Un théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables

par

J. G.-MIKUSIŃSKI et C. RYLL-NARDZEWSKI (Wrocław).

1. Titchmarsh [8] a démontré le théorème suivant:

(I) *Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions sommables sur l'intervalle $(0,a)$, telles que le produit de composition*

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

s'annule presque partout dans $(0,a)$, on a $f(t)=0$ presque partout dans $(0,b)$ et $g(t)=0$ presque partout dans $(0,c)$, où $b+c\geqslant a$.

Ce théorème permet de construire une théorie des opérateurs de Heaviside qui est plus générale que celle fondée sur la transformation de Laplace [4]. Une extension de cette théorie aux fonctions de plusieurs variables sera possible dès que l'on généralise le théorème de Titchmarsh. Ce théorème peut être énoncé, pour les fonctions de plusieurs variables, comme il suit:

(II) *Si $f(t_1,\ldots,t_n)$ et $g(t_1,\ldots,t_n)$ sont deux fonctions sommables dans le simplexe*

$$S_a:\qquad 0<t_i\ (i=1,\ldots,n),\qquad t_1+\ldots+t_n<a,$$

telles que le produit de composition

$$(1)\qquad \int_0^{t_1} d\tau_1\ldots\int_0^{t_n} d\tau_n f(t_1-\tau_1,\ldots,t_n-\tau_n)\,g(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

s'annule presque partout sur S_a, on a $f(t_1,\ldots,t_n)=0$ presque partout sur S_b et $g(t_1,\ldots,t_n)=0$ presque partout sur S_c, où $b+c\geqslant a$.

Un théorème analogue à (II) a été publié récemment par Lions ([2], [3]). Ses méthodes de démonstration sont une généralisation de celles de Titchmarsh [8] et de Dufresnoy [1] et s'appuient sur la théorie des fonctions analytiques. Or, un théorème des moments bornés, publié dans ce volume [6], permet d'obtenir le théorème (I) par des méthodes d'analyse des fonctions de variable réelle [5]. Il peut donc être d'intérêt de donner une démonstration du théorème (II), n'éxigeant que des méthodes pareilles. C'est ce qui est le but de cet article.

2. Désignons généralement par $S_{l,v}$ le simplexe dont le sommet se trouve à l'origine et la base est définie par les relations

$$0<t_i\ (i=1,\ldots,n),\qquad t_1v_1+\ldots+t_nv_n=l,$$

où $0<v_i$ $(i=1,\ldots,n)$, $v_1^2+\ldots+v_n^2=1$ et $l>0$.

Soit f une fonction définie et sommable sur un simplexe S_{l_0,v_0} telle que l'intégrale prise sur la base des simplexes $S_{l,v}$ contenus dans S_{l_0,v_0} est nulle pour presque tout simplexe $S_{l,v}$ pour lequel l'angle entre les vecteurs v et v_0 est inférieur à ε, où ε est un nombre positif donné.

Cela posé, nous démontrerons que la fonction $f(t_1,\ldots,t_n)=0$ dans S_{l_0,v_0} [1]).

En introduisant, d'une manière convenable, un nouveau système de coordonnées $x_1,\ldots,x_n$, on peut placer le simplexe S_{l_0,v_0} dans le cube

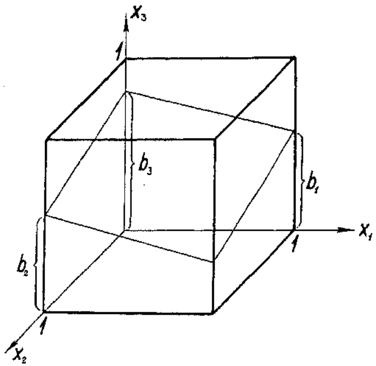
$$0<x_i<1\qquad (i=1,\ldots,n)$$

de sorte que la base se trouve sur le plan $x_n=0$. Posons $f=0$ pour tout point du cube en déhors du simplexe. Ainsi la fonction f reste sommable dans le cube tout entier. Désignons par $I_{b_1,\ldots,b_n}$ l'intersection du cube par le plan

$$(2)\qquad x_n=(b_1-b_n)x_1+\ldots+(b_{n-1}-b_n)x_{n-1}+b_n;$$

[1]) On sait [7] que, si l'intégrale d'une fonction f continue dans un domaine borné D s'annule sur tout segment joignant les points frontières de D, on a $f=0$ identiquement dans D. La proposition analogue a lieu dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions. Or, le lemme que nous démontrons ici n'en découle pas, car les bases de $S_{l,v}$ ne peuvent pas couper celle de S_{l_0,v_0}.

on suppose que cette intersection n'a pas de points communs avec le plan $x_n=0$, c'est-à-dire que



$$(3) \qquad b_{i_1}+\ldots+b_{i_m}>(m-1)b_n$$

pour tout système de m $(1\leqslant m\leqslant n-1)$ indices $i_1,\ldots,i_m$ (différents).

Il existe un nombre $\eta>0$ (qui dépend de ε) tel que l'intégrale

$$\int_0^1 dx_1\ldots\int_0^1 dx_{n+1}f[x_1,\ldots,x_{n-1},(b_1-b_n)x_1+\ldots+(b_{n-1}-b_n)x_{n-1}+b_n]$$

est nulle pour presque tout système de valeurs $b_1,\ldots,b_n$ satisfaisant aux inégalités (3) et

$$(4) \qquad |b_n-b_i|<\eta \qquad (i=1,\ldots,n-1).$$

Par conséquent, l'intégrale

$$F(b_1,\ldots,b_n)=\int dx_1\ldots\int dx_n f(x_1,\ldots,x_n),$$

prise sur le volume contenu entre la base du cube et l'intersection, est encore nulle. On peut donc écrire

$$F(b_1,\ldots,b_n)=$$
$$\int_0^1 dx_1\ldots\int_0^1 dx_{n-1}\int_0^{(b_1-b_n)x_1+\ldots+(b_{n-1}-b_n)x_n+b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n=0,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial b_i}=\int_0^1 dx_1\ldots\int_0^1 dx_{n-1}x_i f[x_1,\ldots,x_{n-1},(b_1-b_n)x_1+\ldots$$
$$+(b_{n-1}-b_n)x_{n-1}+b_n]=0$$

pour $i=1,\ldots,n-1$.

Par induction on a

$$\int_0^1 dx_1\ldots\int_0^1 dx_{n-1}x_1^{m_1}\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}}f[x_1,\ldots,x_{n-1},(b_1-b_n)x_1+\ldots$$
$$+(b_{n-1}-b_n)x_{n-1}+b_n]=0.$$

En appliquant le théorème bien connu des moments, il s'ensuit que

$$f[x_1,\ldots,x_{n-1},(b_1-b_n)x_1+\ldots+(b_{n-1}-b_n)x_{n-1}+b_n]=0;$$

cette égalité est valable pour presque tous les $x_1,\ldots,x_{n-1}$ satisfaisant aux inégalités $0<x_i<1$ $(i=1,\ldots,n-1)$ et presque tous les $b_1,\ldots,b_n$ satisfaisant aux inégalités (3) et (4). Donc $f=0$ presque partout dans le cube et, en particulier, presque partout dans le simplexe considéré.

3. Désignons généralement par $\Phi_v(f;l)$ l'intégrale de la fonction f prise sur la base $S_{l,v}$. Soient f et g deux fonctions sommables sur S_{l_0,v_0} et h leur produit de composition (1). Nous allons démontrer que

$$(5) \qquad \Phi_v(h;l)=\int_0^l \Phi_v(f;l-\lambda)\,\Phi_v(g;\lambda)\,d\lambda.$$

En effet, on peut écrire

$$\Phi_v(f;l)=\frac{1}{v_n}\int\underset{D_l}{\ldots}\int dt_1\ldots dt_{n-1}f(t_1,\ldots,t_n),$$

où

$$(6) \qquad t_n=\frac{1}{v_n}(l-v_1t_1-\ldots-v_{n-1}t_{n-1}),$$

le domaine d'intégration D_l étant défini par les inégalités

$$0<t_i \ (i=1,\ldots,n-1), \quad v_1t_1+\ldots+v_{n-1}t_{n-1}<l.$$

Pareillement on peut écrire

$$
\begin{aligned}
&\Phi_v(h;l)\\
(7)\quad &=\frac{1}{v_n}\int_{D_l}\!\!\dots\!\int dt_1\dots dt_{n-1}\int_0^{t_1}d\tau_1\dots\int_0^{t_n}d\tau_n f(t_1-\tau_1,\dots,t_n-\tau_n)g(\tau_1,\dots,\tau_n),
\end{aligned}
$$

où l'on a (6), et

$$
\begin{aligned}
(8)\quad &\int_0^l \Phi_v(f;l-\lambda)\Phi_v(g;\lambda)d\lambda\\
&=\frac{1}{v_n^2}\int_0^l d\lambda\int_{D_{l-\lambda}}\!\!\dots\!\int dr_1\dots dr_{n-1}\int_{D_\lambda}\!\!\dots\!\int ds_1\dots ds_{n-1}f(r_1,\dots r_n)g(s_1,\dots,s_n),
\end{aligned}
$$

où

$$r_n=\frac{1}{v_n}(l-\lambda-v_1r_1-\dots-v_{n-1}r_{n-1}),$$

$$s_n=\frac{1}{v_n}(\lambda-v_1s_1-\dots-v_{n-1}s_{n-1}).$$

En substituant, dans l'intégrale multiple de (8)

$$
\left.\begin{aligned}
r_i&=t_i-\tau_i,\\
s_i&=\tau_i,
\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\dots,n-1)
$$

$$\lambda=v_1\tau_1+\dots+v_n\tau_n;$$

on parvient sans peine à l'intégrale multiple de (7), ce qui prouve l'identité (5).

4. Supposons que les fonctions f et g soient continues dans S_{l_0,v_0}. Alors, il en est de même de leur produit de composition (1). Les fonctions $\Phi_v(f;l)$, $\Phi_v(g;l)$ et $\Phi_v(h,l)$ sont encore continues par rapport à l et v.

Soient m et p les plus grands nombres tels que $f=0$ dans S_{m,v_0} et $g=0$ dans S_{p,v_0}. Supposons que $m<l_0$.

Fixons arbitrairement un nombre l_1 tel que $m<l_1<l_0$. Il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que $S_{l,v}$ est contenu dans S_{l_1,v_0} lorsque $|v-v_0|<2\varepsilon$, où $|v-v_0|$ désigne la longueur du vecteur $v-v_0$. Remarquons que si l'on fait tendre l_1 vers l_0, ε doit tendre vers 0.

En vertu du n° 2, il existe un nombre m_1 et un vecteur v_1, tels que

$$
\begin{aligned}
&0<m_1<l_1,\\
(9)\quad &\Phi_{v_1}(f;m_1)\neq 0,\\
&|m_1-m|<l_0-l_1,\\
(10)\quad &|v_1-v_0|<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

La fonction $\Phi_v(f;m_1)$ étant continue, il existe un nombre η $(0<\eta<\varepsilon)$ tel que

$$(11)\qquad \Phi_v(f;m_1)\neq 0 \quad \text{pour} \quad |v-v_1|<\eta.$$

Puisque les fonctions f et g sont définies dans S_{l_0,v_0}, la formule (5) est valable pour l et v tels que le simplexe $S_{l,v}$ est contenu dans S_{l_0,v_0}, en particulier pour $0<l\leqslant l_1$ et $|v-v_1|<\eta$. Si $h=0$ dans S_{l_0,v_0}, on a $\Phi_v(h,l)=0$ et, en vertu du théorème de Titchmarsh et de l'inégalité (11),

$$\Phi_v(g;l)=0 \quad \text{pour} \quad 0<l\leqslant l_1-m_1 \text{ et } |v-v_1|<\eta.$$

En vertu du n° 2 on a donc $g=0$ dans $S_{l_1-m_1,v_1}$.

Si $l_1\to l_0$, on a $\varepsilon\to 0$ et $l_1-m_1\to l_0-m$, $v_1\to v_0$, en vertu de (9) et (10). Il s'ensuit que $g=0$ dans S_{l_0-m,v_0}.

5. Nous venons de démontrer que si $h=0$ dans S_{l_0,v_0} et $f=0$ dans S_{m,v_0} $(0<m<l_0)$, on a $g=0$ dans S_{p,v_0}, où $m+p\geqslant l_0$. Le théorème sur le produit de composition des fonctions de plusieurs variables, énoncé au commencement de l'article, se trouve donc démontré pour les fonctions continues. Ce théorème a été énoncé pour le simplexe S_a équilatéral, notre démonstration est cependant valable pour des simplexes arbitraires. Cette généralisation s'obtient d'ailleurs d'une manière triviale par une transformation affine.

Il reste à généraliser la démonstration pour les fonctions sommables, non nécessairement continues. On peut y parvenir ou bien en modifiant la démonstration d'une manière évidente, ou bien en remplaçant les fonctions sommables $f(t_1,\dots,t_n)$ et $g(t_1,\dots,t_n)$ par leurs intégrales

$$F(t_1,\dots,t_n)=\int_0^{t_1}d\tau_1\dots\int_0^{t_n}d\tau_n f(\tau_1,\dots,\tau_n)$$

et

$$G(t_1, \ldots, t_n) = \int_0^{t_1} d\tau_1 \ldots \int_0^{t_n} d\tau_n g(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

qui sont évidemment des fonctions continues.

Ouvrages cités.

[1] J. Dufresnoy, *Sur le produit de composition de deux fonctions*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 225 (1947), p. 857-859.

[2] J. L. Lions, *Supports de produit de composition*, C. R. 232 (1951), p. 1530-1532.

[3] — *Supports de produits de composition*, C. R. 232 (1951), p. 1622-1624.

[4] J. G.-Mikusiński, *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica 11 (1950), p. 41-70.

[5] — *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, ce volume.

[6] J. G.-Mikusiński and C. Ryll-Nardzewski, *A theorem on bounded moments*, ce volume.

[7] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Berichte der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 69 (1917), p. 262-277.

[8] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 25 (1926), p. 283-302.

PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ÉTAT

(Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1952)

Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (II)

par

W. ORLICZ (Poznań).

1. On doit à DENJOY et KHINTCHINE les premiers exemples de fonctions continues dépourvues presque partout de dérivée approximative. Ils ont démontré l'existence de fonctions continues $f(x)$ telles que

$$\overline{\lim_{t \to x}} \text{ as} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| = \infty \tag{1}$$

pour presque tout x. La première partie de notre travail, publiée dans le X-ième volume de ce journal et citée dans la suite comme LI, était consacrée à l'étude de fonctions continues pourvues de certaines singularités (par exemple, non-dérivabilité). La partie présente[1]) suit les idées de LI, la notion de limite ordinaire étant remplacée par celle de limite asymptotique. Citons, comme exemple des résultats obtenus, le théorème suivant:

Il existe une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz avec chaque exposant entre 0 et 1, telle que l'on ait (1) pour presque tout x.

2. La suite $\{f_n(x)\}$ composée de fonctions mesurables est dite *asymptotiquement bornée* dans l'ensemble E lorsque $\vartheta_n \to 0$ entraîne la convergence asymptotique sur E de la suite $\{\vartheta_n f_n(x)\}$ vers 0. Cette condition équivaut à la suivante[2]):

---

[1]) Les résultats du travail ont été présentés le 10 avril 1945 à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Cracovie.

[2]) Voir W. Orlicz, *On a class of asymptotically divergent sequences of functions*, Studia Mathematica 12 (1951), p. 286-307.