

# BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS TRÈVES

## **Un théorème sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants dépendant de paramètres**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 90 (1962), p. 473-486

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1962\\_\\_90\\_\\_473\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1962__90__473_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À COEFFICIENTS CONSTANTS  
DÉPENDANT DE PARAMÈTRES;

PAR

FRANÇOIS TREVES (\*).

Il a été démontré, dans [5], que si  $P(\nu, D)$  est un opérateur différentiel à coefficients constants sur  $\mathbf{R}^n$  dépendant de façon  $C^\infty$  d'un paramètre  $\nu$  (point variable d'une variété  $C^\infty V$ ) (1) et que si, pour deux valeurs quelconques  $\nu_1, \nu_2$  du paramètre,  $P(\nu_1, D)$  et  $P(\nu_2, D)$  sont également forts, alors il existe une distribution  $E(\nu)$  sur  $\mathbf{R}^n$ , dépendant de  $\nu$ , telle que l'opérateur de convolution  $E(\nu) \star$  soit une fonction  $C^\infty$  de  $\nu$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$  (2) et que, pour chaque  $\nu \in V$ ,  $P(\nu, D) E(\nu) = \delta$  (3). Ce résultat pose tout naturellement la question de sa réciproque : en supposant toujours que  $P(\nu, D)$  dépende de façon  $C^\infty$  de  $\nu$  et qu'il existe  $E(\nu)$  avec les propriétés ci-dessus, peut-on en conclure que les polynômes différentiels  $P(\nu, D)$  sont équivalents ?

Pour que cette question soit raisonnable, il faut bien entendu supposer la variété  $V$  connexe. Même dans ce cas, la réponse est négative si l'on n'impose pas à  $P(\nu, D)$  des conditions supplémentaires. Nous avons en effet montré dans [6] (p. 34-37) que l'opérateur différentiel ordinaire

$$P\left(t, \frac{d}{dx}\right) = e^{-1/t} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 1,$$

(\*) L'auteur est un Fellow of the Sloan Foundation.

(1) Ceci signifie en particulier que l'ordre de  $P(\nu, D)$  reste borné lorsque  $\nu$  varie dans un compact de  $V$ .

(2)  $L_c^2$  : espaces des fonctions de carré sommable sur  $\mathbf{R}^n$  (pour la mesure de Lebesgue) à support compact ;

$L_{loc}^2$  : espaces des fonctions localement de carré sommable sur  $\mathbf{R}^n$  ;

$\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$  : espace des opérateurs linéaires continus de  $L_c^2$  dans  $L_{loc}^2$  (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de  $L_c^2$ ).

(3)  $\delta$  est la mesure de Dirac :  $E(\nu)$  est donc une solution élémentaire de  $P(\nu, D)$ .

où  $t$  varie dans la variété avec bord  $[0, 1]$ , a une solution élémentaire  $E(t)$  qui est une fonction  $C^\infty$  de  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$ . Or  $P\left(0, \frac{d}{dx}\right)$  n'est pas aussi fort que  $P\left(t, \frac{d}{dx}\right)$  pour  $t \neq 0$ .

Ce genre d'exemple nous a conduit à poser la définition suivante :

**DÉFINITION 1.** — *Nous dirons que  $P(\nu, D)$  est de type analytique sur  $V$  si toute combinaison linéaire des coefficients de  $P(\nu, D)$  qui a un zéro d'ordre infini en un point de  $V$ , est nulle dans  $V$  entière.*

Le théorème principal qui va être démontré dans ce qui suit peut alors s'énoncer ainsi :

**THÉORÈME 1.** — *Supposons que  $P(\nu, D)$  dépende de façon  $C^\infty$  de  $\nu \in V$ , que la variété  $V$  soit connexe et que  $P(\nu, D)$  soit de type analytique sur  $V$ .*

*S'il existe une distribution  $E(\nu)$  dépendant de  $\nu$  telle que  $\nu \rightarrow E(\nu) \star$  soit une fonction  $C^\infty$  de  $\nu$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$  et telle que, pour chaque  $\nu \in V$ ,  $P(\nu, D)E(\nu) = \delta$ , alors les polynômes différentiels sur  $\mathbf{R}^n$   $P(\nu, D)$  sont également forts lorsque  $\nu$  parcourt  $V$ .*

Nous allons aussi montrer que ce résultat est équivalent à celui énoncé ci-dessous, apparemment plus fort. Nous rappelons que  $H_{loc}^s$  est l'espace des distributions  $T$  sur  $\mathbf{R}^n$  telles que, pour toute  $\varphi \in C_0^\infty$  (i. e.  $C^\infty$  et à support compact), la transformée de Fourier  $(\varphi T)^\wedge(\xi)$  de  $\varphi T$  soit de carré sommable pour la mesure

$$(1 + |\xi|^2)^s d\xi \quad (s \text{ réel quelconque}) \quad (4).$$

**DÉFINITION 2.** — *Un espace de distributions  $\mathcal{F}$  sera dit un espace de distributions d'ordre fini s'il existe un réel  $s$  tel que  $\mathcal{F}$  soit plongé continûment dans  $H_{loc}^s$ .*

Le résultat auquel nous faisons allusion ci-dessus est alors le suivant :

**THÉORÈME 1'.** — *Mêmes hypothèses sur  $V$  et  $P(\nu, D)$  que dans le théorème 1.*

*S'il existe une fonction  $C^\infty$ ,  $\nu \rightarrow E(\nu)$ , à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini sur  $\mathbf{R}^n$  telle que, pour tout  $\nu \in V$ ,  $P(\nu, D)E(\nu) = \delta$ , les  $P(\nu, D)$  sont également forts.*

Ce résultat a été démontré dans [6] sous l'hypothèse supplémentaire que les  $P(\nu, D)$  soient hypoelliptiques.

(4)  $H_{loc}^s$  est muni de la topologie définie par les semi-normes

$$T \rightarrow \left( \int (1 + |\xi|^2)^s |(\varphi T)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

$\varphi$  parcourant l'espace  $C_0^\infty$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact.

Dorénavant la variété  $V$  sera supposée *connexe*. Comme il suffit de prouver le résultat *localement par rapport à  $\nu$* , nous pouvons aussi supposer que  $V$  est dénombrable à l'infini (et séparée!).

**1. Utilisation du fait que  $P(\nu, D)$  est de type analytique.** — Le fait que  $P(\nu, D)$  soit de type analytique sur  $V$  est équivalent à la propriété suivante :

Pour tout  $\nu_0 \in V$ , il existe une famille finie d'opérateurs différentiels  $(D_\nu)_j$  ( $j=1, \dots, r$ ) sur  $V$  et une famille équipotente de fonctions complexes  $\{a_j(\nu)\}$  ( $j=1, \dots, r$ ) sur  $V$  tels qu'on ait, pour tout  $\nu \in V$ ,

$$(1) \quad P(\nu, D) = \sum_{j=1}^r a_j(\nu) [(D_\nu)_j P(\nu, D)]_{\nu=\nu_0}.$$

Notre assertion est un cas particulier du lemme 2.4 de [6] (p. 40).

Prenant  $\nu_0$  arbitraire, il nous suffira de prouver que les polynômes différentiels  $[(D_\nu)_j P(\nu, D)]_{\nu=\nu_0}$  sont plus faibles que  $P(\nu_0, D)$ , puisque ceci entraîne trivialement que  $P(\nu, D)$  est plus faible que  $P(\nu_0, D)$  pour tout  $\nu \in V$ . Mais tout opérateur différentiel  $D_\nu$  sur  $V$  peut se mettre localement sous la forme

$$D_\nu = \sum_{i=1}^q g_i(\nu) (L_i)^{k_i},$$

où les  $g_i$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\nu$  et les  $L_i$  des champs  $C^\infty$  de dérivations sur  $V$  ([6], lemme 2.6, p. 47). Il suffira donc de démontrer que si  $L$  est un champ  $C^\infty$  de dérivations sur  $V$ , alors pour tout  $k=1, 2, \dots$ ,

$$[L^k P(\nu, D)]_{\nu=\nu_0} \preceq P(\nu_0, D)$$

( $\preceq$  signifie « plus faible que »). En utilisant un morceau de variété intégrale de dimension 1,  $\nu = \nu(t)$ , de  $L$  passant par  $\nu_0$  [en supposant que  $t$  est un paramètre réel et que  $\nu(0) = \nu_0$ ], il nous faut donc montrer que pour tout  $k=1, 2, \dots$ ,

$$\left[ \left( \frac{d}{dt} \right)^k P(\nu(t), D) \right]_{t=0} \preceq P(\nu(0), D).$$

Nous sommes ainsi ramenés à la situation suivante : On donne un polynôme différentiel  $P(t, D_x)$  sur  $\mathbf{R}_x^n$  dont les coefficients sont des fonctions  $C^\infty$  d'un paramètre réel  $t$ . Remarquer que lorsque  $k=0, 1, 2, \dots$ , les polynômes différentiels

$$\left[ \left( \frac{d}{dt} \right)^k P(t, D_x) \right]_{t=0}$$

engendrent un espace vectoriel de dimension finie (simplement parce que ces polynômes différentiels sont tous d'ordre inférieur à un certain entier).

Nous faisons d'autre part l'hypothèse qu'il existe une distribution  $E(t)$  sur  $\mathbf{R}^n$  dépendant de  $t \in \mathbf{R}$  telle que :

- 1°  $t \rightarrow E(t) \star$  soit une fonction  $C^\infty$  de  $t$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$ ;  
 2° pour tout  $t$  réel,

$$(2) \quad P(t, D_x) E(t) = \delta_x.$$

2. L'algèbre  $\mathcal{A}$ . — Pour simplifier nous poserons, pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$P_k = \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)^k P(t, D_x) \right]_{t=0}, \quad E_k = \left[ \left( \frac{d}{dt} \right)^k E(t) \right]_{t=0}.$$

En différentiant par rapport à  $t$  l'équation (2), on obtient, pour  $j = 1, 2, \dots$ ,

$$(3)_j \quad \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} \frac{1}{(j-k)!} P_k E_{j-k} = 0.$$

D'ailleurs, pour  $t = 0$ , l'équation (2) donne

$$(3)_0 \quad P_0 E_0 = \delta.$$

Nous poserons pour  $i = 1, 2, \dots$ ,

$$X_j = \frac{1}{j!} P_0^{j-1} P_j, \quad Y_j = \frac{1}{j!} P_0^{j+1} E_j,$$

et  $X_0 = Y_0 = \delta$ . En multipliant l'équation (3) <sub>$j$</sub>  ( $j \geq 1$ ) par  $P_0^j$ , compte tenu de (3)<sub>0</sub>, il vient

$$(4)_j \quad \sum_{k=0}^j X_k Y_{j-k} = 0.$$

Noter que  $X_k$  est un opérateur différentiel (nous devrions donc plutôt écrire  $X_0 = 1$  que  $X_0 = \delta$ ) et que  $Y_{j-k}$  est une distribution. En fait nous allons voir que les  $Y_j$  eux-mêmes « sont » des polynômes différentiels, c'est-à-dire des distributions de support à l'origine.

Appelons  $\mathcal{A}$  l'algèbre commutative engendrée par  $X_0, X_1, \dots, X_j, \dots$ ; nous noterons multiplicativement le produit dans  $\mathcal{A}$ . Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont des opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $\mathbf{R}^n$ . Posons provisoirement, pour  $j = 1, 2, \dots$ ,

$$X'_j = -X_j \delta$$

(ainsi  $X'_j$  est une distribution de support à l'origine).

Ainsi l'équation (4)<sub>j</sub> peut s'écrire

$$(5)_j \quad Y_j - X'_j = \sum_{k=1}^{j-1} X'_k \star Y_{j-k}.$$

Ceci montre que les  $Y_j$  sont des polynômes de convolution en les  $X'_1, \dots, X'_j$ . Ceci est vrai pour  $j=1$  puisque  $Y_1 = X'_1$  et la formule (5)<sub>j</sub> le montre par récurrence sur  $j$ . Ainsi les  $Y_j$  sont des distributions de support à l'origine; nous noterons encore  $Y_j$  le polynôme différentiel défini par  $Y_j$ . Nous venons de voir que les  $Y_j$  sont des polynômes en les  $X_i$ , c'est-à-dire  $Y_j \in \mathfrak{A}$ . Nous interpréterons désormais les produits  $X_k Y_{j-k}$  dans les équations (4)<sub>j</sub> comme des produits dans  $\mathfrak{A}$ . Et nous avons  $Y_0 = X_0 = 1$  (unité de  $\mathfrak{A}$ ).

**3. Comparaison des polynômes différentiels.** — Si  $P(\xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , est un polynôme à  $n$  variables à coefficients complexes, on pose

$$\tilde{P}(\xi) = \left( \sum_p |P^{(p)}(\xi)|^2 \right)^{1/2},$$

où  $p$  varie dans  $N^n$ , c'est-à-dire dans l'ensemble des multi-indices  $(p_1, \dots, p_n)$  ( $p_j$  : entier  $\geq 0$ ), et où

$$P^{(p)}(\xi) = \left( \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^{p_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^{p_n} P(\xi).$$

On dit que le polynôme différentiel  $P(D)$  est *plus fort* qu'un autre polynôme différentiel  $Q(D)$  s'il existe une constante  $C < +\infty$  telle que  $\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n$  <sup>(5)</sup>. On remarquera, en particulier, que tout  $P^{(p)}(D)$  est plus faible que  $P(D)$ . Les faits suivants sont équivalents :

a.  $Q(D)$  est plus faible que  $P(D)$ ;

b. pour un certain (ou pour tout) ouvert borné non vide  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , pour toute fonction  $C^\infty \varphi$  à support (compact) contenu dans  $\Omega$ ,

$$\| Q(D) \varphi \|_{L^2} \leq C_\Omega \| P(D) \varphi \|_{L^2} \quad (6),$$

où  $C_\Omega < +\infty$  ne dépend pas de  $\varphi$ .

Pour ces résultats, voir [2].

**LEMME 1.** — Soit  $\nu$  un entier  $\geq 0$ . Il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ,

$$c \tilde{P}^\nu(\xi) \leq [\tilde{P}(\xi)]^\nu \leq \frac{1}{c} \tilde{P}^\nu(\xi).$$

(5)  $P(D)$  s'obtient à partir du polynôme  $P(\xi)$  en substituant  $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_j}$  à  $\xi_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

(6)  $\| \cdot \|_{L^2}$  est la norme de  $L^2$ .

La première inégalité est une conséquence triviale de la formule de Leibniz. Pour prouver la seconde, posons  $Q(\xi) = [\tilde{P}(\xi)]^{2\nu}$ . On a

$$(6) \quad |Q(\xi)|^2 \leq C_\nu \sum_{P_1, \dots, P_{2\nu}} |P^{(P_1)}(\xi)|^2 \dots |P^{(P_{2\nu})}(\xi)|^2,$$

Soit  $\varphi \in C_0^\infty$ ; appelons  $\hat{\varphi}$  sa transformée de Fourier :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} \varphi(x) dx.$$

Multiplions les deux membres de (6) par  $|\hat{\varphi}(\xi)|^2$ , et appliquons le théorème de Plancherel :

$$\|Q(D)\varphi\|_{L^2}^2 \leq C_\nu \sum_{P_1, \dots, P_{2\nu}} \|P^{(P_1)}(D) \dots P^{(P_{2\nu})}(D)\varphi\|_{L^2}^2.$$

Supposons que  $\varphi$  garde son support dans un ouvert borné (non vide)  $\Omega$ . Puisque les  $P^{(p)}(D)$  sont plus faibles que  $P(D)$ , on obtient

$$\|Q(D)\varphi\|_{L^2}^2 \leq C_{\nu, \Omega} \|P(D)^{2\nu}\varphi\|_{L^2}^2,$$

ce qui implique

$$Q(\xi) \leq C' \tilde{P}^{2\nu}(\xi), \quad C' < +\infty.$$

Mais en vertu de la première inégalité de l'énoncé,  $\tilde{P}^{2\nu}(\xi) \leq C'' [\tilde{P}'(\xi)]^2$ , d'où le lemme.

**COROLLAIRE.** — Soient  $P, Q$ , deux polynômes sur  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mu, \nu$  deux entiers  $\geq 0$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $P(D)^\mu$  est plus fort que  $Q(D)^\nu$ ;
- (b) Il existe  $C < +\infty$  telle, que pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ,

$$[\tilde{Q}(\xi)]^\nu \leq C [\tilde{P}(\xi)]^\mu.$$

Remarquer qu'il existe un nombre  $a > 0$  tel que, pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n$ ,  $\tilde{P}(\xi) \geq a$ ,  $\tilde{Q}(\xi) \geq a$ . Supposons que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon < +\infty$  telle que

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C_\varepsilon [\tilde{P}(\xi)]^{1+\varepsilon}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

C'est une conséquence facile du théorème de Seidenberg-Tarski (voir [3], théorème 3.2) qu'alors il existe  $C < +\infty$  telle que  $\tilde{Q}(\xi) \leq C \tilde{P}(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbf{R}^n$ . D'où, en combinant avec le corollaire du lemme 1, le résultat suivant :

**LEMME 2.** — Soient  $P(D), Q(D)$  deux polynômes différentiels sur  $\mathbf{R}^n$ . Soient deux suites strictement croissantes d'entiers positifs  $\{\mu_k\}, \{\nu_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) telles que  $\nu_k/\mu_k \rightarrow 1$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

Si pour tout  $k$ ,  $Q(D)^{\nu_k}$  est plus faible que  $P(D)^{\mu_k}$ , alors  $Q(D)$  est plus faible que  $P(D)$ .

Si  $F$  est une distribution telle que l'opérateur de convolution  $F \star$  applique  $L_c^2$  dans  $L_{loc}^2$ , et si

$$Q(D) \delta = F \star P(D) \delta,$$

il est facile de voir que  $Q(D)$  est plus faible que  $P(D)$ . Supposons en particulier que  $P(D)$  possède une solution élémentaire  $E$  telle que

$$Q(D)E \star L_c^2 \subset L_{loc}^2,$$

alors

$$Q(D) \delta = (Q(D)E) \star P(D) \delta,$$

et donc  $Q(D) \preceq P(D)$  ( $\preceq$  : plus faible que) :

**LEMME 3.** — Soient  $P(D)$ ,  $Q(D)$ ,  $R(D)$  trois polynômes différentiels sur  $\mathbf{R}^n$ , non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $P(D) \succeq Q(D)$ ;
- (ii)  $R(D)P(D) \succeq R(D)Q(D)$ .

Que (i) implique (ii) découle trivialement de l'équivalence de (a) et de (b) (début du paragraphe 3). Prouvons (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Il existe <sup>(1)</sup> une solution élémentaire  $G$  de  $P(D)R(D)$  telle que  $S(D)G \star L_c^2 \subset L_{loc}^2$  pour tout  $S(D)$  plus faible que  $P(D)R(D)$ . En particulier,

$$(7) \quad Q(D)R(D)G \star L_c^2 \subset L_{loc}^2.$$

Mais  $R(D)G$  est une solution élémentaire de  $P(D)$ . D'après ce que nous venons de voir, ceci, joint à (7), implique (i).

**4. La fonction  $\varphi$ .** — Nous définissons la fonction suivante, sur l'ensemble des polynômes différentiels sur  $\mathbf{R}^n$  : si  $Q(D)$  est un tel polynôme différentiel, et s'il existe un entier  $\nu$  tel que  $Q(D) \preceq P(o, D)^\nu$  [pour  $P(o, D)$ , voir fin du paragraphe 1], alors  $\varphi(Q(D))$  est le plus petit  $\nu$  ayant cette propriété. S'il n'existe aucun  $\nu$  ayant cette propriété, nous poserons  $\varphi(Q(D)) = +\infty$ .

La fonction  $\varphi$  a les propriétés suivantes :

$$(\Phi_1) \quad \text{Si } Q(D) = \sum_{i=1}^r Q_i(D), \text{ alors}$$

$$\varphi(Q(D)) \leq \sup_{1 \leq i \leq r} \varphi(Q_i(D)).$$

$$(\Phi_2) \quad \varphi(Q(D)R(D)) \leq \varphi(Q(D)) + \varphi(R(D)).$$

$$(\Phi_3) \quad \varphi(P(o, D)^\nu) \leq \nu.$$

$$(\Phi_4) \quad \text{Si } Q(D) \delta = F \star R(D) \delta, \text{ avec } F \star L_c^2 \subset L_{loc}^2, \text{ alors}$$

$$\varphi(Q(D)) \leq \varphi(R(D)).$$

La preuve est immédiate.

---

(1) Voir [4].

Dorénavant nous considérerons la restriction de la fonction  $\varphi$  à l'algèbre  $\mathfrak{A}$ . Notons d'abord que

$$\varphi(Y_j) \leq j + 1 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots,$$

et que  $\varphi(Y_0) = 0$ . Ceci découle de notre hypothèse que, pour tout  $j$ ,  $E_j \star L_c^2 \subset L_{loc}^2$ .

LEMME 4. — *Pour tout  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $\varphi(A) < +\infty$ .*

Il suffit de prouver que  $\varphi(X_j) < +\infty$  pour tout  $j$ . Mais  $\varphi(X_0) = 0$  et  $\varphi(X_1) = \varphi(Y_1) \leq 2$ . Pour  $j \geq 2$ , on remarque que

$$X_j = - \sum_{k=0}^{j-1} X_k Y_{j-k},$$

d'où, en vertu de  $(\Phi_1)$  et  $(\Phi_2)$ ,

$$\varphi(X_j) \leq \sup_{0 \leq i \leq j-1} [\varphi(X_i) + \varphi(Y_{j-i})].$$

Le résultat intermédiaire crucial, dans la démonstration du théorème 1, est alors le suivant :

LEMME 5. — *Il existe un entier  $m \geq 1$  tel que, pour tout  $j = 0, 1, \dots$  et tout  $\nu = 0, 1, \dots$ , on ait*

$$\varphi(X_j^\nu) \leq \nu j + m.$$

Ce lemme 5 sera une conséquence du résultat apparemment plus général suivant :

LEMME 6. — *Il existe un entier  $m \geq 1$  tel que pour tout entier  $\nu$  et tout couple de systèmes d'entiers  $\geq 0$   $(r_1, \dots, r_{\nu+m})$ ,  $(s_1, \dots, s_\nu)$ , on ait*

$$\varphi(Y_{r_1} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \dots X_{s_\nu}) \leq \sum_{j=1}^{\nu+m} r_j + \sum_{k=1}^{\nu} s_k + m.$$

On passe du lemme 6 au lemme 5 en prenant  $r_1 = \dots = r_{\nu+m} = 0$ . La preuve du lemme 6 est renvoyée en appendice à cause de son caractère technique <sup>(8)</sup>. Elle est basée sur les propriétés  $(\Phi_1), \dots, (\Phi_k)$  de la fonction  $\varphi$ , sur les relations  $(4)_j$  :

$$(4)_j \quad \sum_{k=0}^j X_k Y_{j-k} = 0,$$

---

<sup>(8)</sup> La démonstration du lemme 6 est calquée sur celle du lemme 2.5 de [6]. Nous la redonnons cependant intégralement, pour les raisons suivantes : le lemme 6 est le plus important point d'appui de la preuve du théorème 1 ; sa démonstration simplifie et corrige celle du lemme 2.5 de [6].

sur le fait que  $\varphi(Y_0) = 1$ ,  $\varphi(Y_j) \leq j+1$  ( $j=1, 2, \dots$ ), et enfin sur le fait que les  $P_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) engendrent un espace vectoriel de dimension finie.

5. **Fin de la preuve du théorème 1.** — En vertu du lemme 5, on voit que pour tout  $\nu = 1, 2, \dots$ ,

$$(P_0^{j-1} P_j)^\nu \preceq P_0^{\nu+m} \preceq (P_0^j)^{\nu+m} \quad (j=1, 2, \dots).$$

En vertu du lemme 2, on en conclut que

$$P_0^{j-1} P_j \preceq P_0^j,$$

d'où en vertu du lemme 3,

$$P_j \preceq P_0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

6. **Preuve du théorème 1'.** — Soit  $\Delta_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2$  le laplacien sur  $\mathbf{R}^n$ . Quels que soient le réel  $s$  et l'entier  $q$ ,

$$T \rightarrow (1 - \Delta_x)^q T$$

est une application linéaire continue de  $H_{loc}^{s+2q}$  sur  $H_{loc}^s$ . Comme l'espace  $C_v^\infty$  des fonctions  $C^\infty$  sur  $V$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées, est un espace de Fréchet nucléaire et que les  $H_{loc}^s$  sont des espaces de Fréchet, il résulte d'un théorème général de Grothendieck que  $(1 - \Delta_x)^q$  applique  $C_v^\infty(H_{loc}^{s+2q})$  sur  $C_v^\infty(H_{loc}^s)$  (<sup>9</sup>) (voir [1]).

Supposons alors que  $E(\nu)$ , solution élémentaire de  $P(\nu, D)$ , soit une fonction  $C_v^\infty$  de  $\nu$  à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini  $\mathcal{F}$ . Il existe un réel  $s$  tel que  $\mathcal{F} \subset H_{loc}^s$  (plongement continu). Alors  $E(\nu)$  est *a fortiori* dans  $C_v^\infty(H_{loc}^s)$ . D'après ce que nous venons de dire, il existe  $F(\nu) \in C_v^\infty(H_{loc}^{s+2q})$  telle que

$$(1 - \Delta_x)^q F(\nu) = E(\nu).$$

Choisissons l'entier  $q$  assez grand pour que  $f \rightarrow f \star$  applique continûment  $H_{loc}^{s+2q}$  dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$ , choix qui est toujours possible. Alors  $F(\nu)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $\nu$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L_c^2; L_{loc}^2)$ . En outre

$$(1 - \Delta_x)^q P(\nu, D_x) F(\nu) = \hat{\delta}.$$

En vertu du théorème 1, les polynômes différentiels  $(1 - \Delta_x)^q P(\nu, D_x)$  doivent être également forts. Du lemme 3 découle alors que les  $P(\nu, D_x)$  doivent être également forts.

(<sup>9</sup>)  $C_v^\infty(H_{loc}^r)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  de  $\nu \in V$  à valeurs dans  $H_{loc}^r$ .

7. **Un corollaire du théorème 1'.** — Supposons, pour terminer, que la variété  $V$  soit une variété analytique complexe et que les coefficients des polynômes différentiels  $P(\nu, D)$  soient des fonctions holomorphes de  $\nu \in V$ . Dans ce cas les  $P(\nu, D)$  sont certainement de type analytique. Utilisons alors la remarque générale suivante : si une distribution  $E(\nu)$  en  $x \in \mathbf{R}^n$  est une fonction holomorphe de  $\nu$  à valeurs dans  $\mathcal{O}'_x$ , et si c'est une fonction continue de  $\nu$  à valeurs dans un espace de distributions d'ordre fini  $\mathcal{F}$ , alors, pour un réel  $s$  tel que  $\mathcal{F} \subset H^s_{loc}$  (plongement continu), c'est une fonction holomorphe de  $\nu$  à valeurs dans  $H^s_{loc}$  (et non plus seulement dans  $\mathcal{O}'_x$ ). Cela tient à ce que  $H^s_{loc}$  est complet et que donc des intégrales du genre <sup>(10)</sup> :

$$\frac{1}{(2i\pi)^d} \int_{|\zeta_1 - z_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_d - z_d| = r_d} \frac{E(\nu(\zeta))}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1} \cdots (\zeta_d - z_d)^{k_d}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_d$$

qui, *a priori* appartiennent simplement à  $\mathcal{O}'_x$ , en fait sont dans  $H^s_{loc}$ .

Si de plus  $E(\nu)$  est, pour chaque  $\nu$ , une solution élémentaire de  $P(\nu, D_x)$ , il résulte du théorème 1' que les  $P(\nu, D_x)$  doivent être également forts.

APPENDICE :

Démonstration du lemme 6.

Par hypothèse, l'espace vectoriel  $\mathcal{X}$  engendré par  $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$  est de dimension finie. Il existe donc un entier  $\mu \geq 0$  tel que pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ , on puisse écrire

$$P_k = \sum_{j=0}^{\mu} c_k^j P_j \quad (c_k^j : \text{ nombres complexes}).$$

Nous appellerons  $m_0$  le plus petit entier  $\mu$  ayant cette propriété. Si  $m_0 = 0$ , il n'y a rien à démontrer; nous supposons donc  $m_0 \geq 1$ . Nous poserons alors  $m = m_0 + 1$ .

Nous appellerons  $(A_\nu)$  la propriété suivante :

$(A_\nu)$  Pour tout ensemble d'indices  $(r_1, \dots, r_{\nu+m}), (s_1, \dots, s_\nu)$ , on a

$$\varphi(Y_{r_1} \cdots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \cdots X_{s_\nu}) \leq \sum_{j=1}^{\nu+m} r_j + \sum_{k=1}^{\nu} s_k + m.$$

<sup>(10)</sup>  $d$  est la dimension complexe de  $V$ ,  $z = (z_1, \dots, z_d), \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$  sont des points de  $\mathbf{C}^d$ ;  $\zeta \rightarrow \nu(\zeta)$  est un homéomorphisme holomorphe d'un voisinage de 0 dans  $\mathbf{C}^d$  sur un voisinage de  $\nu(0)$  dans  $V$ ;  $r_1, \dots, r_d$  sont des nombres  $> 0$  petits.

La conclusion du lemme est que  $(A_\nu)$  est vraie pour tout  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Nous faisons la convention que si  $\nu = 0$ ,  $X_{s_1} \dots X_{s_\nu} = 1$ . Il est clair que  $(A_0)$  est vérifiée :

$$\varphi(Y_{r_1} \dots Y_{r_m}) \leq \sum_{j=1}^m \varphi(Y_{r_j}) \leq \sum_{j=1}^m (r_j + 1).$$

Nous introduirons la propriété, pour  $j = 0, 1, \dots, m + \nu - 2$  :

$(A_\nu^j)$  Pour tous  $r_{j+2}, \dots, r_{\nu+m}$  et tous  $s_2, \dots, s_\nu$ ,

$$\varphi(Y_{r_{j+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_j X_{s_2} \dots X_{s_\nu}) \leq \sum_{\alpha=j+2}^{\nu+m} r_\alpha + j + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m.$$

LEMME A.1. —  $(A_{\nu-1})$  implique  $(A_\nu^j)$  pour tout  $j \leq m + \nu - 2$ .

Noter que  $(A_\nu^0) = (A_{\nu-1})$ . Ensuite récurrence sur  $j$ . On multiplie  $(4)_j$  par  $Y_{r_{j+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \dots X_{s_\nu}$ , ce qui donne, en posant

$$(A.1) \quad \begin{aligned} \xi_\alpha &= Y_{j-\alpha} Y_{r_{j+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \dots X_{s_\nu}, \\ \sum_{\alpha=0}^j \xi_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Supposons  $\alpha \leq j - 1$ , et posons  $r_{\alpha+2} = j - \alpha$  et, si  $\alpha \leq j - 2$ ,

$$r_{\alpha+2} = \dots = r_{j+1} = 0.$$

Alors

$$\xi_\alpha = Y_{r_{\alpha+2}} Y_{r_{\alpha+3}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \dots X_{s_\nu}.$$

Du fait de la récurrence,

$$\varphi(\xi_\alpha) \leq (j - \alpha) + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \alpha + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m,$$

soit

$$\varphi(\xi_\alpha) \leq \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{\beta=2}^{\nu} s_\beta + m.$$

Ceci doit être vrai aussi pour  $\alpha = j$  en vertu de (A.1).

Nous introduisons maintenant la propriété (pour  $j = 1, \dots, m$ ) :

$(B_\nu^j)$  Pour tous  $r_{j+1}, \dots, r_{\nu+m}$  et tous  $s_1, \dots, s_\nu$ ,

$$\varphi(Y_{r_{j+1}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \dots X_{s_\nu}) \leq \sum_{\alpha=j+1}^{\nu+m} r_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\nu} s_\beta + m.$$

LEMME A.2. — Si  $(A_j^i)$  est vraie pour  $j = 0, 1, \dots, m + \nu - 2$ , alors  $(B_j^i)$  est vraie pour  $j = 1, \dots, m$ .

Nous supposons donc que  $(A_j^i)$  est vraie pour  $0 \leq j \leq m + \nu - 2$ . Nous commencerons par prouver  $(B_m^m)$ ; nous prouverons ensuite  $(B_j^i)$  pour  $1 \leq j \leq m - 1$  par récurrence descendante sur  $j$  [et en nous appuyant encore sur  $(A_j^i)$  pour  $j = 0, 1, \dots, m + \nu - 2$ ].

PREUVE DE  $(B_m^m)$ . — Posons

$$\zeta_{r, \alpha} = Y_r Y_{r_{m+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \dots X_{s_\nu}.$$

Pour  $\alpha \leq m - 1 = m_0$ , donc  $(\alpha + 2) \leq m + 1$ ,  $(A_\nu^\alpha)$  implique

$$(A.2) \quad \varphi(\zeta_{r, \alpha}) \leq r + \alpha + \sum_{k=2}^{\nu} (r_{k+m} + s_k) + m.$$

Nous voulons démontrer ceci pour tout  $\alpha$ . Or

$$X_\alpha = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j P_0^{\alpha-j} X_j, \quad \lambda^j \in \mathbf{C},$$

et donc

$$\zeta_{r, \alpha} = \sum_{j=0}^{m_0} \lambda^j P_0^{\alpha-j} \zeta_{r, j},$$

d'où

$$\varphi(\zeta_{r, \alpha}) \leq \sup_{0 \leq j \leq m-1} [\varphi(\zeta_{r, j}) + \alpha - j],$$

ce qui entraîne évidemment (A.2).

PREUVE DE  $(B_j^i)$  pour  $1 \leq j \leq m - 1$ . — Posons

$$\eta_{r, \alpha} = Y_r Y_{r_{j+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_\alpha X_{s_2} \dots X_{s_\nu}.$$

Nous voulons montrer que

$$\varphi(\eta_{r, \alpha}) \leq r + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \alpha + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m.$$

Pour  $r = 0$ , le résultat découle de la récurrence descendante sur  $j$ . Pour  $\alpha \leq j - 1$ , le résultat est une conséquence de  $(A_\nu^\alpha)$ . Nous raisonnerons par récurrence (ascendante) sur  $r$  et  $\alpha$ . Multiplions (4) $_{r+\alpha}$  par

$$Y_{r_{j+2}} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \dots X_{s_\nu}.$$

Nous obtenons

$$\sum_{\beta=0}^{r+\alpha} \eta_{r+\alpha-\beta, \beta} = 0.$$

Pour  $\beta \leq \alpha - 1$ , on a

$$(A.3) \quad \varphi(\eta_{r+\alpha-\beta}, \beta) \leq r + \alpha + \sum_{k=j+2}^{\nu+m} r_k + \sum_{k=2}^{\nu} s_l + m,$$

en vertu de la récurrence sur  $\alpha$ ; on a (A.3) pour  $\beta \geq \alpha + 1$ , en vertu de la récurrence sur  $r$ . D'où (A.3) pour  $\beta = \alpha$ .

Nous introduisons enfin les propriétés suivantes :

$(C_{\nu, h})$  Pour tous  $r_2, \dots, r_{\nu+m}$  et tous  $s_1, \dots, s_{\nu}$ ,

$$\varphi(Y_h Y_{r_2} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_1} \dots X_{s_{\nu}}) \leq h + \sum_{k=2}^{\nu+m} r_k + \sum_{l=1}^{\nu} s_l + m.$$

$(\check{C}_{\nu, h})$  Pour tous  $r_2, \dots, r_{\nu+m}$  et tous  $s_2, \dots, s_{\nu}$ ,

$$\varphi(Y_h Y_{r_2} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \dots X_{s_{\nu}}) \leq h + \sum_{k=2}^{\nu+m} r_k + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m.$$

LEMME A.3. — Si  $(C_{\nu, k})$  est vraie pour  $k = 0, \dots, h - 1$ , alors  $(\check{C}_{\nu, h})$  est vraie.

Il suffit de multiplier  $(4)_h$  par  $Y_{r_2} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \dots X_{s_{\nu}}$  et d'appliquer  $(C_{\nu, 0}), \dots, (C_{\nu, h-1})$ .

LEMME A.4. — Supposons vraies  $(C_{\nu, 0})$  et  $(\check{C}_{\nu, h})$ . Alors  $(C_{\nu, h})$  est vraie.

Posons

$$\zeta_{r, j} = Y_h Y_r Y_{r_2} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_j X_{s_2} \dots X_{s_{\nu}}.$$

On a

$$(A.4) \quad \varphi(\zeta_{r, j}) \leq h + r + \sum_{k=3}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m$$

pour  $r = 0$  et tout  $j = 0, 1, \dots$ , en vertu de  $(C_{\nu, 0})$ ; on a aussi (A.4) pour  $j = 0$  et tout  $r$ , en vertu de  $(\check{C}_{\nu, h})$ . Nous raisonnons donc par récurrence (ascendante) sur  $r$  et sur  $j$ . En multipliant  $(4)_{r+j}$  par

$$Y_h Y_{r_2} \dots Y_{r_{\nu+m}} X_{s_2} \dots X_{s_{\nu}},$$

on obtient

$$\sum_{\alpha=0}^{r+j} \zeta_{r+j-\alpha, \alpha} = 0.$$

On a

$$(A.5) \quad \varphi(\zeta_{r+j-\alpha, \alpha}) \leq h + r + \sum_{k=3}^{\nu+m} r_k + j + \sum_{l=2}^{\nu} s_l + m$$

pour  $\alpha \leq j - 1$  à cause de la récurrence sur  $j$  dans (A.4); on a (A.5) pour  $\alpha \geq j + 1$  à cause de la récurrence sur  $r$ . D'où (A.5) pour  $\alpha = j$ .

LEMME A.5. —  $(C_{\nu,0})$  implique  $(C_{\nu,h})$  pour tout  $h = 0, 1, \dots$

Il suffit de combiner le lemme A.3 et le lemme A.4.

*Fin de la preuve du lemme 6.* — Comme  $(A_0)$  est vraie, nous raisonnons par récurrence sur  $\nu$ . En combinant le lemme A.1 et le lemme A.2, nous voyons que  $(A_{\nu-1}) \Rightarrow (B_{\nu}^1)$ . Mais  $(B_{\nu}^1) = (C_{\nu,0})$ . Donc, en vertu du lemme A.5,

$$(A_{\nu-1}) \Rightarrow (\forall h = 0, 1, \dots) (C_{\nu,h}).$$

Or évidemment

$$(\forall h = 0, 1, \dots) (C_{\nu,h}) = (A_{\nu}).$$

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] GROTHENDIECK (Alexander). — *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* — Providence, American mathematical Society, 1955 (*Memoirs of the American Mathematical Society*, 16).
- [2] HÖRMANDER (Lars). — On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160-248.
- [3] HÖRMANDER (Lars). — On Interior Regularity of the Solutions of Partial Differential Equations, *Comm. pures and appl. Math.*, t. 2, 1958, p. 197.
- [4] HÖRMANDER (Lars). Local and global properties of fundamental solutions, *Math. Scand.*, t. 5, 1957, p. 27-39.
- [5] TREVES (François). — *Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients.* — Rio de Janeiro, Instituto de Matematica pura e aplicada, 1960.
- [6] TREVES (François). — Opérateurs différentiels hypoelliptiques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, p. 1-73.

(Manuscrit reçu le 31 janvier 1962.)

François TREVES,  
 Professeur,  
 Yeshiva University,  
 New York, N. Y. (États-Unis).