

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO AMBROSETTI

**Un teorema di esistenza per le equazioni
differenziali negli spazi di Banach**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 349-361

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__349_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA DI ESISTENZA PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEGLI SPAZI DI BANACH

ANTONIO AMBROSETTI *)

Sia Σ un sottoinsieme di uno spazio di Banach E , I un intervallo chiuso e limitato della retta reale e $f(x, y)$ una funzione di $I \times \Sigma$ in E . Allora la sola ipotesi della continuità di $f(x, y)$ non è sufficiente a garantire l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$(2) \quad y(x_0) = y_0^{1)}.$$

In questo lavoro verrà dimostrato un Teorema di esistenza per tale problema, ottenendo così un risultato che è più generale di quelli dovuti a C. CORDUNEANU ²⁾ ed a M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN ³⁾. Nella dimostrazione si farà uso di un Teorema di punto unito di G. DARBO ⁴⁾.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Pisa.

¹⁾ Cfr. [1] — pag. 25.

²⁾ Cfr. [2] — pag. 226 e segg.

³⁾ Cfr. [5] — pag. 13-16.

⁴⁾ Cfr. [3] — pag. 84 e segg.

Ringrazio il Prof. G. Prodi che mi ha guidato nella presente ricerca e il Prof. E. De Giorgi per le utili discussioni sull'argomento.

§ 1. Premesse.

Faremo nel seguito frequente uso di alcune nozioni sulle α -contrazioni introdotte da G. DARBO⁵⁾; per comodità daremo dapprima alcuni richiami su tale argomento e cominceremo perciò con la seguente

DEFINIZIONE 1.1. *Sia X un insieme limitato di uno spazio di Banach E . Indicheremo con $\alpha(X)$ l'estremo inferiore dei numeri positivi ε per i quali è possibile decomporre X nell'unione di un numero finito di parti di diametro inferiore ad ε .*

Dalla definizione precedente segue subito che :

PROPRIETÀ 1.2. *Condizione necessaria e sufficiente perchè X sia relativamente compatto in E è che risulti $\alpha(X) = 0$.*

PROPRIETÀ 1.3. *Se X e Y sono porzioni limitate di E , detto $X + Y$ l'insieme $\{z = x + y : x \in X, y \in Y\}$, si ha*

$$\alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y).$$

Sia E uno spazio metrico e T una trasformazione di E in sè; hanno importanza in molte questioni quelle trasformazioni T che sono completamente continue, cioè che sono continue e che trasformano ogni insieme limitato in un insieme relativamente compatto in E . Tali trasformazioni godono quindi della proprietà che, per ogni $X \subset E$, X limitato, risulta $\alpha(T(X)) = 0 \leq \alpha(X)$. Per generalizzare tale concetto, si dà, seguendo G. DARBO, la seguente

DEFINIZIONE 1.4. *Chiameremo α -contrazione ogni trasformazione continua T di uno spazio metrico E in sè, che soddisfa alle seguenti proprietà :*

⁵⁾ Per ulteriori notizie sull'argomento e per la dimostrazione del Teorema 1.7 vedi [3] con relativa bibliografia.

I. ogni insieme limitato di E venga trasformato dalla T in un insieme limitato ;

II. qualunque sia l'insieme limitato $X \subset E$, posto $X' = T(X)$, risulti

$$\alpha(X') \leq k \alpha(X),$$

con k conveniente numero non negativo, minore di uno e indipendente da X .

Segue subito che :

PROPRIETÀ 1.5. *Le trasformazioni completamente continue sono α -contrazioni.*

Poichè ovviamente le contrazioni ordinarie sono α -contrazioni, dalla definizione 1.4 e dalle proprietà 1.3 e 1.5 segue che :

PROPRIETÀ 1.6. *Se la trasformazione T di E in E si può scrivere come $T_1 + T_2$, con T_1 completamente continua e T_2 contrazione, allora $T = T_1 + T_2$ è una α -contrazione.*

Generalizzando un noto Teorema di punto unito di G. SCHAUDER, G. DARBO ha dimostrato sulle α -contrazioni il seguente

TEOREMA 1.7. *Sia T una α contrazione definita in un insieme convesso e chiuso X di uno spazio di Banach E . Sia inoltre l'immagine $T(X)$ limitata e contenuta in X . In tali ipotesi esiste in X almeno un punto unito per la T .*

Generalizzando il concetto di α -contrazione, diamo poi la seguente

DEFINIZIONE 1.8. *Siano E e F due spazi di Banach ; diremo che una funzione $f(y) : E \rightarrow F$ è α -lipschitziana se è continua e se*

I. *per ogni insieme limitato $S \subset E$, $f(S) \subset F$ è limitato ;*

II. *esiste una costante h , tale che, per ogni insieme limitato $S \subset E$, si abbia*

$$\alpha(f(S)) \leq h \cdot \alpha(S).$$

Data una funzione α -lipschitziana f , il più piccolo valore non negativo di h , h_f , per cui sussiste la diseguaglianza precedente qua-

lunque sia l'insieme S limitato di E , sarà chiamato *modulo* della funzione α -lipschitziana f .

Sussiste infine il seguente Teorema, di immediata dimostrazione:

TEOREMA 1.9. *Siano E, F, G , tre spazi di Banach; f un'applicazione di E in F α -lipschitziana con modulo uguale ad h_f ; g una applicazione di F in G α -lipschitziana con modulo uguale ad h_g . Allora l'applicazione composta $g \circ f$ di E in G , è α -lipschitziana con modulo $h_{g \circ f}$ minore o uguale a $h_f \cdot h_g$.*

§ 2. Un teorema preliminare.

Sia E uno spazio di Banach, I un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Indichiamo con $C(I; E)$ lo spazio delle funzioni continue su I , a valori in E , che rispetto alla norma

$$\| \| u \| \|_C = \sup \{ \| u(x) \|_E : x \in I \}$$

è uno spazio di Banach; e consideriamo un sottoinsieme $H \subset C(I; E)$. In corrispondenza ad H si prenda, per ogni $x \in I$, l'insieme $H(x) \subset E$, formato da tutti gli elementi del tipo $u(x)$ con $u \in H$, e sia inoltre $H(I) \subset E$ l'insieme $\bigcup_{x \in I} H(x)$; se H è limitato anche $H(I)$ lo è, e viceversa. Vogliamo ora dimostrare un Teorema che ci sarà utile nel seguito e che generalizza il classico Teorema di ASCOLI-ARZELÀ⁶⁾. A tale scopo proviamo dapprima due Lemmi.

LEMMA 2.1. *Se $H \subset C(I; E)$ è un insieme limitato ed equicontinuo, per il corrispondente $H(I) \subset E$ si ha*

$$\alpha(H) = \alpha(H(I)).$$

DIM. Divideremo la dimostrazione in due parti: mostreremo prima che $\alpha(H(I)) \leq \alpha(H)$, provando successivamente la disegualianza inversa.

⁶⁾ Per una dimostrazione del Teorema di ASCOLI-ARZELÀ, cfr., ad esempio, [4], pp. 135-136. La dimostrazione dei Lemmi 2.1 e 2.2 del presente lavoro, ricalda, nelle sue linee essenziali, quella del suddetto Teorema.

Per la definizione 1.1., fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un ricoprimento finito $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$ di H , tale che, per ogni indice $i = 1, 2, \dots, n$, il diametro di H_i , $\text{diam } H_i$, risulti minore di $\alpha(H) + \varepsilon$. Poichè H è equicontinuo, in corrispondenza a detto ε , è possibile dividere I , che è compatto, in m intornoi V_j ($j = 1, 2, \dots, m$), tali che, se x_1 e x_2 appartengono a V_j , risulti $\|u(x_1) - u(x_2)\| < \varepsilon$ per ogni $u \in H$. Consideriamo allora, per ogni coppia di indici i, j , l'insieme $B_{i,j} \subset H(I)$ siffatto: $B_{i,j} = H_i(V_j) = \{u(x) : u \in H_i, x \in V_j\}$. È ovvio che $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ forma un ricoprimento (finito) di $H(I)$, e risulta

$$\text{diam } B_{i,j} = \sup \{ \|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| : u, \bar{u} \in H_i, x_1, x_2 \in V_j \}.$$

Inoltre si ha

$$\|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| \leq \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| + \|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)\|.$$

Ma al variare di x_1 e x_2 in un certo V_j , $\|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)\|$ si mantiene più piccolo di ε , per ogni $\bar{u} \in H$, e quindi

$$\|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| < \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| + \varepsilon.$$

Allora risulta, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \text{diam } B_{i,j} &\leq \sup \{ \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| : u, \bar{u} \in H_i, x_1 \in V_j \} + \varepsilon \leq \\ &\leq \sup \{ \|u(x) - \bar{u}(x)\| : u, \bar{u} \in H_i, x \in I \} + \varepsilon = \\ &= \text{diam } H_i + \varepsilon < \alpha(H) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, a maggior ragione

$$\alpha(H(I)) < \alpha(H) + 2\varepsilon.$$

E, attesa l'arbitrarietà di ε , segue la conclusione.

Dimostriamo ora che $\alpha(H) \leq \alpha(H(I))$. Dato $\varepsilon > 0$, per l'equicontinuità di H , si può ricoprire I con un numero finito di intornoi $V(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tali che, se $x \in V(x_i)$, segua $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$, per ogni $u \in H$. D'altra parte è anche possibile, in corrispondenza al precedente ε , trovare un ricoprimento finito di $H(I)$ con insiemi

B_j ($j = 1, 2, \dots, m$) di diametro minore di $\alpha(H(I)) + \varepsilon$. Sia Φ l'insieme (finito) di tutte le mappe $i \rightarrow \varphi(i)$ di $[1, 2, \dots, n] \subset N$ in $[1, 2, \dots, m] \subset N$. Per ogni $\varphi \in \Phi$, si denoti con L_φ l'insieme di tutti gli $u \in H$ tali che $\forall i \in [1, 2, \dots, n]$ si abbia $u(x_i) \in B_{\varphi(i)}$. Si vede facilmente che H è ricoperto dall'unione degli L_φ . Inoltre se $u, \bar{u} \in L_\varphi$, per ogni $x \in I$, c'è un indice i tale che $x \in V(x_i)$. Allora si ha $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$, e $\|\bar{u}(x) - \bar{u}(x_i)\| < \varepsilon$; dato poi che $\|u(x_i) - \bar{u}(x_i)\| < \alpha(H(I)) + \varepsilon$, risulta:

$$\begin{aligned} \|u(x) - \bar{u}(x)\| &\leq \|u(x) - u(x_i)\| + \|u(x_i) - \bar{u}(x_i)\| + \\ &\quad + \|\bar{u}(x_i) - \bar{u}(x)\| < \alpha(H(I)) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò

$$\alpha(H) \leq \alpha(H(I)) + 3\varepsilon,$$

e quindi la conclusione, perchè ε è arbitrario.

LEMMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del Lemma 2.1 si ha:*

$$\alpha(H(I)) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}.$$

DIM. Poichè per ogni $x \in I$, $H(x) \subset H(I)$, si ha intanto $\alpha(H(x)) \leq \alpha(H(I))$, il che implica $\sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} \leq \alpha(H(I))$.

Viceversa, poichè H è equicontinuo, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si divida I in n intervalli $V(x_1) \dots V(x_n)$ tali che ivi si abbia $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$ per ogni $u \in H$. Inoltre per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, si può trovare un ricoprimento finito $\{H_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq m}$ di H tale che $\{H_j^{(i)}(x_i)\}_{1 \leq j \leq m}$ sia un ricoprimento finito di $H(x_i)$ soddisfacente a

$$\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } H_j^{(i)}(x_i) < \alpha(H(x_i)) + \varepsilon.$$

Allora, detto $B_{i,j} = H_j^{(i)}(V(x_i))$, si ha che $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ è un ricoprimento finito di $H(I)$, e inoltre

$$\text{diam } B_{i,j} = \sup \{\|u(x) - v(y)\| : u, v \in H_j^{(i)}; x, y \in V(x_i)\}.$$

Ma risulta anche :

$$\|u(x) - v(y)\| \leq \|u(x) - u(x_i)\| + \|u(x_i) - v(x_i)\| + \\ + \|v(x_i) - v(y)\| < 2\varepsilon + \|u(x_i) - v(x_i)\|,$$

quindi

$$\text{diam } B_{i,j} \leq 2\varepsilon + \sup \{\|u(x_i) - v(x_i)\| : u, v \in H_j^{(i)}\} = 2\varepsilon + \text{diam } H_j^{(i)}(x_i). \\ \text{Questo ci dice che } \max \{\text{diam } B_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \leq 2\varepsilon + \\ + \max \{\text{diam } H_j^{(i)}(x_i) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Allora a più forte ragione si ha :

$$\alpha(H(I)) < 3\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq n} \alpha(H(x_i)) \leq 3\varepsilon + \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}; \quad \text{c. v. d.}$$

Si può così concludere, riunendo i risultati dei Lemmi 2.1 e 2.2 col

TEOREMA 2.3. *Se $H \subset C(I; E)$ è un insieme limitato ed equicontinuo, si ha :*

$$\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}.$$

OSSERVAZIONI. Nelle dimostrazioni precedenti non si è esplicitamente sfruttato il fatto che I è un intervallo della retta reale, ma solo che I è compatto. E infatti il risultato precedente è ancora vero nell'ipotesi che H sia un generico sottoinsieme limitato ed equicontinuo di $C(I; E)$ con I generico spazio metrico compatto.

Inoltre il Teorema 2.3 generalizza, in un certo senso, il Teorema di ASCOLI-ARZELÀ. Sia infatti H un insieme limitato ed equicontinuo; allora, se H è compatto, si ha che $\alpha(H) = 0$, e quindi anche il $\sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}$ è eguale a zero; questo implica che $H(x)$ è compatto per ogni $x \in I$; viceversa, se $H(x)$ è compatto per ogni $x \in I$, allora $\alpha(H(x)) = 0$ per ogni $x \in I$. Quindi $\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} = 0$, e questo equivale a dire che H è compatto in $C(I; E)$.

§ 3. Teorema di esistenza.

Il Teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ci permette ora di dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia E uno spazio di Banach e, fissato $y_0 \in E$, sia $\Sigma \subset E$ l'insieme $\{y : y \in E, \|y - y_0\| \leq b\}$; inoltre, fissato $x_0 \in R$, sia*

$I \subset \mathbb{R}$ l'intervallo $\{x : |x - x_0| \leq a\}$. Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è una funzione definita per $(x, y) \in I \times \Sigma$, che assume i suoi valori in E . Supponiamo che $f(x, y)$ sia uniformemente continua e, per ogni $x \in I$, α -lipschitziana rispetto ad y , con costante h indipendente dal punto x . Allora, se δ' è un numero tale che $\delta' h < 1$, esiste almeno una soluzione dell'equazione (1) soddisfacente alla condizione iniziale

$$(2) \quad y(x_0) = y_0,$$

definita in un opportuno intorno \bar{I} di x_0 di ampiezza δ , dove

$$\delta = \min \left(\delta', a, \frac{b}{M} \right), \text{ con } M = \|\sup \{ \|f(x, y)\| : (x, y) \in I \times \Sigma \} \|^7.$$

DIM. Consideriamo lo spazio di Banach $C(\bar{I}; E)$ introdotto nel paragrafo 2, e sia K l'insieme delle funzioni $u(x) \in C(\bar{I}; E)$ lipschitziane con costante di Lipschitz minore o eguale a M e soddisfacenti inoltre a

$$\|u(x) - y_0\| \leq b, \quad (x \in \bar{I}).$$

K è un insieme equicontinuo, chiuso e convesso. Si definisca sopra K la seguente trasformazione funzionale T :

$$T: u(x) \rightarrow Tu(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt.$$

È facile verificare che T è continua sopra K e che se $u \in K$ anche $Tu \in K$.

Dimostriamo che T è una α -contrazione; per questo si osservi che T si può scrivere come $J \circ f^*$, ove si è indicato con J l'applicazione che ad ogni funzione $g(x) \in C(\bar{I}; E)$ associa

$$Jg(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt;$$

⁷⁾ Si tenga presente che $f(x, y)$, applicazione uniformemente continua definita in un insieme convesso e limitato, è limitata.

e con f^* l'applicazione di K in $C(\bar{I}; E)$ definita nel seguente modo:

$$f^* u(x) = f(x, u(x)).$$

La J è ovviamente α -lipschitziana con modulo uguale a δ . Quanto alla f^* , si osservi che essa è continua e che, per ogni $H \subset K$, $H^* = f^*(H)$ è equicontinuo. Allora, attese le ipotesi fatte e il Teorema 2.3., risulta:

$$\alpha(H^*) = \sup \{ \alpha(H^*(x)) : x \in \bar{I} \} \leq h \sup \{ \alpha(H(x)) : x \in \bar{I} \} = h\alpha(H),$$

con h indipendente da H . Ciò equivale a dire che anche la f^* è α -lipschitziana con modulo uguale ad h . Applicando ora il Teorema 1.9, si può affermare che T è un'applicazione α -lipschitziana con modulo minore o uguale a $\delta h < 1$, cioè che T è una α -contrazione. Perciò, a norma del Teorema 1.7. di G. DARBO, si può concludere che la T ha almeno un punto unito. Questo punto rappresenta la soluzione della (1) soddisfacente alla (2) che si cercava.; c. v. d.

OSSERVAZIONI. Le proposizioni 1.2 e 1.6. ci dicono che l'ipotesi che la $f(x, y)$ sia completamente continua ⁸⁾ o che sia $f = f_1 + f_2$, con f_1 lipschitziana e f_2 completamente continua ⁹⁾, rientra come caso particolare nell'ipotesi del Teorema testè dimostrato.

Nel Teorema precedente si è provata l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione (1) verificante alla condizione iniziale (2) in un intervallo di ampiezza $\delta = \min \left(\delta', a, \frac{b}{M} \right)$. Però è facile verificare che se δ è minore di $\min \left(a, \frac{b}{M} \right)$, tale soluzione può essere prolungata e che, in definitiva l'intervallo dove la soluzione è definita può essere preso di ampiezza uguale a $\min \left(a, \frac{b}{M} \right)$.

⁸⁾ Vedi ³⁾.

⁹⁾ Vedi ⁴⁾.

§ 4.

Daremo ora qualche esempio di funzione α -lipschitziana: in tal modo potremo mostrare alcune possibilità di applicazione del Teorema di esistenza 3.1.

Sia E uno spazio di Banach, Δ un sottoinsieme di E , g una funzione di Δ in E α -lipschitziana, φ una funzione di Δ in R (numeri reali) continua e che trasforma Δ in un insieme limitato. La funzione continua

$$(3) \quad f(y) = \varphi(y) g(y)$$

di Δ in E , in generale non è — come si vedrà in seguito in un caso particolare — facilmente scomponibile nella somma di una funzione lipschitziana e di una funzione completamente continua. Mostriamo invece che la (3) è una funzione α -lipschitziana. Allo scopo sia $H \subset \Delta$, un insieme limitato; innanzi tutto l'immagine di H tramite f , $f(H)$, è limitata. Inoltre diciamo λ il sup $\{|\varphi(y)| : y \in \Delta\}$ e L il sup $\{\|g(y)\| : y \in H\}$; allora, per ogni coppia $y, \bar{y} \in H$, si ha:

$$(4) \quad \|f(y) - f(\bar{y})\| \leq \lambda \|g(y) - g(\bar{y})\| + L |\varphi(y) - \varphi(\bar{y})|.$$

Premesso ciò, fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un ricoprimento finito $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$ di $g(H)$, tale che

$$(5) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } G_i < \alpha(g(H)) + \varepsilon.$$

Poichè inoltre $\varphi(H) \subset R$ è ivi relativamente compatto, in corrispondenza al precedente ε , è possibile trovare un ricoprimento finito $\{\Phi_j\}_{1 \leq j \leq m}$ di $\varphi(H)$ tale che

$$(6) \quad \max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } \Phi_j < \varepsilon.$$

Poniamo $H_i = g^{-1}(G_i)$, $T_j = \varphi^{-1}(\Phi_j)$; preso $V_{ij} = H_i \cap T_j$, si consideri il ricoprimento finito $\{V_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ di H e il corrispon-

dente ricoprimento (finito) $\{f(V_{ij})\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ di $f(H)$. Per le (4), (5), (6), si ha :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diam } f(V_{ij}) &\leq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } G_i + L \max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } \Phi_j \leq \\ &\leq \lambda \cdot \alpha(g(H)) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordando che la g è α -lipschitziana, risulta :

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diam } f(V_{ij}) \leq h \lambda \alpha(H) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon,$$

e quindi, a più forte ragione

$$\alpha(f(H)) \leq h \lambda \alpha(H) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon.$$

Si può così concludere nel modo voluto, perchè ε è arbitrario e λ è indipendente da H .

Un caso particolare è il seguente. Si prenda per E lo spazio di Banach $C([0,1])$ delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$ con la norma $\|x\| = \sup \{|y(x)| : x \in [0,1]\}$, e per $f(y)$ la funzione

$$(7) \quad f(y) = y \int_0^1 \sqrt{|y(x)|} dx,$$

definita su di una sfera di E , avente per centro l'origine e raggio 2. Si constata facilmente che la (7) non è una funzione completamente continua. Si può anche vedere che tale funzione non è lipschitziana. Sia infatti $u \in C([0,1])$ una funzione tale che sia :

a) positiva o nulla e di norma eguale a 1 ;

$$b) \quad \int_0^1 u(x)^{-1/2} dx = +\infty.$$

Per ogni numero naturale n , sia $u_n(x)$ la funzione definita ponendo :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u(x) && \text{per } x \geq \frac{1}{n} \\ u_n(x) &= u\left(\frac{1}{n}\right) && \text{per } x < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Risulta :

$$\begin{aligned} & \left\| \{u_n(x) + \varepsilon\} \int_0^1 \sqrt{u_n(x) + \varepsilon} dx - u_n(x) \int_0^1 \sqrt{u_n(x)} dx \right\| \geq \\ & \geq \left| \int_0^1 \{\sqrt{u_n(x) + \varepsilon} - \sqrt{u_n(x)}\} dx \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_n(x)^{-1/2} dx. \end{aligned}$$

Quindi il rapporto $\frac{f(u_n + \varepsilon) - f(u_n)}{\varepsilon}$, per ε abbastanza piccolo e n tendente a $+\infty$, tende a $+\infty$, in virtù dell'ipotesi *b*) fatta sulla $u(x)$. Dunque la (7) non è una funzione lipschitziana; nè si vede un'immediata scomposizione della (7) come somma di due funzioni: una completamente continua e una lipschitziana; essa è invece α -lipschitziana, perchè è del tipo della (3).

Un ulteriore esempio è il seguente: sia E un'algebra di Banach, Δ un sottoinsieme di E , $g(y)$ e $h(y)$ due funzioni α -lipschitziane che trasformano Δ in un insieme limitato e contenuto in E ; e si consideri la funzione $f(y)$ di Δ in E , definita nel seguente modo:

$$f(y) = g(y) h(y).$$

Una facile verifica mostra che anche per questa funzione sussiste una diseguaglianza del tipo della (4)¹⁰, dopo di che, usando di un ragionamento del tutto analogo ai precedenti, si può affermare che $f(y) = g(y) h(y)$ è una funzione α -lipschitziana.

¹⁰) In questo caso la costante L deve essere presa come il $\sup \{ \|g(y)\| : y \in \Delta \}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI - *Fonctions d'une variable réelle*. Chap. IV - (1951).
- [2] C. CORDUNEANU - *Equazioni differenziali negli spazi di Banach. Teoremi di esistenza e prolungabilità*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Vol. XXIII - (1957).
- [3] G. DARBO - *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. Vol. XXIV - (1955).
- [4] J. DIEUDONNÉ - *Fondements de l'Analyse Moderne*. (1963).
- [5] M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN - *Non local existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations*. (In russo) Doklady Akad. Nauk C. C. C. P. - 102 - (1955).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15-9-1967.