$. Si $f(\xi, y)$ est uniformisé, alors r a pour dénominateur g^p ; donc $n \leq (m - 1)p$.

En particulier, si $f(\xi, y)$ est (*rationnellement*) *uniformisable*, alors $f(\eta, y)$ (est nul) est un polynôme.

PROPOSITION 5.2. — Si $f(\xi, y)$ est uniformisé, alors la projection qui l'uniformise uniformise simultanément

$$f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad f_{\xi_j} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad f_{y_i} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l.$$

Si $f(\xi, y)$ est rationnellement uniformisable, alors

$$f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad f_{\xi_0} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad f_{y_i} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

sont rationnellement uniformisables.

Réciproquement, si

$$\frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial \xi_0^p} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

est uniformisé par $\xi(t, \eta, y)$ (est rationnellement uniformisable) et si

$$f(\eta, y), \dots, \left. \frac{\partial^{p-1} f(\xi, y)}{\partial \xi_0^{p-1}} \right|_{\xi=\eta} \text{ sont des polynômes (sont nuls), alors}$$

$$\frac{\partial^{q_0+\dots+r_l} f(\xi, y)}{\partial \xi_0^{q_0} \dots \partial \xi_l^{r_l} \partial y_1^{r_1} \dots \partial y_l^{r_l}}$$

est uniformisé par $\xi(t, \eta, y)$ quand $q_0 + \dots + r_l < p$ (est rationnellement uniformisable quand $q_1 = \dots = q_l = 0, q_0 + r_1 + \dots + r_l < p$).

PROPOSITION 5.3. — Le support des singularités de $f(\xi, y)$ détermine les nappes de $K(y)$, excepté celles qui correspondent aux nappes de $\text{Re } g^*(y)$ sur lesquelles $f(\xi, y)$ est holomorphe; pour plus de détails, voir le n° 45.

EXEMPLE 5. — La projection polynomiale (4.10) uniformise la forme différentielle

$$\frac{1}{g(\xi_1, \dots, \xi_l)} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

qui est donc rationnellement uniformisable.

6. La classe d'homologie compacte $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$. — Rappelons que $\tilde{\Psi}$ est la partie de $\tilde{\Phi}$ où

$$\tilde{\Psi} : |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_0.$$

Par suite l'application, dépendant du paramètre numérique τ ($0 \leq \tau \leq 1$)

$$(6.1) \quad \tau(t, \eta) = (\tau t, \eta)$$

applique $\tilde{\Psi}$ en lui-même; pour $\tau = 1$ elle est l'identité; pour $\tau = 0$ elle est une rétraction de $\tilde{\Psi}$ sur y^* ; donc y^* est rétracte par déformation de $\tilde{\Psi}$; donc $H_c(\tilde{\Psi}, y^*)$ est nul et, pour définir une classe d'homologie $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$, il suffit de définir son bord dans \tilde{x} :

$$(6.2) \quad \partial h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*) = h(\tilde{x}, y^*).$$

Les n°s 7 et 8 vont définir une classe $h(\tilde{x}, y^*)$; $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ désignera la classe d'homologie que définit (6.2).

7. La classe $h(\tilde{x}, y^*)$ quand $\zeta(t, \eta, y)$ est la projection polynomiale (4.10). — Nous construirons cette classe à partir de la partie réelle d'une variété de dimension paire, munie d'une orientation changeant sur une sous-variété. L'emploi de parties réelles de variétés fut préconisé par L. GÄRDING.

Nous nommons partie à l'infini de $\tilde{\Phi}$ et notons $\tilde{\infty}$ la sous-variété de $\tilde{\Phi}$ d'équation

$$\tilde{\infty} : t = \infty.$$

La fibration de $\tilde{\Phi}$ induit un homéomorphisme

$$(0, \eta) \rightarrow (\infty, \eta)$$

de y^* sur $\tilde{\infty}$; il transforme $g^*(y)$ et $g^*(y) \cap \tilde{x}$ en les sous-variétés de $\tilde{\infty}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\infty) : t = \infty, \quad g(\eta) = 0; \\ \tilde{g}(\infty, x) : t = \infty, \quad g(\eta) = \eta \cdot x = 0, \end{aligned}$$

où

$$\eta \cdot x = \eta_1(x_1 - y_1) + \dots + \eta_l(x_l - y_l).$$

Puisque $\zeta(t, \eta)$ est la projection polynomiale, $\tilde{\Psi}$ est la partie de $\tilde{\Phi}$ où $t \neq \infty$:

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi} - \tilde{\infty};$$

\tilde{x} est la sous-variété de $\tilde{\Psi}$ d'équation

$$(7.1) \quad \tilde{x} : t g(\eta) = \eta \cdot x, \quad t \neq \infty;$$

vu (4.4), Re \tilde{x} et $\tilde{\infty}$ sont en position générale; $\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty)$ est une sous-variété de $\tilde{\Phi}$, n'ayant de point singulier à base réelle que pour $x \in C(y)$; si $x \in C(y) - y$, ce point est unique et réel; il vérifie

$$\begin{aligned} g(\eta) = \eta \cdot x = 0; \quad c_1 |x - y| \leq |t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c_2 |x - y|, \\ (c_1 \text{ et } c_2 : \text{constantes}). \end{aligned}$$

Quand l est impair, donnons à Re \tilde{x} l'orientation

$$(7.2) \quad \frac{\varpi(t, \eta)}{t |\eta|^{l-1} d\zeta_x} > 0 \quad \text{sur Re } \tilde{x}$$

(t et η réels; $|\eta|^{l-1}$ est un polynôme; le premier membre est une forme-résidu : voir [III]). Le n° 28 montre que Re \tilde{x} , complété par ses points à l'infini et ainsi orienté, est un cycle de $(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), y^*)$; notons $h(\tilde{x}, y^*)$ la classe

d'homologie de deux fois ce cycle $\text{Re } \tilde{x}$, détourné de la partie à l'infini de \tilde{x} , au sens du n° 29 : c'est la classe d'homologie des cycles $\beta = 2\beta_0 + \beta_1$ de (\tilde{x}, y^*) que voici : β_0 est la partie de $\text{Re } \tilde{x}$ où

$$|t| \cdot |\eta|^{m-1} < c|x - y|;$$

β_1 est une chaîne, identique à son imaginaire conjuguée et appartenant à la partie \tilde{x}_c de \tilde{x} :

$$(7.3) \quad \tilde{x}_c : \quad t g = \eta \cdot x, \quad |t| \cdot |\eta|^{m-1} = c|x - y|, \quad \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*;$$

c est une constante suffisamment grande, ne dépendant que de g .

Quand l est pair, supposons donnée une fonction $g_1(\eta)$, continue, réelle, homogène de degré $m - 1$ et telle que

$$(7.4) \quad g_1(\eta) \neq 0 \quad \text{pour :} \quad \eta \text{ réel, } g(\eta) = 0.$$

Quand g aura été supposé *hyperbolique* (n° 9), nous choisirons

$$g_1(\eta) = \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta_1}.$$

Notons $h(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x))$ la classe d'homologie de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ muni de l'orientation

$$(7.5) \quad \frac{g_1(\eta) \omega'(\eta)}{(\eta \cdot x)^{l-1} dg(\eta)} > 0 \quad \text{sur } \text{Re } \tilde{g}(\infty).$$

Cette orientation change sur $\tilde{g}(\infty, x)$ qui est l'intersection de $\tilde{\omega}$ et de la sous-variété $\tilde{g}(x)$ de \tilde{x} :

$$\tilde{g}(x) : \quad g(\eta) = \eta \cdot x = 0, \quad t \neq \infty;$$

$\tilde{g}(x)$, complétée par sa partie à l'infini $\tilde{g}(\infty, x)$, est sans singularité réelle et en position générale par rapport à $\tilde{\omega}$, si $x \notin \mathcal{C}(y)$.

Alors, puisque y^* n'a pas de point à l'infini, le n° 3 de [III] définit un homomorphisme cobord

$$\delta : H_c(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x)) \rightarrow H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x));$$

mais (6.1) applique $\tilde{g}(x)$ sur lui-même et montre que $y^* \cap \tilde{g}(x)$ est rétracte par déformation de $\tilde{g}(x)$; $H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x))$ est donc identique à $H_c(\tilde{x}, y^*)$: on a

$$\delta : H_c(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x)) \rightarrow H_c(\tilde{x}, y^*),$$

nous définissons

$$(7.6) \quad h(\tilde{x}, y^*) = \delta h(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x)) \quad \text{pour } x \notin \mathcal{C}(y).$$

Le n° 32 prouve que $h(\tilde{x}, y^*)$ possède une propriété analogue à celle qui la caractérisait quand l était impair : $h(\tilde{x}, y^*)$ contient des cycles β de \tilde{x} du type suivant :

$$\beta = \alpha\beta_0 + \beta_1;$$

β_1 est une chaîne de \tilde{x}_c , que définit (7.3); c est une constante suffisamment grande, ne dépendant que de g ; β_0 est la partie où $|t||\eta|^{m-1} \leq c$ de la chaîne $\text{Im}\tilde{x}$, dont voici la définition :

Définition de $\text{Im}\tilde{x}$. — Soit $\tilde{\text{B}}$ une chaîne de $\tilde{\Psi}$ telle que :

$\tilde{\text{B}}$ est identique à son imaginaire conjuguée;

$\partial\tilde{\text{B}}$ est somme d'un cycle réel et d'un cycle étranger à \tilde{x} ;

$\tilde{\text{B}}$ est en position générale par rapport à \tilde{x} .

L'intersection $\tilde{x} \cdot \tilde{\text{B}}$ de $\tilde{\text{B}}$ et de la variété analytique \tilde{x} , munie de son orientation naturelle, est un cycle non compact de $(\tilde{x}, \text{Re}\tilde{x})$; son imaginaire conjuguée est $-\tilde{x} \cdot \tilde{\text{B}}$, car les imaginaires conjuguées des variétés analytiques complexes \tilde{x} et $\tilde{\Psi}$, de $\dim_c l-1$ et l , sont $(-1)^{l-1}\tilde{x}$ et $(-1)^l\tilde{\Psi}$; $\tilde{x} \cdot \tilde{\text{B}}$ est donc une chaîne de \tilde{x}

opposée à son imaginaire conjuguée,

à bord réel, donc nul;

$\tilde{x} \cdot \tilde{\text{B}}$ est donc un cycle de \tilde{x} .

Ce cycle $\tilde{x} \cdot \tilde{\text{B}}$ est noté $\text{Im}\tilde{x}$ quand on a

$$\tilde{\text{B}} \sim \text{B} \quad \text{dans } (\tilde{\Psi}, \text{Re}\tilde{\Psi})$$

B étant la chaîne que voici; les cycles $\text{Im}\tilde{x}$ sont donc des cycles de \tilde{x} , non compacts, homologues entre eux.

Définition de B . — Soit B l'ensemble des points de $\tilde{\Psi}$ dont la base est réelle et appartient au voisinage de $\text{Re}g^*$ où $g_1(\eta) \neq 0$. La fibration de $\tilde{\Phi}$ fibre B , que nous allons orienter en donnant à sa base l'orientation

$$(7.7) \quad \frac{\omega'(\eta)}{|\eta|^l} > 0 \quad \text{de } \text{Re}y^* \quad (\eta \text{ est réel; } |\eta|^l \text{ est un polynôme})$$

et à sa fibre l'orientation suivante : cette fibre est la droite complexe; nous multiplions son orientation naturelle par $\text{sgn}[g_1(\eta) \text{Im}(t)]$:

$$(7.8) \quad ig_1(\eta) \text{Im}(t) dt \wedge d\bar{t} > 0 \quad \text{sur la fibre de } \text{B}.$$

Pour justifier cette définition, il suffit de montrer que $\tilde{x} \cdot \partial\text{B}$ est réel; or, les points de \tilde{x} non réels, à base réelle, ont évidemment leur base sur $\text{Re}g^*$.

NOTE 7.1. — Cette intersection $\text{Im } \tilde{x}$ de \tilde{x} et de B est la partie de $\tilde{\Phi}$ où

$$(7.9) \quad \eta \cdot x = g(\eta) = 0, \quad \eta \text{ réel,}$$

munie de l'orientation ⁽¹⁾

$$(7.10) \quad i \frac{dt \wedge d\bar{t} \wedge g_1(\eta) \omega'(\eta)}{|\eta|^{l-2} dg(\eta) \wedge d\eta \cdot x} > 0.$$

NOTE 7.2. — Supposons l pair; soit un voisinage donné de $\text{Re } g^*$; il contient les bases de tous les points de β quand c est suffisamment grand, car on a (30.1) sur β_1 et $g=0$ sur β_0 ; à la décomposition de $\text{Re } g^*$ en composantes connexes correspondent donc des décompositions de β et de $h(\tilde{x}, y^*)$:

$$h(\tilde{x}, y^*) = \sum_i h_i(\tilde{x}, y^*).$$

NOTE 7.3. — Supposons $l=2$; ce qui précède se simplifie; puisque $x \notin C(y)$ par hypothèse, $\tilde{g}(x)$, $\tilde{g}(\infty, x)$ sont vides, $\text{Im } \tilde{x} = 0$, $\beta_0 = 0$.

8. La classe $h(\tilde{x}, y^*)$ quand $\xi(t, \eta, y)$ est une projection quelconque. — Le n° 41 continuera à définir $h(\tilde{x}, y^*)$ comme la classe d'homologie d'un cycle

$$\beta = 2\beta_0 + \beta_1 \quad \text{de } (\tilde{x}, y^*);$$

β_1 sera une chaîne de la partie de \tilde{x} où $|t| \cdot |\eta|^{m-1} = c|x-y|$; elle sera définie par continuité à partir du cas où la projection ξ est polynomiale; β_0 sera, comme ci-dessus, la partie où $|t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c|x-y|$ de $\text{Re } \tilde{x}$ (l impair) ou de $\text{Im } \tilde{x}$ (l pair; même définition qu'au n° 7);

c est une constante suffisamment grande.

Voici les propriétés de cette classe $h(\tilde{x}, y^*)$ et de la classe $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ que définit (6.2); le n° 41 les établira:

PROPOSITION 8.1. — $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ et son bord $h(\tilde{x}, y^*)$ sont des classes d'homologie compacte de dimensions respectives l et $l-1$. La transformation de chaque point de \tilde{x} en son imaginaire conjuguée transforme h en $(-1)^{l-1}h$.

⁽¹⁾ Cette orientation s'obtient comme suit: on choisit l'un des η_j égal à 1; on divise

$$i \text{Im}(t) dt \wedge d\bar{t} \wedge g_1(\eta) \omega'(\eta),$$

qui est > 0 sur B , par

$$(7.11) \quad i d[tg(\eta) - \eta \cdot x] \wedge d[\bar{t} \overline{g(\eta)} - \bar{\eta} \cdot x]$$

où $tg - \eta \cdot x$ est une fonction holomorphe s'annulant une fois sur \tilde{x} ; or, vu (7.9), η est réel et (7.11) est égal à

$$2 \text{Im } t dg(\eta) \wedge d\eta \cdot x.$$

$h(\tilde{x}, y^*)$ contient des cycles ne rencontrant aucun autre point singulier de \tilde{x} que le point double quadratique réel qu'a \tilde{x} pour $x \in K(y)$; près de ce point singulier, $h(\tilde{x}, y^*)$ est la classe d'homologie de

2 $\text{Re } \tilde{x}$ muni de l'orientation (7.2) si l est impair;

2 $\text{Im } \tilde{x}$ muni de l'orientation associée à l'orientation $g_1(\eta) \frac{\overline{\omega}(l, \eta)}{|\eta|^l} > 0$ de $\text{Re } \tilde{\Psi}$, si l est pair.

$h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ et $h(\tilde{x}, y^*)$ dépendent donc continûment de x , hors de $K(y)$ et le long de $K(y)$, au sens du n° 11 de [III].

NOTE 8.1. — Supposons l pair > 2 : à la décomposition

$$K(y) = \sum_i K_i$$

de $K(y)$ en ses nappes correspondent des décompositions

$$h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*) = \sum_i h_i(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*), \quad h(\tilde{x}, y^*) = \sum_i h_i(\tilde{x}, y^*),$$

où

$$h_i(\tilde{x}, y^*) = \partial h_i(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$$

contient des cycles étrangers à tout point singulier de \tilde{x} quand $x \notin K_i$.

NOTE 8.2. — Supposons $l = 2$: $K(y)$ se décompose en m courbes $K_i(y)$:

$$K(y) = \bigcup_{i=1}^m K_i(y);$$

à chacune d'elles est associée une classe d'homologie $h_i(\tilde{x})$ qui s'annule (est évanouissante, au sens de Lefschetz) pour $x_i \in K_i(y)$; le rôle de $h(\tilde{x}, y^*)$ est joué par

$$h(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^m \pm h_i(\tilde{x}),$$

le signe \pm qui précède h_i changeant quand x traverse $K_i(y)$.

PROPOSITION 8.2. — Quand x tend vers y le long d'une droite $\not\subset C(y)$, alors une partie de \tilde{x} devient voisine de $y^* - g^*$: on peut appliquer dans \tilde{x} tout compact de $y^* - g^*$ par des applications voisines de l'identité, dont la restriction à $\tilde{x} \cap y^*$ est l'identité. Elles appliquent sur $h(\tilde{x}, y^*)$ la classe $h(y^* - g^*, \tilde{x})$ dont voici la définition :

DÉFINITION 8. — Supposons $x \notin C(y)$. Si l est *impair*, $h(y^* - g^*, \tilde{x})$ est la classe de deux fois le cycle $\text{Re} y^*$ détourné de g^* , l'orientation de $\text{Re} y^*$ étant

$$(8.1) \quad \frac{\omega'(\eta)}{(\eta, x)^l} > 0 \quad \text{sur } \text{Re } y^*.$$

Si l est *pair*,

$$(8.2) \quad h(y^* - g^*, \tilde{x}) = \delta h(g^*, \tilde{x}),$$

où $h(g^*, \tilde{x})$ est la classe du cycle que constitue $\text{Re} g^*$, muni de l'orientation (7.5).

NOTE. — On peut, bien entendu, écrire $(y^* - g^*, x^*)$, (g^*, x^*) au lieu de $(y^* - g^*, \tilde{x})$, (g^*, \tilde{x}) .

9. Hyperbolicité. — Rappelons brièvement la

Définition d'un polynôme hyperbolique. — Notons G^* l'ensemble des points réels η^* de y^* ayant la propriété suivante : toutes les droites réelles de y^* contenant η^* coupent g^* en m points réels distincts (m est le degré de g). Si G^* n'est pas vide, alors le polynôme $g(y, \eta)$, la variété algébrique g^* et la projection $\xi(t, \eta, y)$ sont dits hyperboliques.

On prouve aisément ceci (voir [4] ou [9], chap. III, § 1 et 2, p. 46-60) : G^* est un domaine convexe de y^* , situé hors de $\text{Re} g^*$; sa frontière est une nappe convexe de $\text{Re} g^*$; la *nappe interne* de $\text{Re} g^*$.

Nous choisirons des coordonnées telles que

$$(9.1) \quad (-y_1, 1, 0, \dots, 0) \in G^*;$$

l'équation en η_1 :

$$g(y, \eta) = 0$$

a donc toutes ses racines réelles et distinctes quand η_2, \dots, η_l sont réels; donc

$$(9.2) \quad g_{\eta_1}(y, \eta) \neq 0 \quad \text{pour } g(y, \eta) = 0, \quad \eta \text{ réel.}$$

Dès lors $x_1 \neq y_1$ si $x \in C(y) - y$. Notons $C_+(y)$ la partie de $C(y)$ où $x_1 \geq y_1$: $C_+(y)$ est un demi-cône; celle de ses nappes qui est l'image de la nappe interne de $\text{Re} g^*$ est nommée *nappe externe* de $C_+(y)$: elle est la frontière d'un demi-cône convexe $\omega_+(y)$ contenant toutes les autres nappes de $C_+(y)$.

Soit $K_+(y)$ la partie de $K(y)$ où $x_1 \geq y_1$; les demi-tangentes à $K_+(y)$ en y constituent $C_+(y)$; la nappe de $K_+(y)$ tangente à la nappe externe de $C_+(y)$ est nommée *nappe externe* de $K_+(y)$; celui des deux domaines qu'elle délimite et qui est tangent à $\omega_+(y)$ est noté $\mathcal{E}_+(y)$ et est nommé *émission* de y .

Opérateur hyperbolique. — Soit un opérateur différentiel, linéaire, à coefficients holomorphes, d'ordre m :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i_1 + \dots + i_l \leq m} a_{i_1 \dots i_l}(x) \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_l}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_l^{i_l}}.$$

Soit $g(y, \eta)$ la partie principale du polynôme $a(y, \eta)$ qui s'en déduit en remplaçant x et $\frac{\partial}{\partial x}$ par y et η :

$$g(y, \eta) = \sum_{i_1 + \dots + i_l = m} a_{i_1 \dots i_l}(y) \eta_1^{i_1} \dots \eta_l^{i_l},$$

rappelons que g sert à définir les variétés caractéristiques de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$: ce sont les hypersurfaces $u(x) = 0$ de X vérifiant l'équation non linéaire du premier ordre :

$$g(x, u_x) = 0.$$

L'opérateur $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est dit hyperbolique quand ce polynôme $g(y, \eta)$ est hyperbolique; nous faisons les hypothèses (4.4) et (9.1).

Le n° 35 prouvera la

PROPOSITION 9. — *Supposons g hyperbolique, $x_1 \geq y_1$ et $x \notin \omega_+(y)$: alors $h(y^* - g^*, \tilde{x}) = 0$.*

10. La transformation \mathcal{L} qui prolonge la transformation inverse de Laplace. — Soit $f(\xi, y)$ une fonction, homogène de degré $-n$ en ξ ; supposons

$$f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

uniformisé par une projection hyperbolique, $\xi(t, \eta, y)$, vérifiant (4.4) et (9.1); alors $\mathcal{L}[f]$ est la distribution ⁽⁵⁾ de (x, y) que définit pour $x_1 > y_1$ l'une ou l'autre intégrale :

$$(10.1)_1 \quad \mathcal{L}[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{(\xi, x)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} f(\xi, y) \omega^*(\xi),$$

où $l < n$, $h = h(\tilde{V}, \tilde{x} \cup y^*)$;

$$(10.1)_2 \quad \mathcal{L}[f] = \frac{(-1)^{n-l-1}}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{d^{l-n}[f(\xi, y) \omega^*(\xi)]}{(d\xi, x)^{l+n}},$$

où $n \leq l$, $h = h(\tilde{x}, y^*)$; les notations sont celles de [III], n° 7.

⁽⁵⁾ C'est une distribution de x , fonction de y et, en même temps, une distribution de y , fonction de x .

Le n° 53 prouvera que $\mathcal{L}[f] = 0$ près des points $x \neq y$ tels que $x_1 = y_1$; on achève de définir $\mathcal{L}[f]$ pour $x \neq y$, en posant

$$(10.2) \quad \mathcal{L}[f] = 0 \quad \text{pour } x_1 \leq y_1, \quad x \neq y.$$

Dans les formules (10.1), ξ désigne la projection $\xi(t, \tau, y)$; le n° 52 prouvera que $\mathcal{L}[f]$ est indépendant du choix de cette projection.

$\mathcal{L}[f]$ est défini (n° 54) pour tout (x, y) quand $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est rationnellement uniformisable, g étant hyperbolique.

Les propriétés formelles de \mathcal{L} sont les suivantes ⁽⁶⁾ :

\mathcal{L} est linéaire, en le sens que voici : si les $c_i(y)$ sont des fonctions holomorphes de y et si les formes $f_i(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ sont (rationnellement et) simultanément uniformisables, on a

$$\sum_i c_i(y) \mathcal{L}[f_i] = \mathcal{L} \left[\sum_i c_i(y) f_i \right].$$

Quand $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est (rationnellement) uniformisable, on a

$$(10.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\xi_j f];$$

$$(10.4) \quad \left(n - l - 1 - \sum_{j=1}^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\xi_0 f].$$

Quand f est uniformisable, on a

$$(10.5) \quad x_j \mathcal{L}[f] = - \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right] \quad \text{pour } x \neq y,$$

quand f est (rationnellement) uniformisable, on a

$$(10.6) \quad \mathcal{L}[f] = - \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_0} \right],$$

$$(10.7) \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \right].$$

Quand $r(\xi_1, \dots, \xi_l)$ est une fonction rationnelle, homogène de degré $-n$, de dénominateur g , ou plus généralement g^p , $g(\xi_1, \dots, \xi_l)$ étant un polynôme hyperbolique, alors $\mathcal{L}[r]$, ou plus généralement $\mathcal{L} \left[\frac{(-\xi, y)^q}{q!} r(\xi) \right]$ ($q \geq p-1$), est défini; c'est une distribution de $x - y$, qui est la transformée inverse

⁽⁶⁾ elles valent pour $x \neq y$ (ou sans cette restriction dans le cas : rationnellement uniformisables).

de Laplace de r ; elle est positivement homogène en $x - y$ de degré $n - l$. En particulier on a

$$(10.8) \quad \mathcal{L}[1] = \delta(x - y) \quad (\delta : \text{mesure de Dirac}).$$

EXEMPLE 1. — Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m ; soit $f(\xi, y)$ une fonction (rationnellement) uniformisable, ainsi que toutes ses dérivées d'ordres $< m$; on a

$$(10.9) \quad a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \mathcal{L}[f(\xi, y)] = \mathcal{L}\left[a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) f(\xi, y)\right].$$

EXEMPLE 2. — Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel, d'ordre m , à coefficients polynomiaux; soit $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ son transformé de Laplace, au sens du n° 3 de [II]; son ordre est noté $m + n$; si $\frac{\partial^{m+n-1} f(\xi, y)}{\partial \xi_0^{m+n-1}}$ est uniformisable, alors

$$(10.10) \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathcal{L}[f(\xi, y)] = \mathcal{L}\left[A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) f(\xi, y)\right] \quad \text{pour } x \neq y.$$

Voici des propriétés de la transformation \mathcal{L} , montrant en particulier que \mathcal{L} est *biunivoque* :

THÉORÈME 1. — 1° *L'image par \mathcal{L} de l'ensemble des fonctions $f(\xi, y)$ (rationnellement) uniformisables, homogènes et de degré donné croît avec ce degré.*

2° *Si $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est (rationnellement) uniformisable et si $\mathcal{L}[f]$ est une fonction holomorphe près de y (sur X) sur $X - y$, alors $f(\xi, y)$ (est nul) est un polynôme en ξ à coefficients fonctions holomorphes de y et $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est donc rationnellement uniformisable.*

Le chapitre 6 prouvera toutes les propriétés de \mathcal{L} qu'énoncent ce n° 10 et le n° 11, sauf celles de $\mathcal{L}\left[\frac{(-\xi, y)^q}{q!} r(\xi)\right]$; le chapitre 7 établira ces dernières, après avoir exprimé au moyen de \mathcal{L} les transformées de Laplace des fonctions rationnelles, homogènes ou non, à dénominateur puissance d'un polynôme hyperbolique, homogène ou non; cette expression, qu'énonce la proposition 62, facilite l'étude de ces transformées de Laplace.

Le chapitre 7 l'établit par des calculs analogues aux calculs classiques de HERGLOTZ [7] et PETROWSKY [10]; il emploie la projection polynomiale; il suggérerait de définir $\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{x}, h(\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{x} \cup y^*)$ et $h(\tilde{x}, y^*)$ si le chapitre 3 ne l'avait déjà fait. Ses conclusions essentielles, complétées par le théorème 3,

sont analogues à celles de la théorie des transformées de Fourier des distributions homogènes, théorie que GELFAND et SHAPIRO [5], BOROVIKOV [1], L. GÅRDING [3] ont développée.

11. Allure de la transformée $\mathcal{L}[f]$. — Voici un théorème sur le support de $\mathcal{L}[f]$:

THÉORÈME 2. — *La distribution $\mathcal{L}[f]$ est nulle dans le domaine où $x \notin \mathcal{S}_+(y)$.*

Le n° 53 déduira aisément ce théorème des propositions 8.2 et 9.

Voici un théorème sur l'allure de $\mathcal{L}[f]$ pour $x \neq y$; il emploie la fonction ou distribution, d'une variable réelle k , que voici :

DÉFINITION 11.1 :

$$(11.1) \quad \chi_p[k] = \frac{k^p}{\Gamma(p+1)} > 0 \quad \text{si } k > 0 \text{ et } p + \frac{1}{2} = \text{entier} \geq 0,$$

$$= 0 \quad \text{si } k < 0 \text{ et } p + \frac{1}{2} = \text{entier} \geq 0;$$

$$= \frac{k^p}{p!} \frac{1}{2} \operatorname{sgn} k + \frac{k^p}{p!} \frac{1}{\pi i} \left[\log |k| - 1 - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{p} \right]$$

si $p = \text{entier} \geq 0$ ($\operatorname{sgn} k = +1$ si $k > 0$, $= -1$ si $k < 0$).

On a donc, pour $p \geq \frac{1}{2}$:

$$(11.2) \quad \chi_{p-1}[k] = \frac{d}{dk} \chi_p[k],$$

$$(11.3) \quad k \chi_{p-1}[k] = p \chi_p[k] + \frac{1}{\pi i} \frac{k^p}{p!} \quad \text{si } p = \text{entier} > 0,$$

$$= p \chi_p[k] \quad \text{si non.}$$

On définit par la relation (11.2) la distribution χ_p , quel que soit p multiple de $1/2$; par exemple :

$$\chi_{-1}[k] = \hat{\delta}(k) + \frac{1}{\pi i} \frac{d \log |k|}{dk} \quad (\hat{\delta} : \text{mesure de Dirac});$$

on vérifie de suite que (11.3) vaut quel que soit p .

THÉORÈME 3. — *Supposons $f d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l$ réel et uniformisable. Alors : $\mathcal{L}[f]$ est une fonction holomorphe de (x, y) pour $x \notin K_+(y)$. Soit un point de $K_+(y) - y$; choisissons en ce point une équation locale, analytique, réelle et irréductible de $K_+(y)$:*

$$K_+(y) : k(x, y) = 0 \quad (k_x \neq 0),$$

telle que, si l est impair :

$$(11.4) \quad k(x, y) > 0 \quad \text{du côté positif de } K_+(y) \text{ (voir n° 4);}$$

il existe alors, en ce point, des fonctions holomorphes $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ et $H_3(x, y)$ telles que

$$(11.5) \quad \mathcal{L}[f] = \operatorname{Re} \{ H_1(x, y) \chi_{n-1-(l/2)}[k(x, y)] + H_2 \chi_0[k] \} + H_3(x, y);$$

si l est impair, alors $H_2 = 0$, H_1 et H_3 sont réels; si l est pair, alors $H_2 = 0$ pour $l/2 < n$, H_3 est réel, H_1 et H_2 sont imaginaires purs sur les nappes positives de $K_+(y)$ et réels sur ses nappes négatives.

La valeur de $H_1(x, y)$ pour $x \in K_+(y)$ s'obtient comme suit : pour $x \in K_+(y) - y$, \tilde{x} a un point singulier réel unique, dont nous choisissons les coordonnées (t, η) en sorte que ⁽¹⁾

$$(11.6) \quad \tilde{\xi}_j(t, \eta, y) = k_{x_j}(x, y) \quad (j=1, \dots, l);$$

on a

$$(11.7) \quad H_1(x, y) = \frac{i^{l+1} (m-1) t}{(2\pi)^{(l/2)-1} \sqrt{\operatorname{Hess}_\eta[-\tilde{\xi}(t, \eta, y) \cdot x]}} f(\tilde{\xi}, y) \frac{D(\tilde{\xi})}{D(t, \eta)};$$

bien entendu, le produit $f \frac{D(\tilde{\xi})}{D(t, \eta)}$ est défini, alors que f ne l'est pas et que $\frac{D(\tilde{\xi})}{D(t, \eta)} = 0$; dans (11.7) le signe de $\sqrt{\operatorname{Hess}}$ est choisi comme suit :

DÉFINITION 11.2. — Soit $g(\eta)$ une fonction réelle telle que $\operatorname{Hess}_\eta g(\eta) \neq 0$: la forme quadratique de coefficients $g_{\eta_i \eta_j}$ s'obtient en ajoutant p carrés de formes linéaires et en retranchant $q = l - p$ carrés de telles formes : sa signature est (p, q) ; $(-1)^q \operatorname{Hess}_\eta[g] > 0$; on choisit le signe de $\sqrt{\operatorname{Hess}_\eta g}$ tel que

$$(11.8) \quad \frac{1}{i^q} \sqrt{\operatorname{Hess}_\eta[g]} > 0.$$

NOTE 11. — Notons $K_i(y)$ les nappes de $K_+(y)$. Supposons l pair et > 2 ; alors, vu la note 8.1 et le théorème 3,

$$\mathcal{L}[f] = \sum_i \mathcal{L}_i[f],$$

$\mathcal{L}_i[f]$ étant holomorphe sur $\mathcal{X} - K_i(y)$ et vérifiant (11.5) sur $K_i(y)$.

Supposons $l = 2$, $n \geq 2$; alors, vu les notes 4, 8.2 et le théorème 3,

$$\mathcal{L}[f] = \sum_i \pm \mathcal{L}_i[f],$$

(1) Si l est impair, nous devons donc avoir

$$t \operatorname{Hess}_\eta[g(y, \eta)] > 0.$$

Sinon, c'est que (11.4) n'a pas lieu : k, η, t doivent être remplacées par $-k, -\eta, (-1)^{m-1}t$.

$\mathcal{L}_i[f]$ étant holomorphe sur $X - y$, le signe \pm qui précède $\mathcal{L}_i[f]$ changeant quand x traverse $K_i(y)$, où

$$\pm \mathcal{L}_i[f] = \frac{1}{2} H_1(x, y) \frac{k^{n-2}(x, y)}{(n-2)!} \operatorname{sgn} k(x, y);$$

H_1 est holomorphe et a la valeur (11.7) pour $x \in K_i(y)$.

Le n° 30 prouvera le théorème 3, dont voici une conséquence évidente :

COROLLAIRE 3. — *La restriction de $\mathcal{L}[f]$ à un ensemble compact de couples (x, y) , vérifiant $x \neq y$, possède la propriété suivante : ses dérivées d'ordre $\leq n - \frac{l+3}{2}$ vérifient une condition de Hölder d'exposant $1/2$ si l est IMPAIR et $\frac{l+3}{2} \leq n$;*

ses dérivées d'ordres $\leq n - 2 - (l/2)$ vérifient une condition de Hölder d'exposant arbitraire < 1 si l est PAIR et $2 + (l/2) \leq n$;

ses dérivées d'ordres $\leq n - 1 - (l/2)$ sont bornées si l est pair, x n'est jamais sur une nappe positive de $K_+(y)$ et $1 + (l/2) \leq n$.

NOTE. — Si la projection $\xi(t, \eta, y)$ qui uniformise $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ et la fonction $f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi(t, \eta, y))}{D(t, \eta)}$ sont fonctions holomorphes d'un paramètre τ , alors le théorème 3 et le corollaire 3 valent évidemment quand on y remplace (x, y) par (x, y, τ) : $k(x, y, \tau)$, $H_i(x, y, \tau)$ sont holomorphes; $\mathcal{L}[f]$ est une fonction de (x, y, τ) ayant la propriété qu'énonce le corollaire 3.

Voici un théorème sur l'allure de $\mathcal{L}[f]$ pour $x = y$:

THÉORÈME 4. — *Supposons que $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisable et que $f(\xi, y)$ s'annule p fois pour $\xi \cdot y = 0$. Si*

$$1 + (l/2) < n,$$

alors ⁽⁸⁾

$$(11.9) \quad \mathcal{L}[f] = \mathcal{O}[|x - y|^{n+p-l}]$$

[c'est encore vrai pour $1 + (l/2) = n$, l pair, $K(y)$ négatif]. Notons $r(\xi, y)$ la fonction de (ξ_1, \dots, ξ_l, y) rationnelle en ξ_1, \dots, ξ_l , que définit (5.1); si

$$1 + (l/2) < n,$$

on a

$$(11.10) \quad \mathcal{L}[f] = \mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot y)^p}{p!} r(\xi, y) \right] + \mathcal{O}(|x - y|^{n+p-l+p}),$$

(8) $\mathcal{O}[u]$ désigne n'importe quelle fonction de u telle que $\mathcal{O}[u]/u$ soit borné.

où $\rho = \rho(l, n)$ est la fonction suivante des deux entiers (l, n) :

$$(11.11) \left\{ \begin{array}{l} \rho(l, n) \text{ n'est pas défini pour } n \leq 1 + (l/2); \\ \rho(l, n) = 1/2 \text{ si } n = \frac{l+3}{2}, l \text{ étant impair}; \\ \rho(l, n) \text{ est arbitraire } < 1 \text{ si } n = 2 + (l/2), l \text{ étant pair, } K(y) \\ \text{ayant des nappes positives} \\ \rho(l, n) = 1 \text{ si } n = 2 + (l/2), l \text{ étant pair et } K(y) \text{ négatif}; \\ \rho(l, n) = 1 \text{ si } 2 + (l/2) < n. \end{array} \right.$$

Le n° 51 prouvera le théorème 4.

Voici un théorème sur l'allure de la fonction $\mathcal{L}[f]$ pour x et y complexes; il montre qu'elle est zétafuchsienne :

THÉOREME 5. — Supposons $f d\bar{z}_0 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_l$ uniformisé; complétons les hypothèses (4.4) par la suivante : g^* n'a pas de point singulier. Considérons le prolongement analytique de la fonction $\mathcal{L}[f]$ aux valeurs complexes de (x, y) : il se ramifie sur l'ensemble W des points (x, y) tels que \tilde{x} ait une singularité; ses déterminations sont des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, d'un nombre fini d'entre elles; celles-ci subissent donc une substitution linéaire à coefficients entiers quand (x, y) décrit un lacet autour de W ; leur nombre est $\leq (m-1)^{l-1}$.

Le n° 56 prouvera ce théorème.

12. Expression de la solution élémentaire $E(x, y)$ d'un opérateur différentiel, linéaire, hyperbolique, à coefficients holomorphes $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$

au moyen de la solution unitaire $U^*(\xi, y)$ de son adjoint $a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)$.

— On connaît l'intérêt de la solution élémentaire $E(x, y)$ d'un opérateur hyperbolique : elle permet de résoudre tout problème de Cauchy bien posé (voir par exemple [9], chap. VII, § 3 et 4). On sait que (voir [II], n° 1 la définition de a^*)

$$(12.1) \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, y) = \delta(x - y),$$

$$(12.2) \quad a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right) E(x, y) = \delta(x - y),$$

$$(12.3) \quad E(x, y) = 0$$

quand x est hors d'un demi-cône fermé, de sommet y contenu, sauf y dans le demi-espace $y_1 < x_1$.

On sait que (12.1) résulte de (12.2) et (12.3).

La transformation \mathcal{L} permet d'étudier $E(x, y)$: cherchons à représenter E par une expression

$$(1) \quad E(x, y) = \mathcal{L}[U^*(\xi, y)],$$

$U^*(\xi, y)$ étant une fonction, homogène en ξ de degré nul, rationnellement uniformisable ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $< m$ (m est l'ordre de a); vu le théorème 2, (12.3) est vérifié; vu (10.9), (12.2) s'écrit

$$\mathcal{L} \left[a^* \left(\frac{\partial}{\partial y}, y \right) U^*(\xi, y) \right] = \partial(x - y);$$

vu (10.8) et le théorème 1, cette relation équivaut à

$$a^* \left(\frac{\partial}{\partial y}, y \right) U^*(\xi, y) = 1,$$

enfin, vu la proposition 5.1, $U^*(\xi, y)$ et ses dérivées d'ordre $< m$ s'annulent pour $\xi, y = 0$. Donc $U^*(\xi, y)$ ne peut être que la solution unitaire de $a^* \left(\frac{\partial}{\partial y}, y \right)$, dont le n° 13 rappelle la définition et les propriétés; la première d'entre elles est qu'elle est rationnellement uniformisable: *la formule (1) définit donc effectivement la solution élémentaire*. Vu (10.6), elle équivaut à la formule, d'une application plus commode:

$$(12.4) \quad E(x, y) = \mathcal{L} [U_m^*(\xi, y)], \quad \text{où} \quad U_m^*(\xi, y) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^m U^*(\xi, y).$$

Cette formule réduit l'étude de $E(x, y)$ — fonction ou distribution ayant toujours des singularités — à celle de $U^*(\xi, y)$ — fonction uniformisée — c'est-à-dire à des calculs de fonctions holomorphes.

13. Énoncé des propriétés de $U^*(\xi, y)$. — [II] a défini la solution unitaire $U^*(\xi, y)$ de a^* par le problème de Cauchy,

$$(13.1) \quad a^* \left(\frac{\partial}{\partial y}, y \right) U^*(\xi, y) = 1, \quad U^*(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi, y = 0.$$

Sa dérivée $U_m^*(\xi, y)$ définie par (12.4), vérifie évidemment:

$$a^* \left(\frac{\partial}{\partial y}, y \right) U_m^*(\xi, y) = 0$$

et sera donc nommée *onde unitaire*.

Rappelons que F. JOHN [8] a déjà employé ces fonctions à la construction de la solution élémentaire des opérateurs *elliptiques*.

PROPOSITION 13.1. — $U^*(\xi, y)$ et ses dérivées en ξ_0 et y d'ordre $< m$ sont rationnellement uniformisables; $U_m^*(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ l'est donc.

Le n° 63 déduira aisément cette proposition du théorème 1 de [II], qui uniformise toutes les dérivées de $U_m^*(\xi, y)$ d'ordres $< m$. Pour les uniformiser, [II] emploie la

Projection caractéristique $\xi(t, \eta, y)$. — Notons ^(*) $g(y, \xi)$ la partie principale du polynôme $a(y, \xi)$ de ξ ; $\xi(t, \eta, y)$ s'obtient en construisant la solution $x(t, \eta, y)$, $\xi(t, \eta, y)$ du système différentiel

$$(13.2) \quad \begin{cases} dx_j = g_{x_j}(x, \xi) dt, & d\xi_j = -g_{x_j} dt, & d\xi_0 = \left[\sum_j x_j g_{x_j} - g \right] dt \\ & & (j=1, \dots, l) \end{cases}$$

que définissent les données initiales

$$(13.3) \quad x(0, \eta, y) = y, \quad \xi(0, \eta, y) = \eta \quad (\text{rappelons que } \eta \cdot y = 0).$$

On a

$$\xi(\theta^{1-m} t, \theta \eta, y) = \theta \xi(t, \eta, y), \quad x(\theta^{1-m} t, \theta \eta, y) = x(t, \eta, y).$$

[II] a montré que le système (13.2) admet les intégrales premières

$$(13.4) \quad g(x, \xi), \quad \xi \cdot x + (1-m) t g(x, \xi)$$

et la forme différentielle invariante

$$(13.5) \quad (d\xi) \cdot x + g dt;$$

en posant

$$x = x(t, \eta, y), \quad \xi = \xi(t, \eta, y), \quad \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = \frac{D(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)},$$

on a donc

$$(13.6) \quad g(x, \xi) = g(y, \eta),$$

$$(13.7) \quad \xi(t, \eta, y) \cdot x(t, \eta, y) = (m-1) t g(y, \eta),$$

$$(13.8) \quad \begin{cases} \xi_t(t, \eta, y) \cdot x(t, \eta, y) = -g(y, \eta), & \xi_{\eta_j} \cdot x = 0, \\ & (j=1, \dots, l); \end{cases}$$

ces dernières relations entraînent évidemment :

$$(13.9) \quad \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = -g(y, \eta) \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}.$$

Ces relations vont nous permettre de déterminer le conoïde $K(y)$ associé (n° 4) à la projection caractéristique; nous le nommons

Conoïde caractéristique. — Les points singuliers réels (t, η) de \tilde{x} sont définis par le système

$$\begin{aligned} & \xi_t(t, \eta, y) \cdot x = 0, \quad \xi_{\eta_j}(t, \eta, y) \cdot x = 0 \\ & (t, \eta : \text{inconnues réelles}; x, y : \text{données réelles}); \end{aligned}$$

(*) g est noté h par [I] et [II]; désormais h désigne des classes d'homologie.

d'où

$$\frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = 0;$$

d'où, vu (13.9) et (13.6) :

$$(13.10) \quad g(y, \eta) = g(x, \xi) = 0;$$

et vu (13.8)

$$x = x(t, \eta, y)$$

donc vu la définition et les propriétés de $K(y)$ qu'énonce le n° 4 : $K(y)$ est le lieu des points $x(t, \eta, y)$ quand $g(y, \eta) = 0$ (t, η : réels); alors $\xi^*(t, \eta, y)$ est l'hyperplan tangent à $K(y)$ en $x(t, \eta, y)$.

Vu (13.10), l'équation $k(x, y) = 0$ de $K(y)$ vérifie donc

$$g(x, k_x) = 0 \quad \text{pour } k = 0;$$

c'est l'équation des caractéristiques de l'opérateur a : le conoïde $K(y)$ est une caractéristique de l'opérateur a . Vu la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, les éléments de contact de $K(y)$ sont donc ceux des bandes bicaractéristiques ⁽¹⁰⁾ issues de y .

L'équation $k(x, y) = 0$ de $K(y)$ peut être choisie comme suit : l'hypothèse (4.4)₁, et les équations (13.2) impliquent

$$\frac{D(x_1(t, \eta_1, y), \dots, x_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} \neq 0 \quad \text{quand } t \neq 0, \quad g(y, \eta) = 0;$$

remplaçons alors les variables indépendantes (t, η, y) par (t, x, y) , l'invariance de (13.5) s'énonce

$$(d\xi) \cdot x = -g dt + (d\eta) \cdot y;$$

ou bien

$$d(\xi \cdot x) = -g dt + \xi_1 dx_1 + \dots + \xi_l dx_l - \eta_1 dy_1 - \dots - \eta_l dy_l;$$

ou encore, vu (13.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi \cdot x) = \frac{\xi \cdot x}{(1-m)t}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi \cdot x) = \xi_j, \quad \frac{\partial}{\partial y_j}(\xi \cdot x) = -\eta_j,$$

il existe donc une fonction $k(x, y)$ telle que

$$(13.11) \quad \begin{cases} \xi(t, \eta, y) \cdot x(t, \eta, y) = |t|^{\frac{1}{1-m}} k(x, y), & \xi_j = |t|^{\frac{1}{1-m}} k_{x_j}, \\ \eta_j = -|t|^{\frac{1}{1-m}} k_{y_j} \end{cases}$$

⁽¹⁰⁾ Une bande bicaractéristique est une famille à un paramètre t d'éléments de contact $x_1, \dots, x_l; \xi_1, \dots, \xi_l$ vérifiant le système différentiel :

$$dx_j = g_{\xi_j}(x, \xi) dt, \quad d\xi_j = -g_{x_j}(x, \xi) dt, \quad g(x, \xi) = 0.$$

[t et η sont réels; $k(x, y)$ est défini au produit près par ± 1]; $k(x, y)$ est défini quand x est voisin de y dans un cône contenant à son intérieur $C(y) - y$; $k(x, y)$ est holomorphe; $K(y)$ a pour équation $k(x, y) = 0$; vu (13.6), (13.7) et (13.11), k est solution des deux équations

$$(13.12) \quad g(x, k_x) = \pm \frac{1}{m-1} k, \quad g(y, k_y) = \pm \frac{(-1)^m}{m-1} k.$$

Voici d'autres propriétés de k , que le n° 64 prouvera aisément :

Si m est *impair*, le signe \pm figurant dans (13.12) est indépendant du signe de k ; près de chaque nappe de $K_+(y)$ c'est le signe qu'a $g_{\xi_1}(y, \xi)$ quand ξ^* touche cette nappe.

Si m est *pair*, ce signe change évidemment quand on remplace k par $-k$.

On a

$$(13.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \mathcal{O}\left[|x - y|^{\frac{m}{m-1}}\right]; \quad |k_x| / |k_y| \text{ voisin de } 1; \\ |k_x| / |x - y|^{\frac{1}{m-1}} \text{ borné sup et inf}; \\ |k_x + k_y| = \mathcal{O}\left[|x - y|^{\frac{m}{m-1}}\right]. \end{array} \right.$$

Notons $\det(k_{x,y})$ le déterminant d'éléments $k_{x_i y_j}$.

Si l est *impair*, nous définirons le signe de k de sorte que

$$(13.14) \quad \det(k_{x,y}) < 0;$$

alors $k(x, y) > 0$ du côté positif de $K(y)$.

Si l est *pair*, alors

$$(13.15) \quad \det(k_{x,y}) > 0 \quad [\text{ou } < 0]$$

sur les nappes positives [ou négatives] de $K(y)$.

La fonction λ sera introduite par [VI], qui notera

$$(13.16) \quad g_{x,\xi} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial^2 g(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j},$$

$$g'(x, \xi) = \text{Partie principale } [a(x, \xi) - g(x, \xi)],$$

ainsi $g(x, \xi)$ et $g'(x, \xi)$ sont des polynômes homogènes en ξ de degrés m et $m - 1$, tels que

$$a(x, \xi) - g(x, \xi) - g'(x, \xi)$$

soit de degré $\leq m - 2$; [VI] montrera que $g'(x, \xi) - (1/2)g_{x,\xi}(x, \xi)$ est une fonction de l'élément de contact du premier ordre (x, ξ) invariante par les changements de coordonnées unimodulaires (de déterminant fonctionnel égal à 1); elle est identiquement nulle si l'opérateur a est *self-adjoint* [c'est-

à-dire si $a^* = (-1)^m a$]; [VI] définira une fonction $\lambda(t, \eta, y)$ en adjoignant au système (13.2) et aux conditions initiales (13.3) l'équation et la condition

$$(13.17) \quad d\lambda = \left[g'(x, \xi) - \frac{1}{2} g_{x\xi}(x, \xi) \right] dt, \quad \lambda(0, \eta, y) = 0;$$

$\lambda(t, \eta, y)$ vérifie, comme $x(t, \eta, y)$, la condition

$$\lambda(\theta^{1-m} t, \theta \eta, y) = \lambda(t, \eta, y);$$

on peut donc définir une fonction $\lambda(x, y)$ par élimination de (t, η) entre $\lambda(t, \eta, y)$ et $x(t, \eta, y)$; $\lambda(x, y)$ est holomorphe quand x est voisin de $K(y) - y$.

[VI] déterminera la partie principale de la singularité de la solution du problème de Cauchy sur la caractéristique tangente à la variété qui porte les données de Cauchy et obtiendra en particulier la

PROPOSITION 13.2. — *La fonction de (t, η, y) ,*

$$(13.18) \quad U_m^*(\xi, y) = \frac{1}{g(y, \eta)} e^{-\lambda} \left[\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

où

$$\xi = \xi(t, \eta, y), \quad \lambda = \lambda(t, \eta, y), \quad [\dots]^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{pour } t = 0,$$

est holomorphe pour $|t| \cdot |\eta|^{m-1} < \text{Cte}$; elle s'annule deux fois pour $t = 0$.

Enfin le théorème de réciprocité de [II] (théorème 4, n° 3) s'énonce :

PROPOSITION 13.3. — *L'onde unitaire $U_m^*(\xi, y)$ de l'adjoint $a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'onde unitaire homogène de son transformé de Laplace $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$.*

On peut donc déterminer explicitement U_m^* quand A est du premier ordre, c'est-à-dire quand a est l'opérateur général de Tricomi :

DÉFINITION. — *L'opérateur général de Tricomi $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur d'ordre m , dont les coefficients d'ordres*

$$m, \quad m-1, \quad m-2$$

sont respectivement

linéaires, constants, nuls :

$$(13.19) \quad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_1 g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ + \dots + x_l g_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

les g_i étant homogènes de degré m et g' homogène de degré $m-1$.

La projection caractéristique $\xi(t, \eta, y)$ est alors la solution du système

$$(13.20) \quad d\xi_j = -g_j(\xi) dt \quad (j = 0, 1, \dots, l)$$

issue de $\xi(0, \eta, y)$, où $\eta \cdot y = 0$.

La relation (11.2) de [II] donne, vu (13.9), puis (13.17) :

$$(13.21) \quad \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} = \exp \left[- \int_0^t g_{x,\xi}(\xi) dt \right],$$

où

$$\xi_j = \xi_j(t, \eta) \quad (j = 1, \dots, l), \quad g_{x,\xi} = \sum_{j=1}^l \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi_j};$$

$$(13.22) \quad e^{-\lambda} \sqrt{\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}} = \exp \left[- \int_0^t g'(\xi) dt \right].$$

On a la proposition suivante, que [II] (théorème 5, n° 4) énonce et prouve quand $g' = 0$:

PROPOSITION 13.4. — *Si $a\left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur général de Tricomi, alors U_m^* s'obtient en annulant la fonction (13.18); c'est-à-dire, vu (13.9) :*

$$(13.23) \quad U_m^*(\xi, y) \frac{D(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)} = - e^{-\lambda} \sqrt{\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}},$$

où $\xi = \xi(t, \eta, y)$; le second membre est donné par l'intégrale (13.22).

14. L'allure de la solution élémentaire $E(x, y)$ résulte des théorèmes 2, 3, 4 et 5 (n° 11).

Les théorèmes 2, 3 et 5 s'appliquent immédiatement à $E = \mathcal{L}[U_m^*]$, en faisant $n = m$; dans le théorème 3, la formule (11.7) peut être remplacée par la suivante : si nous définissons k par (13.11) et (13.14), alors, nous avons pour $x \in K_+(y)$:

$$(14.1) \quad H_1(x, y) = \frac{(m-1)}{i(2\pi)^{l/2-1}} \sqrt{\det(k_{x,y})} e^{-\lambda(x,y)},$$

où

$$\sqrt{\det k_{x,y} / t \sqrt{\text{Hess}_\eta[-t g(y, \eta)]}} > 0,$$

$\sqrt{\text{Hess}}$ ayant la définition 11.2.

Le n° 65 prouvera aisément cette formule.

Pour appliquer le théorème 4 à E , construisons, par quadratures et résolution d'un système différentiel d'Hamilton, deux distributions E_1 et E_2 ;

ce sont des *approximations* de E , (théorèmes 4 b et 4 c), qui sont dans les cas les plus simples égales à E (théorème 6).

Définition de E_1 et E_2 . — Soit

$$(14.2) \quad E_1(x, y) = \mathcal{E} \left[\frac{1}{g(y, \xi)} \right],$$

$$(14.3)_1 \quad E_2(x, y) = - \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{(\xi \cdot x)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} e^{-\lambda} \sqrt{\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}} \varpi(t, \eta)$$

où $l < m$, $h = h(\tilde{\Phi}, \tilde{x} \cup y^*)$; $\xi(t, \eta, y)$ est la projection caractéristique (n° 13); ϖ est défini par (3.3);

$$(14.3)_2 \quad E_2(x, y)$$

$$= \frac{(-1)^{l-m}}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{d^{l-m}}{(d\xi \cdot x)^{l+m-1}} \left[e^{-\lambda} \sqrt{\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}} \varpi(t, \eta) \right]$$

où $m \leq l$, $h = h(\tilde{x}, y^*)$; (notations de [III], n° 7).

Le n° 66 déduira aisément de la formule (11.9) du théorème 4 le

THÉORÈME 4 a. — *Supposons :*

$$0 \leq p_1 + \dots + q_l < m - 1 - (l/2)$$

[ou même

$$0 \leq p_1 + \dots + q_l \leq m - 1 - (l/2)$$

quand l est pair et $K(y)$ négatif]; alors

$$(14.5) \quad \frac{\partial^{p_1+\dots+q_l}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial y_1^{q_l}} E(x, y) = \mathcal{O}[|x - y|^{m-l-p_1-\dots-q_l}].$$

Soit un entier positif

$$p > (l/2) - m + 1$$

[ou même $\geq (l/2) - m + 1$, quand $K(y)$ est négatif]; alors $E(x, y)$ est une distribution, somme de dérivées en x d'ordres $\leq p$ de fonctions $\mathcal{O}[|x - y|^{m-l+p}]$ de (x, y) , continues pour $x \neq y$ [bornées sur tout fermé où $x \neq y$].

NOTES. — Le théorème 3 montre que le premier membre de (14.5) n'est plus une fonction bornée pour $x \neq y$ quand $m - 1 - (l/2) < p_1 + \dots + q_l$; n'est plus une fonction, mais est une distribution quand $m - (l/2) \leq p_1 + \dots + q_l$;

le théorème 4 b montre qu'on ne peut pas améliorer le second membre de (14.5).

Le n° 66 déduira aisément de la formule (11.10) du théorème 4 le

THÉOREME 4 b. — Si

$$0 \leq p_1 + \dots + q_l < m - 1 - (l/2),$$

alors

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + q_l}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial y_1^{q_1}} [E(x, y) - E_1(x, y)] = \mathcal{O}[|x - y|^{m-l-p_1-\dots-q_l+\varepsilon}],$$

où $\rho = \rho(l, m - p_1 - \dots - q_l)$ est défini par (11.11).

NOTE. — $E - E_1$ est holomorphe pour $x \notin K_+(y) \cup C_+(y)$.

Le n° 66 déduira aisément de la formule (11.9) du théorème 4 le

THÉOREME 4 c. — Si

$$0 \leq p_1 + \dots + q_l < m - (l/2)$$

[ou, encore, si $0 \leq p_1 + \dots + q_l \leq m - (l/2)$, l pair, $K(y)$ négatif]; alors

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + q_l}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial y_1^{q_1}} [E(x, y) - E_2(x, y)] = \mathcal{O}[|x - y|^{m-l-p_1-\dots-q_l+2}].$$

NOTE. — E et E_2 sont holomorphes pour $x \notin K_+(y)$; les parties principales de leurs singularités sont les mêmes.

15. Détermination explicite de la solution élémentaire. — La proposition 13.4 a pour conséquence évidente le

THÉOREME 6. — 1° L'opérateur hyperbolique, homogène, à coefficients constants $g \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$ a pour solution élémentaire

$$E(x - y) = E_1 = E_2 = \mathcal{E} \left[\frac{1}{g(\xi)} \right].$$

2° L'opérateur général de Tricomi a pour solution élémentaire, là où il est hyperbolique,

$$E(x, y) = E_2(x, y).$$

Par exemple :

COROLLAIRE 6. — L'opérateur de Tricomi :

$$x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2$$

a pour solution élémentaire une fonction valant

$$E(x, y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\eta^2 + y_2} \quad \text{si } x \in \mathcal{E}_+(y) \quad (E = 0 \text{ sinon});$$

\oint désigne la plus petite période imaginaire pure de l'intégrale abélienne de première espèce $\int \frac{d\xi}{\eta^2 + y_2}$ de la cubique

$$\frac{1}{3} \xi^3 + \xi x_2 + x_1 = \frac{1}{3} \eta^3 + \eta y_2 + y_1$$

du plan projectif dont les coordonnées sont ξ et η .

Le chapitre 9 prouve ce corollaire, qui est sa proposition 67; puis il l'explique (proposition 68); enfin il emploie ⁽¹⁾ la fonction hypergéométrique, à l'instar de GERMAIN et BADER [6]: il obtient une variante de leur expression de E (proposition 69). Rappelons que cette solution élémentaire de l'équation de Tricomi avait été étudiée, bien antérieurement, par TRICOMI [11] et WEINSTEIN [12].

Les opérateurs non homogènes à coefficients constants ont, eux aussi, leur étude facilitée par l'emploi de la transformation \mathcal{L} : soit $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur hyperbolique, à coefficients constants, vérifiant (4.4) et (9.1); il est bien connu que la solution élémentaire de $a^p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ [p : entier > 0] est la transformée inverse de Laplace de $a^{-p}(\xi)$; la proposition 62 en donne l'expression suivante, dont l'emploi est commode; voir J. CHAILLOU [14]:

THÉOREME 7. — $a^p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ a pour solution élémentaire

$$E(x - y) = \mathcal{L}[U_r^*(\xi, y)] \quad [r \leq (m-1)p + 1],$$

où

$$U_r^*(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\tau^{r-1}}{a^p(\tau\xi)} \exp(-\tau\xi \cdot y) d\tau \quad (|\tau| \text{ grand}),$$

est uniformisé par la projection polynomiale (4.10), pour $r \leq (m-1)p$.

NOTE. — Il est évident que U_0^* est la solution unitaire de a^p et que

$$U_{r+1}^* = -\frac{\partial U_r^*}{\partial \xi_0}.$$

⁽¹⁾ De là résulte une expression intéressante des périodes de l'intégrale elliptique par la fonction hypergéométrique; l'article de A. H. M. LEVELT, qui suit le présent article, déduit cette expression des propriétés classiques de cette fonction.

CHAPITRE 1. — Dérivation d'une intégrale,
où figure une uniformisation.

Le présent article est, techniquement, le développement de [III].

Le théorème 3 de [III] (n° 10) énonce deux formules de dérivation, où figure une série linéaire de sous-variétés; le n° 46 en tirera (10.3); [III] les déduit de ses deux formules fondamentales de dérivation (60.1) et (60.2). Ce chapitre-ci, après avoir rappelé l'énoncé de ces deux formules fondamentales (n° 16), en déduira deux nouvelles formules de dérivation (proposition 17.2), concernant des intégrales où figure une uniformisation; le n° 48 en tirera (10.7).

16. Rappel de deux formules de dérivation. — Les *notations* sont celles des nos 1 et 60 de [III]; X et T sont des variétés analytiques complexes; $S(t)$ et S' sont des sous-variétés de X ; $S' = S'_1 \cup \dots \cup S'_M$; $S(t)$, S'_1 , ..., S'_M sont sans singularité, en position générale, de codimension 1; leurs dimensions complexes sont

$$\dim X = l, \quad \dim S(t) = \dim S'_i = l - 1;$$

S' est fixe; $S(t)$ dépend du paramètre $t \in T$; son équation locale, près d'un point y , est

$$s(x, y, t) = 0, \quad [s_x \neq 0, x = (x_1, \dots, x_l) \in X],$$

s étant holomorphe en (x, t) quand x est voisin de y .

$h(X, S \cup S')$ et $h(S, S')$ sont des classes d'homologie relative, à supports compacts, dépendant continûment de t ;

$$(16.1) \quad \dim h(X, S \cup S') = l; \quad \dim h(S, S') = l - 1;$$

∂ désigne l'homomorphisme bord :

$$(16.2) \quad \partial H_c(X, S \cup S') \rightarrow H_c(S, S').$$

$\varphi(x, t)$ est une forme différentielle en x , fonction de t ; elle est homogène en (dx_1, \dots, dx_l) de degré l .

LEMME. — Supposons donnée une équation locale de $S(t)$ telle que :

$$\frac{s_t(x, y, t)}{s(x, y, t)} \text{ soit indépendant de } y.$$

1° Si la forme $\varphi(x, t)$ est holomorphe sur $X \times T$, alors

$$(16.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_h \varphi(x, t) = \int_h \varphi_t(x, t) - \int_{\partial h} \frac{s_t(x, y, t) \varphi(x, t)}{ds(x, y, t)} \Big|_{S(t)},$$

où

$$h = h(X, S \cup S').$$

2° Si la forme $\varphi(x, t)$ est *holomorphe* en les points (x, t) de $X \times T$ tels que $x \notin S(t)$ [c'est-à-dire tels que $s(x, y, t) \neq 0$], alors

$$(16.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_h \text{Rés} \varphi(x, t) = \int_h \text{Rés} \varphi_t(x, t),$$

où

$$h = h(S, S').$$

PREUVE DE (16.4). — La formule, plus générale, (60.2) de [III].

PREUVE DE (16.3). — La formule (60.1) de [III] affirme qu'on a, sous des hypothèses résultant des précédentes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_h \varphi(x, t') = - \int_{\partial h} \frac{s_t(x, y, t) \varphi(x, t')}{ds(x, y, t)} \Big|_{S(t)}$$

quand t' est indépendant de t ,

$$S = S(t), \quad h = h(X, S \cup S');$$

on a alors, évidemment

$$\frac{\partial}{\partial t'} \int_h \varphi(x, t') = \int_h \varphi_{t'}(x, t').$$

(16.3) est une conséquence immédiate des deux formules ci-dessus.

17. Énoncé de deux nouvelles formules de dérivation. — NOTATIONS. — On se donne : trois variétés analytiques complexes X, Z, T ; une application holomorphe

$$z(x, t) : X \times T \rightarrow Z;$$

enfin des sous-variétés analytiques complexes de X ,

$$S(t) \quad \text{et} \quad S' = S'_1 \cup \dots \cup S'_M.$$

$S(t), S'_1, \dots, S'_M$ sont sans singularité, en position générale, de codimension 1. Leurs dimensions complexes sont

$$\dim X = \dim Z = l, \quad \dim S(t) = \dim S'_i = l - 1.$$

$S(t)$ dépend du paramètre $t \in T$; S' en est indépendant; l'image $\vec{d}_x \vec{d}_t S(t)$ dans Z par $z(x, t)$ est une sous-variété, indépendante de t , sans singularité, de codimension 1.

Plus précisément, on suppose que $S(t)$ possède une équation locale

$$S(t): s[z(x, t), y] = 0$$

ayant les propriétés suivantes :

$s[z, y]$ est une fonction numérique complexe holomorphe de z , définie quand z est voisin de $y \in Z$;

$$\sum_{j=1}^l \frac{\partial s[z(x, t), y]}{\partial z_j} \frac{\partial z_j(x, t)}{\partial x} \neq 0;$$

$$\frac{1}{s[z(x, t), y]} \sum_{j=1}^l \frac{\partial s[z(x, t), y]}{\partial z_j} \frac{\partial z_j(x, t)}{\partial t} \text{ est indépendant de } y.$$

On suppose que la partie de S' où $\frac{D(z(x, t))}{D(x)} = 0$ est de dimension complexe $< l - 1$.

Soient $h(X, S \cup S')$ et $h(S, S')$ des classes d'homologie relative, à supports compacts, dépendant continûment de t et ayant les dimensions (16.1).

Soit $\varphi[z, t]$ une forme différentielle en z , fonction de t , homogène de degré l en (dz_1, \dots, dz_l) , à coefficients fonctions analytiques, uniformes ou multiformes de z, t .

L'objet du présent chapitre est d'établir *les deux formules de dérivation que voici* :

PROPOSITION 17.1. — *Les hypothèses ci-dessus étant faites, notons $\varphi_l[z, t]$ le gradient ⁽¹¹⁾ de $\varphi[z, t]$ relativement à t , quand z est fixe.*

1° *Si la forme $\varphi[z(x, t), t]$ est holomorphe sur $X \times T$, alors*

$$(17.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{h(X, S \cup S')} \varphi[z(x, t), t] = \int_{h(X, S \cup S')} \varphi_l[z(x, t), t].$$

2° *Si la forme $\varphi[z(x, t), t]$ est holomorphe en les points (x, t) de $X \times T$ tels que*

$$x \notin S(t) \quad [\text{c'est-à-dire } s[z(x, t), y] \neq 0],$$

alors

$$(17.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{h(S, S')} \text{Rés } \varphi[z(x, t), t] = \int_{h(S, S')} \text{Rés } \varphi_l[z(x, t), t].$$

(17.1) et (17.2) font $dt = 0$ dans $\varphi[z(x, t), t]$ et $\varphi_l[z(x, t), t]$.

NOTE. — L'hypothèse

$$\varphi[z(x, t), t] \text{ est holomorphe en un point } (x, t)$$

⁽¹¹⁾ C'est la forme différentielle dont les coefficients sont les gradients de ceux de $\varphi[z, t]$.

implique évidemment la suivante :

$\varphi[z(x, t), t]$ et $\varphi_t[z(x, t), t]$ sont, pour $dt = 0$, holomorphes en ce point.

C'est le corollaire suivant de cette proposition 17.1 qu'emploiera le n° 48 :

Complétons comme suit les hypothèses précédentes : $S = S(t, u)$ dépend d'un second paramètre u , qui est un point d'un espace affín; quand u varie, S décrit une série linéaire : $s[z, y, u]$ est linéaire en u ; S a au plus un point singulier : un point double quadratique où $s_u \neq 0$ et qui n'est pas sur S' ;

$$\varphi[z, t, u] = \frac{[-s[z, y, u]]^{-q}}{(-q)!} \omega[z, y, t] \quad (q \leq 0);$$

$$(q-1)! \text{ Rés } \varphi = \frac{d^{q-1} \omega}{ds^q} \Big|_{(S, S')} \quad (0 < q);$$

s et ω sont définis quand z est voisin de $y \in Z$; $s^{-q} \omega$ est indépendant de y ; $\omega[z, y, t]$ est une forme différentielle en z fonction de t , à coefficients fonctions analytiques de (z, t) ; $\omega[z(x, t), y, t]$ est holomorphe en (x, t) .

PROPOSITION 17.2. — Notons $\omega_t[z, y, t]$ le gradient de $\omega[z, y, t]$ relativement à t , quand y et z sont fixes; on a les formules de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h(x, S \cup S')} \frac{[-s[z(x, t), y, u]]^{-q}}{(-q)!} \omega[z(x, t), y, t]$$

$$= \int_{h(x, S \cup S')} \frac{[-s]^{-q}}{(-q)!} \omega_t[z(x, t), y, t],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{h(S, S')} \frac{d^{q-1} \omega}{ds^q} = \int_{h(S, S')} \frac{d^{q-1} \omega_t}{ds^q},$$

ces intégrales désignant, au sens du n° 12 de [III], des DISTRIBUTIONS DE u , fonctions de t .

PREUVE. — On applique les formules de dérivation (17.1) et (17.2) aux fonctions J et j_p de (t, u) au moyen desquelles [III] définit ces distributions.

18. Preuve de (17.2). — Il suffit évidemment de traiter le cas où $\dim T = 1$: t sera une variable numérique complexe. Définissons ψ et ω comme suit : ce sont les deux formes différentielles ⁽¹²⁾ en x , fonctions de t , telles que

$$(18.1) \quad \varphi[z(x, t), t] = \psi(x, t) + dt \wedge \omega(x, t).$$

Elles sont homogènes en dx_1, \dots, dx_l de degrés respectifs l et $l-1$; elles sont holomorphes pour $s[z(x, t), y] \neq 0$; puisque $\varphi[z, t]$ est une

⁽¹²⁾ Autrement dit : ce sont des formes extérieures en dx_1, \dots, dx_l à coefficients fonctions de (x, t) .

forme analytique en z de degré maximal l , on a

$d\varphi[z, t] = 0$ pour $dt = 0$; $\varphi[z, t] = 0$ sur l'image de S' par $z(x, t)$;
 en remplaçant dans ces deux relations $\varphi[z, t]$ par son expression (18.1)
 on obtient (φ_t est le gradient en t , quand z est fixe; ψ_t est le gradient en t ,
 quand x est fixe) :

$$dt \wedge \varphi_t = dt \wedge \psi_t - dt \wedge d\omega; \quad d\psi = 0 \quad \text{pour } dt = 0;$$

$$\psi | S' = 0; \quad \omega | S' = 0.$$

Nous avons donc

$$(18.2) \quad \varphi_t = \psi_t - d\omega, \quad \omega | S' = 0;$$

$$d\psi = 0 \quad \text{pour } dt = 0; \quad \varphi | S' = \psi | S' = \varphi_t | S' = \psi_t | S' = 0,$$

car $\psi, \varphi, \psi_t, \varphi_t$ sont de degré l .

Puisque les Rés sont calculés pour t fixe, (18.1) donne

$$(18.3) \quad \int_{h(S, S')} \text{Rés } \varphi[z(x, t), t] = \int_{h(S, S')} \text{Rés } \psi(x, t).$$

De cette relation (18.3) et de la formule de dérivation (16.4) résulte

$$(18.4) \quad \frac{d}{dt} \int_{h(S, S')} \text{Rés } \varphi[z(x, t), t] = \int_{h(S, S')} \text{Rés } \psi_t(x, t).$$

Puisque Rés ψ_t ne dépend (voir [III], n° 36, définition de Rés) que de la classe de cohomologie $h^*(X - S, S')$ de ψ_t , on a, vu (18.2) :

$$(18.5) \quad \text{Rés } \psi_t(x, t) = \text{Rés } \varphi_t[z(x, t), t].$$

Ces formules (18.4) et (18.5) prouvent (17.2).

19. Preuve de (17.1). — Conservons les conventions et notations des n° 17 et 18, $\psi(x, t)$ et $\omega(x, t)$ étant maintenant holomorphes sur $X \times T$; définissons en outre σ comme suit : c'est la forme différentielle en x , fonction de t , telle que

$$(19.1) \quad ds[z(x, t), y] = \sigma(x, t) + s_t dt.$$

Elle est homogène en dx_1, \dots, dx_l de degré 1; elle est définie et holomorphe quand $z(x, t)$ est voisin de y . Puisque $\varphi[z, t]$ est une forme analytique en z de degré maximal l , on a

$$ds[z, y] \wedge \varphi[z, t] = 0;$$

d'où, en remplaçant φ et ds par leurs expressions (18.1) et (19.1), les deux relations, dont la première est évidente :

$$\sigma \wedge \psi = 0, \quad s_t \psi = \sigma \wedge \omega.$$

Cette dernière relation et (19.1) montrent que

$$(19.2) \quad \frac{s_t \psi}{ds} \Big|_{S(t)} = \omega.$$

De (18.1) résulte

$$\int_{h(X, S \cup S')} \varphi[z(x, t), t] = \int_h \psi(x, t);$$

d'où, vu (16.3), puis (19.2), puis la formule de Stokes ([III], n° 4), puis (18.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{h(X, S \cup S')} \varphi[z(x, t), t] \\ &= \int_h \psi_t(x, t) - \int_{\partial h} \frac{s_t \psi}{ds} \Big|_{S(t)} \\ &= \int_h \psi_t(x, t) - \int_{\partial h} \omega(x, t) \\ &= \int_h \psi_t(x, t) - d\omega(x, t) = \int_{h(X, S \cup S')} \varphi_t. \end{aligned}$$

Ainsi (17.1) est établi.

CHAPITRE 2. — Distribution définie par une intégrale étendue à la classe d'homologie de la partie réelle ou imaginaire d'une sous-variété réelle dépendant linéairement d'un paramètre.

Ce chapitre 2, comme le chapitre 1, complète l'une des conclusions de [III].

Le n° 12 de [III] étudie une distribution $J(t)$: elle est définie par une intégrale étendue à une classe d'homologie compacte $h(S, S')$ ou $h(X, S \cup S')$; $S = S(t)$ dépend linéairement du paramètre réel t ; $J(t)$ est une fonction holomorphe hors d'une sous-variété K de l'espace affín réel T où varie t ; l'allure de $J(t)$ sur K est décrite au moyen de deux entiers $n(t)$ et $N(t)$, dont les définitions sont topologiques. L'objet du présent chapitre est de calculer ces deux entiers quand l'équation de $S(t)$ est réelle et que, près du point singulier éventuel de $S(t)$, $h(S, S')$ ou $\partial h(X, S \cup S')$ est la classe d'homologie de $\text{Re } S(t)$ ou de $\text{Im } S(t)$.

ERRATUM. — Dans [III] :

formules (11.5) et (11.7), lire $s(x, y, t)$ au lieu de $s(x, y)$;
dans la formule suivant (11.7), lire :

$$= \pm 2(2\pi)^{\frac{l}{2}-1} \Gamma\left(q - \frac{l}{2}\right) \frac{\rho}{\sqrt{\text{Hess}_{x,s}}} \quad \text{si } l \text{ est impair.}$$

20. Énoncé des résultats. — Nous employons les notations et résultats qu'énonce le n° 12 de [III] et que prouvent les chapitres 9 et 10 de [III]. Le bord de $h(X, S \cup S')$ dans S est noté

$$\partial h(X, S \cup S') = h(S, S').$$

On suppose réelle l'équation locale de $S(t) : s(x, y, t) = 0$.

DÉFINITION 20.1. — Supposons l impair; choisissons l'équation locale de $K : k(t, y) = 0$ telle que la condition (11.2) de [III] soit satisfaite :

$$(20.1) \quad k_t(t, y) = -s_t(x, y, t)|_{x=z(t)} \text{ sur } K;$$

$z(t)$ désigne le point singulier qu'a $S(t)$ pour $t \in K$.

Nous nommons *côté positif* (négatif) de K celui où

$$\text{Hess}_x[s(x, y, t)]k(t, y) > 0 \quad (< 0).$$

DÉFINITION 20.2. — Supposons l pair; nous nommons *nappes positives* (négatives) de K celles où

$$\text{Hess}_x[s(x, y, t)] > 0 \quad (< 0).$$

NOTE. — Le n° 38 prouvera l'accord de ces définitions avec celles, relatives à un cas plus particulier, qu'énonce le n° 4.

DÉFINITION 20.3. — Notons $\text{Re } S$ la partie réelle de S . Supposons que $h(S, S')$ contienne un cycle ayant les propriétés suivantes : sa dimension est $l-1$; il dépend continûment de t , sauf au voisinage du point singulier $y = z(0)$ qu'a $S(t)$ quand $t = 0 \in K(y)$; près de ce point, il est identique à $\text{Re } S(t)$ muni de l'orientation

$$\frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l}{ds(x, y, t)} > 0 \quad (dy = dt = 0).$$

Nous disons alors que $h(S, S')$ est, près de $z(0)$, la classe d'homologie de $\text{Re } S$.

DÉFINITION 20.4. — Considérons près de $y = z(0)$ ($0 \in K$) l'intersection des deux chaînes suivantes :

- 1° la variété analytique complexe $S(t)$, munie de son orientation naturelle;
- 2° la chaîne que constitue l'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_l)$ de X tels que

$$(20.2) \quad x_j \text{ est complexe; } x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_l \text{ sont réels,}$$

muni de l'orientation

$$i \text{ Im}(x_j) d\bar{x}_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l > 0,$$

que nous associons à l'orientation $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l > 0$ de $\text{Re } \mathcal{X}$. Cette chaîne est identique à son imaginaire conjuguée; son bord est réel. Son intersection par $S(t)$ est une chaîne $\text{Im } S$; elle est opposée à son imaginaire conjuguée; son bord est réel, donc nul : $\text{Im } S$ est un cycle de la partie de $S(t)$ voisine de y ; il dépend du choix des coordonnées et de l'entier j (voir n° 21).

Pour définir cette intersection, il peut être nécessaire de déformer un peu la chaîne (20.2), pour la placer en position générale par rapport à $S(t)$.

Supposons que $h(S, S')$ contienne un cycle ayant les propriétés suivantes : sa dimension est $l-1$ ($l > 2$); il dépend continûment de t sauf au voisinage du point singulier $y = z(0)$ qu'a $S(t)$ quand $t = 0 \in K$; près de ce point, il est l'un des cycles $\text{Im } S$. Nous disons alors que $h(S, S')$ est, près de $z(0)$, la classe d'homologie de $\text{Im } S$. Rappelons qu'il faut avoir préalablement orienté $\text{Re } \mathcal{X}$.

NOTE. — Puisque $\text{Hess}_{x,s} \neq 0$ pour $s_x = 0$, on peut toujours, près de $z(0)$, identifier $S(t)$ à une quadratique Q et se borner à l'emploi des cycles $\text{Im } Q$ que le n° 21 construit explicitement.

L'objet de ce chapitre est de compléter le théorème 4, le corollaire 4 et le n° 12 de [III] par la proposition suivante, qui emploie la définition 11.1 de χ_p , la définition 11.2 de $\sqrt{\text{Hess}}$, la condition (20.1) et où

$$\omega(x, y) = \rho(x, y) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l.$$

PROPOSITION 20. — *Entre les distributions $J(t)$, $\chi_{l/2-q}[k(t, y)]$ et $\chi_0[k]$ on a une relation à coefficients $H_i(t)$ holomorphes :*

$$(20.3) \quad J(t) = \text{Re} \left\{ H_1(t) \chi_{\frac{l}{2}-q}[k(t, y)] + H_2(t) \chi_0[k] \right\} + H_3(t),$$

dans chacun des deux cas suivants :

1° $h(S, S')$ ou $\partial h(\mathcal{X}, S \cup S')$ est, près de $y = z(0)$, la classe d'homologie de $\text{Re } S(t)$; $\rho(x, y)$ est réel pour x réel; si l est impair, s est choisi tel que $\text{Hess}_{x,s}(x, y, t) > 0$ ($k > 0$ du côté positif de K);

2° $h(S, S')$ ou $\partial h(\mathcal{X}, S \cup S')$ est, près de $y = z(0)$, la classe d'homologie de $\text{Im } S(t)$; $\rho(x, y)$ est imaginaire pur pour x réel; si l est impair, s est choisi tel que $\text{Hess}_{x,s}(x, y, t) < 0$ ($k < 0$ du côté positif de K).

Les $H_i(t)$ sont holomorphes au point $t = 0$ de K , où $k(t, y)$ est défini et vérifie (20.1).

Si l est IMPAIR, alors : H_1 est réel, $H_2 = 0$.

Si l est PAIR, alors : $H_2 = 0$ pour $q \leq l/2$;

H_1 et H_2 sont réels dans le cas 1°, (2°) quand 0 est sur une nappe positive (négative) de K ;

H_1 et H_2 sont imaginaires purs dans le cas 1°, (2°) quand 0 est sur une nappe négative (positive) de K .

Dans tous cas, on a pour $t \in K$:

$$(20.4) \quad H_1(t) = (2\pi)^{l/2} \frac{\rho(x, y)}{\sqrt{\text{Hess}_{x,s}(x, y, t)}} \Big|_{x=y(t)}.$$

21. Une famille de cycles Im Q de la quadrique Q . — Dans un espace affín \mathcal{X} , considérons la quadrique

$$Q: q(x_1, \dots, x_l) = 1,$$

où $q(x)$ est une forme quadratique réelle, de discriminant non nul.

L'application à Q de la définition 20.4 donne ceci : construisons l'ensemble des points de \mathcal{X} , à coordonnées x_1, \dots, x_l toutes réelles sauf une $x_j = u_j + iv_j$, vérifiant

$$(21.1) \quad \begin{cases} q(x_1, \dots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \dots, x_l) - q(0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) = 1, \\ q_{x_j}(x_1, \dots, x_{j-1}, u_j, x_{j+1}, \dots, x_l) = 0, \end{cases}$$

cet ensemble est évidemment une partie de Q ; c'est une quadrique sans singularité : donnons-lui l'orientation

$$(21.2) \quad (-1)^j \varpi > 0, \quad \text{où } \varpi = \frac{du_j \wedge dv_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_l}{d[q(x_1, \dots, u_j, \dots, x_l) - q(0, \dots, v_j, \dots, 0)] \wedge dq_{x_j}(x_1, \dots, u_j, \dots, x_l)},$$

nous obtenons un cycle Im Q , qui dépend continûment de q .

Tous les cycles qui se déduisent de ce cycle (21.1), (21.2) par un changement de coordonnées linéaires, réel, de déterminant > 0 , sont encore des cycles Im Q ; l'ensemble de ces cycles Im Q est connexe et indépendant de j ; car changer j équivaut à un tel changement de coordonnées.

NOTE. — Si $q_{x_j x_j} \neq 0$, alors tout point $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_l)$ appartenant à la projection du cycle (21.1) est la projection de deux points imaginaires conjugués de ce cycle, dont l'orientation est

$$(21.3) \quad (-1)^j \text{Im}(x_j) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_l > 0.$$

Si $q_{x_j x_j} = 0$, alors

$$q(x) = a(x) x_j + b(x),$$

$a(x)$ et $b(x)$ étant deux formes en $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_l$ de degrés 1 et 2; la définition (21.1), (21.2) d'un cycle Im Q devient

$$(21.4) \quad a(x) = b(x) - 1 = 0;$$

$$(21.5) \quad du_j \wedge dv_j \wedge (-1)^{j-1} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_l}{da(x) \wedge db(x)} \Big|_{a=b-1=0} > 0.$$

NOTE. — Si $l = 2$, alors Im Q n'a pas d'intérêt : il est vide pour $q_{x_j x_j} = 0$.

22. Énoncé d'un lemme complétant le théorème de Picard-Lefschetz sur la ramification des classes d'homologie. — Le n° 26 déduira la proposition 20 du complément suivant au théorème de Picard-Lefschetz, que rappellent les n° 11 et 63 de [III]. Nous notons $h(t)$ la classe

$$h(X, S(t) \cup S') \quad \text{ou} \quad h(S(t), S'),$$

$e(t)$ désignant de même la classe évanouissante

$$e(X, S(t) \cup S') \quad \text{ou} \quad (13) \quad e(S(t), S').$$

PROPOSITION 22. — *Précisons comme suit le choix de la classe évanouissante $e(X, S \cup S')$, que [III] définit seulement au produit près par ± 1 : elle contient une boule $\alpha(t)$ dont le bord appartient à $S(t)$ et sur laquelle*

$$(22.1) \quad \sqrt{\text{Hess}_x s(x, y, t)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l > 0 \quad \text{pour} \quad k(t, y) > 0,$$

$$(22.2) \quad s(x, y, t)/k(t, y) < 0.$$

Supposons donnée, pour t réel et voisin de $0 \in K$, une classe $h(t)$ qui dépend continûment de t le long de K et hors de K . Soit $h_+(t)$ (et $h_-(t)$) la classe d'homologie qui dépend continûment de t pour t complexe, voisin de K , $t \notin K$, $\text{Im } k \geq 0$ (≤ 0) et qui vérifie

$$h_+(t) = h_-(t) = h(t) \quad \text{pour } t \text{ réel}, \quad k(t) > 0.$$

Alors, pour t réel, $k(t) < 0$, on a

$$(22.3) \quad h_+(t) - h(t) = e_+(t), \quad h_-(t) - h(t) = \text{sgn Hess}_x(s) e_-(t)$$

quand $h(t)$ ou $(13) \partial h(t)$ est, près de $z(0)$, la classe de $\text{Re } S(t)$;

$$(22.4) \quad h_+(t) - h(t) = e_+(t), \quad h_-(t) - h(t) = -\text{sgn Hess}_x(s) e_-(t)$$

quand $h(t)$ ou $(13) \partial h(t)$ est, près de $z(0)$, la classe de $\text{Im } S(t)$.

$\text{sgn} \dots = \text{signe de} \dots$

La preuve de cette proposition est analogue à celle que I. FÁRY [2] a donnée du théorème de Picard-Lefschetz; la voici.

23. Réduction de la proposition 22 à une propriété de la quadrique complexe. — Il suffit évidemment de prouver cette proposition 22 quand $\dim T = 1$: t est une variable numérique; K est réduit à un point $t = 0$; on peut supposer, près de $z(0)$, l'équation de $S(t)$: $s(x, t) = 0$ résolue en t :

$$s(x, t) = s(x) - t;$$

(13) suivant que $h(t) = h(X, S \cup S')$ ou $h(S, S')$.

puisque $\text{Hess}_x s(x, 0) \neq 0$; on peut effectuer dans \mathcal{X} un changement de coordonnées, de déterminant fonctionnel > 0 transformant $s(x, 0)$ en une forme quadratique : on a

$$(23.1) \quad s(x, t) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_l^2 - t,$$

dans une boule \bar{B} de centre $z(0)$:

$$(23.2) \quad \bar{B}: |x_1|^2 + \dots + |x_l|^2 \leq 1;$$

on satisfait (20.1) en prenant

$$k(t) = t.$$

On vérifie (22.1) et (22.2) en prenant pour $e(\mathcal{X}, S \cup S')$ la classe d'homologie de la boule

$$(23.3) \quad \alpha(t): \frac{x_1^2}{t} > 0, \quad \dots, \quad \frac{x_p^2}{t} > 0, \quad \frac{x_{p+1}^2}{t} < 0, \quad \dots, \quad \frac{x_l^2}{t} < 0,$$

$$\frac{x_1^2}{t} + \dots + \frac{x_p^2}{t} - \frac{x_{p+1}^2}{t} - \dots - \frac{x_l^2}{t} \leq 1$$

munie de l'orientation

$$t^{-l/2} \sqrt{\text{Hess}_x(s)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l > 0, \quad \text{où } t^{-l/2} > 0 \text{ pour } t > 0.$$

Nous allons construire explicitement, pour

$$(23.4) \quad t \text{ voisin de } 0, \quad \text{Im } t \geq 0 \text{ (ou } \leq 0), \quad |t| = \tau > 0$$

une classe d'homologie $h_+(t)$ (ou h_-), dépendant continûment de t , égale à la classe $h(t)$ donnée pour $t > 0$.

$h_+(t)$ (ou h_-) sera l'image de $h(\tau)$ par une application $F_+(t)$ (ou F_-), qui devra avoir les propriétés suivantes :

1° $F_+(t)$ (ou F_-) est définie quand (23.4) a lieu; c'est une application de \mathcal{X} en lui-même; elle applique $S(\tau)$ dans $S(t)$;

2° $F_{\pm}(\tau)$ est l'identité; $F_{\pm}(-\tau)$ transforme les points réels en points réels;

3° $F_{\pm}(t)$ dépend continûment de $t (t \neq 0)$;

4° les restrictions

$$F_+(t)|(\mathcal{X} - \bar{B}) \quad \text{et} \quad F_-(t)|(\mathcal{X} - \bar{B})$$

tendent vers l'identité quand t tend vers zéro et sont égales quand $t < 0$; nous notons $F(t)$ l'application de $\mathcal{X} - \bar{B}$ dans \mathcal{X} égale à l'identité pour $t = 0$, à $F_+(t)|(\mathcal{X} - \bar{B})$ pour $\text{Im } t \geq 0$, à $F_-(t)|(\mathcal{X} - \bar{B})$ pour $\text{Im } t \leq 0$.

Construction de F_+ . — Notons B et \dot{B} l'intérieur et la frontière de \bar{B} ; $Q(t)$, $\bar{Q}(t)$ et $\dot{Q}(t)$ les parties de $S(t)$ appartenant respectivement à B , \bar{B} et \dot{B} :

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_l^2 = t,$$

$$|x_1|^2 + \dots + |x_l|^2 < 1, \quad \leq 1, \quad \text{et} \quad = 1.$$

Le n° 24 construit une application $F_+(t)$ (ou F_-) ayant les propriétés suivantes :

1° bis. $F_+(t)$ (F_-) est défini quand (23.4) a lieu; c'est une application de $Q(\tau)$ dans $Q(t)$;

2° bis. $F_{\pm}(\tau)$ est l'identité; $F_{\pm}(-\tau)$ transforme les points réels en points réels;

3° bis. $F_{\pm}(t)$ dépend continûment de t ;

4° bis. les restrictions $F_+(t)|\dot{B}$ et $F_-(t)|\dot{B}$ prennent leurs valeurs sur \dot{B} , tendent vers l'identité quand t tend vers zéro et sont égales quand $t < 0$.

Nous prolongeons cette application $F_+(t)$ (et F_-) de $Q(\tau)$ dans $Q(t)$, que construit le n° 24, en une application $F_+(t)$ (et F_-) de \bar{B} dans \bar{B} , définie quand (23.4) a lieu et ayant ces propriétés 2° bis, 3° bis, 4° bis; c'est aisé puisque B est une boule.

$F(t)|\dot{B}$, qui est ainsi défini, dépend continûment de t et est égal à :

$$F_+(t)|\dot{B} \quad \text{pour} \quad \text{Im}(t) \geq 0, \quad F_-(t)|\dot{B} \quad \text{pour} \quad \text{Im}(t) \leq 0,$$

l'identité pour $t \geq 0$; puisque $S(0)$ est sans singularité hors de B , il est donc aisé de prolonger $F(t)$ en une application de $S(\tau)$ dans $S(t)$ et enfin en une application de X dans X telle que F_+ , F_- et F aient les propriétés 1°, 2°, 3° et 4°.

Évidemment

$$(23.5) \quad h_{\pm}(t) = F_{\pm}(t)h(\tau)$$

est la classe d'homologie qui dépend continûment de t pour $\text{Im } t \geq 0$ (≤ 0) et qui est égale à $h(t)$ pour $t > 0$.

Par hypothèse, pour $t = \pm \tau$, $h(t)$ contient un cycle $\gamma(t)$ qui dépend continûment de t hors de B et dont la partie $\beta(t)$ contenue dans \bar{B} vérifie la condition :

$$\beta(t) \text{ ou } \partial\beta(t) \text{ est l'un des cycles : } \text{Re } Q(t), \quad \text{Im } Q(t).$$

On peut évidemment choisir $\gamma(t)$ et $F(t)$ tels que

$$(23.6) \quad \gamma(t) - \beta(t) = F(t)[\gamma(\tau) - \beta(\tau)] \quad \text{pour} \quad t = -\tau;$$

(23.5) montre alors que

$$(23.7) \quad h_{\pm}(t) - h(t) \text{ est la classe de } F_{\pm}(t)\beta(\tau) - \beta(t) \text{ pour } t = -\tau.$$

Puisque ∂ commute avec F_+ et que B n'a pas d'homologie de dimension l , la preuve de la proposition 22 se trouve ainsi ramenée à celle du

LEMME 23. — Pour $0 < \tau < \frac{1}{2}$ et pour un choix de $\text{Im } Q(\pm \tau)$ tel que le premier membre de (23.9) soit un cycle, on a sur $Q(-\tau)$:

$$(23.8) \quad F_{\pm}(-\tau) \text{Re } Q(\tau) - \text{Re } Q(-\tau) \in (\pm 1)^{l-p} e_{\pm}(-\tau);$$

$$(23.9) \quad F_{\pm}(-\tau) \text{Im } Q(\tau) - \text{Im } Q(-\tau) \in (\pm 1)^{l-p-1} e_{\pm}(-\tau).$$

$Q(t)$ est la quadrique complexe

$$Q(t) : x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_l^2 = t, \quad |x_1|^2 + \dots + |x_l|^2 < 1.$$

$e_+(t)$ et (e_-) est la classe d'homologie de $Q(t)$ variant continûment avec t pour $\text{Im } t \geq 0$ (≤ 0), $t \neq 0$ et qui, pour $t = \tau > 0$, est la classe $e(\tau)$ de $\partial \alpha(\tau)$.

NOTE. — Vu la définition (23.3) de α , la définition 11.2 de $\sqrt{\text{Hess}}$ et la règle d'orientation (2.9) de [III], on a

$$(23.10) \quad \partial \alpha(\tau) : \begin{aligned} &x_1^2 > 0, \quad \dots, \quad x_p^2 > 0, \quad x_{p+1}^2 < 0, \quad \dots, \quad x_l^2 < 0, \\ &x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_l^2 = \tau, \\ &i^{l-p} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l}{d(x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_l^2)} > 0. \end{aligned}$$

Pour prouver ce lemme 23, il nous faut effectuer

24. La construction de $F_{\pm}(t) | Q(\tau)$. — *Le groupe d'homothéties de la boule B en elle-même :*

$$H(\varphi) : (x_1, \dots, x_l) \rightarrow (x_1 e^{i\varphi/2}, \dots, x_l e^{i\varphi/2})$$

transforme $Q(\tau)$ en $Q(\tau e^{i\varphi})$; on a évidemment

$$(24.1) \quad e_{\pm}(-\tau) = H(\pm \pi) e(\tau).$$

Nous construirons $F_+(t)$ en composant avec $H(\varphi)$ une application de $Q(\tau)$ en elle-même.

L'étude de $Q(\tau)$ est facilitée par l'emploi dans B des $2l$ coordonnées réelles, non linéaires

$$(24.2) \quad \left\{ \begin{aligned} &v_j = \text{Im } x_j \quad (j = 1, \dots, p), \\ &v_j = \text{Re } x_j \quad (j = p + 1, \dots, l), \\ &u_j = \frac{\text{Re } x_j}{\sqrt{|v|^2 + \tau}} \quad (j = 1, \dots, p), \\ &u_j = -\frac{\text{Im } x_j}{\sqrt{|v|^2 + \tau}} \quad (j = p + 1, \dots, l), \end{aligned} \right.$$

on note

$$|\nu|^2 = \sum_{j=1}^l \nu_j^2, \quad |u|^2 = \sum_{j=1}^l u_j^2.$$

L'équation de $Q(\tau)$ devient

$$Q(\tau): \quad |u| = 1, \quad \sum_{j=1}^l u_j \nu_j = 0, \quad |\nu| < \sqrt{\frac{1-\tau}{2}} \quad \left(0 < \tau < \frac{1}{2}\right);$$

[ainsi $Q(t)$ est homéomorphe à l'ensemble des vecteurs tangents à la sphère de dimension $l-1$],

Sur la partie de B où $|\nu| \neq 0$, nous emploierons aussi les *coordonnées complexes non linéaires* :

$$(24.3) \quad \omega_j = |\nu| u_j + i \nu_j \quad (j=1, \dots, l).$$

Si x est fixe et $|\nu| \neq 0$,

$$(24.4) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_j = x_j \quad (j=1, \dots, p), \quad = ix_j \quad (j=p+1, \dots, l).$$

Avec ces coordonnées ω_j , les équations de $Q(t)$ et $\dot{Q}(t)$ deviennent

$$(24.5) \quad Q(\tau): \quad \sum_{j=1}^l \omega_j^2 = 0, \quad |\omega|^2 + \tau < 1;$$

$$\dot{Q}(\tau): \quad \sum_{j=1}^l \omega_j^2 = 0, \quad |\omega|^2 + \tau = 1.$$

En résumé, nous employons trois systèmes de coordonnées du point x de B :

$$(x_1, \dots, x_l); \quad (u_1, \dots, u_l, \nu_1, \dots, \nu_l); \quad (\omega_1, \dots, \omega_l).$$

Les coordonnées d'un autre point x' de B sont notées :

$$x'_j; \quad u'_j, \quad \nu'_j; \quad \omega'_j.$$

Le groupe $G(\varphi)$ de transformation de $Q(\tau)$. — Donnons-nous une fonction numérique, régulière et croissante $\theta(|\nu|)$ de $|\nu|$ telle que

$$\theta(|\nu|) = 0 \quad \text{si } |\nu| \leq 1/4; \quad \theta(|\nu|) = 1/2 \quad \text{si } 1/2 \leq |\nu|.$$

Définissons comme suit un groupe abélien, à un paramètre réel φ , de transformations $G(\varphi)$ de $Q(\tau)$ en elle-même :

si $x \in Q(\tau)$, alors $x' = G(\varphi)x$ est le point tel que

$$(24.6) \quad x' = x \quad \text{si } |\nu| \leq 1/4; \quad \omega'_j = \omega_j e^{-i\varphi\theta(|\nu|)} \quad \text{si } |\nu| \neq 0.$$

D'après (24.5), $x' \in Q(\tau)$ et $G(\varphi) \dot{Q}(\tau) = \dot{Q}(\tau)$. On a

$$(24.7) \quad |w'| = |w|, \quad \text{donc} \quad |v'| = |v|.$$

Sur $\dot{Q}(\tau)$, on a

$$2|v|^2 = |w|^2 = 1 - \tau > 1/2, \quad \text{donc} \quad \theta(|v|) = 1/2,$$

par suite

$$(24.8) \quad H(\varphi + 2\pi) G(\varphi + 2\pi) \big| \dot{Q}(\tau) = H(\varphi) G(\varphi) \big| \dot{Q}(\tau)$$

et vu (24.4),

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} G(\varphi) \big| \dot{Q}(\tau) = H(-\varphi) \big| \dot{Q}(\tau),$$

c'est-à-dire

$$(24.9) \quad H(\varphi) G(\varphi) \big| \dot{Q}(\tau) \text{ tend vers l'identité quand } \tau \text{ tend vers zéro.}$$

Définissons, sur $Q(\tau)$:

$$(24.10) \quad \begin{aligned} F_+(t) &= H(\varphi) G(\varphi) & \text{où } t &= \tau e^{i\varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ F_-(t) &= H(\varphi) G(\varphi) & \text{où } t &= \tau e^{i\varphi}, & -\pi \leq \varphi \leq 0. \end{aligned}$$

vu (24.8) et (24.9), F_{\pm} a bien les propriétés 1° bis, 2° bis, 3° bis, 4° bis.

NOTE. — D'après (24.10), on a sur $Q(\tau)$:

$$(24.11) \quad F_{\pm}(-\tau) = H(\pm\pi) G(\pm\pi).$$

25. Preuve du lemme 23. — Transformons par $H(\mp\pi)$ les relations à prouver : (23.8) et (23.9); vu (24.1) et (24.11) elles deviennent

$$\begin{aligned} G(\pm\pi) \operatorname{Re} Q(\tau) - H(\mp\pi) \operatorname{Re} Q(-\tau) &\in (\pm 1)^{l-p} e(\tau), \\ G(\pm\pi) \operatorname{Im} Q(\tau) - H(\mp\pi) \operatorname{Im} Q(-\tau) &\in (\pm 1)^{l-p-1} e(\tau). \end{aligned}$$

La rétraction R de $Q(\tau)$ sur sa partie où $|v| = 0$:

$$R: (u_j, v_j) \rightarrow (u_j, 0)$$

appartient à la famille d'applications continues, dépendant du paramètre θ ($0 \leq \theta \leq 1$) de $Q(\tau)$ en elle-même :

$$(u_j, v_j) \rightarrow (u_j, \theta v_j);$$

cette application est l'identité pour $\theta = 1$; R est donc une rétraction par déformation : elle transforme tout cycle de $Q(\tau)$ en un cycle homologue.

En appliquant R aux relations ci-dessus, on les simplifie et l'on réduit la preuve du lemme 23 à celle du

LEMME 23. — Pour $0 < \tau < \frac{1}{2}$, on a les homologies

$$(23.1) \quad RG(\pm \pi) \operatorname{Re} Q(\tau) - RH(\mp \pi) \operatorname{Re} Q(-\tau) \sim (\pm 1)^{l-p} \partial \alpha(\tau);$$

$$(23.2) \quad RG(\pm \pi) \operatorname{Im} Q(\tau) - RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau) \sim (\pm 1)^{l-p-1} \partial \alpha(\tau).$$

Vu que les chaînes $\operatorname{Im} Q(\tau)$ constituent un ensemble connexe, il suffit de prouver (23.2) pour l'une d'elles.

Nous allons établir ce lemme en calculant les quatre termes figurant aux premiers membres de (23.1) et (23.2). Commençons par le

Calcul de $RG(\pm \pi)\beta$, quand β est la chaîne de $Q(\tau)$:

$$\begin{aligned} \beta : \quad v_1 = \dots = v_q = u_{q+1} = \dots = u_l = 0, \\ |u| = 1, \quad |v| < \sqrt{\frac{1-\tau}{2}}, \\ u_1 du_2 \wedge \dots \wedge du_q \wedge dv_{q+1} \wedge \dots \wedge dv_l > 0. \end{aligned}$$

Vu (24.3), (24.7) et la définition (24.6) de G , on a

$$RG(\pm \pi) : (u_j, v_j) \rightarrow \left(u'_j = u_j \cos \pi \theta \pm v_j \frac{1}{|v|} \sin \pi \theta, v'_j = 0 \right),$$

où $\theta = \theta(|v|)$ et $\frac{1}{|v|} \sin \theta(|v|) = 0$ pour $0 \leq |v| \leq 1/4$; donc, quand $x \in \beta$, $x' = RG(\pm \pi)x$ a les coordonnées

$$\begin{aligned} u'_1 = u_1 \cos \pi \theta, \quad \dots, \quad u'_q = u_q \cos \pi \theta, \\ u'_{q+1} = \pm v_{q+1} \frac{1}{|v|} \sin \pi \theta, \quad \dots, \quad u'_l = \pm v_l \frac{1}{|v|} \sin \pi \theta, \\ v'_1 = \dots = v'_l = 0; \end{aligned}$$

d'où, par un calcul élémentaire :

$$\begin{aligned} |u'| = 1, \\ du'_2 \wedge \dots \wedge du'_l = (\pm 1)^{l-q} \pi (\cos \pi \theta)^q \frac{(\sin \pi \theta)^{l-q-1}}{|v|^{l-q-1}} \\ \times \frac{d\theta}{d|v|} du_2 \wedge \dots \wedge du_q \wedge dv_{q+1} \wedge \dots \wedge dv_l, \end{aligned}$$

$RG(\pm \pi)\beta$ est donc la sphère de $Q(\tau)$:

$$|u'| = 1, \quad |v'| = 0, \quad (\pm 1)^{l-q} u'_1 du'_2 \wedge \dots \wedge du'_l > 0.$$

Donc, vu (23.10) et (24.2) :

$$(23.3) \quad RG(\pm \pi)\beta = (\pm 1)^{l-q} \partial \alpha(\tau).$$

Calcul de $RG(\pm\pi) \operatorname{Re} Q(\tau)$. — Si $p = 0$, alors $\operatorname{Re} Q(\tau) = 0$. Si $p > 0$, alors, vu (24.2), $\operatorname{Re} Q(\tau)$ est la chaîne

$$v_1 = \dots = v_p = u_{p+1} = \dots = u_l = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| < \sqrt{\frac{1-\tau}{2}};$$

$$u_1 du_2 \wedge \dots \wedge du_p \wedge dv_{p+1} \wedge \dots \wedge dv_l > 0;$$

vu (25.3), on a donc

$$(25.4) \quad RG(\pm\pi) \operatorname{Re} Q(\tau) = (\pm 1)^{l-p} d\alpha(\tau) \quad \text{si } p \neq 0; \quad = 0 \quad \text{si } p = 0.$$

Calcul de $RG(\pm\pi) \operatorname{Im} Q(\tau)$. — Si $p \geq 1$, alors (21.3) nous permet de choisir pour $\operatorname{Im} Q(\tau)$ la chaîne de $Q(\tau)$:

$$(25.5) \quad x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_l \text{ réels, } x_p \text{ imaginaire pur,}$$

$$(-1)^p \operatorname{Im} x_p dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p-1} \wedge dx_{p+1} \wedge \dots \wedge dx_l > 0.$$

Si $p = 1$, il vient $\operatorname{Im} Q(\tau) = 0$. Si $p > 1$, (24.2) donne

$$\operatorname{Im} Q(\tau) : \quad v_1 = \dots = v_{p-1} = u_p = \dots = u_l = 0,$$

$$|u| = 1, \quad |v| < \sqrt{\frac{1-\tau}{2}};$$

$$(-1)^p v_p d(u_1 \sqrt{|v|^2 + \tau}) \wedge \dots \wedge d(u_{p-1} \sqrt{|v|^2 + \tau}) \wedge dv_{p+1} \wedge \dots \wedge dv_l > 0;$$

cette dernière relation s'écrit, vu que $|u| = 1$:

$$u_1 du_2 \wedge \dots \wedge du_{p-1} \wedge dv_p \wedge \dots \wedge dv_l > 0;$$

vu (25.3), on a donc

$$RG(\pm\pi) \operatorname{Im} Q(\tau) = (\pm 1)^{l-p-1} d\alpha(\tau) \quad \text{si } p > 1.$$

Si $p = 0$, (21.3) permet de choisir pour $\operatorname{Im} Q(\tau)$ la chaîne

$$(25.6) \quad x_2, \dots, x_l \text{ réels, } x_1 \text{ imaginaire pur,}$$

c'est-à-dire, vu (24.2) :

$$\operatorname{Im} Q(\tau) : \quad v_1 = u_2 = \dots = u_l = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| < \sqrt{\frac{1-\tau}{2}};$$

$$u_1 dv_2 \wedge \dots \wedge dv_l > 0;$$

vu (25.3), on a donc

$$RG(\pm\pi) \operatorname{Im} Q(\tau) = (\pm 1)^{l-1} d\alpha(\tau) \quad \text{si } p = 0.$$

En résumé :

$$(25.7) \quad RG(\pm\pi) \operatorname{Im} Q(\tau) = (\pm 1)^{l-p-1} d\alpha(\tau) \quad \text{si } p \neq 1; \quad = 0 \quad \text{si } p = 1.$$

Calcul de $RH(\mp\pi) \operatorname{Re} Q(-\tau)$. — Supposons $p > 0$; sur

$$H(\mp\pi) \operatorname{Re} Q(-\tau)$$

x_1, \dots, x_l sont imaginaires purs, donc, vu (24.2) :

$$u_1 = \dots = u_p = v_{p+1} = \dots = v_l = 0;$$

donc $RH(\mp \pi) \operatorname{Re} Q(-\tau)$ appartient à la sphère

$$u_1 = \dots = u_p = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| = 0,$$

dont la dimension est $< l-1$; la chaîne $RH(\mp \pi) \operatorname{Re} Q(-\tau)$ est donc nulle.

Supposons $p = 0$; $\operatorname{Re} Q(-\tau)$ est la sphère :

$$x_1, \dots, x_l \text{ réels, } x_1^2 + \dots + x_l^2 = \tau, \quad \frac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_l}{x_1} < 0;$$

$H(\mp \pi) \operatorname{Re} Q(-\tau)$ est donc la sphère :

$$x'_1, \dots, x'_l \text{ imaginaires purs, } |x'_1|^2 + \dots + |x'_l|^2 = \tau, \\ (\pm i)^{l-2} \frac{dx'_2 \wedge \dots \wedge dx'_l}{x'_1} < 0;$$

c'est-à-dire, vu (23.10) : $-(\pm 1)' d\alpha(\tau)$.

En résumé :

$$(25.8) \quad RH(\mp \pi) \operatorname{Re} Q(-\tau) = 0 \quad \text{si } p \neq 0; \quad = -(\pm 1)' d\alpha(\tau) \quad \text{si } p = 0,$$

Calcul de $RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$. — Rappelons que le choix de $\operatorname{Im} Q(-\tau)$ est assujéti à la condition qu'énonce le lemme 23 :

$$G(\pm \pi) \operatorname{Im} Q(\tau) - H(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau) \quad \text{est un cycle.}$$

Elle est satisfaite par les choix suivants de $\operatorname{Im} Q(-\tau)$: (23.5) si $p \geq 1$; (23.6) si $p = 0$.

Supposons $p > 1$; sur $H(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$, on a donc

$$x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_l \text{ imaginaires purs; } x_p \text{ réel;}$$

donc, vu (24.2), $RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$ appartient à la sphère :

$$u_1 = \dots = u_{p-1} = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| = 0,$$

dont la dimension est $< l-1$; la chaîne $RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$ est donc nulle.

Supposons $p = 0$; sur $H(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$, on a

$$x_1 \text{ réel, } x_2, \dots, x_l \text{ imaginaires purs;}$$

donc, vu (24.2), $RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$ appartient à la sphère

$$u_1 = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| = 0$$

dont la dimension est $< l-1$; la chaîne $RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$ est donc nulle.

Supposons $p=1$; $\operatorname{Im} Q(-\tau)$ est la sphère :

$$x_1 \text{ imaginaire pur, } x_2, \dots, x_l \text{ réels, } |x_1|^2 + \dots + |x_l|^2 = \tau, \\ i \frac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_l}{x_1} < 0;$$

$H(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau)$ est donc la sphère :

$$x'_1 \text{ réel, } x'_2, \dots, x'_l \text{ imaginaires purs, } |x'_1|^2 + \dots + |x'_l|^2 = \tau, \\ (\pm 1)^l i^{l-1} \frac{dx'_2 \wedge \dots \wedge dx'_l}{x'_1} < 0,$$

c'est-à-dire, vu (23.10) : $-(\pm 1)^l \partial \alpha(\tau)$.

En résumé :

$$(23.9) \quad RH(\mp \pi) \operatorname{Im} Q(-\tau) = 0 \quad \text{si } p \neq 1; \quad = -(\pm 1)^l \partial \alpha(\tau) \quad \text{si } p = 1.$$

Fin des preuves des lemmes 23 et 23 et de la proposition 22. — Les relations (23.4) et (23.8) prouvent (23.1). Les relations (23.7) et (23.9) prouvent (23.2). Voici donc prouvé le lemme 23; les nos 24 et 25 ont montré qu'il entraîne le lemme 23; le n° 23 a montré que ce lemme 23 entraîne la proposition 22. Voici donc prouvée la proposition 22.

26. Preuve de la proposition 20. — Nous employons les nos 11, 12 et 63 de [III]. Dans [III] e , $n(t)$ et la discontinuité de $N(t)$ sont définis au produit près par un même facteur ± 1 . Les nos 22 et 23 viennent de choisir e , donc ce facteur ± 1 ; avec ce choix, dans la formule (11.7) de [III], \pm vaut $+$, pour $k > 0$, $\sqrt{k} > 0$: cela résulte évidemment de (22.1), (22.2) et de la formule (11.5) de [III], qui définit j_p ; donc

$$(26.1) \quad j_p(t) = H_p(t) \frac{k(t, y)^{(l/2)+p-q}}{\Gamma(1 + (l/2) + p - q)},$$

$H_p(t)$ étant holomorphe en 0; pour ρ et t réels, ses valeurs sont réelles si $\operatorname{Hess}_{x,s} > 0$, imaginaires pures si $\operatorname{Hess}_{x,s} < 0$;

$$(26.2) \quad H_p(t) = \frac{(2\pi)^{l/2}}{P(k)} \frac{\rho(x, y)}{\sqrt{\operatorname{Hess}_{x,s}(x, y, t)}} \Big|_{x=z(t)} \quad \text{pour } t \in K.$$

Supposons l impair. — Près de $z(0)$, $h(t)$ ou $\partial h(t)$ est la classe d'homologie de $\operatorname{Re} S(t)$ (de $\operatorname{Im} S$); choisissons s tel que $\operatorname{Hess}_{x,s} > 0$ (< 0); d'après la proposition 22, on a, pour t réel et $k(t, y) < 0$:

$$h_+(t) - e_+(t) = h_-(t) - e_-(t) = h(t);$$

cela signifie qu'il existe une classe d'homologie invariante au sens de Lefschetz — c'est-à-dire : dépendant continûment de t complexe, voisin de 0; voir le n° 63 de [III] — égale à

$$h(t) - e(t) \quad \text{pour } k > 0, \quad h(t) \quad \text{pour } k < 0.$$

Donc, vu le théorème de Picard-Lefschetz, que rappelle le n° 63 de [III], $n(t)$ a pour $k > 0$ la même valeur que quand $h = e$ et est nul pour $k < 0$:

$$(26.3) \quad n(t) = -2 \quad \text{pour } k > 0; \quad n(t) = 0 \quad \text{pour } k < 0.$$

Or, vu le n° 12 de [III], si $q - \frac{l+1}{2} \leq p$,

$$J(t) = -P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{1}{2} n(t) j_p(t) \right\} + H_0(t)$$

H_0 étant holomorphe au point 0; d'où, vu (26.1) et (26.3),

$$J(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ H_p(t) \chi_{(l/2)+p-q}[k(t, y)] \right\} + H_0(t);$$

d'où, vu (11.2) et (11.3),

$$(26.4) \quad J(t) = H_1(t) \chi_{(l/2)-q}[k(t, y)] + H_3(t),$$

$H_1(t)$ et $H_3(t)$ étant holomorphes au point 0, H_1 étant à valeurs réelles (ou imaginaires pures) pour t et ρ réels; vu (11.2), (11.3) et (26.2), H_1 vérifie (20.4) sur K . D'où la proposition 20 en supposant ρ réel (imaginaire pur).

Supposons que l est pair, que $h(t)$ ou $\partial h(t)$ est la classe d'homologie de $\text{Re } S(t)$ (de $\text{Im } S$) et que $\text{Hess}_{x,s} > 0$ (< 0). — D'après la proposition 22, on a, pour t réel et $k < 0$:

$$(26.5) \quad h_+(t) - e_+(t) = h_-(t) - e_-(t) = h(t);$$

cela signifie qu'il existe une classe d'homologie invariante égale à

$$h(t) - e(t) \quad \text{pour } k > 0, \quad h(t) \quad \text{pour } k < 0;$$

donc

$$(26.6) \quad n = 0;$$

rappelons que $e(t)$ est invariant; notons

$$e(t) = e_+(t) = e_-(t) \quad \text{pour } t \text{ réel}, \quad k < 0;$$

(26.5) donne

$$h_+(t) + h_-(t) = 2h(t) + 2e(t) \quad \text{pour } k < 0;$$

la classe d'homologie égale à

$$h(t) \text{ pour } k > 0, \quad h(t) + e(t) \text{ pour } k < 0$$

est donc régulièrement continue au sens du n° 75 de [III] : dans le n° 12 de [III] on peut choisir

$$(26.7) \quad N(t) = -\operatorname{sgn} k.$$

Donc, vu ce n° 12 de [III], si $q - (l/2) \leq p$,

$$J(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{1}{2} j_p(t) \operatorname{sgn} k \right\} + H_0(t),$$

H_0 étant holomorphe au point 0; d'où, vu (26.1),

$$J(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \{ H_p(t) \operatorname{Re} \chi_{(l/2)+p-q}[k(t, y)] \} + H_0(t);$$

d'où, vu (11.2) et (11.3),

$$(26.8) \quad J(t) = H_1(t) \operatorname{Re} \chi_{(l/2)-q}[k(t, y)] + H_2(t) \operatorname{Re} \chi_0[k] + H_3(t),$$

$H_1(t)$, H_2 , H_3 étant holomorphes au point 0; pour t et ρ réels, H_1 et H_2 sont réels (imaginaires purs); $H_2 = 0$ si $q \leq l/2$; vu (11.2), (11.3) et (26.2), H_1 vérifie (20.4) sur K . D'où la proposition 20, en supposant ρ réel (imaginaire pur).

Supposons que l est pair, que $h(t)$ ou $dh(t)$ est la classe d'homologie de $\operatorname{Re} S(t)$ (de $\operatorname{Im} S$) et que $\operatorname{Hess}_{x,s} < 0 (> 0)$. — D'après la proposition 22, on a pour t réel et $k < 0$:

$$(26.9) \quad h_+(t) - e_+(t) = h_-(t) + e_-(t) = h(t);$$

d'où

$$h_+(t) + h_-(t) = 2h(t);$$

la classe d'homologie $h(t)$ est donc régulièrement continue au sens du n° 75 de [III] : dans le n° 12 de [III] on peut choisir

$$(26.10) \quad N(t) = 0.$$

Rappelons que $e(t)$ est invariant; notons

$$e(t) = e_+(t) = e_-(t) \text{ pour } t \text{ réel, } k < 0;$$

(26.9) s'écrit

$$h_-(t) = h(t) - e(t), \quad h_+(t) = h(t) + e(t)$$

et prouve donc que $h(t)$ croît de $2e(t)$ quand t fait un tour dans le sens positif autour de K : vu le théorème de Picard-Lefschetz,

$$(26.11) \quad n = 2.$$

D'où, vu le n° 12 de [III], si $q - (l/2) \leq p$,

$$J(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{1}{\pi i} j_p(t) \log |k(t, y)| \right\} + H(t),$$

H étant holomorphe au point 0; d'où, vu (26.1),

$$J(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \{ H_p(t) i \operatorname{Im} \chi_{(l/2)+p-q}[k(t, y)] \} + H_0(t),$$

$H_0(t)$ étant holomorphe au point 0; d'où, vu (11.2) et (11.3),

$$J(t) = H_1(t) i \operatorname{Im} \chi_{(l/2)-q}[k(t, y)] + H_2(t) i \operatorname{Im} \chi_0[k] + H_3(t),$$

$H_1(t)$, H_2 , H_3 étant holomorphes au point 0; pour t et ρ réels, H_1 et H_2 sont imaginaires pures (réelles); $H_2 = 0$ si $q \leq l/2$; vu (11.2), (11.3) et (26.2), H_1 vérifie (20.4) sur K . D'où la proposition 20, en supposant ρ réel (imaginaire pur).

La preuve de la proposition 20 est achevée.

CHAPITRE 3. — Projection polynomiale.

Le chapitre 2 vient de préciser les propriétés de la fonction ou distribution.

$$J(t) = \int_{h(x, S \cup S')} \frac{[-s]^{-q}}{(-q)!} \omega \quad (q \leq 0) \quad = \int_{h(s, S')} \frac{d^{q-1} \omega}{ds^q} \quad (q > 0)$$

qu'énoncent les n°s 11 et 12 de [III]; le support K des singularités de $J(t)$ est une variété analytique sans singularité, sous les hypothèses employées jusqu'ici. Pour que K soit un conoïde $K(y)$ de sommet y [et que $J(t)$ puisse donc être une solution élémentaire], nous élargissons ces hypothèses comme suit : $S(y)$ se décompose,

$$S(y) = S_1 \cup S_2,$$

S_1 et S_2 étant deux sous-variétés de \mathcal{X} en position générale, S_1 étant identique à S' et étant compact.

Nous nous limitons au cas le plus simple : S_1 est un espace projectif complexe, que $S(t)$ coupe suivant des hyperplans; \mathcal{X} est un voisinage de S_1 dans un espace fibré ayant pour fibre la droite complexe et pour section S_1 .

La théorie des espaces fibrés analytiques montre que (\mathcal{X}, S_1) est alors identique (1) à $(\tilde{\Psi}, \gamma^*)$, défini n°s 3 et 4, si l'on choisit convenablement l'entier m (n° 3) et ce voisinage \mathcal{X} ; les notations de [III] :

$$\mathcal{X}, \quad S(t), \quad S', \quad T, \quad K, \quad x, \quad t, \quad s(x, t), \quad J$$

sont désormais remplacées par les notations des nos 1, 3 et 4 :

$$\tilde{\Psi}, \quad \tilde{x}, \quad y^*, \quad X, \quad K(y), \quad \tilde{\varphi}, \quad x, \quad \xi(t, \eta, y), \quad \mathcal{L},$$

$\tilde{\varphi}$ étant abusivement noté (t, η) .

Ce chapitre 3 se limite au cas où $\xi(t, \eta, y)$ est la projection polynomiale (4.10); il prouve dans ce cas (n° 27) les affirmations du n° 4; puis il justifie le n° 7.

27. Le conoïde $K(y)$. — La sous-variété de $\tilde{\Phi}$,

$$\tilde{x} : t g(\eta) = \eta \cdot x, \quad \text{où} \quad \eta \cdot x = \eta_1(x_1 - y_1) + \dots + \eta_l(x_l - y_l)$$

se décompose, pour $x = y$, en les deux sous-variétés :

$$y^* : t = 0; \quad \tilde{y} - y^* : g(\eta) = 0$$

qui sont en position générale et sans singularité réelle; pour $x \neq y$ les points singuliers de \tilde{x} sont donnés par les équations

$$(27.1) \quad x_j - y_j = t g_{\eta_j}(\eta), \quad g(\eta) = 0$$

qui impliquent $\eta \cdot x = 0$ puisque g est homogène. Donc :

vu (4.3) : pour que \tilde{x} ait un point singulier réel, il faut et il suffit que $x \in C(y)$:

$$K(y) = C(y);$$

vu (4.4) : ce point singulier réel, quand il existe, est unique et est point double quadratique;

tout point singulier (t, η) de \tilde{x} , à base η^* réelle, est réel.

(1) H. GRAUERT m'apprend qu'il peut caractériser $(\tilde{\Psi}, y^*)$ en termes plus généraux, quand est vérifiée notre hypothèse $m > 1$. Soit S_1 une sous-variété analytique, compacte, de codimension 1 d'une variété analytique X ; H. GRAUERT la dit *exceptionnelle* quand remplace S_1 par un point et conserver la structure analytique de $X - S_1$ transforme X en un *espace analytique*.

Il est aisé de voir que y^* est exceptionnel dans $\tilde{\Psi}$ quand $m > 1$: l'application holomorphe

$$\tilde{\varphi} = (t, \eta) \rightarrow (t\eta_1^{m-1}, \dots, t\eta_1^{\lambda_1} \dots \eta_l^{\lambda_l}, \dots) \quad (\lambda_i \geq 0; \lambda_1 + \dots + \lambda_l = m - 1)$$

applique $\tilde{\Psi}$ biunivoquement sur une *sous-ensemble* analytique A d'un espace vectoriel complexe \mathbf{C}^L (sur la boule de centre 0 de rayon c de \mathbf{C}^l si $m = 2$), y^* sur l'origine 0 de \mathbf{C}^L et $\tilde{\Psi} - y^*$ biholomorphiquement sur $A - 0$.

D'après H. GRAUERT, son article [13] permet de prouver la réciproque : si la sous-variété *exceptionnelle* S_1 de X est un *espace projectif complexe*, alors, près de S_1 , X est un espace fibré, ayant pour fibre la droite complexe et pour section S_1 , cet espace fibré étant négatif au sens de Kodaira; autrement dit :

$$(X, S_1) = (\tilde{\Psi}, y^*) \quad \text{près de } S_1; \quad m > 1.$$

28. La définition de $h(\tilde{x}, y^*)$ quand l est impair est énoncée par le n° 7, qui affirme que l'orientation de $\text{Re } \tilde{x}$:

$$\frac{\varpi(t, \eta)}{t |\eta|^{l-1} d\xi_x \cdot x} \Big|_{\xi_x=0} > 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{(1-m)t d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l - dt \wedge \omega'(\eta)}{t |\eta|^{l-1} d(\eta_x - tg)} \Big|_{tg=\eta_x} > 0$$

n'a pas de discontinuité à l'infini. Pour le prouver, il suffit de poser

$$u = \frac{1}{t}$$

et d'employer à l'infini les coordonnées locales $(u, \eta_1, \dots, \eta_l)$, l'un des η_j valant 1 : l'équation de \tilde{x} et la définition de l'orientation de $\text{Re } \tilde{x}$ deviennent

$$g(\eta) = u\eta_x, \quad \frac{(1-m)u d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l + du \wedge \omega'(\eta)}{|\eta|^{l-1} d(u\eta_x - g)} \Big|_{g=u\eta_x} > 0,$$

cette orientation est définie même quand $u = 0$.

Pour finir de justifier la définition de $h(\tilde{x}, y^*)$ quand l est impair, il suffit donc de définir le détournement d'un cycle.

29. Le détournement d'un cycle. — Soit X une variété analytique complexe, de dimension l ; dans X , soit S et S' deux sous-variétés analytiques complexes, de codimension 1, en position générale; nous supposons définis les points et coordonnées réels de X ; nous supposons S et S' à équations réelles.

DÉFINITION 29. — Soit α un cycle de $(\text{Re } X, S')$; par exemple $\text{Re } X$ supposé compact, muni d'une orientation qui peut changer le long de S' . Il existe des cycles β de $(X - S, S')$ ayant les propriétés suivantes :

- 1° $2\alpha - \beta$ est au voisinage de $\text{Re } S$;
 (29.1) $2\alpha - \beta \sim 0$ au voisinage de $\text{Re } S$, rel S' ;
 2° β est identique à son imaginaire conjugué.

Tous ces cycles β appartiennent à une même classe d'homologie $h(X - S, S')$ qu'on nomme *classe de 2α détourné de S* .

Cette définition exige une justification que voici :

Cas $l=1$. — Depuis CAUCHY cette définition est classique; on la justifie par la figure ci-contre; on l'emploie à définir la partie principale P. P. de

l'intégrale $\int_{\alpha} \omega(x)$, quand $\omega(x)$ est une forme de degré 1, holomorphe sur $\mathcal{X} - S$ et α un segment de $\text{Re } \mathcal{X}$:

$$\text{P. P. } \int_{\alpha} \omega(x) = \frac{1}{2} \int_{h(\mathcal{X}-S, S')} \omega(x).$$

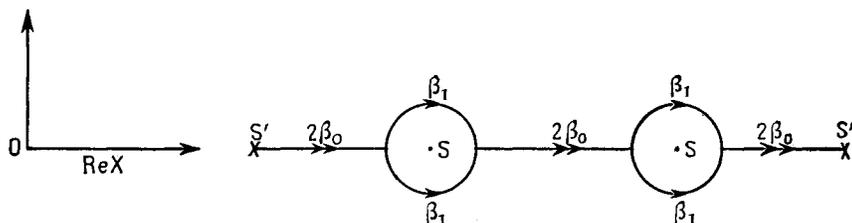


Fig. 1. — Un segment de $\text{Re } \mathcal{X}$ détourné de S ($\dim \mathcal{X} = 1$).

Si maintenant $l > 1$, voici ce que devient le tracé de cette figure :

Construction de cycles β ayant les propriétés 1° et 2°. — Par chaque point de $\text{Re } \mathcal{X}$, voisin de S , on trace un couple de vecteurs réels, opposés $\pm V(x)$ ayant les propriétés suivantes :

ce couple varie continûment avec x ;

$s_x \cdot V(x) \neq 0$; $V(x)$ est tangent à S' quand $x \in S'$.

Par exemple, on choisit $V(x)$ parallèle à s_x , après avoir muni \mathcal{X} d'une structure riemannienne qui identifie vecteurs et covecteurs et pour laquelle S et S' sont orthogonaux. Par chaque point x de $\text{Re } \mathcal{X}$ on trace un couple d'arcs d'origine x ayant les propriétés suivantes :

ce couple varie continûment avec x ;

ces arcs sont nuls si x n'est pas près de S ;

sinon ces arcs sont tangents en x à $\pm iV(x)$ et suffisamment petits pour vérifier, sauf en leur origine x :

$$\text{Im } s \neq 0, \quad \text{donc } s \neq 0;$$

ces arcs sont sur S' quand $x \in S'$.

A tout point x associons le couple de points que constituent les extrémités de ces arcs; quand x décrit un cycle α de $(\text{Re } \mathcal{X}, S')$, alors ce couple de points décrit un cycle de $(\mathcal{X} - S, S')$ ayant les propriétés 1° et 2°.

Preuve que tous les cycles β , ayant les propriétés 1° et 2°, appartiennent à une même classe d'homologie $h(\mathcal{X} - S, S')$. — La différence γ de deux tels cycles a les propriétés suivantes :

1° bis. γ est un cycle de $(\mathcal{X} - S, S')$ voisin de $\text{Re } S$;

$\gamma \sim 0$ dans (\mathcal{X}, S') , plus précisément au voisinage de $\text{Re } S$;

2° *bis*. γ est identique à son imaginaire conjugué.

Soit $h(\mathcal{X} - S, S')$ la classe d'homologie de γ ; il s'agit de prouver que

$$(29.2) \quad h(\mathcal{X} - S, S') = 0.$$

Vu 1° *bis* et la définition du cobord δ (voir [III]) :

$$h(\mathcal{X} - S, S') = \delta h(S, S'),$$

où $h(S, S')$ est la classe d'homologie d'un cycle de (S, S') voisin de $\text{Re } S$. Or il existe évidemment une rétraction par déformation, sur $\text{Re } S$ et $\text{Re } S \cap S'$, des parties de S et $S \cap S'$ voisines de $\text{Re } S$; $h(S, S')$ est donc la classe d'homologie d'un cycle de $(\text{Re } S, S')$. Vu la définition de δ , la transformation de chaque point de \mathcal{X} en son imaginaire conjugué transforme donc $h(\mathcal{X} - S, S')$ en son opposé; mais, vu 2° *bis*, elle laisse $h(\mathcal{X} - S, S')$ invariante; d'où (29.2).

Voici une propriété de la classe $h(\mathcal{X} - S, S')$ de 2α détourné de S ; le n° 35 l'emploiera à prouver la proposition 9 :

LEMME 29. — 1° Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(29.3) \quad \alpha \sim 0 \quad \text{dans } (\mathcal{X}, S');$$

$$(29.4) \quad h(\mathcal{X} - S, S') \in \delta H_c(S, S').$$

2° Si 2α est dans (\mathcal{X}, S') le bord d'une chaîne dont l'intersection par S est réelle, alors

$$h(\mathcal{X} - S, S') = 0.$$

PREUVE DE 1°. — D'après (29.1), on a

$$2\alpha \sim \beta \quad \text{dans } (\mathcal{X}, S');$$

la condition (29.3) équivaut donc à

$$\beta \sim 0 \quad \text{dans } (\mathcal{X}, S').$$

Or, d'après la définition du cobord (n° 3 de [III]), cette dernière condition est nécessaire et suffisante pour que la classe $h(\mathcal{X} - S, S')$ de β soit un cobord : elle équivaut à (29.4).

PREUVE DE 2°. — Par hypothèse on a

$$2\alpha = \partial\gamma + \gamma', \quad \gamma' \subset S',$$

l'intersection de γ et de S étant réelle; celle de γ' et de S l'est donc aussi (il s'agit d'intersection au sens de la théorie des ensembles). Supposons γ et γ' identiques à leurs imaginaires conjuguées (on satisfait cette condition en leur ajoutant leurs imaginaires conjuguées et en multipliant α par 2).

Décomposons γ et γ' comme suit :

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1, \quad \gamma' = \gamma'_0 + \gamma'_1;$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma'_0, \gamma'_1$ sont identiques à leurs imaginaires conjuguées; γ_0 et $\gamma'_0 \subset \mathcal{X} - S$; γ_1 et γ'_1 sont au voisinage de $\text{Re } S$. Le cycle de $(\mathcal{X} - S, S')$

$$\beta = \partial\gamma_0 + \gamma'_0$$

vérifie d'une part :

$$\beta \sim 0 \quad \text{dans } (\mathcal{X} - S, S')$$

d'autre part :

$$2\alpha - \beta = \partial\gamma_1 + \gamma'_1,$$

donc les conditions 1° et 2° de la définition 29; d'où

$$h(\mathcal{X} - S, S') = 0.$$

30. Une propriété des chaînes β_1 . — Le chapitre 4 emploiera le

LEMME 30. — Toutes les chaînes β_1 (n° 7) correspondant à la même valeur de c sont homologues entre elles sur \tilde{x}_c .

PREUVE QUAND l EST IMPAIR. — De (7.3) résulte

$$c|x - y| \cdot |g| = |\eta|^{m-1} |\eta \cdot x|$$

donc, par l'inégalité de Schwarz :

$$(30.1) \quad c|g| \leq |\eta|^m \quad \text{sur } \tilde{x}_c.$$

\tilde{x}_c appartient donc à un voisinage V de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ dans \tilde{x} , qui est petit quand c est grand; en prenant dans (29.2),

$$\mathcal{X} = V, \quad S = \tilde{g}(\infty), \quad S' \text{ vide}$$

on voit que deux quelconques des chaînes β_1 sont homologues dans $V - \tilde{g}(\infty)$; or on peut choisir V fibré, la fibre étant un disque de centre $\in \tilde{g}(\infty)$, la base étant un voisinage de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ dans $\tilde{g}(\infty)$; rétractons par déformation $V - \tilde{g}(\infty)$ sur \tilde{x}_c , en rétractant chaque fibre sur la circonférence $|t| \cdot |\eta|^{m-1} = c$: nous constatons que nos deux chaînes β_1 sont homologues sur \tilde{x}_c , puisqu'elles le sont dans $V - \tilde{g}(\infty)$.

31. La définition de $h(\tilde{x})$ quand $l = 2$. — Explicitons les notes 7.2 et 8.2: pour $l = 2$, $C(y)$ se décompose en droites C_i :

$$C(y) = \bigcup_i C_i;$$

chacune de ces droites C_i a pour équation

$$\eta \cdot x = 0, \quad \text{où } g(\eta) = 0, \quad \eta \text{ réel;}$$

($i = 1, \dots, m$ quand g est hyperbolique).

Ces droites correspondent donc aux points (∞, η^*) en lesquels se décompose $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$; donnons à ces points leur orientation naturelle et notons leurs classes d'homologie $h_i(\tilde{g}(\infty))$; le cobord

$$\delta : H_c(\tilde{g}(\infty)) \rightarrow H_c(\tilde{x})$$

les transforme en

$$h_i(\tilde{x}) = \delta h_i(\tilde{g}(\infty)).$$

La définition de $h(\tilde{x})$ est

$$h(\tilde{x}) = \sum_i \pm h_i(\tilde{x}),$$

le signe \pm qui précède h_i étant celui qu'a, au point de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ correspondant à C_i , la fonction

$$(31.1) \quad \frac{g_1(\eta) \omega'(\eta)}{\eta \cdot x dg(\eta)} = \frac{g_1(\eta) \eta_1}{\eta \cdot x g_{\eta_2}} = - \frac{g_1(\eta) \eta_2}{\eta \cdot x g_{\eta_1}}$$

[on a $g(\eta) = 0, \eta_1 g_{\eta_1} + \eta_2 g_{\eta_2} = 0$];

ce signe change donc quand x traverse C_i ; $h(\tilde{x})$ varie continûment, car

$$(31.2) \quad h_i(\tilde{x}) = 0 \quad \text{pour } x \in C_i.$$

PREUVE DE (31.2). — Si $x \in C_i$, alors $\eta \cdot x$ est l'un des facteurs dont $g(\eta)$ est le produit; \tilde{x} se décompose donc en une courbe et en la droite $\eta \cdot x = 0$ de $\tilde{\Phi}$; $h_i(\tilde{x})$ est le cobord du point à l'infini de cette droite et est donc nul.

32. La définition de $h(\tilde{x}, y^*)$ quand l est pair > 2 et $x \notin C(y)$. — Le n° 7 définit $h(\tilde{x}, y^*)$ et affirme que cette classe d'homologie contient un cycle $\beta = 2\beta_0 + \beta_1$ ayant les propriétés énoncées n° 7; prouvons-le.

Par les points (∞, η^*) de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ ($g = 0, \eta$ réel) traçons sur \tilde{x} des arcs analytiques $\lambda(\eta, x)$, dépendant continûment de η^* et x , deux à deux disjoints, non tangents à $\tilde{g}(\infty)$ et appartenant à $\tilde{g}(x)$ ($g = \eta \cdot x = 0$) quand $(\infty, \eta^*) \in \tilde{g}(\infty, x)$. On peut par exemple choisir pour direction de $\lambda(\eta, x)$ en (∞, η^*) la direction

$$d\eta = \frac{\eta \cdot x}{|g_{\eta}|^2} g_{\eta} du \quad \left(u = \frac{1}{t} = 0 \right).$$

Ces arcs analytiques sont définis pour t voisin de ∞ , plus précisément pour

$$(32.1) \quad |t| \cdot |\eta|^{m-1} \geq c |x - y|,$$

c étant une constante > 0 , ne dépendant que de g . Leur réunion γ est fibrée : la fibre est l'arc analytique $\lambda(\eta, x)$, qui est un disque et a une orientation naturelle; la base est $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$; nous lui donnons l'orientation

$$(7.5) \quad \frac{g_1(\eta) \omega'(\eta)}{|\eta|^{l-2} (\eta \cdot x) dg(\eta)} > 0.$$

γ , ainsi orienté, est une chaîne de $\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty)$; son intersection par $\tilde{\omega}$ est $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$, muni de l'orientation (7.5); son bord est

$$\partial\gamma = \beta_1 + 2\beta_2,$$

β_1 appartenant à \tilde{x}_c ,

β_2 étant la réunion des arcs $\lambda(\eta, x)$ issus de $\text{Re } \tilde{g}(\infty, x)$.

β_2 est sur $\tilde{g}(x)$; donc vu le n° 3 de [III], qui définit δ :

$$\beta_1 \in h(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x) = \delta h(\tilde{g}(x), \tilde{g}(\infty, x)).$$

L'orientation de β_2 s'obtient en orientant $\text{Re } \tilde{g}(\infty, x)$ de sorte que

$$\partial \text{Re } \tilde{g}(\infty) = 2 \text{Re } \tilde{g}(\infty, x)$$

vu la formule (2.9) de [III] :

$$\frac{g_1(\eta) \omega'(\eta)}{|\eta|^{l-2} d(\eta, x) \wedge dg(\eta)} > 0 \quad \text{sur } \text{Re } \tilde{g}(\infty, x);$$

β_2 est donc la partie de $\tilde{\Phi}$ où

$$(32.2) \quad \eta \cdot x = g(\eta) = 0, \quad \eta \text{ réel}, \quad |t| \cdot |\eta|^{m-1} \geq c|x - y|$$

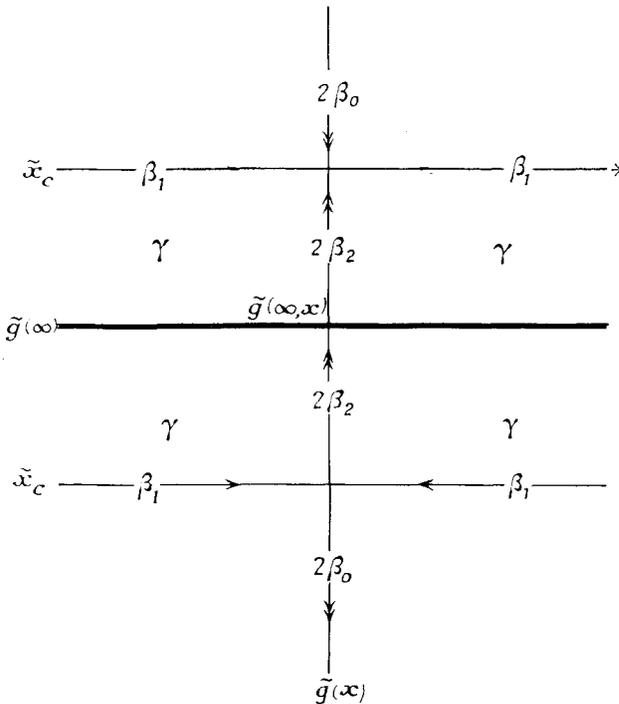


Figure 2. — La partie de \tilde{x} voisine de l'infini.

munie de l'orientation (on suppose l'une des coordonnées η_j identique à 1) :

$$(32.3) \quad i dt \wedge d\bar{t} \wedge \frac{g_1(\eta) \omega'(\eta)}{d(\eta \cdot x) \wedge dg(\eta)} > 0.$$

Vu la note 7.1, β_2 est donc la partie du cycle $-\text{Im } \tilde{x}$ où

$$|t| \cdot |\eta|^{m-1} \geq c|x - y|.$$

Par suite $\beta_0 = \beta_2 + \text{Im } \tilde{x}$ est une chaîne de $\tilde{g}(x)$. Puisque $\beta_1 + 2\beta_2 = \partial\gamma$ et $\text{Im } \tilde{x}$ sont des cycles, $\beta = 2\beta_0 + \beta_1$ est un cycle de \tilde{x} . Puisque $\beta_0 \subset \tilde{g}(x)$ et que

$$\beta_1 \in h(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x)),$$

ce cycle β de \tilde{x} appartient à cette classe $h(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x))$, que le n° 7 a identifiée à $h(\tilde{x}, y^*)$:

$$\beta \in h(\tilde{x}, y^*).$$

Ainsi les propriétés qu'énonce le n° 7 sont vérifiées : $\beta = 2\beta_0 + \beta_1$ est un cycle de \tilde{x} ; $\beta \in h(\tilde{x}, y^*)$; β_1 est une chaîne de \tilde{x}_c , que définit (7.3); β_0 est la partie de $\text{Im } \tilde{x}$ où $|t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c$; c est une constante suffisamment grande, ne dépendant que de g .

Le lemme 30 vaut aussi pour l pair : la différence de deux des chaînes β_1 construites ci-dessus pour une même valeur de c est un cycle de \tilde{x} , évidemment ~ 0 dans $(V - \tilde{g}(\infty), \tilde{g}(x))$, V étant un voisinage de $\text{Re } \tilde{g}(\infty)$ dans \tilde{x} ; donc, vu la définition de ces chaînes et du cobord ∂ , ce cycle est ~ 0 dans $V - \tilde{g}(\infty)$; la preuve s'achève comme au n° 30.

33. Continuité de $h(\tilde{x}, y^*)$. — La proposition 8.1 résulte immédiatement de la définition de $h(\tilde{x}, y^*)$ et du

LEMME 33. — Près de chaque point de $\mathcal{X} - y$, $h(\tilde{x}, y^*)$ est la classe d'homologie de cycles $\tilde{\beta} = 2\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1$ de \tilde{x} , $\tilde{\beta}_1$ étant une chaîne de \tilde{x}_c variant continûment avec x , $\tilde{\beta}_0$ étant l'intersection du domaine Δ de $\tilde{\Psi}$:

$$\Delta : |t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c|x - y|$$

par le cycle $\text{Re } \tilde{x}$, si l est impair, par un cycle $\text{Im } \tilde{x}$, si l est pair. Deux quelconques de ces chaînes $\tilde{\beta}_1$, correspondant à une même valeur de c et à un même choix de $\text{Im } \tilde{x}$, c'est-à-dire de \tilde{B} , sont homologues entre elles sur \tilde{x}_c . Ajouter $\partial\tilde{\Gamma}$ à \tilde{B} augmente $\tilde{\beta}_0$ de $\tilde{x} \cdot \partial\tilde{\Gamma} \cdot \Delta$ et $\tilde{\beta}_1$ de $2\tilde{x} \cdot \tilde{\Gamma} \cdot \partial\Delta$.

PREUVE. — Ce lemme résulte immédiatement de la définition de $h(\tilde{x}, y^*)$ et du lemme 30 quand l est impair : il suffit de choisir $\tilde{\beta}_0 = \beta_0$, $\tilde{\beta}_1 = \beta_1$; et il résulte du n° 32 quand l est pair et que x varie au voisinage d'un point $\notin C(y)$: il suffit encore de choisir $\tilde{\beta}_0 = \beta_0$, $\tilde{\beta}_1 = \beta_1$.

Supposons donc l pair et x voisin d'un point $o \in C(y) - y$. Nous ne pou

vons plus choisir $\tilde{\beta}_0 = \beta_0, \tilde{\beta}_1 = \beta_1$. En effet, quand x est en o , les sous-variétés de y^* :

$$\tilde{x} \cap y^* : \quad \eta \cdot x = 0; \quad g^* : \quad g(\eta) = 0$$

se touchent en un point réel $\eta^*(o)$; l'ensemble $\Lambda(o)$ des points $(t, \eta(o))$ de $\tilde{\Phi}$ est une fibre singulière de $\tilde{g}(x)$; le long de cette fibre, B (ensemble des points à base réelle voisine de $\text{Re } g^*$) et \tilde{x} ne sont plus en position générale.

$\Lambda(o)$ contient le seul point singulier à base réelle qu'a \tilde{x} pour $x = 0$; la sous-variété \tilde{x}_c n'a pas de point singulier car, vu (30.1), la partie de \tilde{x} où

$$|t| \cdot |\eta|^{m-1} \geq c|x - y|$$

est voisine de la sous-variété de $\tilde{\Psi}$ d'équation

$$(33.1) \quad g(\eta) = 0.$$

Près de $\Lambda(o)$, déformons B en une chaîne voisine \tilde{B} , ayant les propriétés suivantes :

- \tilde{B} est indépendante de x et est en position générale par rapport à \tilde{x} ;
- \tilde{B} est identique à son imaginaire conjuguée;
- $\tilde{B} \sim B$ dans $(\tilde{\Psi}, \text{Re } \tilde{\Psi})$;
- $B - \tilde{B}$ appartient à un voisinage W de $\Lambda(o)$.

On peut évidemment, pour x voisin de o et $\in C(y)$, construire une chaîne Γ , ne dépendant pas continûment de x , ayant les propriétés suivantes :

Γ est identique à son imaginaire conjuguée;

$$(33.2) \quad \tilde{B} = B + \partial\Gamma \quad \text{dans } (\tilde{\Psi}, \text{Re } \tilde{\Psi}); \quad \Gamma \in W;$$

\tilde{x}, Γ et le domaine Δ de $\tilde{\Psi}$ que voici sont en position générale :

$$\Delta : \quad |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c;$$

en effet \tilde{x} et $\partial\Delta$ sont en position générale vu (33.1).

Pour x voisin de o et $\in C(y)$, les intersections

$$\beta_0 = \tilde{x} \cdot B \cdot \Delta, \quad \tilde{\beta}_0 = \tilde{x} \cdot \tilde{B} \cdot \Delta, \quad \gamma_0 = \tilde{x} \cdot \Gamma \cdot \Delta, \quad \gamma_1 = \tilde{x} \cdot \Gamma \cdot \partial\Delta$$

sont des chaînes, opposées à leurs imaginaires conjuguées; de (33.2) résulte donc que la relation suivante a lieu non seulement dans $(\tilde{\Psi}, \text{Re } \tilde{\Psi})$ mais aussi dans $\tilde{\Psi}$:

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0 + \tilde{x} \cdot \partial\Gamma \cdot \Delta = \beta_0 + \partial\gamma_0 - \gamma_1;$$

de ce que

$$\beta = 2\beta_0 + \beta_1 \quad \text{est un cycle de } \tilde{x} \text{ et } \in h(\tilde{x}, y^*)$$

résulte que

$$2\tilde{\beta}_0 + \beta_1 + 2\gamma_1 \quad \text{est un cycle de } \tilde{x} \text{ et } \in h(\tilde{x}, y^*).$$

Conformément à l'énoncé du lemme, $\tilde{\beta}_0$ est la partie du cycle

$$\text{Im } \tilde{x} = \tilde{x} \cdot \tilde{\mathbf{B}} \quad \text{où } |t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c;$$

$\partial\tilde{\beta}_0$ dépend continûment de x , quand x est voisin de o .

Il reste à construire une chaîne $\tilde{\beta}_1$ de \tilde{x}_c , variant continûment avec x et vérifiant :

$$\tilde{\beta}_1 \sim \beta_1 + 2\gamma_1 \quad \text{sur } \tilde{x}_c.$$

Or $\beta_1 + 2\gamma_1$ est une chaîne de \tilde{x}_c ; on peut la décomposer comme suit :

$$\beta_1 + 2\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3,$$

γ_2 et γ_3 étant des chaînes de \tilde{x}_c , γ_2 dépendant continûment de x , γ_3 n'en dépendant pas continûment, n'étant pas défini pour $x \in C(y)$, mais appartenant à W .

Puisque $\partial\gamma_3 = -2\partial\tilde{\beta}_0 - \partial\gamma_2$ et \tilde{x}_c dépendent continûment de x et que \tilde{x}_c n'a pas de singularité, on peut construire une chaîne γ_4 de \tilde{x}_c telle que :

$$\partial\gamma_4 = \partial\gamma_3, \quad \gamma_4 \subset W, \quad \gamma_4 \text{ dépende continûment de } x.$$

Choisissons W assez petit pour que son intersection par \tilde{x}_c appartienne à une partie V de \tilde{x}_c qu'on puisse rétracter par déformation sur la circonférence suivant laquelle $\Lambda(o)$ coupe \tilde{x}_c : l'homologie de dimension > 1 de V est donc nulle; or

$$\dim(\gamma_4 - \gamma_3) = l - 1 > 2;$$

donc, pour $x \notin C(y)$,

$$\gamma_4 - \gamma_3 \sim 0 \quad \text{sur } V \text{ et par suite sur } \tilde{x}_c.$$

On vérifie donc le lemme en choisissant

$$\tilde{\beta}_1 = \gamma_2 + \gamma_4.$$

34. Relation entre $h(\tilde{x}, y^*)$ et $h(y^* - g^*, \tilde{x})$. — Prouvons la *proposition* 8.2 : nous supposons que x tend vers y le long d'une droite $\notin C(y)$; donc $\tilde{x} \cap y^*$ et $\tilde{g}(x)$ sont indépendants de x ; $\tilde{g}(\infty, x)$ et $g^* \cap \tilde{x}$ sont indépendants de x et sans singularité réelle; considérons la projection de $\tilde{\mathbf{F}}$ sur sa base y^* :

$$(t, \eta) \rightarrow \eta^*;$$

sa restriction à $[\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty)] - \tilde{g}(x)$ est un homéomorphisme sur $y^* - g^* \cap \tilde{x}$; nous en notons l'inverse \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \quad y^* - g^* \cap \tilde{x} &\leftrightarrow [\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty)] - \tilde{g}(x); \\ g^* - g^* \cap \tilde{x} &\leftrightarrow \tilde{g}(\infty) - \tilde{g}(\infty, x); \\ \tilde{x} \cap y^* - g^* \cap \tilde{x} &\leftrightarrow \tilde{x} \cap y^* - g^* \cap \tilde{x} \quad (\text{identiquement}); \end{aligned}$$

\mathbf{H} tend vers l'identité en même temps que x tend vers y .

Supposons l impair; notons α^* le cycle de (y^*, \tilde{x}) que constitue $\text{Re } y^*$ muni de l'orientation $\frac{\omega'(\eta)}{|\eta|^{l-1}(\eta \cdot x)} > 0$; en détournant $2\alpha^*$ de g^* , construisons un cycle β^* de $(y^* - g^*, \tilde{x})$; vu les propriétés de \mathbf{H} , $\mathbf{H}\beta^*$ est un cycle de (\tilde{x}, y^*) identique, hors d'un voisinage V de $\tilde{g}(x)$ dans \tilde{x} , à un cycle β de (\tilde{x}, y^*) qui est 2α détourné de $\tilde{g}(\infty)$, α étant $\text{Re } \tilde{x}$ muni de l'orientation

$$\frac{\omega'(\eta)}{(\eta \cdot x)^l} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{(1-m) t d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l - dt \wedge \omega'(\eta)}{t |\eta|^{l-1} d(\eta \cdot x - tg)} > 0,$$

c'est-à-dire, vu (3.3) et (4.10) :

$$\frac{\varpi(t, \eta)}{t |\eta|^{l-1} d\xi \cdot x} > 0;$$

on peut choisir β^* et V tels que $\tilde{g}(x)$, donc $\tilde{x} \cap y^*$ soit rétracte par déformation de V ; par suite $\mathbf{H}\beta^*$ et β appartiennent à la même classe d'homologie de (\tilde{x}, y^*) :

$$\mathbf{H}\beta^* \in h(\tilde{x}, y^*);$$

c'est ce qu'affirme la proposition 8.2.

Supposons l pair; notons β^* un cycle de la classe

$$h(y^* - g^*, \tilde{x}) = \delta h(g^*, \tilde{x});$$

vu les propriétés de \mathbf{H} , $\mathbf{H}\beta^*$ est un cycle de (\tilde{x}, y^*) , indentique, hors d'un voisinage V de $\tilde{g}(x)$ dans \tilde{x} , à un cycle β appartenant à la classe d'homologie

$$h(\tilde{x}, \tilde{g}(x)) = \delta h(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x));$$

qu'emploie le n° 7; on peut choisir β^* et V tels que $\tilde{g}(x)$, donc $\tilde{x} \cap y^*$ soit rétracte par déformation de V ; par suite $\mathbf{H}\beta^*$ et β appartiennent à la même classe d'homologie de (\tilde{x}, y^*) :

$$\mathbf{H}\beta^* \in h(\tilde{x}, y^*);$$

c'est ce qu'affirme la proposition 8.2.

35. Projection hyperbolique. — Supposons g hyperbolique et prouvons la proposition 9. Un changement de coordonnées montre qu'il suffit de le prouver quand $x_1 = y_1$. Considérons alors le sous-espace vectoriel de Ξ que constituent les points η où

$$\eta_1 \text{ est complexe, } \eta_2, \dots, \eta_l \text{ réels, } \eta \cdot y = 0;$$

son image γ^* dans Ξ^* est un sous-espace projectif de Y^* de dimension l ; son intersection par g^* est $\text{Re } g^*$, vu l'hyperbolicité de g .

Supposons l impair; γ^* est orientable; donnons-lui une orientation, changeant sur ses deux sous-espaces projectifs $\alpha^* = \text{Re } \gamma^*$ et $\tilde{x} \cap \gamma^* (\eta \cdot x = 0)$, telle que

$$\partial \gamma^* = 2 \alpha^* \text{ rel } \tilde{x},$$

α^* étant muni de l'orientation

$$\frac{\omega'(\eta)}{(\eta \cdot x)^l} > 0;$$

d'après le lemme 29, 2°, la classe d'homologie de $2 \alpha^*$ détourné de g^* est $h(\gamma^* - g^*, \tilde{x}) = 0$; c'est ce qu'affirme la proposition 9.

Supposons l pair; rappelons qu'on choisit $g_1 = g_{\eta_1}$; γ^* n'est pas orientable; donnons-lui l'orientation changeant sur $\tilde{x} \cap \gamma^* (\eta \cdot x = 0)$:

$$\frac{\omega^*(\text{Re } \eta_1, \text{Im } \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l)}{(\eta \cdot x)^{l+1}} < 0;$$

l'intersection $\text{Re } g^*$ de γ^* et g^* a donc l'orientation

$$(g_1)^2 \frac{\omega^*(\text{Re } \eta_1, \text{Im } \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l)}{(\eta \cdot x)^{l-1} d \text{Re } g \wedge d \text{Im } g} < 0$$

vu que $d \text{Im } g = g_1 d \text{Im } \eta_1$, c'est l'orientation (7.5). Vu la définition du cobord que donne le n° 3 de [III], le cobord de cette intersection $\text{Re } g^*$ de g^* par un cycle de (γ^*, \tilde{x}) est $h(\gamma^* - g^*, \tilde{x}) = 0$; c'est ce qu'affirme la proposition 9.

CHAPITRE 4. — Projection quelconque.

Ce chapitre 4 étend aux projections quelconques les propriétés des projections polynomiales qu'a établies le chapitre précédent : il justifie le n° 4, en prouvant les propositions 36, 37.1, 37.2 et 38, puis le n° 8, en définissant $h(\tilde{x}, \gamma^*)$ et en prouvant les propositions 8.1 et 8.2.

Nous supposons X et $\tilde{Y} (|t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_0)$ suffisamment petits.

36. Le conoïde $K(y)$. — Vu la définition (4.3) de g et les propriétés 2° et 4° des projections (n° 4) on a le développement de Taylor :

$$(36.1) \quad \xi(t, \eta, y) \cdot x = \eta \cdot x - t g(y, \eta) + \sum_{q \geq 1} t^q P_q(\eta, x, y),$$

où

$$\eta \cdot x = \eta_1(x_1 - y_1) + \dots + \eta_l(x_l - y_l), \quad P_1(\eta, y, y) = 0;$$

$P_q(\eta, x, y)$ est un polynôme en η , homogène de degré $(m-1)q+1$, à coefficients linéaires en x , holomorphes en y .

L'équation de \tilde{x} s'écrit donc

$$(36.2) \quad \tilde{x} : \eta \cdot x - t g(y, \eta) + \sum_{q \geq 1} t^q P_q(\eta, x, y) = 0.$$

Nous allons en déduire les propriétés suivantes de l'ensemble $K(y)$ des points x tels que \tilde{x} ait un point singulier réel :

PROPOSITION 36. — 1° y est un point conique de $K(y)$; le cône des tangentes à $K(y)$ en y est $C(y)$.

2° $K(y) - y$ est une sous-variété analytique et régulière de X ; sa codimension est 1; $K(y) - y$ est l'enveloppe des hyperplans $\xi^*(t, \eta, y)$ de X ; c'est-à-dire plus précisément, de ceux qui vérifient la condition

$$(36.3) \quad \frac{D(\xi_0(t, \eta, y), \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} = 0, \quad (t, \eta) \text{ réel.}$$

PREUVE DE 1°. — Les points singuliers (t, η) de \tilde{x} sont définis par le système

$$(36.4) \quad \xi_j(t, \eta, y) \cdot x = 0, \quad \xi_{\eta_j}(t, \eta, y) \cdot x = 0 \quad (j=1, \dots, l),$$

où $(t, \eta) \in \tilde{\Psi}$, c'est-à-dire $|t|, |\eta|^{m-1} < c_0$.

La première des équations (36.4) s'écrit, vu (36.1) :

$$(36.5) \quad g(y, \eta) - \sum_{q \geq 1} q t^{q-1} P_q(\eta, x, y) = 0.$$

Le système

$$(36.6) \quad \xi_{\eta_j}(t, \eta, y) \cdot x(t, \eta, y) = 0 \quad (j=1, \dots, l)$$

définit ⁽¹⁴⁾ un point $x(t, \eta, y)$ qui est fonction holomorphe réelle de (t, η, y) et qui vérifie, vu le n° 4, 2° et 4° :

$$\begin{aligned} x(0^{1-m}t, 0\eta, y) &= x(t, \eta, y), \\ x(0, \eta, y) &= y; \end{aligned}$$

en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ à (36.6), $\frac{\partial}{\partial \eta_j}$ à (4.3) et en retranchant les résultats obtenus pour $t=0$, on obtient

$$(36.7) \quad \frac{\partial x}{\partial t}(0, \eta, y) = g_\eta(y, \eta),$$

⁽¹⁴⁾ Cette définition est en accord avec [II] et avec le n° 13 : le système (36.6) est celui qui constitue les l dernières équations (13.8).

d'où

$$x_j(t, \eta, y) = y_j + t g_{\eta_j}(y, \eta) + \sum_{q \geq 2} t^q P_{jq}(\eta, y),$$

P_{jq} étant un polynôme en η , homogène de degré $(m-1)q$; en portant cette expression de x dans (36.5), on obtient

$$g(y, \eta) - \sum_{q \geq 1} t^q P_q(\eta, y) = 0,$$

P_q étant un polynôme en η , homogène de degré $m + (m-1)q$. Les points singuliers (t, η) de \tilde{x} sont donc définis par le système

$$(36.8) \quad \begin{cases} g(y, \eta) = \sum_{q \geq 1} t^q P_q(\eta, y), \\ x_j = y_j + t g_{\eta_j}(y, \eta) + \sum_{q \geq 2} t^q P_{jq}(\eta, y); \end{cases}$$

puisque $(\theta^{1-m}t, \theta\eta) = (t, \eta)$ on peut, quand (t, η) est réel, choisir :

$$t = 1 \quad \text{si } m \text{ est pair;} \quad t = \pm 1 \quad \text{si } m \text{ est impair.}$$

Par suite les deux sous-variétés réelles de y^* d'équations

$$(36.9) \quad g(y, \eta) - \sum_{q \geq 1} P_q(\eta, y) = 0 \quad \text{et} \quad g(y, \eta) - \sum_{q \geq 1} (-1)^q P_q(\eta, y) = 0$$

sont appliquées chacune sur $K(y)$ si m est pair, sur deux parties complémentaires de $K(y)$ si m est impair, par les applications respectives $\eta \rightarrow x$:

$$(36.10) \quad \begin{cases} x_j = y_j + g_{\eta_j}(y, \eta) + \sum_{q \geq 2} P_{jq}(\eta, y), \\ x_j = y_j - g_{\eta_j}(y, \eta) + \sum_{q \geq 2} (-1)^q P_{jq}(\eta, y). \end{cases}$$

Vu les hypothèses (4.4) ces applications sont des *homéomorphismes*; d'où la proposition 36, 1°.

PREUVE DE 2°. — Il suffit d'employer ⁽¹⁵⁾ le n° 11 de [III], en remplaçant les notations

$$x, \quad t, \quad s(x, t)$$

par

$$\eta, \quad x, \quad \xi(t, \eta, y), \quad \text{où } t \text{ et } y \text{ sont fixés,}$$

(15) ERRATUM : dans [III], formule (11.1), lire $\text{Hess}_x[s] \neq 0$.

après que le n° 37 ait prouvé ceci : pour $x \neq y$, \tilde{x} a au plus un point singulier réel; c'est un point double quadratique $\notin y^*$.

37. Les points singuliers de \tilde{x} . — PROPOSITION 37.1. — \tilde{y} (c'est-à-dire \tilde{x} pour $x = y$) se décompose en :

- 1° la sous-variété $y^*(t = 0)$;
- 2° une sous-variété qui coupe y^* suivant $g^*(t = g = 0)$ et qui n'a pas de point singulier à base réelle.

PREUVE. — Vu (36.2), \tilde{y} se décompose en $y^*(t = 0)$ et en une variété d'équation

$$g(\eta, y) + \sum_{q \geq 2} t^{q-1} P_q(\eta, y, y) = 0;$$

sur cette variété η^* est évidemment voisin de g^* ; sur la partie réelle de cette variété, η^* est donc voisin de $\text{Re } g^*$; or vu (4.4)₁, on a

$$(37.1) \quad g_{\eta} \neq 0 \quad \text{sur } \text{Re } g^*,$$

puisqu, vu le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes

$$\sum_j g_{\eta_i \eta_j} \eta_j = (m - 1) g_{\eta_i},$$

PROPOSITION 37.2. — Supposons $x \neq y$; alors \tilde{x} possède au plus un point singulier (t, η) ayant une base η^* réelle; ce point, quand il existe, est un point double quadratique réel, où

$$(37.2) \quad t^l \text{Hess}_{\eta}[g(y, \eta)] \text{Hess}_{\eta}[-\zeta(t, \eta, y) \cdot x] > 0,$$

$$(37.3) \quad c_1 |x - y| \leq |t \cdot \eta|^{m-1} \leq c_2 |x - y| \quad (c_1, c_2 : \text{constantes}).$$

PREUVE. — Soit (t, η) un point singulier de \tilde{x} , à base η^* réelle; (36.8) est vérifié; vu (36.8)₁, η^* est voisin de g^* ; or, vu (37.1), on a près de $\text{Re } g^*$:

$$(37.4) \quad \text{Cte} \leq |\eta|^{1-m} |g_{\eta}| \leq \text{Cte};$$

par suite l'une au moins des équations (36.8)₂ impose à t d'être réel et entraîne (37.3) : le point singulier étudié est réel et vérifie (37.3).

Nous venons de définir un homéomorphisme (36.10) de l'ensemble des points singuliers réels des \tilde{x} sur $K(y)$; donc \tilde{x} a au plus un point singulier réel.

En un tel point, vu (36.1) :

$$\text{Hess}_{\eta}[-\xi(t, \eta, y) \cdot x] = t^l \text{Hess}_{\eta} \left[g(\eta, y) - \sum_{q \geq 1} t^{q-1} P_q(\eta, x, y) \right];$$

d'où (37.2), car η^* est voisin de $\text{Re } g^*$, où $\text{Hess}_{\eta} g \neq 0$: \sum est négligeable.

(37.2) prouve que (t, η) est point double quadratique.

38. Les nappes de $K(y)$. — Pour achever de justifier le n° 4, prouvons la

PROPOSITION 38. — *Supposons l impair; (4.8) équivaut à la définition 20.1 du côté positif de $K(y)$. Supposons l pair; (4.9) équivaut à la définition 20.2 des nappes positives de $K(y)$.*

PREUVE. — Dans les définitions 20.1 et 20.2,

$$x, \quad t, \quad s(x, t), \quad k(t)$$

doivent être remplacés par

$$\eta, \quad x, \quad -\xi(t, \eta, y).x, \quad k(x, y), \quad \text{où } t \text{ et } y \text{ sont fixés;}$$

la condition (20.1) s'écrit

$$k_{x_i} = \xi_j;$$

par suite la condition $k > 0$ peut être remplacée par $\xi_1 dx_1 + \dots + \xi_l dx_l > 0$; enfin le signe de $\text{Hess}_x[s]$ doit être remplacé par celui de

$$\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x]$$

qui, vu (37.2), est celui de $t' \text{Hess}_\eta[g(y, \eta)]$.

39. La définition de $\text{Im } \tilde{x}$ quand l est pair > 2 . — La définition de $\text{Im } \tilde{x}$ est celle qu'énonce le n° 7; justifions-la en prouvant la

PROPOSITION 39. — *Les points (t, η) de \tilde{x} qui ne sont pas réels, mais dont la base η^* est réelle ont leur base dans un petit voisinage de $\text{Re } g^*$. Vu (7.4), on a donc*

$$g_1(\eta) \neq 0$$

sur l'ensemble de ces points et sur son adhérence.

PREUVE. — Soit $(t, \eta) \in \tilde{x}$, t étant non réel et η réel; la partie imaginaire de (36.2) donne

$$\begin{aligned} |g(\eta, y)| &< \text{Cte} |x - y| \cdot |\eta|^m + \text{Cte} |t| \cdot |\eta|^{2m-1} \\ &< [\text{Cte} |x - y| + \text{Cte } c_0] |\eta|^m. \end{aligned}$$

40. Allure de \tilde{x} . — Pour définir et étudier $h(\tilde{x}, y^*)$, les n° 8 et 41 approchent \tilde{x} par la sous-variété de $\tilde{\Psi}$ qu'a étudiée le chapitre précédent :

$$(40.1) \quad \tilde{x}_{c_3, c_4}: \quad t g(y, \eta) = \eta.x, \\ c_3 |x - y| \leq |t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c_4 |x - y|, \quad \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*;$$

nous supposons ce voisinage de $\text{Re } y^*$ suffisamment petit, les constantes c_3 et c_4 suffisamment grandes. Les lemmes suivants construisent cette approximation :

LEMME 40.1. -- Il existe des homéomorphismes

$$\Omega : \tilde{x}_{c_3 c_4} \rightarrow \tilde{x}$$

de $\tilde{x}_{c_3 c_4}$ dans \tilde{x} ayant les propriétés que voici : ils sont réels et voisins de l'identité; ils laissent $|t| \cdot |\eta|^{m-1}$ invariant; ils se prolongent en homéomorphismes d'un voisinage de $\tilde{x}_{c_3 c_4}$ dans $\tilde{\Psi}$; ils dépendent continûment de x .

DÉFINITION 40. — Soit un cône fermé, de sommet y , voisin de $\mathcal{C}(y)$ et dont l'intérieur contienne $\mathcal{C}(y) - y$; nous noterons $Y(y)$ l'intersection du complémentaire de ce cône fermé et d'une boule ouverte, de centre y , de rayon suffisamment petit.

LEMME 40.2. — Quand $Y(y)$ est suffisamment petit et que $x \in Y(y)$, alors les homéomorphismes Ω se prolongent en homéomorphismes

$$\Omega : \tilde{x}_{0 c_4} \rightarrow \tilde{x}$$

ayant les mêmes propriétés.

Bien entendu, $\tilde{x}_{0 c_4}$ est la sous-variété de $\tilde{\Psi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{0 c_4} : \quad & t g(y, \eta) = \eta \cdot x, \\ & |t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c_4 |x - y|, \quad \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*. \end{aligned}$$

PREUVE DU LEMME 40.1. — On choisit c_3 assez grand et le voisinage de $\text{Re } y^*$ assez petit pour que $\tilde{x}_{c_3 c_4}$ n'ait pas de singularité. Le changement de coordonnée

$$t = |x - y| v$$

transforme les équations (36.2) de \tilde{x} et (40.1) de $\tilde{x}_{c_3 c_4}$ en

$$\begin{aligned} (40.2) \quad \tilde{x} : \quad & \eta_1 \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} + \dots + \eta_l \frac{x_l - y_l}{|x - y|} - v g(y, \eta) \\ & + \sum_{q \geq 1} |x - y|^{q-1} v^q P_q(\eta, x, y) = 0, \end{aligned}$$

où $P_1(\eta, y, y) = 0$;

$$\begin{aligned} (40.3) \quad \tilde{x}_{c_3 c_4} : \quad & \eta_1 \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} + \dots + \eta_l \frac{x_l - y_l}{|x - y|} - v g(y, \eta) = 0, \\ & c_3 \leq |v| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c_4, \quad \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*. \end{aligned}$$

Vu (30.1), $\tilde{x}_{c_3 c_4}$ vérifie $c_3 |g| \leq |\eta|^m$ et est donc voisine de la sous-variété de $\tilde{\Psi}$:

$$g(y, \eta) = 0, \quad c_3 \leq |v| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c_4, \quad \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*.$$

$x_{c_3 c_4}$ est donc en position générale par rapport aux sous-variétés de $\tilde{\Psi}$:

$$|t| \cdot |\eta|^{m-1} = \text{Cte.}$$

D'autre part les équations (40.2) et (40.3)₁ de \tilde{x} et $\tilde{x}_{c_3c_4}$ sont voisines, puisque $x - y$ est petit. La construction d'un homéomorphisme Ω est donc aisée : on fibre un voisinage de $\tilde{x}_{c_3c_4}$ par des disques, en position générale par rapport à $\tilde{x}_{c_3c_4}$ et sur lesquels $|t| \cdot |\eta|^{m-1}$ est constant; Ω applique chacun de ces disques sur lui-même, en laissant son bord invariant, en appliquant le point où il coupe $\tilde{x}_{c_3c_4}$ sur celui où il coupe \tilde{x} .

PREUVE DU LEMME 40.2. — Vu le n° 27, on peut choisir $Y(y)$ assez petit pour que \tilde{x}_{0c_4} n'ait pas de point singulier quand $x \in Y(y)$; il est donc possible de prolonger à \tilde{x}_{0c_4} la construction précédente de Ω .

41. Définition et propriétés de $h(\tilde{x}, y^*)$. — Choisissons c tel que

$$c_3 < c < c_4$$

et considérons le cycle de (\tilde{x}_{0c_4}, y^*) :

$$\tilde{\beta} = 2\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1$$

que définit le n° 33. Notons

$$\beta_1 = \Omega\tilde{\beta}_1,$$

β_1 est une chaîne de la partie de \tilde{x} où $|t| \cdot |\eta|^{m-1} = c|x - y|$.

Supposons l impair; on a $\tilde{\beta}_0 = \text{Re } \tilde{x}_{0c}$; soit β_0 la partie de $\text{Re } \tilde{x}$ où $|t| \cdot |\eta|^{m-1} \leq c|x - y|$; Ω transforme la partie de $\tilde{\beta}_0$ où $c_3|x - y| \leq |t| \cdot |\eta|^{m-1}$ en celle de β_0 vérifiant cette même condition; puisque $2\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1$ est un cycle de (\tilde{x}_{0c_4}, y^*) , $2\beta_0 + \beta_1$ est donc un cycle de (\tilde{x}, y^*) ; sa classe d'homologie $h(\tilde{x}, y^*)$ est définie sans ambiguïté; en effet, vu le lemme 33, elle est indépendante des choix de $\tilde{\beta}_1$ et c .

Supposons l pair; on a $\tilde{\beta}_0 = \text{Im } \tilde{x}_{0c}$; si $\text{Im } \tilde{x}_{0c}$ est défini au moyen de \tilde{B} , définissons $\text{Im } \tilde{x}$ au moyen d'une chaîne coïncidant avec $\Omega\tilde{B}$ dans le domaine

$$c_3|x - y| < |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_4|x - y|;$$

Ω transforme $\text{Im } \tilde{x}_{c_3c}$ en la partie de $\text{Im } \tilde{x}$ où

$$c_3|x - y| < |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c|x - y|;$$

puisque $2\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1$ est un cycle de (x_{0c_4}, y^*) , $2\beta_0 + \beta_1$ est donc un cycle de (\tilde{x}, y^*) ; sa classe d'homologie $h(\tilde{x}, y^*)$ est définie sans ambiguïté; en effet, vu le lemme 33, elle est indépendante des choix de $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}$ et c .

La proposition 8.1 est évidente.

PREUVE DE LA PROPOSITION 8.2. — Le n° 34 a prouvé cette proposition quand la projection ξ est polynomiale; cette preuve s'applique à \tilde{x}_{0c_4} ; l'homéomorphisme

$$\Omega : \tilde{x}_{0c_4} \rightarrow \tilde{x},$$

que définit le lemme 40.2, montre que cette proposition vaut pour \tilde{x} , puis-
qu'elle vaut pour \tilde{x}_{0c} .

42. Une extension des résultats précédents. — Les constructions de
classes d'homologie et de chaînes qu'effectuent ce chapitre et le précédent
et les preuves des propositions 8.1 et 8.2 qu'ils donnent emploient seule-
ment des points (t, η) tels que

$$\eta^* \in \mathcal{V}^*,$$

\mathcal{V}^* étant un voisinage de $\text{Re } y^*$, qu'on peut rendre arbitrairement petit, en
prenant c suffisamment grand, X et $\tilde{\Psi}$ suffisamment petits.

Il faut excepter la preuve de la proposition 9 (n° 35) : elle emploie la
chaîne, n'appartenant pas à \mathcal{V}^* :

$$\gamma^* : \eta_1 \text{ complexe, } \eta_2, \dots, \eta_l \text{ réels.}$$

Donc :

PROPOSITION 42. — Soit, dans y^* , un voisinage \mathcal{V}^* de $\text{Re } y^*$; soit $\tilde{\Theta}$
l'ensemble des points (t, η) de $\tilde{\Psi}$ à base $\eta^* \in \mathcal{V}^*$. On peut définir des
classes d'homologie

$$(42.1) \quad h(\tilde{\Theta}, \tilde{x} \cup y^*), \quad h(\tilde{x} \cap \tilde{\Theta}, y^*)$$

comme ont été définies

$$(42.2) \quad h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*), \quad h(\tilde{x}, y^*)$$

et leur appliquer les propositions 8.1 et 8.2. L'homomorphisme de
groupes d'homologie qu'induit l'application identique de $\tilde{\Theta}$ dans $\tilde{\Psi}$ trans-
forme les classes (42.1) en les classes (42.2).

NOTE. — Par contre la proposition 9 devient fausse quand on remplace y^*
par \mathcal{V}^* .

CHAPITRE 5. — L'uniformisation.

Le chapitre 4 a défini des classes d'homologie $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ et $h(\tilde{x}, y^*)$;
le chapitre 6 étudiera l'intégrale sur ces classes de formes différentielles
extérieures holomorphes $\pi[t, \eta, y]$ ne contenant pas dy . Cette intégrale est
une fonction ou distribution de (x, y) ; elle dépend du choix de la forme
 $\pi[t, \eta, y]$ et du choix de la projection $\xi(t, \eta, y)$ qui définit la sous-variété \tilde{x}
de $\tilde{\Psi}$; mais le chapitre 6 (n° 52) déduira de la relation entre $h(\tilde{x}, y^*)$
et $h(y^* - g^*, \tilde{x})$ (proposition 8.2) une remarquable propriété de cette
intégrale : elle ne dépend en réalité que de la forme $\pi(\xi, y)$ résultant de
l'élimination de (t, η) entre cette forme $\pi[t, \eta, y]$ et cette projection
 $\xi(t, \eta, y)$. Pour manier commodément cette propriété, nous emploierons la
notion d'uniformisation, que définit le n° 5.

L'objet du présent chapitre 5 est de prouver les trois propriétés de l'uni-
formisation qu'énonce ce n° 5.

43. Allure d'une fonction uniformisable $f(\xi, y)$ pour $\xi \cdot y = 0$. — Nous allons prouver la *proposition 5.1* :

1° Supposons que la projection $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ et que $f(\xi, y)$ s'annule p fois pour $\xi \cdot y = 0$: on a le développement de Taylor en t :

$$f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = {}^w P(\eta, y) + \dots,$$

P étant un polynôme en η homogène, de degré $mp + m - n - p$; vu (36.1), on a

$$\xi(t, \eta, y) \cdot y = -tg(y, \eta) + \dots$$

enfin, vu (4.2),

$$\frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = -g(y, \eta) + \dots;$$

d'où

$$\frac{f(\xi(t, \eta, y), y)}{[\xi(t, \eta, y) \cdot y]^p} = \frac{(-1)^{p+1} P(\eta, y) + \dots}{g^{p+1}(y, \eta) + \dots};$$

en faisant $t = 0$, on obtient

$$\frac{f(\xi, y)}{(\xi \cdot y)^p} = \frac{(-1)^{p+1} P(\xi, y)}{g^{p+1}(y, \xi)} \quad \text{pour } \xi \cdot y = 0.$$

2° Si la projection $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $f(\xi, y)$, on a de même

$$f(\xi(t, \eta, y), y) = {}^w Q(\eta, y) + \dots,$$

Q étant un polynôme en η , homogène de degré $(m-1)p - n$;

$$\frac{f(\xi(t, \eta, y), y)}{[\xi(t, \eta, y) \cdot y]^p} = \frac{(-1)^p Q(\eta, y) + \dots}{g^p(y, \eta) + \dots};$$

$$\frac{f(\xi, y)}{(\xi \cdot y)^p} = \frac{(-1)^p Q(\xi, y)}{g^p(y, \xi)} \quad \text{pour } \xi \cdot y = 0.$$

44. Dérivées et primitives des fonctions uniformisables. — Nous allons prouver la *proposition 5.2*.

1° Supposons $f(\xi, y)$ uniformisé par une projection $\xi(t, \eta, y)$. Il est évident que ξ uniformise

$$f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (44.1) \quad f\xi_j \frac{D(\xi_0, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} &= \frac{D(\xi_0, \dots, \xi_{j-1}, f, \xi_{j+1}, \dots, \xi_l)}{D(\xi_0, \dots, \xi_l)} \frac{D(\xi_0, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} \\ &= \frac{D(\xi_0(t, \eta, y), \dots, \xi_{j-1}, f(\xi(t, \eta, y), y), \xi_{j+1}, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} \end{aligned}$$

est une fonction holomorphe de $(t, \eta, y) \in \Psi \times X$; donc

$$f_{y_i}(\xi, y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = \frac{\partial f(\xi(t, \eta, y), y)}{\partial y_i} \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} - \sum_{j=0}^l \frac{\partial \xi_j(t, \eta, y)}{\partial y_i} f_{\xi_j}(\xi, y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)}$$

est aussi une fonction holomorphe de (t, η, y) . Par suite $\xi(t, \eta, y)$ uniformise

$$f_{\xi_j}(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l \quad \text{et} \quad f_{y_i}(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l.$$

2° Supposons $f(\xi, y)$ rationnellement uniformisable; ce que 1° vient de prouver montre immédiatement que

$$f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad f_{\xi_0} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l \quad \text{et} \quad f_{y_i} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

sont rationnellement uniformisables.

3° Supposons que $f_{\xi_0}(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ soit uniformisé par une projection $\xi(t, \eta, y)$ et que $f(\eta, y)$ soit un polynôme en η . Vu (44.1), où l'on prend $j=0$,

$$F(t, \eta, y) = f(\xi(t, \eta, y), y)$$

vérifie une équation aux dérivées partielles linéaire, du premier ordre :

$$F_t \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} - F_{\eta_1} \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_2, \dots, \eta_l)} + \dots = G(t, \eta, y),$$

dont les coefficients et le second membre sont holomorphes; le coefficient de F_t vaut 1 pour $t=0$; d'autre part, $F(0, \eta, y)$ est holomorphe; donc $F(t, \eta, y)$ est holomorphe pour $|t| \cdot |\eta|^{m-1} < Cte$; cela signifie que la projection $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $f(\xi, y)$; d'après 1°, elle uniformise donc

$$f_{\xi_j} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l \quad \text{et} \quad f_{y_i} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l.$$

4° Supposons que $\frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial \xi_0^p} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ soit uniformisé par une projection $\xi(t, \eta, y)$ et que $f, \frac{\partial f}{\partial \xi_0}, \dots, \frac{\partial^{p-1} f}{\partial \xi_0^{p-1}}$ soient des polynômes en η quand $\xi = \eta$. Notons $f^{(q)}$ l'une quelconque des dérivées de $f(\xi, y)$ en (ξ, y) , d'ordre $\leq q$. On constate aisément que $f^{(q)}$ est, pour $q < p$, un polynôme en η quand $\xi = \eta$. De 3° résulte alors que ξ uniformise $\frac{\partial^{p-q} f^{(q)}}{\partial \xi_0^{p-q}} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ quand $q=1$, donc quand $q=2, \dots, =p-1$, donc que ξ uniformise $f^{(p-1)}$.

5° Supposons $\frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial \xi_0^p} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ rationnellement uniformisable, et $f, \frac{\partial f}{\partial \xi_0}, \dots, \frac{\partial^{p-1} f}{\partial \xi_0^{p-1}}$ nuls pour $\xi, y=0$; il résulte immédiatement de 4° que $\frac{\partial^{q+r_1+\dots+r_l} f(\xi, y)}{\partial \xi_0^q \partial y_1^{r_1} \dots \partial y_l^{r_l}}$ est rationnellement uniformisable pour $q+r_1+\dots+r_l < p$.

43. **Construction de $K(y)$ à partir des singularités de f .** — Nous allons prouver la proposition 3.3, qu'emploiera le lemme 52.2 :

Soit g_i^* l'une des composantes connexes de $\text{Re } g^*$; soit

$$g_i^* : g_i(y, \eta) = 0$$

son équation algébriquement irréductible : le polynôme $g_i(y, \eta)$ de η est l'un des facteurs premiers du polynôme $g(y, \eta)$. Notons C_i et K_i les nappes de $C(y)$ et $K(y)$ correspondant à g_i^* .

(t, η) sera noté φ ; la projection $\xi(t, \eta, y)$ sera notée $\xi(\varphi, y)$ et son inverse $\varphi(\xi, y)$.

Commençons par construire K_i à partir des singularités de $\varphi(\xi, y)$.

LEMME 43. — Au voisinage de g_i^* , $\varphi(\xi, y)$ a l'une ou l'autre des deux allures suivantes, l'une d'elles étant exceptionnelle.

1° *Projection exceptionnelle près de g_i^** : $\varphi(\xi, y)$ est holomorphe pour :

$$\xi^* \text{ voisin de } g_i^*, \quad (\xi, y) \mid |\xi|^{m-1}/g(y, \xi) \text{ petit.}$$

Alors $K_i = C_i$.

2° *Projection ordinaire près de g_i^** : Il existe :

une sous-variété algébrique a_i^* de g_i^* ($\dim a_i^* = l - 3$);

un voisinage V_i^* de $g_i^* - a_i^*$ dans Ξ^* ;

un sous-ensemble analytique $W_i^* \cup g^*$ de V_i^* [W_i^* : sous-variété analytique de dimension $l - 1$, ayant g^* pour ensemble singulier et sur laquelle on a

$$g \neq 0. \quad (\xi, y) \mid |\xi|^{m-1}/g(y, \xi) \text{ petit}]$$

tels que :

$\varphi(\xi, y)$ est algébroïde ⁽¹⁶⁾ sur V_i^* et s'y ramifie sur l'ensemble $W_i^* \cup g^*$. Alors $\text{Re } W_i^*$ est l'ensemble des hyperplans ξ^* tangents à K_i et $\in V_i^*$; $K_i \neq C_i$.

NOTE. — La projection polynomiale est exceptionnelle.

PREUVE. — Vu (36.1), la projection $\xi(\varphi, y)$ est définie près de y^* par les $l + 1$ équations

$$(43.1) \quad \xi_i = \eta_i + \dots, \quad \xi_l = \eta_l + \dots, \quad \xi, y = -t g(y, \eta) + \dots,$$

les seconds membres étant des fonctions de (t, η, y) holomorphes pour $|t|, |\eta|^{m-1}$ petit; nous n'avons écrit que le premier terme de leur développement de Taylor en t .

Calculons l'inverse $\varphi(\xi, y)$ de $\xi(\varphi, y)$: résolvons en η_1, \dots, η_l les l premières équations (43.1); il vient

$$(43.2)_1 \quad \eta_1 = \xi_1 + \dots, \quad \dots, \quad \eta_l = \xi_l + \dots,$$

⁽¹⁶⁾ cela signifie : quand $\xi^* \in V_i^*$.

les seconds membres étant holomorphes en (t, ξ_1, \dots, ξ_l) pour $|t| \cdot |\xi|^{m-1}$ petit; portons ces valeurs de η dans la dernière des équations (45.1); il vient

$$(45.2)_2 \quad \xi \cdot \mathcal{Y} = L(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}),$$

L étant holomorphe pour $|t| \cdot |\xi|^{m-1}$ petit et ayant le développement de Taylor en t :

$$(45.3) \quad L(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) = -t g(\mathcal{Y}, \xi) + \dots,$$

le système (45.1) équivaut à (45.2), qui définit donc $\varphi(\xi, \mathcal{Y})$.

Précisons les propriétés de L . D'une part :

$$\begin{aligned} \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} &= \frac{D(\xi \cdot \mathcal{Y}, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta)} \\ &= \frac{D(\xi \cdot \mathcal{Y}, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \xi_1, \dots, \xi_l)} \frac{D(t, \xi_1, \dots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \dots, \eta_l)} = L_t \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} \end{aligned}$$

d'où l'équivalence des deux équations

$$(45.4) \quad \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = 0, \quad L_t(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) = 0.$$

D'autre part, le développement (45.3) a pour coefficients des polynômes en ξ_1, \dots, ξ_l ; groupons ceux que divise $g_i(\mathcal{Y}, \xi)$; il vient :

si g_i les divise tous :

$$(45.5) \quad L(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) = t g_i(\mathcal{Y}, \xi) M_i(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}),$$

sinon

$$(45.6) \quad L(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) = t g_i(\mathcal{Y}, \xi) M_i(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) \\ + t^p N_i(t, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y});$$

$p \geq 2$; M_i et N_i sont holomorphes pour $|t| \cdot |\xi|^{m-1}$ petit;

$$g_i(\mathcal{Y}, \xi) M_i(0, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y}) = -g(\mathcal{Y}, \xi); \quad M_i \neq 0;$$

$N_i(0, \xi_1, \dots, \xi_l, \mathcal{Y})$ ne s'annule pas identiquement pour $g_i(\mathcal{Y}, \xi) = 0$.

Tirons t de (45.2)₂; l'alternative classique de Weierstrass se présente :

1° *Le cas exceptionnel*, où L a l'expression (45.5). — Il est évident que, pour

$$(45.7) \quad \xi^* \text{ voisin de } g_i^*, \quad (\xi \cdot \mathcal{Y}) |\xi|^{m-1} / g(\mathcal{Y}, \xi) \text{ petit}$$

l'équation (45.2)₂ possède une seule solution $t(\xi, \mathcal{Y})$ voisine de zéro; elle est holomorphe. Sous l'hypothèse (45.7), $\varphi(\xi, \mathcal{Y})$ est donc holomorphe.

D'autre part, vu la proposition 36, 2^o, K_i est l'enveloppe des hyperplans réels $\xi^*(t, \eta, \gamma)$ tels que

$$\xi^* \text{ est voisin de } g_i^*, \quad \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = 0;$$

vu (45.4), cette dernière condition s'écrit

$$L_i = 0;$$

donc, vu (45.5)

$$g_i = 0;$$

elle implique donc $L = 0$; c'est-à-dire, vu (45.2)₂ :

$$\xi \cdot \gamma = 0.$$

Ainsi le conoïde K_i est l'enveloppe des hyperplans $\xi^* \in g_i^*$; il est donc confondu avec son cône tangent C_i .

2^o *Le cas ordinaire*, où L a l'expression (45.6). — Notons a_i^* la sous-variété algébrique de g_i^* d'équation

$$a_i^* : N_i(0, \xi_1, \dots, \xi_l, \gamma) = 0;$$

si $\xi^* \in g_i^* - a_i^*$ alors, vu (45.6), l'équation (45.2)₂ possède la solution p -uple : $t = 0$; sur un voisinage convenable V_i^* de $g_i^* - a_i^*$ (45.2)₂ possède donc p solutions $t(\xi, \gamma)$ voisines de zéro : elles constituent les p branches d'une fonction algébroïde.

Pour que cette fonction $t(\xi, \gamma)$ se ramifie, il faut et suffit que sa valeur vérifie

$$L_i = 0, \quad \text{c'est-à-dire, vu (45.4) : } \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = 0;$$

donc, vu la proposition 36, 2^o, pour que $\xi^* \in \text{Re } V_i^*$ touche K^* (donc K_i^*), il faut et il suffit que l'une des branches de $\varphi(\xi, \gamma)$ se ramifie.

Déterminons l'ensemble des points de V_i^* où $t(\xi, \gamma)$ se ramifie : vu (45.2)₂ et (45.6), il s'agit d'éliminer t du système

$$(45.8) \quad \begin{cases} \xi \cdot \gamma = t g_i M_i + t^p N_i, \\ g_i + t^{p-1} \frac{p N_i + t N_{i,t}}{M_i + t M_{i,t}} = 0; \end{cases}$$

si $t = 0$, on a $\xi \cdot \gamma = g_i = 0$, c'est-à-dire $\xi^* \in g_i^*$; sinon $g_i \neq 0$ et (45.8) implique

$$(45.9) \quad \frac{\xi \cdot \gamma}{g_i} = t \left[M_i - N_i \frac{M_i + t M_{i,t}}{p N_i + t N_{i,t}} \right],$$

(45.9) montre que $(\xi \cdot \gamma) |\xi|^{m-1}/g$ est petit quand V_i^* est petit; quand $(\xi \cdot \gamma) |\xi|^{m-1}/g$ est suffisamment petit, (45.9) a une solution t unique, voisine

de zéro; elle est holomorphe en $\xi \cdot y/g, \xi_1, \dots, \xi_l, y$; son développement suivant les puissances de $\xi \cdot y/g$ est

$$t = -\frac{p}{p-1} \frac{\xi \cdot y}{g} + \dots$$

En le portant dans (45.8), nous voyons que $t(\xi, y)$, supposé $\neq 0$, se ramifie, quand ξ^* appartient à l'ensemble analytique.

$$W_i^* : g(y, \xi) + \frac{(-p)^p}{(p-1)^{p-1}} N_i(0, \xi_1, \dots, \xi_l, y) \left(\frac{\xi \cdot y}{g} \right)^{p-1} + \dots = 0;$$

le premier membre est holomorphe en $\xi \cdot y/g, \xi_1, \dots, \xi_l, y$; nous avons écrit le début de son développement de Taylor en $\xi \cdot y/g$; vu (37.1) son gradient $\neq 0$; W_i^* est donc une variété

Voilà achevée la preuve du lemme, qui donne la

PROPOSITION 45. — *Étant données une fonction $f(\xi, y)$, une projection $\xi(t, \eta, y)$ l'uniformisante et une composante connexe g_i^* de Reg^* , $f(\xi, y)$ a l'une des trois allures suivantes au voisinage de g_i^* :*

1° $f(\xi, y)$ est holomorphe au voisinage de g_i^* ;

2° Il n'existe pas de voisinage de g_i^* sur lequel $f(\xi, y)$ est holomorphe, mais $f(\xi, y)$ est holomorphe pour

$$(45.10) \quad \xi^* \text{ voisin de } g_i^*, \quad (\xi \cdot y) |\xi|^{m-1}/g(y, \xi) \text{ petit.}$$

Alors $K_i = C_i$.

3° Dans V_i^* , $f(\xi, y)$ se ramifie sur $W_i^* \cup g^*$ [le lemme 45 définit V_i^* et W_i^* , où (45.10) a lieu].

Alors $\text{Re } W_i^*$ est l'ensemble des hyperplans ξ^* tangents à K_i et $\in V_i^*$; $K_i \neq C_i$.

Cette proposition 45 englobe et précise la proposition 5.3.

PREUVE. — Puisque $f(\xi, y)$ est uniformisable, il existe une fonction $F[\varphi, y]$, holomorphe sur $\Psi \times X$ telle que

$$f(\xi, y) = F[\varphi(\xi, y), y].$$

Supposons la projection $\xi(\varphi, y)$ exceptionnelle; alors, vu le lemme 45, $f(\xi, y)$ est holomorphe quand ξ vérifie (45.10) : l'un des cas 1° ou 2° de la proposition 45 est donc réalisé.

Supposons la projection $\xi(\varphi, y)$ ordinaire; alors, vu le lemme 45, $f(\xi, y)$ est algébroïde sur V_i^* et ne peut se ramifier que sur $W_i^* \cup g^*$. Quand ξ^* fait un tour autour de la variété de W_i^* , près d'un de ses points, les déterminations de $f(\xi, y)$ subissent une permutation; c'est la même en tous les points de W_i^* , car W_i^* est connexe. Si ce n'est pas la permutation identique, alors $f(\xi, y)$ se ramifie en tous les points de W_i^* : le cas 3° de la proposition 45

est réalisé. Si c'est la permutation identique, alors $f(\xi, \gamma)$ est donc holomorphe uniforme et bornée sur $V_i^* - W_i^*$; donc (voir le traité d'OSGOOD que cite [I]) $f(\xi, \gamma)$ est holomorphe sur $V_i^* - g^*$; donc (voir OSGOOD), est holomorphe sur V_i^* ; autrement dit, dans un certain voisinage de g_i^* , f est holomorphe en tout point de $y^* - a_i^*$; donc, vu le lemme 20 de [I], $f(\xi, \gamma)$ est holomorphe au voisinage de g_i^* : le cas 1° de la proposition 43 est réalisé.

CHAPITRE 6. — La transformation \mathcal{L} .

Maintenant que le chapitre 4 a défini et étudié $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$, la définition (10.1) de \mathcal{L} a un sens et nous pouvons prouver ses propriétés, qu'énoncent les nos 10 et 11: c'est l'objet du présent chapitre, à l'exception de la preuve de la formule $\mathcal{L}[1] = \delta(x - y)$, qui constitue le chapitre 7.

Le présent chapitre emploie tous les résultats qu'établissent les chapitres précédents et [III].

Tout d'abord, nous définirons $\mathcal{L}[f]$ par (10.1), pour tout $x \in X - y$ en faisant l'hypothèse (4.4), mais sans faire d'hypothèse d'hyperbolicité; puis le n° 53 introduira cette hypothèse et modifiera la définition de $\mathcal{L}[f]$ pour $x_1 < y_1$.

46. Calcul de $\mathcal{L}[\xi_j f]$. — Supposons $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ uniformisé par une projection $\xi(t, \eta, \gamma)$; uniformisons $\xi_j f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ par cette même projection.

PREUVE DE (10.3). — Les formules de dérivation qu'énoncent les théorèmes 3 et 5 de [III].

PREUVE DE (10.4). — Vu (10.3), on a

$$\mathcal{L}[\xi_0 f] + \sum_{j=1}^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\xi_0 f] + \sum_{j=1}^l x_j \mathcal{L}[\xi_j f];$$

si $l < n - 1$, cette expression vaut, vu (10.1)₁:

$$\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{(\xi \cdot x)^{n-l-1}}{(n-l-2)!} f \omega^* = (n-l-1) \mathcal{L}[f];$$

si $n-1 \leq l$, elle vaut, vu (10.1)₂:

$$\frac{(-1)^{n-l}}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{d^{l+l-n}[(\xi \cdot x) f \omega^*]}{(d\xi \cdot x)^{2+l-n}};$$

donc, vu la formule (7.3) de [III], elle vaut

$$\frac{(-1)^{n-l}(1+l-n)}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h \frac{d^{l-n}[f \omega^*]}{(d\xi \cdot x)^{1+l-n}} = (n+l-1) \mathcal{L}[f].$$

47. Calcul de $\mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right]$. — Supposons f uniformisé par une projection $\xi(t, \eta, \gamma)$; vu la proposition 5.2, nous uniformisons $\frac{\partial f}{\partial \xi_j} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ par cette même projection; prouvons (10.5) et (10.6). Si $l = n$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \omega^*(\xi) &= \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \xi_0 d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l - \frac{\partial f}{\partial \xi_0} d\xi_0 \wedge \omega' \\ &= \left(\xi_0 \frac{\partial f}{\partial \xi_0} + \dots + \xi_l \frac{\partial f}{\partial \xi_l} \right) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l - df \wedge \omega' \\ &= -f d\omega' - df \wedge \omega' = -d[f\omega']; \end{aligned}$$

d'où, pour n quelconque :

$$(47.1) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_0} [(\xi, x)^{n-l} f] \omega^* = -d[(\xi, x)^{n-l} f \omega'].$$

Un calcul analogue donne la formule (52.2) de [III] :

$$\omega^*(\xi) = \frac{\xi, x}{l} d\omega' - d(\xi, x) \wedge \omega';$$

d'où résulte que

$$(47.2) \quad \left. \frac{f \omega^*}{d\xi, x} \right|_{\tilde{x}} = -f \omega' \quad \text{quand } l = n.$$

De (47.1) résultent les cohomologies ([III], n° 4) :

$$(47.3) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_0} [(\xi, x)^{n-l} f] \omega^* \sim 0 \quad \text{sur } (\tilde{\Psi}, \tilde{x}) \quad \text{si } l < n;$$

$$(47.4) \quad \sim 0 \quad \text{sur } \tilde{\Psi} - \tilde{x} \quad \text{si } n < l.$$

Si $l = n$, remplaçons dans la formule (7.10) de [III] m par zéro, S par $\tilde{\Psi}$, S' par y^* , S'' par \tilde{x} , ψ par $f\omega'$: on obtient la formule

$$\partial^* \left[(f\omega') \Big|_{(\tilde{x}, y^*)} \right] = d(f\omega') \Big|_{(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)}$$

que (47.1) et (47.2) transforment en la formule

$$(47.5) \quad \partial^* \left[\frac{f \omega^*}{d\xi, x} \Big|_{\tilde{x}} \right] = \frac{\partial f}{\partial \xi_0} \Big|_{(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)}.$$

Ces trois formules (47.3), (47.4), (47.5) subsistent évidemment quand on remplace $\frac{\partial}{\partial \xi_0}$ par $\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$: on peut permuter dans leurs preuves les rôles de ξ_0 et ξ_k à condition de remplacer x_l par x_l/x_k . Elles ont donc les conséquences suivantes, où x_0 désigne 1.

Si $l < n$, alors (47.3) donne

$$x_k \frac{(\xi, x)^{n-l-1}}{(n-l-1)!} f \omega^* \sim - \frac{(\xi, x)^{n-l}}{(n-l)!} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \omega^* \quad \text{sur } (\tilde{\Psi}, \tilde{x}),$$

ce qui porté dans (10.1)₁ donne (10.5) et (10.6).

Si $n < l$ alors (47.4) donne

$$x_k (l-n) \frac{f \omega^*}{(\xi, x)^{1+l-n}} \sim \frac{1}{(\xi, x)^{l-n}} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \omega^* \quad \text{dans } \tilde{\Psi} - \tilde{x};$$

donc, vu la définition de la classe résidu par le n° 5 de [III] :

$$x_k (l-n)! \text{ Rés} \left[\frac{f \omega^*}{(\xi, x)^{1+l-n}} \right] = (l-n-1)! \text{ Rés} \left[\frac{1}{(\xi, x)^{l-n}} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \omega^* \right]$$

et, vu la notation différentielle du Rés, que définit la formule (7.2) de [III] :

$$x_k \frac{d^{l-n}(f \omega^*)}{(d\xi, x)^{1+l-n}} \Big|_{(\tilde{x}, y)} = \frac{d^{l-n-1}}{(d\xi, x)^{l-n}} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_k} \omega^* \right] \Big|_{(\tilde{x}, y^*)},$$

ce qui porté dans (10.1)₂ donne (10.5) et (10.6).

Supposons enfin $l = n$; vu (47.5) et (6.2), puisque ∂^* est le transposé de ∂ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_k} \omega^* \right] &= \frac{x_k}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_{h(\tilde{\Psi}, \tilde{x}, y^*)} \partial^* \left[\frac{f \omega^*}{d\xi, x} \right] \\ &= \frac{x_k}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_{h(\tilde{x}, y^*)} \frac{f \omega^*}{d\xi, x} = -x_k \mathcal{L}[f], \end{aligned}$$

ce qui prouve (10.5) et (10.6).

48. Calcul de $\mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \right]$. — La formule (10.7) :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{L}[f] = \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} \right],$$

où la même projection sert à définir les deux membres, s'obtient en remplaçant dans la proposition 17.2 :

$$\begin{aligned} &X, \quad S, \quad S', \quad t, \quad u, \quad x, \quad z(x, t), \quad s[z, y, u], \quad \omega \\ \text{par} & \\ &\tilde{\Psi}, \quad \tilde{x}, \quad y^* \quad y, \quad x, \quad (t, \eta), \quad \xi(t, \eta, y), \quad \xi, x, \quad f(\xi, y) \omega^*(\xi). \end{aligned}$$

49. $\mathcal{L}[r(\xi_1, \dots, \xi_l)]$ est homogène de degré $n - l$ en $x - y$. — Soit $r(\xi)$ une fonction de ξ_1, \dots, ξ_l , homogène de degré $-n$. Si $r(\xi) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$

est uniformisé, alors, vu la proposition 5.1, $r(\xi)$ est une fonction rationnelle de dénominateur $g(\xi)$; la projection polynomiale (4.10) uniformise alors $r d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l$ et $(\xi, y) r(\xi)$ car

$$d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l = -g(\eta) dt \wedge d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l, \quad \xi, y = -t g(\eta).$$

Cette projection polynomiale uniformise donc plus généralement

$$\frac{(-\xi, y)^p}{p!} r(\xi)$$

quand $r(\xi)$ est une fonction rationnelle de dénominateur $g^p(\xi)$. Le n° 10 énonce la propriété suivante, qu'emploiera le n° 51 et que retrouvera le chapitre 7.

PROPOSITION 49. — Soit $r(\xi)$ une fonction rationnelle de ξ_1, \dots, ξ_l , homogène de degré $-n$, ayant pour dénominateur $g^p(\xi)$, $g(\xi)$ étant hyperbolique; $\mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right]$ ne dépend que de $x-y$ et est positivement homogène en $x-y$ de degré $n-l$.

PREUVE. — Vu (10.6),

$$\mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right] = \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^p}{p!} r(\xi) \right].$$

D'où, vu (10.3) et (10.7) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right] \\ &= \mathcal{E} \left[\xi_j \frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) + \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{(-\xi, y)^p}{p!} r(\xi) \right] = 0; \end{aligned}$$

vu (10.3) et (10.4)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right] \\ &= (n - p - l) \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right] + \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^p}{(p-1)!} r(\xi) \right] \\ &= (n - l) \mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{et} \quad \sum_j (x_j - y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} - (n - l)$$

annulent $\mathcal{E} \left[\frac{(-\xi, y)^{p-1}}{(p-1)!} r(\xi) \right]$; d'où la proposition.

50. Allure de $\mathcal{L}[f]$ pour $x \neq y$. — Prouvons le *théorème 3*, n° 11; provisoirement nous définissons \mathcal{L} par (10.1) pour tout x ; $K_+(y)$ doit alors être remplacé par $K(y)$.

Pour $x \in X - K(y)$, $\mathcal{L}[f]$ est une fonction holomorphe de (x, y) , vu le *théorème 3* de [III].

Étudions l'allure de $\mathcal{L}[f]$ sur $K(y) - y$; quand $x \in K(y) - y$, le point singulier réel de \tilde{x} appartient à $\tilde{\Psi} - y^*$; sur ce domaine employons les coordonnées locales :

$$\eta_1, \dots, \eta_l, \quad \text{en fixant } t.$$

Appliquons la proposition 20, en remplaçant, vu (3.3) et (4.1)

$$X, \quad S, \quad J(t), \quad H_i(t), \quad q, \quad x, \quad t, \quad s(x, y, t)$$

par

$$\tilde{\Psi}, \quad \tilde{x}, \quad \mathcal{L}[f], \quad H_i(x, y), \quad 1 + l - n, \quad \eta, \quad x, \quad -\xi(t, \eta, y) \cdot x$$

$$\text{et } \rho(x, y) \quad \text{par} \quad \frac{(1-m)t}{2(2\pi i)^{l-1}} f \frac{D(\tilde{z})}{D(t, \eta)};$$

l'orientation (7.2) de $\text{Re } \tilde{x}$ coïncide avec celle que la définition (20.3) donne à $\text{Re } S$; le n° 20 donne à $\text{Im } S$ l'orientation associée à l'orientation

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l > 0 \quad \text{de } \text{Re } X$$

la proposition 8.1 donne à $\text{Im } \tilde{x}$, quand l est pair, l'orientation associée à l'orientation

$$-t g_1(\eta) d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_l \quad \text{de } \text{Re } \tilde{\Psi};$$

c'est l'orientation précédente multipliée par $-\text{sgn}(t g_1)$. Nous obtenons ainsi, vu cette proposition 8.1, la conclusion suivante, qui emploie les définitions 11.1 des χ_p et 11.2 de $\sqrt{\text{Hess}}$:

Supposons f réel. Choisissons (t, η) et l'équation locale de $K(y)$,

$$K(y) : \quad k(x, y) = 0$$

tels que les hypothèses de la proposition 20 soient vérifiées :

$$k_{x_i} = \xi_i; \quad k > 0 \text{ du côté positif de } K, \text{ si } l \text{ est impair.}$$

Il existe alors au voisinage de $K(y) - y$ trois fonctions holomorphes $H_1(x, y)$, H_2 et H_3 telles que

$$(50.1) \quad \mathcal{L}[f] = \text{Re} \{ H_1(x, y) \chi_{n-(l/2)-1}[k(x, y)] + H_2 \chi_0[k] \} + H_3(x, y);$$

si l est impair, alors $H_2 = 0$, H_1 et H_3 sont réels;

si l est pair, alors $H_2 = 0$ pour $1 + (l/2) \leq n$, H_3 est réel, H_1 et H_2 sont imaginaires purs (réels) sur les nappes positives (négatives) de $K(y)$.

Pour $x \in K(y) - y$,

$$(50.2) \quad H_1(x, y) = \frac{i^{l+1} (2\pi)^{1-(l/2)} (m-1) t}{\sqrt{|\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x]|}} f(\xi, \eta) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} \text{sgn}[t g_1(\eta)]^{l-1},$$

où (t, η) est le point singulier de \tilde{x} .

Quand nous aurons supposé la projection ξ hyperbolique, choisi

$$g_1 = \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[f] = 0 \quad \text{pour} \quad x_1 < y_1,$$

alors le support de la singularité de $\mathcal{L}[f]$ se réduira à $K_+(y)$, où $x_1 \geq y_1$; pour $x \in K_+(y)$, le point singulier réel (t, η) de \tilde{x} vérifie donc, vu (36.8);

$$t g_{\eta_1} > 0;$$

(50.2) s'identifie donc à (41.7).

51. Allure de $\mathcal{L}[f]$ pour $x = y$. -- Prouvons le *théorème 4*, n° 11. Écrivons $\mathcal{L}[f](x, y)$ au lieu de $\mathcal{L}[f]$; dans \mathcal{X} , envisageons l'homothétie $T(\tau)$ de centre y , de rapport $\tau > 0$:

$$T = T(\tau) : \quad x \rightarrow y + \tau(x - y);$$

nous obtiendrons ce théorème 4 en étudiant l'allure, pour τ petit, de

$$(51.1) \quad \tau^{l-n} \mathcal{L}[f(\xi, y)](Tx, y);$$

cette allure résultera du théorème 3, que nous venons d'établir, plus précisément du corollaire 3 et de la note qui le suit (n° 11).

Commençons par transformer (51.1). Les homothéties $T(\tau)$ constituent un groupe de paramètre $\log \tau$; dans Ξ , considérons le groupe des transformations dépendant de ce même paramètre :

$$\Theta = \Theta(\tau) : \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l) \rightarrow (\tau \xi_0, y - \xi_1 y_1 - \dots - \xi_l y_l, \xi_1, \dots, \xi_l).$$

Évidemment

$$(51.2) \quad \begin{aligned} Ty &= y, & \Theta \eta &= \eta, \\ \Theta \xi . Tx &= \tau \xi . x, & \omega^*(\Theta \xi) &= \tau \omega^*(\xi). \end{aligned}$$

Puisque $\xi(t, \eta, y)$ uniformise $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$, on uniformise

$$f(\Theta^{-1}\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

en y substituant $\Theta \xi(t, \eta, y)$ à ξ ; (51.2) permet donc de comparer les formules (10.1) définissant

$$\mathcal{L}[f(\Theta^{-1}\xi, y)](Tx, y) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[f](x, y);$$

on obtient

$$\mathcal{L}[f(\Theta^{-1}\xi, y)](Tx, y) = \tau^{n-l} \mathcal{L}[f(\xi, y)](x, y).$$

En remplaçant dans cette relation $f(\xi, y)$ par $f(\Theta\xi, y)$, il vient

$$(51.3) \quad \tau^{l-n} \mathcal{L}[f(\xi, y)](Tx, y) = \mathcal{L}[f(\Theta\xi, y)](x, y).$$

Étudions maintenant l'allure du second membre quand τ est petit; nous supposons $0 < \tau \leq 1$; nous uniformiserons $f(\Theta\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ en substituant à ξ , non pas, comme il serait licite :

$$(51.4) \quad \Theta^{-1}\xi(t, \eta, y) = \Theta(\tau^{-1})\xi(t, \eta, y),$$

mais

$$(51.5) \quad \Theta^{-1}\xi(\tau t, \eta, y);$$

(51.4) n'est pas holomorphe pour $\tau=0$; au contraire (51.5) l'est, car (36.1) donne

$$(51.6) \quad \frac{1}{\tau} \xi(\tau t, \eta, y) \cdot y = -tg(y, \eta) + \sum_{q \geq 2} \tau^{q-1} t^q P_q(\eta, y, y).$$

La proposition 5.1 définit $r(\xi, y)$ en supposant que $f(\xi, y)$ s'annule p fois pour $\xi \cdot y = 0$ ($p \geq 0$); la fonction de (τ, t, η, y)

$$f(\xi(\tau t, \eta, y), y) \frac{D(\xi(\tau t, \eta, y))}{D(t, \eta)},$$

qui est holomorphe, s'annule donc $p+1$ fois pour $\tau=0$; donc

$$(51.7) \quad \begin{aligned} \tau^{-p-1} f(\xi(\tau t, \eta, y), y) \frac{D(\xi(\tau t, \eta, y))}{D(t, \eta)} \\ = \tau^{-p} f(\xi(\tau t, \eta, y), y) \frac{D(\Theta^{-1}\xi(\tau t, \eta, y))}{D(t, \eta)} \end{aligned}$$

est holomorphe pour $\tau=0$. Notons enfin ceci : vu (51.6),

$$(51.8) \quad \Theta^{-1}\xi(\tau t, \eta, y) \Big|_{\tau=0} = (\eta_0 - tg(y, \eta), \eta_1, \dots, \eta_l)$$

est la projection polynomiale; vu (5.1) et (51.6),

$$\tau^{-p} f(\xi(\tau t, \eta, y), y) \Big|_{\tau=0} = \frac{[tg(y, \eta)]^p}{p!} r(\eta, y)$$

est la fonction résultant de la substitution de (51.8) à ξ dans $\frac{(-\xi, y)^p}{p!} r(\xi, y)$.

L'holomorphie de (51.5) et (51.7) permet d'appliquer le corollaire 3 (n° 11) et la note qui le suit à

$$\mathcal{L}[\tau^{-p} f(\Theta\xi, y)](x, y)$$

quand

$$(51.9) \quad 0 < \text{Cte} \leq |x - y| \leq \text{Cte}, \quad 0 \leq \tau \leq 1;$$

nous obtenons les résultats que voici :

1° Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(51.10) \quad 1 + (l/2) < n,$$

$$(51.11) \quad 1 + (l/2) = n, \quad l \text{ pair, } K(y) \text{ négatif,}$$

alors $\mathcal{L}[\tau^{-p} f(\Theta_{\xi}^{\tau}, y)](x, y)$ est borné.

2° Si (51.10) a lieu, alors $\mathcal{L}[\tau^{-p} f(\Theta_{\xi}^{\tau}, y)](x, y)$ est une fonction de (x, y, τ) qui vérifie une condition de Hölder, d'exposant $\rho(l, n)$ défini par (11.11), et dont la limite pour $\tau = 0$, est

$$\mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot \mathcal{Y})^p}{p!} r(\xi, y) \right].$$

La preuve du théorème 4 est maintenant aisée :

(51.3) transforme 1° en ceci : Si (51.10) ou (51.11) a lieu, alors

$$(51.12) \quad \tau^{l-n-p} |\mathcal{L}[f(\xi, y)](Tx, y)| \leq \text{Cte}.$$

Vu (51.9), Tx est un point arbitraire de la sphère

$$|Tx - y| \leq \text{Cte};$$

τ est un nombre tel que

$$\text{Cte} \tau \leq |Tx - y| < \text{Cte} \tau;$$

(51.12) équivaut donc à (11.9).

De même (51.3) déduit de 2° ceci : Si (51.10) a lieu, alors

$$\left| \tau^{l-n-p} \mathcal{L}[f(\xi, y)](Tx, y) - \mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot \mathcal{Y})^p}{p!} r(\xi, y) \right](x, y) \right| < \tau^p.$$

Or, vu la proposition 49,

$$\mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot \mathcal{Y})^p}{p!} r(\xi, y) \right](x, y) = \tau^{l-n-p} \mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot \mathcal{Y})^p}{p!} r(\xi, y) \right](Tx, y);$$

l'inégalité précédente s'écrit donc :

$$\tau^{l-n-p-\rho} \left| \mathcal{L}[f(\xi, y)](Tx, y) - \mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot \mathcal{Y})^p}{p!} r(\xi, y) \right](Tx, y) \right| < \text{Cte}.$$

d'où (11.10) par le raisonnement qui vient de déduire (11.9) de (51.12).

52. $\mathcal{L}[f]$ ne dépend pas de l'uniformisation de f . — Ce théorème sera déduit d'une nouvelle expression de $\mathcal{L}[f]$, par des intégrales dans Ξ^* ; cette expression résultera de la proposition 8.2.

NOTATIONS. — Nous avons noté g_i^* ($i = 1, 2, \dots$) les composantes connexes de $\text{Re } g^*$; mettons à part celles en tous points desquelles $f(\zeta, y)$ est holomorphe; notons g_0^* la réunion des autres :

$$g_0^* \subset \text{Re } g^*;$$

en général

$$g_0^* = \text{Re } g^*.$$

Nous avons noté C_i et K_i les nappes de $C(y)$ et $K(y)$ correspondant à g_i^* ; notons maintenant C_0 (et K_0) la réunion des C_i (et des K_i) tels que $g_i^* \subset g_0^*$:

$$C_0 \subset C(y), \quad K_0 \subset K(y);$$

en général :

$$C_0 = C(y), \quad K_0 = K(y).$$

Soit $\Omega^*(y)$ un domaine de Ξ^* possédant les propriétés suivantes :

$$y^* - g^* \subset \Omega^*, \quad \text{Re } y^* - g_0^* \subset \Omega^*;$$

$f(\zeta, y)$ est holomorphe pour $\zeta \in \Omega^*$;

$y^* \cap \Omega^*$ est rétracte par déformation de Ω^* .

En général $y^* \cap \Omega^* = y^* - g^*$; sinon nous avons besoin de compléter par la suivante la définition 8 de $h(y^* - g^*, \tilde{x})$: l'inclusion

$$y^* - g^* \subset y^* \cap \Omega^*$$

induit un homomorphisme naturel

$$H_c(y^* - g^*, \tilde{x} \cap y^*) \rightarrow H_c(y^* \cap \Omega^*, x^* \cap y^*), \quad \text{où } \tilde{x} \cap y^* = x^* \cap y^*,$$

qui transforme la classe $h(y^* - g^*, \tilde{x})$ en une classe que nous noterons $h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$.

$h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$ est définie quand x^* ne touche pas g_0^* , c'est-à-dire quand $x \notin C_0$ et dépend continûment de x ; on le voit aisément comme suit : quand l est impair, $h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$ est la classe de deux fois le cycle $\text{Re } y^*$, détourné de g_0^* ; quand l est pair, $h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$ est le cobord de g_0^* muni de l'orientation (7.5); g^* a été remplacé par sa partie voisine de g_0^* .

Soit un cône fermé, de sommet y , voisin de $C_0(y)$ et dont l'intérieur contient $C_0(y) - y$; soit $Y_0(y)$ l'intersection du complémentaire de ce cône fermé et d'une boule ouverte, de centre y ; choisissons cette boule assez petite pour pouvoir définir, quand $x \in Y_0(y)$, une classe d'homologie $h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$ ayant les propriétés suivantes :

- elle dépend continûment de $x \in Y_0(y)$;
- elle tend vers $h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$ quand x tend vers y le long d'un segment $C \subset Y_0(y)$.

Cela signifie ceci : on peut appliquer dans $x^* \cap \Omega^*$ tout compact de $y^* \cap \Omega^*$ par des applications voisines de l'identité, dont la restriction à $x^* \cap y^*$ soit l'identité; elles appliquent $h(y^* \cap \Omega^*, x^*)$ sur $h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$.

Soit $h(\Omega^*, x^* \cup y^*)$ la classe, unique puisque $H_c(\Omega^*, y^*) = 0$, telle que

$$\partial h(\Omega^*, x^* \cup y^*) = h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$$

elle dépend continûment de x .

Ces définitions et la définition 40 de $Y(y)$ — qui dépendra au choix de la projection — permettent d'énoncer comme suit la proposition 8.2 : supposons $Y(y)$ assez petit et $x \in Y(y)$; alors la projection $\xi(t, \eta, y)$, qui projette \tilde{x} dans x^* et identiquement y^* sur y^* transforme certains cycles de la classe $h(\tilde{x}, y^*)$ en cycle de la classe $h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$. Elle transforme donc aussi certains cycles de la classe $h(\tilde{\Phi}, \tilde{x} \cup y^*)$ en cycles de $h(\Omega^*, x^* \cup y^*)$.

D'où, vu la formule classique $\int_{Fh} \omega = \int_h F^* \omega$ et la formule (7.5) de (III), l'expression nouvelle de $\mathcal{L}[f]$ que voici :

LEMME 52.1. — Quand $x \in Y(y)$, on peut dans les formules (10.1) qui définissent $\mathcal{L}(f)$, choisir respectivement

$$h = h(\Omega^*, x^* \cup y^*) \quad \text{et} \quad h = h(x^* \cap \Omega^*, y^*).$$

Bien entendu, avec de tels choix de h , les seconds membres de ces formules sont holomorphes pour $x \in Y_0(y)$. D'où grâce à la proposition 5.3 le

LEMME 52.2. — La fonction $\mathcal{L}[f]$ est indépendante du choix de la projection, uniformisant f , qu'emploie la définition de $\mathcal{L}[f]$.

NOTE. — D'après le théorème 3, cette fonction est $\mathcal{L}[f]$ elle-même, si $n > l/2$, et est, sinon, la restriction de $\mathcal{L}[f]$ à $X - K(y)$.

PREUVE. — Vu ce théorème 3, $\mathcal{L}[f]$ est une fonction de x holomorphe sur chacune des composantes connexes de

$$(52.1) \quad X - K(y);$$

vu le lemme 52.1, $\mathcal{L}[f]$ est holomorphe en tout point de $K(y) - K_0$ et est égale, sur $Y(y) \cap Y_0(y)$, à une fonction holomorphe indépendante du choix de l'uniformisation de f ; le lemme est donc vrai si K_0 est indépendant de ce choix; c'est ce qu'a prouvé la proposition 5.3.

PROPOSITION 52. — $\mathcal{L}[f]$ est indépendant du choix de la projection uniformisant f , qu'emploie la définition de \mathcal{L} .

PREUVE. — Soit $b(\xi)$ un polynôme en (ξ_1, \dots, ξ_2) homogène, de degré q et elliptique :

$$b(\xi) \neq 0 \quad \text{pour } \xi \text{ réel.}$$

On a $b(\xi(t, \eta, \gamma)) \neq 0$ pour $\eta^* \in \mathfrak{V}^*$, \mathfrak{V}^* (proposition 42) et $\tilde{\Psi}$ suffisamment petits; la proposition 42 permet donc d'étendre à $\mathcal{L}[f/b]$ la définition de $\mathcal{L}[f]$ et celles de ses propriétés qui sont à présent établies (mais non celles qu'établiront les nos 53 et 54). Nous venons de voir que, pour $q + n > l/2$, $\mathcal{L}[f/b]$ est une fonction indépendante du choix de la projection uniformisante f qu'emploie la définition de $\mathcal{L}[f/b]$; donc, vu (10.3), la distribution

$$\mathcal{L}[f] = b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L}[f/b]$$

est, elle aussi, indépendante de ce choix.

53. L'hypothèse d'hyperbolicité. — Nous supposons désormais que f puisse être uniformisé par des projections hyperboliques, vérifiant (4.4) et (9.1); nous n'emploierons plus que de telles projections et nous supposons que le n° 7 a choisi

$$g_1 = \frac{\partial g}{\partial \eta_1}.$$

Alors, vu la proposition 9,

$$h(y^* - g^*, \tilde{x}) = 0 \quad \text{pour } x_1 \geq y_1, \quad x \notin \mathcal{O}_+(y);$$

donc, quand y appartient à une composante connexe de $Y_0(y)$ n'appartenant ni à $\mathcal{O}_+(y)$ ni au demi-cône opposé $\mathcal{O}_-(y)$, on a

$$h(x^* \cap \Omega^*, y^*) = 0, \quad h(\Omega^*, x \cup y^*) = 0;$$

donc, vu le lemme 52.1 : $\mathcal{L}[f] = 0$ sur toute composante connexe de $Y(y)$ n'appartenant ni à $\mathcal{O}_+(y)$ ni à $\mathcal{O}_-(y)$; donc, vu le théorème 3 :

PROPOSITION 53. — $\mathcal{L}[f] = 0$ pour $x_1 \geq y_1$, $x \notin \mathcal{E}_+(y)$.

Conformément au n° 10, nous modifions la définition de $\mathcal{L}[f]$, pour $x_1 < y_1$, en posant

$$\mathcal{L}[f] = 0 \quad \text{pour } x_1 < y_1.$$

Alors le théorème 2 vaut, ainsi que toutes les propriétés de $\mathcal{L}[f]$ établies ci-dessus; dans l'énoncé du théorème 3, nous n'avons plus à remplacer K_+ par K .

54. Définition de $\mathcal{L}[f]$ pour $x = y$. — Nous supposons désormais f rationnellement uniformisable, son polynôme g hyperbolique, (4.4) et (9.1) vérifiés. Soient $b(\xi)$ et $c(\xi)$ deux polynômes en ξ_1, \dots, ξ_l , homogènes de degrés q et r , hyperboliques, tels que $b(\eta) c(\eta) g(\gamma, \eta)$ soit hyperbolique et vérifie (4.4) et (9.1) : on peut évidemment construire de tels polynômes en les choisissant par exemple produits de polynômes du second degré.

Vu la formule (11.9) du théorème 4,

$$\mathcal{L}[f(\xi, \gamma)/b(\xi) c(\xi)], \quad \mathcal{L}[f/b] \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[f/c]$$

sont des fonctions de x , sommables sur \mathcal{X} , si

$$1 + l/2 - n < q \quad \text{et} \quad \dots < r,$$

ce que nous supposerons; vu (10.3), ces fonctions sont liées par les relations, valables sur \mathcal{X} :

$$\mathcal{L}[f/b] = c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L}[f/bc], \quad \mathcal{L}[f/c] = b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L}[f/bc];$$

d'où, sur \mathcal{X} , l'égalité de distribution :

$$(54.1) \quad b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L}[f/b] = c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L}[f/c];$$

cette distribution (54.1) est donc indépendante des choix de b et c ; vu (10.3), sa restriction à $\mathcal{X} - y$ est la distribution $\mathcal{L}[f]$ que définit (10.1).

Désormais, $\mathcal{L}[f]$ sera la distribution, fonction de y , que (54.1) définit sur \mathcal{X} .

Il est évident qu'un changement linéaire des coordonnées n'altère pas sa définition; toutes les propriétés de $\mathcal{L}[f]$ prouvées ci-dessus subsistent; seule la vérification de (10.4) et (10.5) exige un bref calcul, que voici :

PREUVE DE (10.4). — Rappelons la formule classique :

$$(54.2) \quad b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) [x_j u(x)] = x_j b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) + b_{\xi_j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x).$$

Donc, puisque (10.4) vaut quand n est assez grand pour que $\mathcal{L}[f]$ et $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}[f]$ soient des fonctions, on a pour q suffisamment grand et

$$f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$$

rationnellement uniformisable :

$$\begin{aligned} & \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}[f] \\ &= \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \\ &= b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] - \sum_j b_{\xi_j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \\ &= (n + q - l - 1) b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] - b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\xi_0 \frac{f}{b} \right] - qb \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \\ &= (n - l - 1) \mathcal{L}[f] - \mathcal{L}[\xi_0 f]; \end{aligned}$$

(10.4) vaut donc sur \mathcal{X} .

PREUVE DE (10.5). — Puisque (10.5) vaut quand n est assez grand, on a, vu (31.2), pour q grand et f rationnellement uniformisable :

$$\begin{aligned} x_j \mathcal{L}[f] &= x_j b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \\ &= b \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ x_j \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \right\} - b \xi_j \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{L} \left[\frac{f}{b} \right] \\ &= - \mathcal{L} \left[b \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{f}{b} \right) + b \xi_j \frac{f}{b} \right] = - \mathcal{L} \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right]; \end{aligned}$$

(10.5) vaut donc sur X .

55. **Biunivocité et autres propriétés de \mathcal{L} .** — Nous pouvons maintenant établir le théorème 1 (n° 10) en admettant (10.8), que prouvera le prochain chapitre.

PREUVE DU THÉORÈME 1, 1° — Soit $f(\xi, y) d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ (rationnellement) uniformisable; notons $F(\xi, y)$ la primitive, relativement à ξ_0 , de $f(\xi, y)$ qui s'annule pour $\xi, y = 0$; F est homogène de degré $1 - n$ en ξ , f l'étant de degré $-n$; vu la proposition 5.2, F est (rationnellement) uniformisable; vu (10.6)

$$\mathcal{L}[f] = - \mathcal{L}[F];$$

cela établit le 1° du théorème 1.

Pour établir le 2° nous emploierons le

LEMME 55. — Si $f d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisable et si la partie principale de la singularité de $\mathcal{L}[f]$ décrite par le théorème 3 est nulle, alors f est uniformisable.

Ce lemme exige l'emploi de la proposition 42 et de $\tilde{\Theta}$ à la place de $\tilde{\Psi}$; la preuve du théorème 1, 2° emploiera elle aussi $\tilde{\Theta}$.

PREUVE. — Par hypothèse, $f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)}$ est une fonction holomorphe de (t, η, y) pour

$$(t, \eta) \text{ réel; } |t| \cdot |\eta|^{m-1} < \text{Cte};$$

vu l'hypothèse du lemme, la formule (11.7) du théorème 3 et la formule (36.8), on a

$$\begin{aligned} f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} &= 0 \\ \text{pour } \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} &= 0, \quad (t, \eta) \text{ réel, } \quad t g_{\eta_1}(y, \eta) > 0; \end{aligned}$$

vu que $\text{Re } g^*$ n'a pas de singularité, la partie réelle de la variété $\frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} = 0$

est sans singularité, $f(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)}$ s'y annule et $\frac{D(\xi)}{D(t, \eta)}$ s'y annule une fois; donc $f(\xi(t, \eta, y), y)$ est holomorphe sur $\text{Re } \tilde{\Psi}$; donc sur

$$\tilde{\Theta} : \eta^* \text{ voisin de } \text{Re } y^*; \quad |t| \cdot |\eta|^{m-1} \text{ petit};$$

ce qui signifie que f est uniformisable puisque $\tilde{\Theta}$ remplace $\tilde{\Psi}$.

PREUVE DU THÉORÈME 1, 2°. — Supposons $f d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l$ uniformisable et $\mathcal{L}[f]$ holomorphe sur $\mathcal{X} - y$; d'après le lemme précédent, f est uniformisable, donc, vu la proposition 3.2,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_0} d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l$$

aussi; donc, par récurrence :

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^p f}{\partial \tilde{z}_0^p}, \quad \dots$$

sont uniformisables; donc, vu la proposition 3.1, $\left. \frac{\partial^p f}{\partial \tilde{z}_0^p} \right|_{\tilde{\xi}, y}$ est un polynôme en $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_l$, à coefficients fonctions holomorphes de y , de degré $-(n+p)$; donc $f(\tilde{\xi}, y)$ est un polynôme en $\tilde{\xi}$ à coefficients holomorphes en y . Donc $f(\tilde{\xi}, y) d\tilde{z}_0 \wedge \dots \wedge d\tilde{z}_l$ est rationnellement uniformisable; par suite $\mathcal{L}[f]$ est une distribution définie sur \mathcal{X} . Mettons f sous la forme

$$f(\tilde{\xi}, y) = \sum_{q=0}^{-n} \frac{(-\tilde{\xi}, y)^q}{q!} P_q(\tilde{\xi}, y),$$

$P_q(\tilde{\xi}, y)$ étant un polynôme en $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_l$, homogène de degré $-n-q$; on a vu (10.6), (10.3) et (10.8),

$$\mathcal{L}[f] = \sum_{q=0}^{-n} P_q \left(\frac{\partial}{\partial x}, y \right) \delta(x-y),$$

Si $\mathcal{L}[f]$ est une fonction holomorphe sur \mathcal{X} , tous les P_q sont donc nuls et $f=0$.

36. Allure de $\mathcal{L}[f](x, y)$ pour x et y complexes. — Ce n° 36 prouve le théorème 3; il modifie comme suit le sens des notations.

NOTATIONS. — \mathcal{X} est un domaine d'un espace *affin complexe*, de dimension complexe l ; $\text{Re } \mathcal{X}$ joue le rôle du domaine que le n° 1 note \mathcal{X} ; x et y sont des points de \mathcal{X} . $\mathcal{C}(y)$ est l'ensemble des points x de \mathcal{X} tels que \tilde{x} touche g ; c'est un cône de sommet y , dont les génératrices sont des droites complexes, correspondant biunivoquement aux points de g^* ; cette correspondance entre

la génératrice du point x de $C(y) - y$ et le point η^* de g^* est définie par l'une des deux conditions équivalentes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} \text{ touche } g^* \text{ en } \eta^*; \\ x - y = g_\eta(y, \eta). \end{aligned}$$

$K(y)$ est l'ensemble des points x tels que \tilde{x} ait une singularité.

Le prolongement analytique de la fonction $\mathcal{L}[f](x, y)$ aux valeurs complexes de (x, y) sera donné par l'intégrale (10.1) définissant $\mathcal{L}[f]$, quand la définition de $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ aura été étendue aux valeurs complexes de (x, y) , ce qui exige une nouvelle hypothèse :

HYPOTHÈSES. — Ce n° 56 complète l'hypothèse (4.4), comme suit :

(56.1) g^* n'a pas de singularité.

Il existe donc des constantes telles que

$$|g_\eta| > \text{Cte} |\eta|^{m-1} \quad \text{quand} \quad |g| < \text{Cte} |\eta|^m.$$

Les restrictions au réel figurant dans certains lemmes antérieurs deviennent maintenant superflues :

LEMME 56.1. — $C(y)$ est le cône des tangentes à $K(y)$ en y .

PREUVE. — L'application

$$\eta \rightarrow x$$

définie par (36.10)₁ applique la variété d'équation (36.9)₁ sur $K(y)$; le lemme résulte donc de l'hypothèse (56.1).

LEMME 56.2. — 1° Il existe une constante c_1 assez petite et une constante c_2 assez grande pour que la partie de \tilde{x} où

$$c_2 |x - y| < |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_1$$

ait ses éléments de contact voisins de ceux de la variété : $g(y, \eta) = 0$.

2° \tilde{x} est donc en position générale par rapport à la frontière du domaine $\tilde{\Psi}(\tilde{\Psi} : |t| \cdot |\eta|^{m-1} < c_0)$ quand c_0 et $x - y$ sont suffisamment petits.

PREUVE DE 1°. — L'équation (36.2) de \tilde{x} et l'hypothèse (56.1).

Le lemme 56.2, 2° a pour conséquence aisée le suivant, qui suppose $\tilde{\Psi}$ et $x - y$ suffisamment petits :

LEMME 56.3. — Soient x et y , tels que $x \notin K(y)$; étant donnés x' et $y' \in X$ tels que (x', y') soit suffisamment voisin de (x, y) , les applications voisines de l'identité de (\tilde{x}, y^*) sur (\tilde{x}', y'^*) définissent un isomorphisme naturel $A(x, y; x', y')$ de $H_c(\tilde{x}, y^*)$ sur $H_c(\tilde{x}', y'^*)$.

En composant ces isomorphismes, on obtient la

DÉFINITION 56.1. — Soit $a(x', y'; x'', y'')$ un arc de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ joignant (x', y') à (x'', y'') et dont chaque point (x, y) vérifie $x \notin K(y)$; un tel arc définit un isomorphisme $A(x', y'; x'', y'')$ de $H_c(\tilde{x}', y'^*)$ sur $H_c(\tilde{x}'', y''^*)$; A ne dépend que de la classe d'homotopie de a et se compose comme a .

Les nos 8 et 41 ont défini une classe d'homologie $h(\tilde{x}, y^*)$ pour x et y réels, $x \notin K(y)$; quand l'arc $a(x', y'; x'', y'')$ est réel, $A(x', y'; x'', y'')$ transforme $h(\tilde{x}', y'^*)$ en $h(\tilde{x}'', y''^*)$, car $h(\tilde{x}, y^*)$ dépend continûment de x et y . Nous étendrons comme suit cette définition de $h(\tilde{x}, y)$ au cas où x et y sont complexes :

DÉFINITION 56.2. — Nous notons $h(\tilde{x}, y^*)$ toute classe d'homologie de (\tilde{x}, y^*) qui est l'image par un isomorphisme $A(x', y'; x, y)$ (x' et y' réels) de la classe $h(\tilde{x}', y'^*)$ définie par les nos 8 et 41.

Nous notons $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ toute classe d'homologie de $(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ dont le bord dans (\tilde{x}, y^*) est l'une des classes $h(\tilde{x}, y^*)$:

$$\partial h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*) = h(\tilde{x}, y^*);$$

le n° 6 a montré que la donnée de $h(\tilde{x}, y^*)$ définit $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$.

Vu le théorème 3 de [III], il suffit d'employer ces nouvelles définitions de $h(\tilde{x}, y^*)$ et $h(\tilde{\Psi}, \tilde{x} \cup y^*)$ dans l'intégrale (10.1) qui définit la fonction $\mathcal{L}[f](x, y)$ pour obtenir le prolongement analytique de cette fonction aux valeurs complexes de (x, y) , vérifiant $x \notin K(y)$; d'où le

LEMME 56.4. — $\mathcal{L}[f](x, y)$ est une fonction analytique de x et y complexes, sans singularité pour $x \notin K(y)$; elle est multiforme; toutes ses déterminations sont combinaisons linéaires, à coefficients rationnels constants, d'un nombre fini d'entre elles; ce nombre est au plus égal au $(l-1)^{\text{ième}}$ nombre de Betti ⁽¹⁷⁾ de (\tilde{x}, y^*) .

Le calcul de ce nombre de Betti va achever la preuve du théorème 5. Le lemme 56.1 et un raisonnement analogue à la preuve du lemme 40.2 montrent ceci :

Quand x tend vers y sur une droite $\not\subset C(y)$, alors (\tilde{x}, y^*) est le même, à un homéomorphisme près, que si $\xi(t, \eta, y)$ et Ψ sont la projection polynomiale, de polynôme $g(y, \eta)$, et la partie de Φ où $t \neq \infty$.

Supposons qu'il en soit ainsi; employons les notations du n° 7 : la variété

$$\tilde{x} : t g(y, \eta) = \eta \cdot x, \quad t \neq \infty$$

a pour partie à l'infini :

$$\tilde{g}(\infty) : t = \infty, \quad g(y, \eta) = 0;$$

(17) Rang du groupe d'homologie de dimension $l-1$.

elle contient l'espace projectif

$$\tilde{x} \cap y^* : t = \eta \cdot x = 0,$$

et la sous-variété

$$\tilde{g}(x) : g(y, \eta) = \eta \cdot x = 0, \quad t \neq \infty,$$

dont la partie à l'infini est

$$\tilde{g}(\infty, x) : t = \infty, \quad g(y, \eta) = \eta \cdot x = 0.$$

Nous allons ramener l'étude de l'homologie de (\tilde{x}, y^*) à celle de sa partie à l'infini, qui est une variété projective : il suffira d'appliquer à $H_c(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x))$ le cobord δ , que le n° 7 emploie pour définir $h(\tilde{x}, y^*)$ quand l est pair.

LEMME 56.5. — On a un isomorphisme naturel

$$H_c(\tilde{x}, y^*) \simeq H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x)),$$

PREUVE. — (6.1) montre que $y^* \cap \tilde{g}(x)$ est rétracte par déformation de $\tilde{g}(x)$; donc

$$H_c(\tilde{g}(x), y^*) = 0;$$

par suite dans le triplet exact (voir [III], n° 3)

$$\begin{array}{ccc} & H_c(\tilde{x}, y^*) & \\ p \swarrow & & \nwarrow i \\ H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x)) & \xrightarrow{\delta} & H_c(\tilde{g}(x), y^*) \end{array}$$

p constitue un isomorphisme de $H_c(\tilde{x}, y^*)$ sur $H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x))$.

LEMME 56.6. — $H_c(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x))$ est engendré par une classe d'homologie de dimension $2l - 2 = \dim_r \tilde{x}$.

PREUVE. — Puisque $\tilde{x} \cap y^*$ et $\tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)$ sont deux sous-variétés de \tilde{x} sans singularité et en position générale, on a

$$(56.2) \quad H_c(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)) = H_c(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), \tilde{V}, \tilde{W}),$$

où \tilde{V} et $\tilde{W} \subset \tilde{V}$ désignent des voisinages, suffisamment petits ⁽¹⁸⁾ de $y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)$; $H_c(A, B, C)$ désigne l'homologie dans (A, B) des cycles de (A, C) . Or l'application de $\tilde{\Phi}$ sur sa base y^* :

$$\tilde{\varphi} = (t, \eta) \rightarrow \eta^*$$

a pour restriction à $\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty) - y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)$ un homéomorphisme

⁽¹⁸⁾ \tilde{V} [et \tilde{W}] appartient à un voisinage [contenu dans \tilde{V}] de $y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)$ dans $\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty)$, dont $y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)$ soit rétracte par déformation.

sur $y^* - x^* \cap y^*$; d'où, V^* et $W^* \subset V^*$ désignant des voisinages suffisamment petits de $x^* \cap y^*$:

$$(56.3) \quad H_c(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), \tilde{V}, \tilde{W}^*) \simeq H_c(y^*, V^*, W^*) = H_c(y^*, x^*).$$

Or, d'après le théorème de dualité de Poincaré, $H_c(y^*, x^*)$ est dual de $H_c(y^* - x^* \cap y^*)$ qui est banal :

(56.4) $H_c(y^*, x^*)$ est engendré par une classe d'homologie de dimension $2l - 2$.

Le lemme résulte de (56.2), (56.3) et 56.4).

LEMME 56.7. — On a un isomorphisme naturel, augmentant la dimension de 1, du quotient de $H_c(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x))$ par ses éléments de dimension maximale $2l - 2$, sur $H_c(\tilde{x}, y^*)$: c'est le cobord δ .

PREUVE. — Les deux lemmes précédents et l'exactitude du triplet (voir n° 3 de [III]) :

$$\begin{array}{ccc} & H_c(\tilde{x} \cup \tilde{g}(\infty), y^* \cup \tilde{g}(x) \cup \tilde{g}(\infty, x)) & \\ \swarrow \sigma & & \searrow \delta \\ H_c(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x)) & \xrightarrow{\delta} & H_c(\tilde{x}, y^* \cup \tilde{g}(x)) \end{array}$$

LEMME 56.8. — Le $(l - 1)$ ième nombre de Betti de (\tilde{x}, y^*) est le $(l - 2)$ ième nombre de Betti de la variété algébrique affine $g^* - g^* \cap x^*$.

PREUVE. — D'après le lemme précédent, le $(l - 1)$ ième nombre de Betti de (\tilde{x}, y^*) est le $(l - 2)$ ième nombre de Betti de $(\tilde{g}(\infty), \tilde{g}(\infty, x))$, c'est-à-dire de (g^*, x^*) ; vu le théorème de dualité de Poincaré, c'est donc le $(l - 2)$ ième nombre de Betti de $g^* - g^* \cap x^*$.

LEMME 56.9. — La variété algébrique affine $g^* - g^* \cap x^*$, dont le degré et la dimension complexe sont m et $l - 2$, a pour $(l - 2)$ ième nombre de Betti : $(m - 1)^{l-1}$.

PREUVE. — Cela a été prouvé par I. PETROWSKY [10] et I. FÁRY [2] (n° 4, th. 1, p. 39). I. FÁRY fait la restriction suivante : quand on choisit des coordonnées telles que

$$x_2 = y_2, \quad \dots, \quad x_l = y_l,$$

alors le système

$$g_{\tau_2} = \dots = g_{\tau_l} = \text{Hess}_{(\tau_2, \dots, \tau_l)}[g] = 0, \quad \tau_1 \neq 0$$

doit être impossible; puisque g^* n'a pas de singularité, cette condition équivaut ⁽¹⁹⁾ à la suivante : le système

$$g_{\tau_1} = x - y, \quad \text{Hess}_{\tau_1}[g] = 0, \quad g \neq 0$$

(19) En effet, si $g_{\tau_2} = \dots = g_{\tau_l} = 0$, alors :

$$g_{\tau_1} \neq 0, \quad \tau_1 g_{\tau_1} = mg, \quad \tau_1 \text{Hess}_{\tau_1}[g] = (m - 1) g_{\tau_1} \text{Hess}_{(\tau_2, \dots, \tau_l)}[g].$$

est impossible. Or l'homologie de $g^* - g^* \cap x^*$ est indépendante du choix de $x \notin C(y)$. Le lemme 56.9 est donc vrai sans restriction, puisque g_η ne peut décrire tout l'espace vectoriel de dimension l quand η décrit la variété algébrique : $\text{Hess}_\eta[g] = 0$.

Le théorème 5 résulte des lemmes 56.4, 56.8 et 56.9.

CHAPITRE 7. — Transformée de Laplace inverse d'une fonction rationnelle.

Soit $a(\xi)$ un polynôme en ξ_1, \dots, ξ_l , homogène ou non, *hyperbolique*, de degré m : sa partie principale $g(\xi)$ est hyperbolique au sens du n° 9. Soit $f(\xi)$ une *fonction rationnelle* en ξ_1, \dots, ξ_l , homogène ou non, de dénominateur $a^\nu(\xi)$.

La transformée inverse de Laplace $L[f]$ est définie ; son expression classique est l'intégrale (57.6) d'une forme différentielle holomorphe, sur un cycle non compact. On ne peut pas déduire l'allure de $L[f]$ de cette expression, tant qu'on ne l'a pas transformée en *l'intégrale d'une forme différentielle holomorphe sur un cycle compact* ; c'est ce que fait ce chapitre-ci, à l'instar d'HERGLOTZ et PETROWSKY (voir n° 10).

Par une intégrale simple, d'un type classique (CARLSON), ce chapitre déduit de $f(\xi)$ une fonction $f_r(\xi, y)$, homogène en (ξ_0, \dots, ξ_l) ; il uniformise f_r par la projection polynomiale (proposition 60) ; il obtient finalement (proposition 62) la formule

$$L[f] = \mathcal{L}[f_r] \quad (-r \text{ assez grand}).$$

Il peut alors établir, en supposant f homogène, les propriétés de $\mathcal{L}\left[\frac{(-\xi \cdot y)^p}{p!} f(\xi)\right]$ qu'énonce le n° 10, en particulier la formule $\mathcal{L}[1] = \delta(x - y)$.

57. La transformée inverse de Laplace L . — Notons

$$f(\xi) = \frac{b(\xi)}{a^\nu(\xi)};$$

$b(\xi)$ est un polynôme en ξ_1, \dots, ξ_l , dont nous noterons le degré $mp - n$, ce qui est d'accord avec les notations antérieures.

De l'hypothèse que g est hyperbolique et vérifie (9.1) résulte l'existence de diverses constantes c , dépendant de a et b , telles que

$$(57.1) \quad |\xi|^{m-1} < c |g_\xi(\xi)| \quad \text{pour } g(\xi) = 0, \quad \xi \text{ réel};$$

$$(57.2) \quad |\xi|^{m-1} |\text{Im } \xi_1| < c |g(\xi)| \quad \text{pour } \xi_2, \dots, \xi_l \text{ réels};$$

$$(57.3) \quad |\tau|^m |\xi|^{m-1} |\text{Im } \xi_1| < c |a(\tau\xi)| \quad \text{pour } c < |\tau| \cdot |\text{Im } \xi_1|, \quad \xi_2, \dots, \xi_l \text{ réels};$$

$$(57.4) \quad |f(\tau\xi)| < \frac{c}{|\tau|^n |\text{Im } \xi_1|^p |\xi|^{n-p}} \quad \text{pour } c < |\tau| \cdot |\text{Im } \xi_1|, \quad \xi_2, \dots, \xi_l \text{ réels}.$$

PREUVE. — L'hyperbolicité de g implique que $g_{\xi_1} \neq 0$ pour $g(\xi) = 0$; d'où (57.1). L'inégalité (57.2) est classique (voir, par exemple [9], p. 63, lemme 29.4). Elle a pour conséquence évidente (57.3), qui donne immédiatement (57.4).

La transformée inverse de Laplace L a les propriétés suivantes, bien classiques : $L[f]$ est une fonction ou distribution de $x - y$, qui est nulle pour $x \notin \mathcal{O}_+(y)$;

$$(57.5)_1 \quad \frac{\partial}{\partial x_j} L[f] = L[\xi_j f], \quad (x_j - y_j) L[f] = -L\left[\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right],$$

$$(57.5)_2 \quad L[1] = \delta(x - y),$$

δ étant la mesure de Dirac;

si $l < n - p$, alors $L[f]$ est la fonction continue de $x - y$ que définit l'intégrale

$$(57.6) \quad L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \dots \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\xi) \exp(-\xi \cdot y) d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

où $\xi \cdot x = 0$ et par suite $-\xi \cdot y = \xi_1(x_1 - y_1) + \dots + \xi_l(x_l - y_l)$; c est une constante assez grande pour que (57.4) implique la convergence de l'intégrale (57.6), dont la valeur est évidemment indépendante de c .

L n'est pas altéré quand on fait dans \mathcal{X} et Ξ des changements de coordonnées linéaires qui laissent $\xi \cdot x$ et $x_1 - y_1$ invariants et par suite qui transforment ξ_2, \dots, ξ_l entre elles et laissent ξ_1 invariant quand $\xi_2 = \dots = \xi_l = 0$.

58. La transformation de Carlson, qui donne $L[f]$ quand $l=1$, peut être définie comme suit quel que soit l : Soit

$$(58.1) \quad f_r(\xi, y) = \frac{1}{2\pi i} \oint \tau^{r-1} f(\tau\xi) \exp(-\tau\xi \cdot y) d\tau,$$

l'intégrale étant calculée sur une circonférence, dépendant de ξ , assez grande pour contenir tous les zéros τ de $a(\tau\xi)$; on voit tout de suite que $f_r(\xi, y)$ est holomorphe pour $g(\xi) \neq 0$, est homogène en ξ de degré $-r$ (ou remplace τ par $\theta\tau$ où θ est constant) et vérifie :

$$(58.2) \quad f_{r+1}(\xi, y) = -\frac{\partial}{\partial \xi_0} f_r; \quad f(\xi, y) = 0 \quad \text{pour } \xi \cdot y = 0 \text{ si } r < n.$$

Nous nommons $f_n(\xi, y)$ transformée de Carlson de $f(\xi)$. Si $f(\xi)$ est homogène, de degré $-n$, alors

$$(58.3) \quad f_n(\xi, y) = f(\xi).$$

59. Un calcul ⁽²⁰⁾ d'Herglotz et Petrowsky. — Nous nous proposons d'employer la transformée de Carlson au calcul de la transformée de Laplace. Prouvons d'abord que, si $l < n - p$, alors

$$(59.1) \quad L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{\alpha^*} f_l(\xi, y) \omega'(\xi) \quad \text{pour } y_1 < x_1;$$

α^* désigne l'ensemble des points ξ^* de Ξ^* images des points ξ de Ξ tels que

$$\alpha^* : \xi \cdot x = 0, \quad \operatorname{Re}(\xi \cdot y) = 0, \quad \xi_2, \dots, \xi_l \text{ réels};$$

α^* est muni de l'orientation :

$$(59.2) \quad i \left(\frac{i}{\xi \cdot y} \right)^l \omega'(\xi) > 0 \quad (\omega' \text{ est défini n}^\circ 2);$$

α^* est donc un cycle de x^* si l est pair, de (x^*, y^*) si l est impair.

PREUVE DE (59.1). — Cette formule n'est évidemment pas altérée quand on fait dans \mathcal{X} et Ξ des changements de coordonnées linéaires, qui laissent $\xi \cdot x$ et $x_1 - y_1$ invariants; il suffit donc de la vérifier quand

$$x_1 = \dots = x_l = y_2 = \dots = y_l = 0, \quad y_1 < 0, \\ \xi \cdot x = \xi_0, \quad \xi \cdot y = \xi_0 + \xi_1 y_1;$$

la définition (37.6) de $L(f)$ s'écrit alors

$$(59.3) \quad L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(-\xi_1 y_1) F(\xi_1) d\xi_1 \quad (c : \text{grand})$$

où

$$F(\xi_1) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \dots \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\xi) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l;$$

vu (37.4), $F(\xi_1)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} \xi_1 > c$.

Plus précisément, (37.4) montre que, pour ξ_2, \dots, ξ_l imaginaires purs et $|\tau| \operatorname{Re} \xi_1$ suffisamment grand, on a

$$|f(\tau \xi)| < \frac{c |\xi|^{p-n}}{|\tau|^n |\operatorname{Re} \xi_1|^p};$$

donc, d'après CAUCHY :

$$F(\xi_1) = \int_{-i\tau\infty}^{+i\tau\infty} \dots \int_{-i\tau\infty}^{+i\tau\infty} f(\xi) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

⁽²⁰⁾ Ces auteurs supposent f homogène et appliquent la formule des résidus au second membre de (59.1); aussi leurs calculs diffèrent-ils en apparence des nôtres.

c'est-à-dire, en remplaçant ξ par $\tau\xi$:

$$F(\tau\xi_1) = \tau^{l-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \dots \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\tau\xi) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l;$$

d'où, en choisissant $\xi_1 = 1$, la formule

$$(59.4) \quad \begin{cases} F(\tau) = \tau^{l-1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \dots \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\tau\xi) d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \\ \text{ou} \quad \xi_1 = 1, \quad |\tau| > c; \end{cases}$$

$F(\tau)$ est donc holomorphe pour $|\tau| > c$; vu (57.4) :

$$|F(\tau)| < c |\tau|^{l-n-1} < c |\tau|^{-2} \quad \text{pour} \quad |\tau| > c;$$

par suite (59.3), où $y_1 < 0$, s'écrit

$$L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \oint \exp(-\tau y_1) F(\tau) d\tau, \quad \text{ou} \quad |\tau| = c, \quad c \text{ grand.}$$

Remplaçons dans la formule précédente $F(\tau)$ par son expression (59.4); nous obtenons

$$L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^l} \oint \int_{-i\infty}^{+i\infty} \dots \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tau^{l-1} f(\tau\xi) \exp(-\tau y_1) d\tau \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

où $\xi_1 = 1$; en effet le second membre converge absolument vu (57.4); puisque

$$\xi \cdot x = \xi_0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi \cdot y = \xi_0 + y_1, \quad \omega'(\xi) = d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_l,$$

la formule précédente peut s'écrire, vu (58.1)

$$L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int \dots \int f_l(\xi, y) \omega'(\xi),$$

ξ parcourant l'ensemble :

$$\xi \cdot x = 0, \quad \xi \cdot y = y_1 < 0, \quad \xi_2, \dots, \xi_l \text{ imaginaires purs,}$$

muni de l'orientation (59.2);

c'est-à-dire ξ^* parcourant α^* .

Nous avons ainsi prouvé la formule (59.1); son second membre converge absolument.

60. Uniformisation des primitives de la transformée de Carlson par la projection polynomiale. — Nous ne pourrons employer cette formule (59.1) qu'après avoir uniformisé $f_r(\xi, y)$. Quand $p = 1$, cette uniformisation est un

cas particulier du théorème 1 de [II] qui uniformise la solution unitaire d'un opérateur différentiel; en effet on vérifie aisément que

$$f_0(\xi, y) = b\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)U(\xi, y),$$

$U(\xi, y)$ étant la solution unitaire de $a^p\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Sans recourir à ce théorème, prouvons la

PROPOSITION 60. — Si $r \leq n - p$, alors la fonction $f_r(\xi, y)$ est uniformisée par la projection polynomiale

$$(60.1) \quad \xi_0 = \eta_0 - t g(\eta), \quad \xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad \xi_l = \eta_l \quad (\eta, y = 0).$$

Plus précisément $f_r(\xi(t, \eta, y), y)$ est une fonction entière de (t, η) , indépendante de y .

NOTE 60. — Cette proposition n'exige pas l'hyperbolicité; elle entraîne que $f_r(\xi, y)$ est rationnellement uniformisable pour $r \leq n - p$: voir la preuve de la proposition 62.

PREUVE. — Soit τ une variable numérique complexe; puisque g est la partie principale de a ,

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\tau}{g(\xi)}\xi\right) &= g^{1-m}(\xi) [\tau^m + P_1(\tau, \xi)], \\ b\left(\frac{\tau}{g(\xi)}\xi\right) &= g^{n-mp}(\xi) P_2(\tau, \xi), \end{aligned}$$

$P_1(\tau, \xi)$ et P_2 étant des polynômes en $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_l)$ dont les degrés en τ sont respectivement $< m, mp - n$. D'où

$$f\left(\frac{\tau}{g(\xi)}\xi\right) = g^{n-p}(\xi) \frac{P_2(\tau, \xi)}{[\tau^m + P_1(\tau, \xi)]^p}.$$

En remplaçant dans la définition (38.1) τ par $\tau/g(\xi)$ et ξ par (60.1) nous obtenons donc

$$f_r(\xi(t, \eta, y), y) = g^{n-p-r}(\eta) F_r(t, \eta),$$

où

$$F_r(t, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \tau^{r-1} \frac{P_2(\tau, \eta)}{[\tau^m + P_1(\tau, \eta)]^p} \exp(t\tau) d\tau,$$

l'intégrale étant calculée sur une circonférence assez grande pour contenir tous les zéros τ du polynôme $\tau^m + P_1(\tau, \eta)$, dont le terme principal est τ^m ;

évidemment : $F_r(t, \eta)$ est une fonction entière en (t, η) , ce qui prouve la proposition 60;

$$F_r(\theta^{l-m}t, \theta\eta) = \theta^{m(p+r-n)-r} F_r(t, \eta),$$

$$F_{r+1}(t, \eta) = \frac{\partial F_r}{\partial t}, \quad F_r(0, \eta) = 0 \quad \text{si } r < n.$$

61. Preuve que $L[f] = \mathcal{L}[f_l]$ si $l < n - p$. — La proposition 60 va nous permettre de transformer la formule (59.1) en une formule exprimant $L[f]$ par l'intégrale d'une forme différentielle holomorphe sur un cycle compact; la formule (59.1) n'est pas de ce type, bien que α^* soit compact, car $f_l(\xi, y)$ n'est pas holomorphe en les points de α^* où $g(\xi) = 0$.

Pour transformer ainsi l'intégrale (59.1), qui est absolument convergente, calculons-la en prenant $\xi_l = 1$ et en intégrant d'abord par rapport à ξ_1 ; nous l'écrivons donc

$$(61.1) \quad L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{l-1} \frac{1}{2} \int_h f_l(\xi, y) d\xi_1,$$

où $y_1 < x_1$, $\xi_l = 1$ et où $h = h(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ a le sens suivant : P^* est la droite projective complexe de Ξ^* image de la droite affine, complétée par un point à l'infini :

$$(61.2) \quad \xi \cdot x = 0, \quad \xi_1 \text{ variable}, \quad \xi_2, \dots, \xi_{l-1} \text{ fixes réels}, \quad \xi_l = 1;$$

$P^* \cap y^*$ est le point de cette droite où $\xi \cdot y = 0$;

Ω^* est la partie de Ξ^* où

$$(61.3) \quad \Omega^* : g(\xi) \neq 0.$$

$P^* \cap \Omega^*$ est donc le complémentaire dans P^* d'un ensemble de m points réels de P^* ; $h(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ est la classe d'homologie dans $(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ de deux fois le cycle à une dimension de P^* :

$$\text{Re}(\xi \cdot y) = 0, \quad \frac{d(\text{Im} \xi_1)}{(\text{Im} \xi_1)^l} > 0,$$

car

$$\omega'(\xi) = (-1)^{l-1} d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l, \quad \xi \cdot x = 0, \quad y_1 < x_1.$$

Cette classe n'est donc définie que quand $P^* \cap y^* \Omega^* \in$.

Elle contient évidemment des cycles voisins de $\text{Re} P^*$:

Supposons l impair; donnons à $\text{Re} P^*$ l'orientation

$$\frac{d(\xi \cdot y)}{\xi \cdot y} > 0, \quad \text{c'est-à-dire } \frac{d\xi_1}{\xi_1} < 0 \quad (\text{vu } : \xi \cdot x = 0, y_1 < x_1);$$

$h(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ est la classe de deux fois $\text{Re} P^*$, détourné des points de P^* étrangers à Ω^* (au sens du n° 29).

Supposons l pair; $h(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ est la classe d'une somme de cycles faisant chacun un tour autour d'un des points de $P^* - P^* \cap \Omega^*$, dans le sens $\text{sgn}(\xi, y)$; autrement dit, avec la terminologie du n° 3 de [III], $h(P^* \cap \Omega^*, y^*)$ est le cobord δ de la somme des points de P^* étrangers à Ω^* , munis de l'orientation $\text{sgn}(\xi, y)$.

En portant dans l'expression (61.1) de $L[f]$ cette définition de h par des cycles voisins de $\text{Re } P^*$, on obtient assez aisément la formule

$$(61.4) \quad L[f] = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{2} \int_h f_l(\xi, y) \omega'(\xi) \quad (y_1 < x_1),$$

où $h = h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$ est défini comme suit, quand x^*, y^* et la frontière de Ω^* ne sont pas tangents, c'est-à-dire quand $x \notin C(y)$:

Supposons l impair; donnons à $\text{Re } x^*$ l'orientation

$$\frac{d\xi_1}{\xi \cdot y} \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{l-1} < 0;$$

autrement dit :

$$(61.5) \quad \frac{\omega'(\xi)}{(-\xi \cdot y)^l} > 0 \quad \text{sur } \text{Re } x^*;$$

$h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$ est la classe d'homologie de deux fois $\text{Re } x^*$ détourné de la sous-variété de x^* où $g(\xi) = 0$.

Supposons l pair; donnons à la partie réelle de la sous-variété de x^* :

$$\xi \cdot x = g(\xi) = 0,$$

l'orientation

$$\xi \cdot y \quad d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_{l-1} > 0,$$

c'est-à-dire

$$(61.6) \quad \frac{g_{\xi_1}(\xi) \omega'(\xi)}{(-\xi \cdot y)^{l-1} dg} > 0 \quad (\xi \cdot x = g = 0, \xi, \zeta \text{ réel});$$

$h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$ est le cobord de la classe d'homologie de la partie réelle de cette sous-variété.

$L[f]$ a donc les propriétés suivantes :

1° $L[f] = 0$ pour $x \notin \mathcal{O}_+(y)$;

2° $L[f]$ est holomorphe pour $x \notin C_+(y)$;

3° $L[f]$ est défini, pour $y_1 < x_1$, par la formule (61.4) où $h = h(x^* \cap \Omega^*, y^*)$ dépend continûment de x et tend vers $h(y^* - g^*, x^*)$ (définition 8) quand x tend vers y le long d'une demi-droite $\notin C(y)$.

Puisque $f_l(\xi, y)$ est uniformisé par la projection polynomiale, $\mathcal{E}[f_l]$ est défini et possède les propriétés 1° et 2°, vu les théorèmes 2 et 3; vu la propriété 3° de $L[f]$ et le lemme 52.1, on a

$$\mathcal{E}[f_l] = L[f] \quad \text{sur } \mathcal{X}(y).$$

Il en résulte que

$$(61.7) \quad \mathcal{L}[f_l] = L[f], \quad \text{sous notre hypothèse } l < n - p.$$

62. Expression de L au moyen de \mathcal{L} et de la transformation de Carlson.
— Rappelons que

$$f(\xi) = b(\xi) a^{-p}(\xi) \\ (a, b : \text{polynôme en } \xi_1, \dots, \xi_l; a \text{ hyperbolique})$$

et que (58.1) définit $f_r(\xi, y)$. Nous allons prouver la

PROPOSITION 62. — *Sur \mathcal{X} :*

$$(62.1) \quad L[f] = \mathcal{L}[f_r] \quad \text{pour } r \leq n - p + 1.$$

NOTE. — Cette proposition permet l'étude de l'allure de $L[f]$ par application des théorèmes 2, 3, 4 et 5.

Vu (58.2), (58.3), puis (57.5)₁, on a évidemment le

COROLLAIRE 62. — *Si $f(\xi)$ est homogène, alors*

$$L[f(\xi)] = \mathcal{L} \left[\frac{(-\xi \cdot y)^{p-1}}{(p-1)!} f(\xi) \right];$$

c'est une distribution de $x - y$.

Si $f(\xi)$ est une fonction rationnelle, homogène à dénominateur hyperbolique ($p = 1, a = g$), alors

$$L[f(\xi)] = \mathcal{L}[f(\xi)].$$

En particulier vu (57.5)₂, on a la formule (10.8),

$$\mathcal{L}[1] = \delta(x - y) \quad [\delta : \text{mesure de Dirac}].$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 62. — Quand $l < n - p$, la formule (62.1), où les deux membres sont des fonctions de $x - y$, résulte de (61.7), (10.6), (58.2) et de la proposition 60.

Ne supposons plus $l < n - p$. Quel que soit le polynôme $c(\xi)$, homogène de degré q en ξ_1, \dots, ξ_l , on a, vu la définition (58.1)

$$(62.2) \quad [f(\xi) c^{-p}(\xi)]_{r+pq} = f_r(\xi, y) c^{-p}(\xi);$$

donc, vu la proposition 60, $f_r(\xi, y) c^{-p}(\xi)$ est uniformisable si $r \leq n - p$; par suite $f_r(\xi, y)$ est rationnellement uniformisable pour $r \leq n - p$, comme l'annonce la note 60; le second membre de (62.1) est donc défini sur \mathcal{X} .

Choisissons $c(\xi)$ tel que $g(\xi)c(\xi)$ soit hyperbolique et que $l < n + pq - p$: (62.1) vaut quand on y remplace f par fc^{-p} ; d'où, vu (62.2) :

$$L[f(\xi)c^{-p}(\xi)] = \mathcal{L}[f_r(\xi, y)c^{-p}(\xi)] \quad \text{sur } X;$$

en appliquant $c^p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ à cette relation, on en déduit (62.1), compte tenu de (10.3) et (37.5)₁.

CHAPITRE 8. — La solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique.

Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel linéaire hyperbolique (n° 9) d'ordre m ; \mathcal{L} transforme la solution unitaire $U^*(\xi, y)$ de l'adjoint $a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ en la solution élémentaire $E(x, y)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et permet ainsi d'établir les propriétés de $E(x, y)$: les n°s 12, 13 et 14 l'expliquent, en omettant les preuves de quelques détails; ce chapitre-ci les donne.

63. Uniformisation de $U^*(\xi, y)$. — Prouvons la proposition 13.1 : $U^*(\xi, y)$ et ses dérivées en ξ_0 et y d'ordres $< m$ sont rationnellement uniformisables.

Comme le fait le n° 3 de [II], notons $U_{-r}^*(\xi, y)$ ($r \geq 0$) la solution du problème de Cauchy :

$$(63.1) \quad \begin{cases} a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)U_{-r}^*(\xi, y) = \frac{(-\xi \cdot y)^r}{r!}; \\ U_{-r}^*(\xi, y) \text{ s'annule } m+r \text{ fois pour } \xi \cdot y = 0. \end{cases}$$

Il est évident que

$$(63.2) \quad U_0^* = U^*; \quad -\frac{\partial}{\partial \xi_0} U_r^*(\xi, y) = U_{r+1}^*(\xi, y).$$

Soit $b(\xi)$ un polynôme en ξ_1, \dots, ξ_l , homogène de degré r ; notons $b^*(\xi) = b(-\xi)$; évidemment

$$b^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)\frac{1}{b(\xi)}U_{-r}^*(\xi, y) = 1;$$

$\frac{1}{b(\xi)}U_{-r}^*(\xi, y)$ est donc la solution unitaire de l'opérateur $b^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)a^*\left(\frac{\partial}{\partial y}, y\right)$; signalons que cet opérateur est l'adjoint de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Or le 1° du

théorème 1 de [II] affirme que la solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre m est uniformisable, ainsi que toutes ses dérivées d'ordres $< m$; donc, pour $p + q_1 + \dots + q_l < m$,

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \bar{z}_0}\right)^r \frac{\partial^{p+q_1+\dots+q_l}}{\partial \bar{z}_0^p \partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} \frac{1}{b(\bar{z})} U_{-r}^*(\bar{z}, y) = \frac{1}{b(\bar{z})} \frac{\partial^{p+q_1+\dots+q_l}}{\partial \bar{z}_0^p \partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} U^*(\bar{z}, y)$$

est uniformisable. La proposition 13.1 est prouvée.

64. Propriétés de la fonction $k(x, y)$. — Après avoir rappelé la définition de la projection caractéristique $\xi(t, \eta, y)$ et de l'application $x(t, \eta, y)$, le n° 13 définit par (13.11) une fonction $k(x, y)$ et affirme qu'elle possède certaines propriétés; les unes sont évidentes; prouvons maintenant les autres :

Le signe \pm qui figure dans (13.12) est, comme le montre le calcul de (13.12), celui de t . On peut caractériser comme suit ce signe : vu (13.2) et (13.3), on a

$$(64.1) \quad x = y + t g_{\xi}(y, \xi) + \dots$$

or, par définition :

$$y_1 < x_1 \quad \text{sur } K_+(y);$$

donc

$$t g_{\xi}(y, \xi) > 0 \quad \text{si } x(t, \eta, y) \in K_+(y);$$

$\xi = \xi(t, \eta, y)$ est alors tel que ξ^* touche $K_+(y)$ en $x(t, \eta, y)$. Ainsi, quand m est impair, le signe \pm figurant dans (13.2) est égal, près de chaque nappe de $K_+(y)$, à celui qu'a $g_{\xi}(x, \xi)$ quand ξ^* touche cette nappe.

PREUVE DE (13.13). — Supposons x dans le cône, voisin de $C(y)$, où $k(x, y)$ est défini; employons les formules (13.2), (13.3); η^* est voisin de Reg^* ; d'où (37.4); donc

$$\begin{aligned} |t \cdot \eta|^{m-1} / |x - y| &\text{ borné inférieurement et supérieurement;} \\ |\xi - \eta| &= \mathcal{O}(|t \cdot \eta|^m); \end{aligned}$$

donc, vu (13.11) :

$$\begin{aligned} |k_x| / |x - y|^{\frac{1}{m-1}} &\text{ borné inférieurement et supérieurement,} \\ |k_x + k_y| &= \mathcal{O}\left(|x - y|^{\frac{m}{m-1}}\right), \quad |k_x| / |k_y| \text{ voisin de } 1; \end{aligned}$$

vu (13.11) et (13.7) :

$$|k(x, y)| = (m-1) |t|^{\frac{m}{m-1}} |g(y, \eta)| = \mathcal{O}\left(|x - y|^{\frac{m}{m-1}}\right).$$

Le calcul de $\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x] \Big|_{x=x(t, \eta, y)}$ que nous allons faire va nous permettre de remplacer désormais ce Hessien et celui de g par $\det k_{x,y}$. Les formules (13.8) donnent (en notant $x_0=1$) :

$$\sum_{p=0}^l \frac{\partial^2 \xi_p(t, \eta, y)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} x_p(t, \eta, y) + \sum_{q=1}^l \frac{\partial \xi_q}{\partial \eta_j} \frac{\partial x_q}{\partial \eta_i} = 0;$$

donc, quand on fait $x = x(t, \eta, y)$ après avoir calculé Hess_η :

$$\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x] = \frac{D(\xi_1(t, \eta, y), \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} \frac{D(x_1(t, \eta, y), \dots, x_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)};$$

or, si nous prenons (t, x, y) pour variables indépendantes, nous avons, vu (13.11) :

$$\frac{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}{D(x_1, \dots, x_l)} = (-1)^l |t|^{l-m} \frac{D(k_{y_1}, \dots, k_{y_l})}{D(x_1, \dots, x_l)} = (-1)^l |t|^{l-m} \det(k_{x,y});$$

donc

$$(64.2) \quad \text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x] = \frac{(-1)^l |t|^{\frac{l-m}{2}}}{\det(k_{x,y})} \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)},$$

où

$$\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} = 1 \quad \text{pour } t=0.$$

En particulier :

$$(64.3) \quad (-1)^l \det(k_{x,y}) \text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x] > 0.$$

Afin de simplifier la formule (11.7), nous choisirons le signe de $\sqrt{\det(k_{x,y})}$ tel que (64.2) s'écrive :

$$(64.4) \quad \frac{i^l t}{\sqrt{\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x]}} = |t|^{\frac{m-1-(l/2)}{m-1}} \left[\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)} \right]^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\det(k_{x,y})},$$

où $[\]^{-\frac{1}{2}}$ est voisin de 1; précisons ce signe de $\sqrt{\det(k_{x,y})}$; (36.1) donne

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} [-\xi(t, \eta, y).x] = t \frac{\partial^2 g(y, \eta)}{\partial \eta_i \partial \eta_j} + \dots;$$

donc

$$\sqrt{\text{Hess}_\eta[-\xi(t, \eta, y).x]} / \sqrt{\text{Hess}_\eta[tg(y, \eta)]} > 0;$$

vu (64.4), on a donc

$$i^{-l} t \sqrt{\det(k_{x,y})} \sqrt{\text{Hess}_\eta[tg]} > 0.$$

Or, la définition 11.2 de $\sqrt{\text{Hess}}$ donne

$$i^{-l} \sqrt{\text{Hess}_\eta[tg]} \sqrt{\text{Hess}_\eta[-tg]} > 0;$$

donc, finalement

$$(64.5) \quad \sqrt{\det(k_{x,y})} / t \sqrt{\text{Hess}_\eta[-tg(y, \eta)]} > 0.$$

Supposons l impair; vu (13.11) et (64.5), la définition (4.8) du côté positif de $K_+(y)$ s'écrit

$$\det(k_{x,y}) k(x, y) < 0;$$

le choix (11.4) du signe de k que fait le théorème 3 est donc le choix tel que

$$(64.6) \quad \det(k_{x,y}) < 0 :$$

alors $k(x, y) > 0$ du côté positif de $K(x, y)$.

Supposons l pair; vu (4.9) et (64.5), les nappes positives de $K_+(y)$ sont celles où

$$(64.7) \quad \det(k_{x,y}) > 0.$$

Voici prouvées les propriétés de $k(x, y)$ qu'énonce le n° 13.

65. Allure de $E(x, y)$ sur $K_+(y)$. — Le n° 14 affirme que la formule (11.7) du théorème 3 prend la forme (14.1). En voici la preuve : dans (11.7) nous remplaçons f par U_m^* , donc, vu (13.9),

$$f \frac{D(\xi)}{D(t, \eta)} \quad \text{par} \quad -U_m^* g(y, \eta) \frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)};$$

nous tenons compte de (13.18), où $g=0$, et de (64.4); enfin, pour réaliser (11.6), alors que nous avons (13.11), nous devons faire un choix ⁽²¹⁾ de (t, η) tel que $|t|=1$; nous obtenons ainsi (14.1), où le signe de $\sqrt{\det(k_{x,y})}$ est donné par (64.5).

66. Allure de $E(x, y)$ pour $x=y$. — Prouvons les théorèmes 4 a, 4 b et 4 c qu'énonce le n° 14.

PREUVE DU THÉORÈME 4 a quand

$$(66.1) \quad 0 \leq p_1 + \dots + q_l < m - 1 - (l/2) \quad (\leq \text{si } l \text{ pair et } K \text{ négatif}).$$

Notons $r = m - q_1 - \dots - q_l$; on a, vu (1), (10.3), (10.6), (10.7) et (63.2) :

$$(66.2) \quad \frac{\partial^{p_1+\dots+p_l}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial y_1^{p_l}} E(x, y) = \mathcal{L} \left[\xi_1^{p_1} \dots \xi_l^{p_l} \frac{\partial^{q_1+\dots+q_l} U_r^*(\xi, y)}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} \right],$$

⁽²¹⁾ (t, η) peut être remplacé par $(\theta^{1-m} t, \theta \eta)$: c'est changer de coordonnées locales sur Φ .

où $\xi_1^{p_1} \dots \xi_l^{p_l} \frac{\partial^{q_1+\dots+q_l} U_r^*}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisable, vu les propositions 3.2 et 13.1; $\xi_1^{p_1} \dots \xi_l^{p_l} \frac{\partial^{q_1+\dots+q_l} U_r^*}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}}$ est homogène en ξ de degré $-n = p_1 + \dots + q_l - m$; en appliquant (11.9) à $\mathcal{E}[\dots]$, on obtient donc (14.5).

PREUVE DU THÉORÈME 4a quand (66.1) n'a pas lieu. — Soit un entier $p > (l/2) - m + 1$; construisons un polynôme homogène $b(\xi)$ de degré $\geq p$ tel que $b(\eta)g(y, \eta)$ soit hyperbolique : c'est aisé en le choisissant produit de polynômes du second degré; mettons-le sous la forme

$$b(\xi) = \sum_i b_i(\xi) c_i(\xi),$$

les b_i et c_i étant des polynômes homogènes, les b_i de degré p . Vu (12.4) et (10.3), nous avons

$$E(x, y) = \sum_i b_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{E} \left[\frac{c_i(\xi)}{b(\xi)} U_m^*(\xi, y) \right],$$

où $\frac{c_i}{b} U_m^* d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisable, vu la proposition 13.1; $\frac{c_i}{b} U_m^*$ est homogène en ξ de degré $-n = -m - p$; d'après (11.9),

$$\mathcal{E}[\dots] = \mathcal{O}(|x - y|^{m-l+p});$$

d'où le théorème 4a.

PREUVE DU THÉORÈME 4b. — Appliquons la formule (11.10) au deuxième membre de (66.2), où $n = m - p_1 - \dots - q_l$, en notant ceci : la définition (13.1) de $U^*(\xi, y)$ donne, pour ξ, y petit :

$$U^*(\xi, y) = \frac{(-\xi, y)^m}{m! g(y, \xi)} + \dots,$$

donc

$$U_r^*(\xi, y) = \frac{(-\xi, y)^{m-r}}{(m-r)! g(y, \xi)} + \dots;$$

$\frac{1}{g(y, \xi)} d\xi_0 \wedge \dots \wedge d\xi_l$ est uniformisé par la projection polynomiale. Il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{p_1+\dots+p_l}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial y_l^{p_l}} E(x, y) \\ &= \mathcal{E} \left[\xi_1^{p_1} \dots \xi_l^{p_l} \frac{\partial^{q_1+\dots+q_l}}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} \frac{(-\xi, y)^{m-r}}{(m-r)! g(y, \xi)} \right] \\ &+ \mathcal{O}(|x - y|^{n-l+p}); \end{aligned}$$

$\rho = \rho(l, n)$ est défini par (11.11); enfin

$$\mathcal{E} \left[\xi_1^{\rho_1} \dots \xi_l^{\rho_l} \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l}}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} \frac{(-\xi, y)^{m-r}}{(m-r)! g(y, \xi)} \right] = \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l}}{\partial x_1^{\rho_1} \dots \partial y_l^{\rho_l}} \mathcal{E} \left[\frac{1}{g(y, \xi)} \right];$$

d'où le théorème 4b.

PREUVE DU THÉORÈME 4c. — Calculons $E - E_2$ en remplaçant : E par son expression (12.4); \mathcal{E} par sa définition (10.1); E_2 par sa définition (14.3); puis, dans cette dernière définition, ω par son expression (4.1); enfin $\frac{D(\xi)}{D(l, n)}$ par son expression (13.9). On obtient une intégrale portant sur la fonction (13.18); vu la proposition 13.2, elle s'interprète comme suit :

$$E(x, y) - E_2(x, y) = \mathcal{E}[f_m(\xi, y)],$$

où $f_m(\xi, y)$ est une fonction, homogène en ξ de degré $-m$, que la projection caractéristique uniformise et qui s'annule deux fois pour $\xi, y = 0$.

Pour tout entier $0 \leq r < m$ définissons une fonction $f_r(\xi, y)$ par les conditions :

$$-\frac{\partial}{\partial z_0} f_r(\xi, y) = f_{r+1}(\xi, y); \quad f_r(\xi, y) = 0 \quad \text{pour } \xi, y = 0.$$

Supposons

$$0 \leq p_1 + \dots + q_l < m - l/2 \quad (\leq \text{si } : l \text{ pair et } K \text{ négatif}).$$

Choisissons $r = m + 1 - q_1 - \dots - q_l$; on a, vu (10.3), (10.6) et (10.7) :

$$(66.3) \quad \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l}}{\partial x_1^{\rho_1} \dots \partial y_l^{\rho_l}} [E(x, y) - E_2(x, y)] = \mathcal{E} \left[\xi_1^{\rho_1} \dots \xi_l^{\rho_l} \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l} f_r(\xi, y)}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} \right];$$

où

$$\xi_1^{\rho_1} \dots \xi_l^{\rho_l} \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l} f_r}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}} dz_0 \wedge \dots \wedge dz_l$$

est uniformisable; $\xi_1^{\rho_1} \dots \xi_l^{\rho_l} \frac{\partial^{n_1+\dots+n_l} f_r}{\partial y_1^{q_1} \dots \partial y_l^{q_l}}$ est homogène en ξ de degré $-n = p_1 + \dots + q_l - m - 1$ et s'annule pour $\xi, y = 0$. En appliquant (11.9) au second membre de (66.3), on obtient le théorème 4c.

CHAPITRE 9. — Exemple : La solution élémentaire de l'opérateur de Tricomi.

L'opérateur de Tricomi est un exemple extrêmement simple d'opérateur différentiel dont la solution élémentaire E n'est pas donnée par la transformation de Laplace classique, mais est donnée explicitement par la transfor-

mation \mathcal{L} . Nous allons traiter cet exemple que TRICOMI [11], WEINSTEIN, [12], GERMAIN et BADER [6] ont déjà étudié; nous obtiendrons deux nouvelles expressions de E assez simples, puis une expression équivalente à celle de GERMAIN et BADER.

67. Expression de E par une période d'intégrale abélienne de première espèce de cubique. — L'opérateur de Tricomi est l'opérateur à deux variables et d'ordre 2 :

$$(67.1) \quad x_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2;$$

nous l'étudions dans le demi-plan $x_2 < 0$ où il est hyperbolique; nous ne faisons pas l'hypothèse (9.1); nous nous proposons donc de construire les quatre solutions élémentaires $E(x, y)$ de cet opérateur sur les supports desquels, près de y , on a respectivement

$$(67.2) \quad y_1 < x_1, \quad x_1 < y_1, \quad y_2 < x_2, \quad x_2 < y_2.$$

Vu le théorème 6, $E = E_2$; dans la définition (14.3) de E_2 on a

$$l = m = 2; \quad e^{-\lambda} \sqrt{\frac{D(\xi_1, \dots, \xi_l)}{D(\eta_1, \dots, \eta_l)}} = 1,$$

vu (13.22); donc

$$(67.3) \quad E(x, y) = \frac{1}{4\pi i} \int_h \frac{\varpi}{d\xi \cdot x}.$$

ξ désigne la projection caractéristique; c'est la solution du système (13.20) :

$$d\xi_0 = -\xi_2^2 dt, \quad d\xi_1 = 0, \quad d\xi_2 = -\xi_1^2 dt$$

définie par les données initiales :

$$\xi_0 = -\eta_1 y_1 - \eta_2 y_2, \quad \xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = \eta_2.$$

Nous pouvons prendre $\eta_1 = 1$; d'où $\xi_1 = 1$; ξ_2 et η_2 seront désormais notés ξ et η ; il vient

$$\xi_0 = \frac{1}{3} (\eta - t)^3 - \frac{1}{3} \eta^3 - y_1 - \eta y_2, \quad \xi = \eta - t.$$

Remplaçons nos deux variables indépendantes (t, η) par (ξ, η) , puisque $\xi = \eta - t$; les équations de

$$\tilde{x}: \xi(t, \eta, y) \cdot x = 0; \quad y^*: t = 0; \quad g^*: t = g(y, \eta) = 0$$

deviennent

$$\tilde{x}: \frac{1}{3} \xi^3 + \xi x_2 + x_1 - \frac{1}{3} \eta^3 - \eta y_2 - y_1 = 0;$$

$$y^*: \xi = \eta;$$

$$g^*: \xi = \eta, \quad \eta^2 + y_2 = 0.$$

Dans les deux premiers cas (67.2), on a, vu la définition (3.3) de ϖ .

$$\varpi = -dt \wedge d\eta = d\zeta \wedge d\eta;$$

dans les deux autres, puisqu'il faudrait permuter les deux coordonnées pour obtenir (9.1), on doit prendre

$$\varpi = -d\zeta \wedge d\eta;$$

en portant ces expressions de ϖ dans (67.3), où $\xi \cdot x$ est le premier membre de l'équation de \tilde{x} , on obtient

$$(67.4) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{4\pi i} \int_h \frac{d\eta}{\xi^2 + x_2} = \pm \frac{1}{4\pi i} \int_h \frac{d\zeta}{\eta^2 + y_2};$$

on a le signe + dans les deux premiers cas (67.2), le signe - dans les deux derniers;

h est une classe d'homologie de \tilde{x} ; la proposition 8.2 en donne la définition suivante, quand x est voisin de y .

\tilde{y} se décompose en y^* et en la conique $\xi^2 + \xi\eta + \eta^2 + 3y_2 = 0$, dont l'intersection par y^* est g^* ; g^* se compose de deux points :

$$\xi = \eta = \sqrt{-y_2}, \quad \xi = \eta = -\sqrt{-y_2} \quad (y_2 < 0, \sqrt{-y_2} > 0);$$

traçons, autour de chacun d'eux, dans la droite complexe y^* , un petit cercle, ayant l'orientation positive; quand x est voisin de y , la partie de \tilde{x} voisine de $y^* - g^*$, contient des cycles voisins de l'un ou l'autre de ces petits cercles; soit $h_1(\tilde{x})$ ou $h_2(\tilde{x})$ leur classe d'homologie; d'après la proposition 8.2 et la formule (31.1), où $g_1 = g_{\eta_1}$ et $\eta \cdot x / \eta_1 > 0$, on doit prendre dans (67.4) :

$$h = -h_1(\tilde{x}) + h_2(\tilde{x}).$$

Nous pouvons convenir que le plan (ζ, η) est projectif : y^* est une droite projective; les deux petits cercles tracés dans $y^* - g^*$ sont alors homologues dans $y^* - g^*$; \tilde{x} est une cubique projective plane, dans laquelle $h_1 + h_2 = 0$; la formule (67.4) s'écrit donc

$$(67.5) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{h_1} \frac{d\zeta}{\eta^2 + y_1}.$$

Explicitons la définition de h_1 : d'une part la transformation de (ζ, η) en son imaginaire conjugué transforme évidemment h_1 en $-h_1$; d'autre part, si l'on donne à $\text{Re } \tilde{x}$ une orientation variant continûment avec (x, y) et qui est, pour \tilde{y} , celle de la figure 3 et si l'on nomme h_0 la classe d'homologie de $\text{Re } \tilde{x}$ ainsi orienté (fig. 4 et 5), alors, on a (voir fig. 6)

$$KI(h_0, h_1) = 2,$$

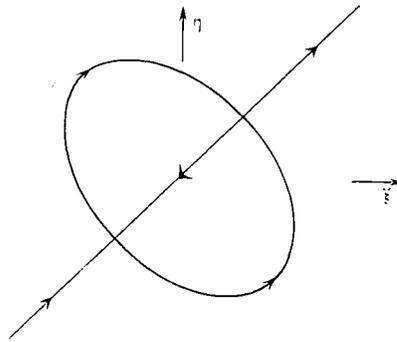


Fig. 3. — Orientation de $Re \tilde{y}$.

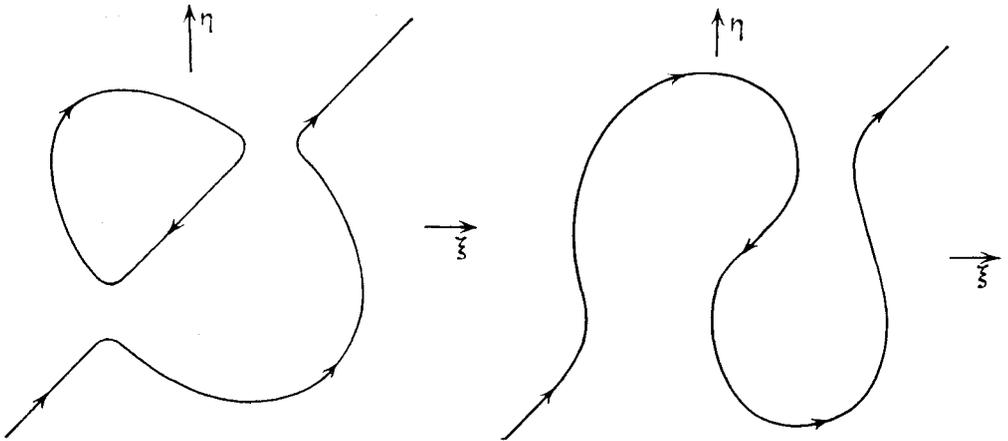


Fig. 4. — Orientation de $Re \tilde{x}$

Fig. 5. — Orientation de $Re \tilde{x}$

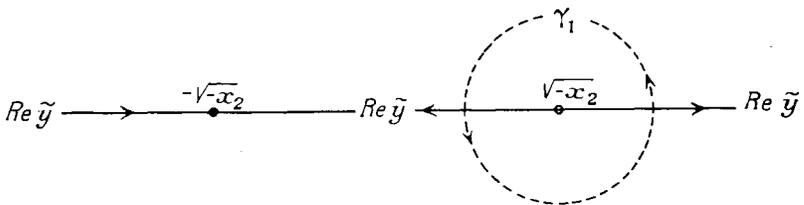


Fig. 6. — La figure représente : la droite complexe y^* , qui est l'une des composantes de \tilde{y} ; les points doubles $\pm \sqrt{-x_2}$ de \tilde{y} ; le cycle $Re \tilde{y} \in h_0$; un cycle $\gamma_1 \in h_1$. Ces cycles se coupent en deux points d'indices $+1$; donc $KI(h_0, h_1) = 2$.

car cet indice de Kronecker a cette valeur pour $x = y$, les points doubles étant retranchés de \tilde{y} .

Ces deux propriétés caractérisent la classe h_1 , puisque \tilde{x} a la topologie du tore, d'après la théorie des fonctions elliptiques. Cette théorie paramétrise \tilde{x} par son intégrale abélienne de première espèce

$$u = \int \frac{d\tilde{z}}{\eta^2 + \gamma_2};$$

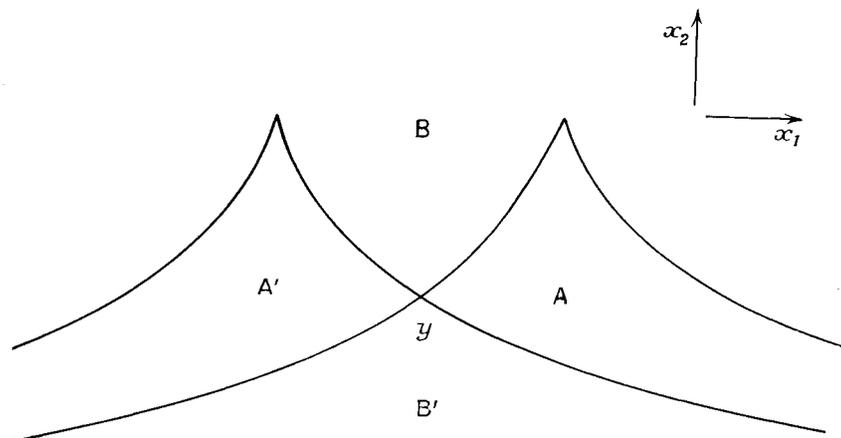


Fig. 7 : $K(y)$.

\tilde{z} et η sont, sur \tilde{x} , deux fonctions de u ayant toutes deux, deux périodes : $2\omega_1$ et $2\omega_2$.

Si $\text{Re } \tilde{x}$ a deux composantes connexes, alors on peut prendre ω_1 réel et ω_2 imaginaire pur, $\text{Re } \tilde{x}$ étant l'image des deux segments $(0, 2\omega_1)$ et $(\omega_2, 2\omega_1 + \omega_2)$; la classe du cycle de \tilde{x} qui est l'image du segment $(0, 2\omega_2)$, convenablement orienté, a les propriétés qui caractérisent h_1 ; donc,

$$(67.6) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\omega_2} du = \pm \frac{\omega_2}{\pi i}.$$

Si $\text{Re } \tilde{x}$ est connexe, alors on peut prendre ω_1 et ω_2 imaginaires conjugués, $\text{Re } \tilde{x}$ étant l'image du segment $(0, 2\omega_1 + 2\omega_2)$; la classe du cycle de \tilde{x} qui est l'image du segment $(2\omega_1, 2\omega_2)$, convenablement orienté, a les propriétés qui caractérisent h_1 ; d'où

$$(67.7) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{2\omega_1}^{2\omega_2} du = \pm \frac{\omega_1 - \omega_2}{\pi i}.$$

Nous énoncerons comme suit les deux formules (67.6) et 67.7) :

PROPOSITION 67. — $E(x, y)$ est une fonction, valant

$$(67.8) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\tilde{z}}{\eta^2 + \gamma_2} \quad \text{si } x \in \mathcal{E}_+(y); \quad = 0 \quad \text{sinon.}$$

$\oint \dots$ est la plus petite période imaginaire pure de l'intégrale abélienne de première espèce $\int \frac{d\xi}{\eta^3 + \gamma^2}$ de la cubique plane projective

$$\frac{1}{3} \xi^3 + \xi x_2 + x_1 = \frac{1}{3} \eta^3 + \eta y_2 + y_1.$$

NOTE. — $x \in K(y)$ quand \tilde{x} a un point double; il en résulte aisément que $K(y)$ se compose de quatre arcs d'équations respectives :

$$(67.9) \quad l(x) = l(y), \quad m(x) = m(y), \quad l(x) = m(y), \quad m(x) = l(y)$$

où

$$(67.10) \quad l(x) = 3x_1 + 2(-x_2)^{\frac{3}{2}}, \quad m(x) = 3x_1 - 2(-x_2)^{\frac{3}{2}}.$$

Ces arcs décomposent \mathcal{X} en quatre domaines d'adhérences A, A', B, B' : voir la figure 7; E désigne donc l'une des quatre solutions élémentaires ayant pour support, près de γ : A, A', B, B' . On peut montrer que les deux premières sont < 0 les deux autres > 0 , ce qui précise le signe figurant dans (67.8).

68. Expression de E par une période d'intégrale elliptique de première espèce. — Explicitons la proposition 67 en réduisant la cubique \tilde{x} à sa forme canonique : on la coupe par une droite variable, qui passe par un point fixe de \tilde{x} , qui dépend d'un paramètre t et qui touche \tilde{x} quand $t = \infty$; on emploie ce paramètre t sur \tilde{x} .

Pour obtenir une tangente à \tilde{x} , il suffit de mettre son équation sous la forme

$$\tilde{x} : (\xi - \eta)(\xi^3 + \xi\eta + \eta^2) + 3\xi x_2 - 3\eta y_2 + 3(x_1 - y_1) = 0;$$

on voit que \tilde{x} a l'asymptote $\xi = \eta$, qui la recoupe au point

$$\xi - \eta = \xi x_2 - \eta y_2 + x_1 - y_1 = 0.$$

Nous pouvons donc définir t sur \tilde{x} par l'équation

$$(68.1) \quad (\xi - \eta)(t + x_2 + y_2) = 3\xi x_2 - 3\eta y_2 + 3(x_1 - y_1)$$

qui, portée dans celle de \tilde{x} donne

$$(68.2) \quad t + x_2 + y_2 + \xi^3 + \xi\eta + \eta^2 = 0.$$

Définissons sur \tilde{x} une seconde fonction s , telle que

$$(68.3) \quad \frac{d\xi}{\eta^3 + \gamma^2} = \frac{d\eta}{\xi^3 + x_2} = \frac{dt}{s};$$

un calcul aisé donne

$$(68.4) \quad s = (t - y_2) \xi + (t - x_2) \eta.$$

Éliminons ξ et η entre (68.1), (68.2) et (68.4) : dans l'identité :

$$(68.5) \quad 3[\alpha\xi + \beta\eta]^2 + [(\alpha - 2\beta)\xi + (2\alpha - \beta)\eta]^2 \\ = 4(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2),$$

prenons

$$\alpha = t - y_2, \quad \beta = t - x_2;$$

d'après (68.4) :

$$\alpha\xi + \beta\eta = s;$$

d'après (68.1) :

$$(\alpha - 2\beta)\xi + (2\alpha - \beta)\eta = 3(y_1 - x_1);$$

d'après (68.2),

$$(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) \\ = -(t + jx_2 + j^2y_2)(t + j^2x_2 + jy_2)(t + x_2 + y_2),$$

où

$$j^2 + j + 1 = 0;$$

en portant ces trois relations dans (68.5) nous obtenons

$$(68.6) \quad 3s^2 + 9(x_1 - y_1)^2 \\ = -4(t + x_2 + y_2)(t + jx_2 + j^2y_2)(t + j^2x_2 + jy_2).$$

En portant (68.6) et (68.3) dans la proposition 67, on obtient la

PROPOSITION 68. — *La solution élémentaire $E(x, y)$ de l'opérateur de Tricomi (67.1) est une fonction, valant*

$$(68.7) \quad E(x, y) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\pi} \int_T^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} \quad \text{pour } x \in \mathcal{E}_+(y);$$

T est la plus grande racine réelle du polynôme (où $j^2 + j + 1 = 0$)

$$P(t) = 4(t + x_2 + y_2)(t + jx_2 + j^2y_2)(t + j^2x_2 + jy_2) + 9(x_1 - y_1)^2 \\ = 4t^3 - 12x_2y_2t + 4(x_2^3 + y_2^3) + 9(x_1 - y_1)^2,$$

on a $\mathcal{E}_+(y) = A$, ou A' , ou B , ou B' ; dans les deux premiers cas on prend le signe $-$, dans les deux autres $+$.

Conformément au théorème 3, l'expression de $E(x, y)$ se simplifie pour $x \in K_+(y)$: un calcul de résidu immédiat montre que (68.7) vaut

$$(68.8) \quad E(x, y) = \pm \frac{1}{2} (x_2y_2)^{-\frac{1}{4}}.$$

sur la partie de $K_+(y)$ vérifiant $l(x) = l(y)$ ou $m(x) = m(y)$; la partie de K_+ vérifiant $l(x) = m(y)$ ou $m(x) = l(y)$, quand elle existe, est le support d'une singularité *logarithmique* de E .

Conformément au théorème 5, (68.7) permet le prolongement analytique de $E(x, y)$ aux valeurs complexes de x et y ; en adaptant le chemin d'intégration, on voit que ce prolongement est possible quels que soient x et y complexes.

69. Expression de E par une fonction hypergéométrique. — Faisons dans l'intégrale (68.7) le changement de variables :

$$t = \sqrt{x_2 y_2} t',$$

il vient

$$E(x, y) = \pm \frac{\sqrt{3}}{\pi} (x_2 y_2)^{-\frac{1}{3}} \int_T^{+\infty} \frac{dt'}{\sqrt{P'(t')}},$$

T' étant la plus grande racine réelle du polynôme :

$$P'(t') = 4t'^3 - 12t' + 8z,$$

où

$$z = \frac{4(x_2^3 + y_2^3) + 9(x_1 - y_1)^2}{8(x_2 y_2)^{3/2}}$$

ainsi $(x_2 y_2)^{\frac{1}{3}} E(x, y)$ est une fonction de la seule variable z ; déterminons cette fonction : elle vérifie une équation différentielle ordinaire, linéaire, du second ordre, puisque l'opérateur de Tricomi annule E ; en employant les variables $l(x)$ et $m(x)$ que (67.12) a définies, cela s'écrit :

$$(69.1) \quad \left[(l - m) \frac{\partial^2}{\partial l \partial m} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial m} \right) \right] E = 0.$$

Des calculs aisés donnent

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-1} &= \frac{l(x) - l(y)}{l(x) - m(y)} \frac{m(x) - m(y)}{m(x) - l(y)}, \\ z-1 &= \frac{[l(x) - m(y)][m(x) - l(y)]}{8(x_2 y_2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \pm \{ 4[l(x) - m(y)][l(y) - m(x)] \}^{-\frac{1}{6}} \\ &\quad \times F \left[\frac{l(x) - l(y)}{l(x) - m(y)} \frac{m(x) - m(y)}{m(x) - l(y)} \right], \end{aligned}$$

où, vu (68.8) $F[0] = 1$; et enfin, en portant cette expression dans (69.1), l'équation hypergéométrique :

$$(69.2) \quad u(1-u) \frac{d^2 F[u]}{du^2} + \left(1 - \frac{4}{3}u\right) \frac{dF[u]}{du} - \frac{1}{36} F[u] = 0,$$

qui prouve que $F[u]$ est la fonction hypergéométrique

$$F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; u\right).$$

Donc

PROPOSITION 69. — *La solution élémentaire $E(x, y)$ de l'opérateur de Tricomi est une fonction, valant pour $x \in \mathcal{E}_+(y)$:*

$$E(x, y) = \pm \{4[l(x) - m(y)][l(y) - m(x)]\}^{-\frac{1}{6}} \\ \times F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \frac{l(x) - l(y)}{l(x) - m(y)}, \frac{m(x) - m(y)}{m(x) - l(y)}\right),$$

$F(a, b, c; u)$ désigne la fonction hypergéométrique :

$$1 + \sum_{n \geq 0} \frac{a(a+1) \dots (a+n) b(b+1) \dots (b+n)}{(n+1)! c(c+1) \dots (c+n)} u^{n+1}.$$

Des formules de Steiner et Kummer montrent l'équivalence de cette expression de E et de celle de GERMAIN et BADER ([6], p. 7, (13)).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOROVIKOV (V. A.). — La solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. R.*, t. 119, 1958, p. 407-410; *Travaux Soc. math. Moscou*, t. 8, 1959, p. 199-257.
- [2] FARY (Istvan). — Cohomologie des variétés algébriques, *Annals of Math.*, t. 65, 1957, p. 21-73.
- [3] GÅRDING (Lars). — Transformation de Fourier des distributions homogènes, *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 381-428.
- [4] GÅKDING (Lars). — Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta Math.*, t. 85, 1951, p. 1-62.
- [5] GEL'FAND (I. N.) i ŠAPIRO (Z. Ja.). — Les fonctions homogènes et leurs applications [en russe], *Uspekhi math. Nauk S. S. R.*, t. 10, 1955, n° 3, p. 3-70.
- [6] GERMAIN (P.) et BADER (R.). — Sur le problème de Tricomi, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 2^e série, t. 2, 1953, p. 53-70.
- [7] HERGLOTZ (G.). — Ueber die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Ber. über die Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys.*, t. 78, 1926, p. 93-126 et 287-318; t. 80, 1928, p. 68-114.
- [8] JOHN (Fritz). — The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 2, 1950, p. 213-304.
- [9] LERAY (Jean). — *Hyperbolic differential equations*. — Princeton, Institute for advanced Study, 1953 (multigraphié).

- [10] PETROWSKY (I.). — On the diffusion of waves and the lacunes for hyperbolic equations, *Mat. Sbornik (Recueil mathématique)*, N. S., t. 17 (59), 1945, n° 3, p. 289-370.
- [11] TRICOMI (Francesco). — Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine, di tipo misto, *Atti real Accad. dei Lincei, Mem. Class. Sc. fis. mat. e nat.*, Série 5, t. 14, 1924, p. 133-247.
- [12] WEINSTEIN (A.). — On Tricomi's equation and generalised axially symmetric potential theory, *Bull. Acad. royale Belg., Cl. Sc.*, Série 5, t. 37, 1951, p. 348-358; Discontinuous integrals and generalized potential theory *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 342-354; On generalized potential theory and the equation of Darboux-Tricomi, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 55, 1949, p. 520.
- [13] GRAUERT (H.), Ueber Modifikationen und exceptionelle analytische Mengen, *Math. Annalen*, t. 146, 1962, p. 331-368.
- [14] CHAILLOU (J.), Colloque sur les équations aux dérivées partielles (C. N. R. S., Paris, 1962).

Cet article fait partie d'une série de six articles :

- [I] Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy, près de la variété qui porte les données de Cauchy. *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 389-429.
- [II] La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 75-96.
- [III] Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180; (traduit en Russe).

On trouvera des indications sur [V] dans :

Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 242, 1956, p. 953-959 et un résumé de [VI] dans la conférence :

Particules et singularités des ondes, *Cahiers de Physique*, t. 15, 1961, p. 373-381.

Le présent article a été exposé dans :

Prolongements de la transformation de Laplace, leurs applications aux équations aux dérivées partielles, *Colloque sur l'analyse fonctionnelle* [1960, Louvain], p. 7-28. — Louvain, Librairie universitaire; Paris, Gauthier-Villars, 1961 (Centre belge de Recherches mathématiques) — Traduction anglaise :

International conference on partial differential equation and continuum mechanics [1960, Madison (Wis.)]; p. 137-157. — Madison, 1960.

(Manuscrit reçu le 25 août 1961.)

Jean LERAY

Professeur au Collège de France,

12, rue Pierre-Curie,

Sceaux (Seine).

