





 Open access • Journal Article • DOI:10.1051/MATTECH/2015029

Une méthode d'Eigenerosion pour les matériaux hétérogènes - Application aux matériaux cimentaires — [Source link](#)

Lionel Bichet, Frédéric Dubois, Yann Monerie, Céline Pelissou ...+3 more authors

Institutions: University of Montpellier, Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire

Published on: 17 Jun 2015

Share this paper:    

View more about this paper here: <https://typeset.io/papers/une-methode-d-eigenerosion-pour-les-materiaux-heterogenes-1136utz5ev>

Une méthode d'Eigenerosion pour les matériaux hétérogènes

Application aux matériaux cimentaires

L. Bichet^{1,2}, F. Dubois^{1,2}, Y. Monerie^{1,2}, C. Pélissou^{2,3} et F. Perales^{2,3}

Reçu le 15 février 2015, accepté le 12 mai 2015

Résumé – La méthode d'*Eigenerosion* développée par Pandolfi et Ortiz [*Int. J. Numer. Methods Eng. Wiley* 92 (2012) 694-714] combine l'approche variationnelle de Francfort et Marigo [*J. Mech. Phys. Solids Elsevier* 46 (1998) 1319-1342] et une méthode de type « killing element » pour permettre une simulation rapide et efficace de la fissuration des matériaux homogènes. Une extension de cette méthode aux matériaux hétérogènes est proposée ici et appliquée à la multi-fissuration d'un béton modèle. Les effets dissociés de la fraction volumique de granulats et de la polydispersité de leur taille sont analysés au travers d'une étude paramétrique.

Mots clés : Eigenerosion / fissuration / milieux hétérogènes / béton

Abstract – An *Eigenerosion* method for heterogeneous media. The *Eigenerosion* process developed by Pandolfi and Ortiz [*Int. J. Numer. Methods Eng. Wiley* 92 (2012) 694-714] combines the variational approach of Francfort and Marigo [*J. Mech. Phys. Solids Elsevier* 46 (1998) 1319-1342] with a "killing element" method in order to simulate quickly and efficiently the crack propagation in an homogeneous media. An extension of this method to the heterogeneous media is proposed here and applied to the multicrack of a concrete model. The volume fraction of the aggregates and their size polydispersity is investigated with a parametric study.

Key words: Eigenerosion / fracture / heterogeneous media / concrete

1 Introduction

La fissuration d'un milieu, sans connaissance a priori du trajet des micro-fissures et de la fissure principale, est souvent modélisée numériquement à l'aide de modèles de zones cohésives (CZM). Que sa mise en œuvre soit opérée via une approche cohésive-volumique aux éléments finis ou via l'utilisation d'éléments finis enrichis (X-FEM), ces méthodes restent souvent coûteuses.

La méthode d'*Eigenerosion* de Pandolfi et Ortiz [1] :

- s'appuie sur une technique de suppression de mailles volumiques ("killing element") et propose ainsi un coût numérique raisonnable,
- respecte le cadre théorique de Francfort et Marigo [2] et assure ainsi un critère énergétique de type Griffith basé sur la notion de taux de restitution d'énergie critique G_c [J.m^{-2}].

Cette méthode jusqu'ici proposée pour les milieux homogènes via un critère de fissuration global est ici étendue au cas des milieux hétérogènes en introduisant un critère fondé sur les taux de restitution d'énergie locaux. L'efficacité opérationnelle de ces développements est illustrée par l'analyse de la multifissuration d'un béton.

2 La méthode d'Eigenerosion pour les milieux homogènes

2.1 Approche variationnelle

Une forme régularisée de la formulation variationnelle de [2] a été proposée par [3] sur la base d'une notion de

¹ Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université de Montpellier, CC 048, 34095 Montpellier Cedex, France
lionel.bichet@univ-montp2.fr

² Laboratoire de Micromécanique et d'Intégrité des Structures, IRSN-CNRS-Université de Montpellier, France

³ Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, BP 3, 13115 Saint Paul-lez-Durance Cedex, France

pointe de fissure émoussée et d'un ϵ -voisinage C_ϵ du trajet de fissure

$$F_\epsilon(u, \varepsilon^*, t) = \underbrace{\int_{\Omega} W(\varepsilon(u) - \varepsilon^*) dV}_{\text{Déformation}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_T} \bar{T} \cdot u dS}_{\text{Chargement}} + \underbrace{G_c \frac{|C_\epsilon|}{2\epsilon}}_{\text{Fissuration}} \quad (1)$$

où \bar{T} est le chargement sur le bord $\partial\Omega_T$ de la frontière de Ω , u est le champ de déplacement correspondant, W est la densité d'énergie élastique du solide, $\varepsilon(u) = (1/2)(\nabla u + \nabla u^T)$ la déformation linéarisée, ε^* est un champ d'eigendéformation tel qu'introduit par [4], G_c est le taux de restitution d'énergie critique du milieu d'étude supposé homogène, ϵ est une longueur de régularisation destinée à tendre vers 0. Lorsque ϵ tend effectivement vers 0, la formulation variationnelle de Francfort et Marigo est retrouvée [3].

2.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre de la méthode d'*Eigenerosion* nécessite le calcul du taux de restitution d'énergie. Entre deux états de chargement, la variation ΔE des configurations énergétiques permet d'estimer la variation du taux de restitution d'énergie par la quantité $-\Delta E/\Delta A$ où ΔA est l'éventuel incrément d'avancée de fissure. Le calcul de ces deux termes est précisé ci-après.

2.2.1 Incrément d'avancée de fissure ΔA

Pour un maillage éléments finis comportant une fissure représentée par des éléments érodés contigus d'épaisseur h (zone noire sur Fig. 1), son ϵ -voisinage C_ϵ est défini comme la dilatation de cette fissure par une boule de rayon ϵ (points sur Fig. 1 en haut). Si la fissure se propage à une nouvelle maille K (en gris, Fig. 1, en bas), cet ϵ -voisinage s'accroît (points Fig. 1, en bas).

L'incrément d' ϵ -voisinage est alors la différence entre la mesure de l' ϵ -voisinage initial $|C_\epsilon|$ et celle du nouvel ϵ -voisinage $|(C \cup K)_\epsilon|$. L'incrément de fissure ΔA_K est le ratio de cet incrément d' ϵ -voisinage et de la dimension caractéristique (ici le diamètre) de la boule de dilatation [3]

$$\begin{cases} \Delta A_K = \frac{|(C \cup K)_\epsilon| - |C_\epsilon|}{2\epsilon} \\ \text{avec } \Delta A_K \rightarrow \Delta A \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2)$$

On note qu'un critère spécifique doit être utilisé à l'amorçage des fissures pour ne pas surévaluer leurs longueurs initiales par cette méthode. Par ailleurs, lorsqu'une fissure atteint le bord du domaine, l'accroissement de l' ϵ -voisinage ne peut concerner aucun élément du maillage initial. Une solution palliative efficace consiste à utiliser un maillage étendu au delà du bord du domaine pour la recherche de voisins. Ces deux difficultés sont étudiées en détail dans [5].

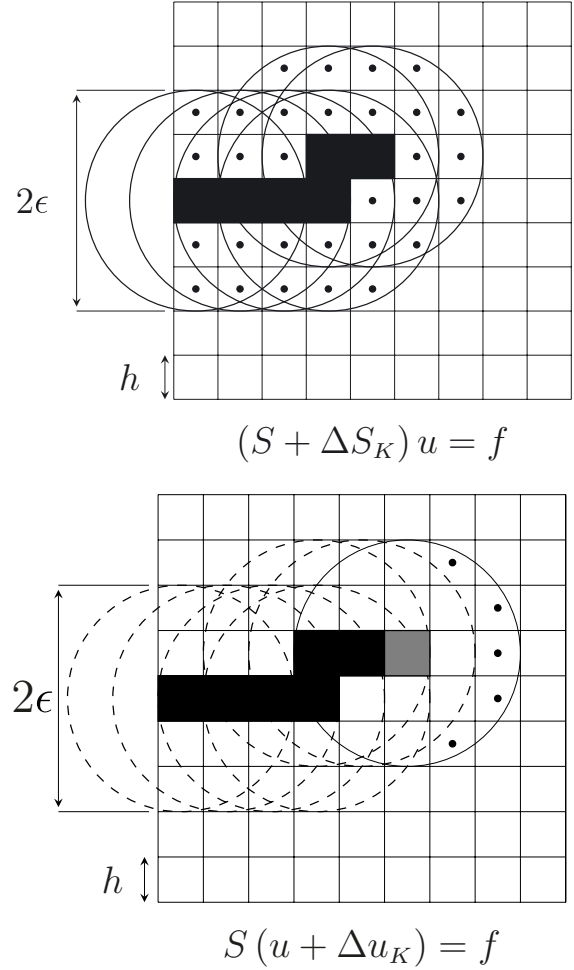


Fig. 1. Calcul de l'incrément d'avancée de fissure à partir d'un ϵ -voisinage.

Fig. 1. Computation of a crack increment from an ϵ -neighborhood.

2.2.2 Incrément d'énergie de fissuration ΔE

L'énergie restituée élastiquement lors de l'avancée de fissure est estimée comme la différence de l'énergie élastique de la structure avant et après la propagation, i.e. avant et après érosion. Pour une maille supprimée K , on note ΔS_K la matrice de rigidité de l'élément et Δu_K la variation du champ de déplacement. Avant propagation, on note $(S + \Delta S_K)$ la matrice de rigidité de la structure, u le champ de déplacement, et f le chargement extérieur. La différence d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} -\Delta E_K = & \left(\frac{1}{2} u (S + \Delta S_K) u - f u \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} (u + \Delta u_K) S (u + \Delta u_K) \right. \\ & \left. - f (u + \Delta u_K) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Après développement et simplification, on obtient une double contribution de la maille (variation de la raideur de

```

While ( $t < t_{\text{final}}$ ) do
  a/ Estimation de  $-\Delta E_K$  avec (4), et de  $\Delta A_K$  avec (2),
   $\forall K \in [1, N]$ 
  b/ Prédiction des éléments érodables  $K_0$ 
  c/ Erosion et point fixe en a/ si nécessaire
  d/  $t = t + \Delta t$ 
done

```

Algorithm 1. Algorithme de la méthode d'*Eigenerosion*.

Algorithm 1. Eigenerosion algorithm.

la maille ΔS_K) et de la structure (variation de la raideur globale $\Delta S_K S^{-1} \Delta S_K$) :

$$-\Delta E_K = \underbrace{\frac{1}{2} u \Delta S_K u}_{\text{contribution élémentaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} u \Delta S_K S^{-1} \Delta S_K u}_{\text{contribution structurale}}. \quad (4)$$

On note que seule la contribution élémentaire est prise en compte dans [1]. Par la suite, les deux termes seront pris en compte.

2.3 Implémentation

L'implémentation de la méthode d'*Eigenerosion* est décrite par l'Algorithme 1 où t indique le temps, Δt le pas de temps, t_{final} est le temps final du calcul, K_0 l'ensemble des éléments candidats à l'érosion parmi les N éléments de la structure.

L'étape d'estimation (a) s'appuie sur les estimations (4) et (2). L'étape de prédiction (b) vise à classer l'ensemble des éléments de la structure en fonction d'une estimation rapide de leur taux de restitution d'énergie, i.e. estimation locale $-\Delta E_K / \Delta A_K$ sans prendre en compte de la contribution structurale sur la variation d'énergie élastique ΔE_K :

$$\text{Crit}_{\text{homo}} = \text{ordonnancement} \left(\frac{(1/2) u \Delta S_K u}{\Delta A_K} \right) \quad (5)$$

où l'opérateur d'ordonnancement classe chaque élément du plus grand taux de restitution d'énergie au plus petit. L'étape d'érosion (c) consiste à choisir dans cette liste triée les candidats effectivement retenus pour l'érosion. Pour se faire :

- le critère de Griffith réel de ces éléments (i.e. tenant compte de la contribution structurale dans la variation d'énergie) est calculé

$$F_{\text{tot}} = -\Delta E_K - \Delta A_K G_c$$

- puis, parmi tous les éléments, un sous-ensemble de ceux qui dépassent effectivement le critère de Griffith $F_{\text{tot}} > 0$ est érodé. Ce sous-ensemble peut être fixé à un seul candidat parmi tous les candidats effectifs.

La méthode a été validée dans [5] sur des cas tests quasi-statiques présentant une fissuration en mode mixte : essai de flexion 3 points sur une éprouvette trouée, test

Tableau 1. Propriétés mécaniques utilisées lors de la validation de l'extension au cas hétérogène.

Table 1. Mechanical properties used for the validation example of the methode with heterogeneous media.

	Inclusions	Interphase	Matrice
Young (GPa)	65	65	15
Poisson	0,25	0,25	0,2
G_c (J.m ⁻²)	60	{10, 30, 60}	20

de Nooru-Mohamed. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de la littérature et montrent que la prise en compte de la contribution structurale dans (4) a un rôle fragilisant. En dynamique (extension proposée dans [6]), le cas test Kalthoff [7] est également reproduit.

3 Extension au cas des matériaux hétérogènes

La méthode a été étendue à la fissuration des matériaux hétérogènes. Le critère utilisé suppose que le critère de Griffith $G_c(K)$ est valable localement sur chaque maille K . Le prédicteur (b) devient

$$\text{Crit}_{\text{hétéro}} = \text{ordonnancement} \left(\frac{(1/2) u \Delta S_K u}{\Delta A_K G_c(K)} \right) \quad (6)$$

et le critère de Griffith pour l'érosion

$$-F_{\text{tot}} = -\Delta E_K - \Delta A_K G_c(K) > 0.$$

L'utilisation de ces critères locaux permet la modélisation des effets de pénétration/contournement dans les matériaux composites de type matrice-inclusions (cf. Fig. 2, données matériaux Tab. 1). En première intention, l'hypothèse est faite que l' ϵ -voisinage conserve une valeur spatiale uniforme pour les milieux hétérogènes.

En particulier, la Figure 2 indique que :

- lorsque l'interphase est faible, $G_c^{\text{int}} / G_c^{\text{inc}} = 1/6$ (Fig. 2a), la fissure se propage dans celle-ci en contournant l'inclusion ;
- lorsque l'interphase est forte $G_c^{\text{int}} / G_c^{\text{inc}} = 1$ (Fig. 2b), la fissure traverse l'inclusion.

4 Application au béton

Cette partie est consacrée à la fissuration bidimensionnelle des matériaux cimentaires au travers de l'analyse de la tortuosité apparente des macro-fissures. La tortuosité est définie comme le rapport de la longueur de la plus petite fissure percolante sur la longueur théorique la plus courte. Une étude paramétrique est conduite : distribution de la taille des agrégats (modélisés par des disques), effets de la fraction volumique de granulats et de leur étalement (rapport entre les tailles extrêmes des granulats).

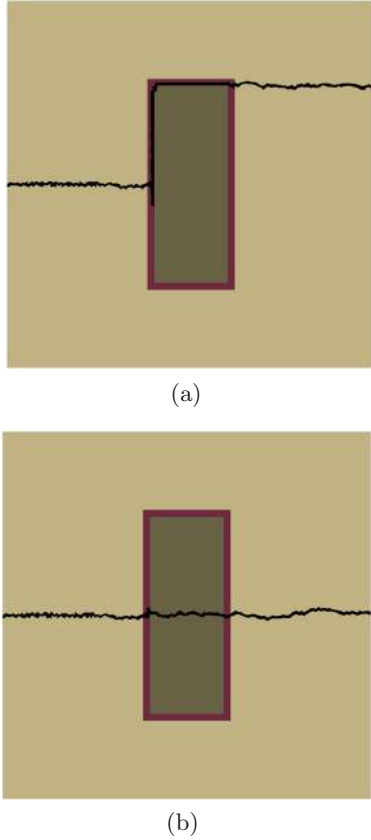


Fig. 2. Evolution d’une macro-fissure en fonction du taux de restitution d’énergie critique de l’interphase inclusion-matrice. (a) $G_c^{int}/G_c^{inc} = 1/6$, (b) $G_c^{int}/G_c^{inc} = 1$.
Fig. 2. Crack path for different values of the critical energy release rate of the interphase between the inclusion and the bulk. (a) $G_c^{int}/G_c^{inc} = 1/6$, (b) $G_c^{int}/G_c^{inc} = 1$.

Tableau 2. Propriétés mécaniques et numériques des études paramétriques.
Table 2. Mechanical and numerical properties for the parametric studies.

Paramètres éléments finis et numériques	
taille de maille	$h = 1,75 \text{ mm}$
nombre de mailles (Delaunay)	60 210
ϵ (d’après [1])	$\epsilon = 4 \text{ h} = 7 \times 10^{-3} \text{ m}$
pas de temps	$\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$
temps final	$t_{\text{final}} = 5,5 \text{ s}$

La Table 2 présente les paramètres de l’étude, les données matériaux étant celles de la Table 1 avec une interphase faible ($G_c^{int}/G_c^{inc} = 1/6$). Les données présentées sont communes aux études présentées par la suite. On considère une interphase d’une taille de maille autour de chaque granulat.

Le chargement en traction retenu sur éprouvette pré-fissurée est illustré sur la Figure 3. L’ensemble de l’analyse paramétrique proposée repose sur 56 calculs, différents tirages (5) étant utilisés pour chaque configuration paramétrique.

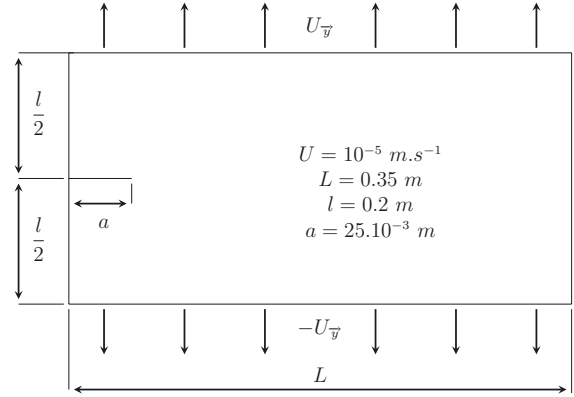


Fig. 3. Géométrie et chargement de l’éprouvette utilisée.
Fig. 3. Geometry and loading of the test.

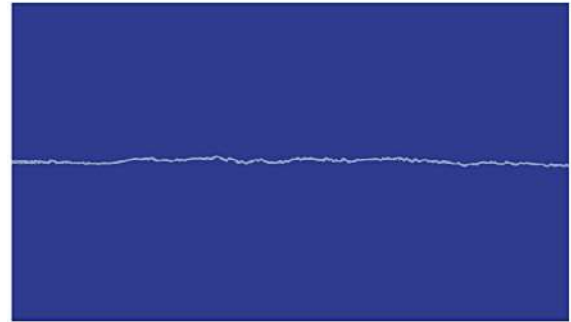


Fig. 4. Faciès de rupture d’un matériau homogène en traction.
Fig. 4. Mode I crack propagation for an homogeneous media.

4.1 Tortuosité

La mesure de la tortuosité τ est tout d’abord illustrée pour un matériau homogène composé de matrice seule. La longueur de fissure est obtenue comme la somme des ΔA_K . Cette méthode assure une prise en compte des éventuelles bifurcations et donc une potentielle surestimation de la longueur percolée et par conséquent de la tortuosité.

Pour une fissure se propageant en mode I dans un matériau homogène, la tortuosité attendue est de 1 (ligne droite). Le faciès de la Figure 4 exhibe une tortuosité voisine de 1,055. Les résultats présentés pour la tortuosité seront donc considérés à $\pm 5,5 \%$.

Par ailleurs, les résultats de l’étude seront comparés aux résultats de Stroeven [8] qui, pour une fissure se propageant en ligne droite en contournant des inclusions sphériques distribuées aléatoirement et de fraction volumique ρ^p , prédit théoriquement une tortuosité de croissance affine avec ρ^p :

$$\tau = 1 + \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \rho^p, \quad (7)$$

avec ρ^p la fraction volumique totale d’inclusion.

Tableau 3. Caractéristiques géométriques et distributions des différentes classes de granulats.

Table 3. Size and distribution of the different classes of aggregates.

Classe des granulats	Gros	Moyens	Petits
diamètre (10^{-3} m)	20,1	14,5	10,5
distribution	fraction de la classe		
0	6 %	14,25 %	9,75 %
1	9,75 %	6 %	14,25 %
2	9,75 %	14,25 %	6 %
3	6 %	9,75 %	14,25 %
4	14,25 %	6 %	9,75 %
5	14,25 %	9,75 %	6 %
6	10 %	10 %	10 %

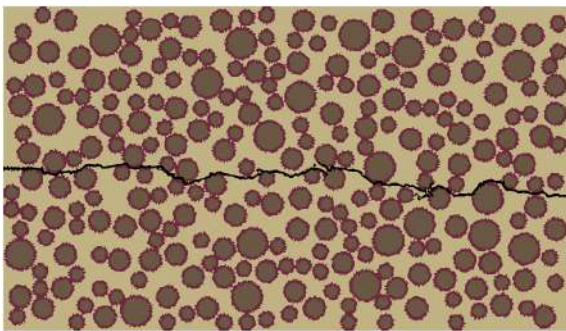


Fig. 5. Un faciès de fissuration.

Fig. 5. Crack path.

4.2 Effet de la distribution granulométrique

L'étude concerne une éprouvette cimentaire comportant 3 classes de tailles de granulats. La fraction volumique totale des granulats est de 30 %. Le paramètre est ici la fraction volumique de chaque classe. La Table 3 décrit les distributions considérées. Pour chaque distribution, cinq tirages aléatoires sont effectués.

La Figure 5 représente un faciès de fissuration dans le cas de la distribution 0. La fissure se propage dans la matrice et dans les interphases (contournement des inclusions). A la différence de l'estimation analytique (7) de Stroeven, la fissure ne se propage pas macroscopiquement en ligne droite. L'évolution de la tortuosité en fonction de la distribution considérée est indiquée sur la Figure 6.

Pour une fraction volumique d'inclusions de $\rho^p = 0,3$, l'estimation rectiligne de Stroeven (7) prévoit $\tau = 1,07$. La Table 4 montre que les tortuosités calculées sont supérieures à celle de la propagation rectiligne, comme attendu. De plus, les tortuosités obtenues pour les différentes distributions présentent un écart-type maximal d'environ 4 %, écart inférieur à la précision supposée et qui semblent donc indiquer que l'effet de la distribution granulaire est inférieur aux imprécisions liées à la discrétisation spatiale.

Dans la suite, les classes de granulats sont prises avec la même fraction volumique. Pour un mélange bidisperse gros-petits à une fraction volumique de 30 %, la

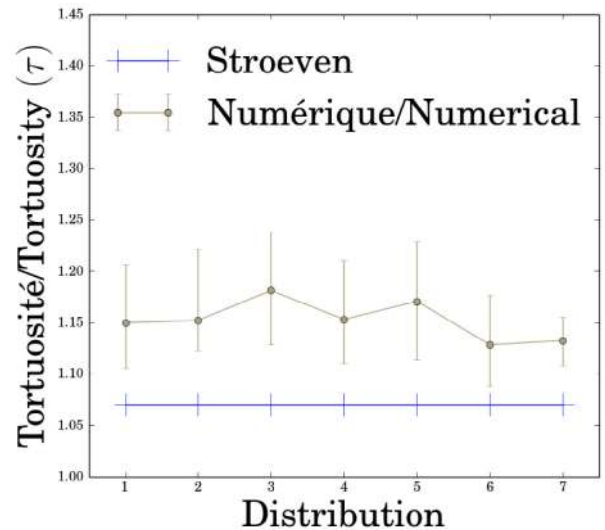


Fig. 6. Comparaison de la tortuosité avec l'estimation théorique (7) d'une propagation macroscopiquement rectiligne.

Fig. 6. Comparison of the numerical and theoretical macroscopic straight crack.

Tableau 4. Tortuosités obtenues après post-traitement des calculs.

Table 4. Tortuosities obtained after post treatment of calculations.

Tortuosité	Maximale	Minimale	Moyenne
distribution 0	1,21	1,11	1,15
distribution 1	1,22	1,12	1,15
distribution 2	1,24	1,13	1,18
distribution 3	1,21	1,11	1,15
distribution 4	1,23	1,11	1,17
distribution 5	1,18	1,09	1,13
distribution 6	1,16	1,11	1,14
moyenne sur les	maximale	minimale	moyenne
7 distributions	1,21	1,11	1,15
écart relatif max	4 %	2 %	2,4 %

la répartition retenue est iso-fraction volumique : 15 % de gros et 15 % de petits.

4.3 Effet de l'étalement et de la fraction volumique totale

On considère ici des granulats bidisperses iso-fraction volumique pour deux étalements distincts. L'étalement est estimé par le rapport du diamètre de la classe granulaire de plus grande taille sur celui de la classe granulaire de plus petite taille. La Table 5 indique les tailles de granulats considérés pour des étalements de 2 et 3.

Les Figures 7 et 8 présentent des faciès dans le cas d'un étalement de 3 avec des fractions volumiques respectives de 30 % et 40 %.

La Table 6 présente les tortuosités numériques et les tortuosités rectilignes. Les résultats pour deux fractions

Tableau 5. Taille des granulats pour les deux étalements considérés.

Table 5. Size of the aggregates for the two spreadings considered.

Type de granulats	Étalement de 2	Étalement de 3
gros (10^{-3} m)	40	40
petit (10^{-3} m)	20	13,5

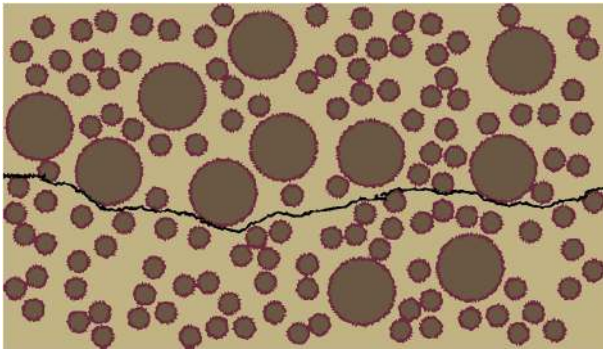


Fig. 7. Résultat pour une fraction volumique de granulats de 30 % et un étalement de 3.

Fig. 7. Result for a volume fraction of aggregates of 30% and a spreading of 3.

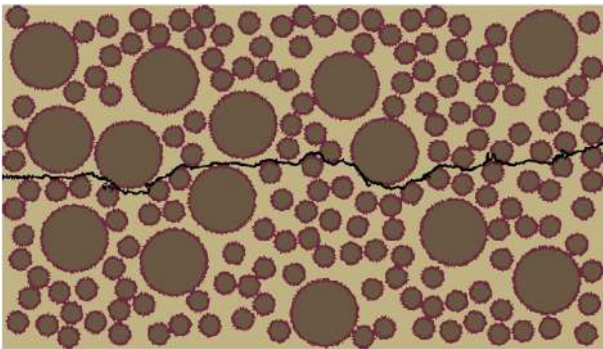


Fig. 8. Résultat pour une fraction volumique de granulats de 40 % et un étalement de 3.

Fig. 8. Result for a volume fraction of aggregates of 40% and a spreading of 3.

volumiques de granulats (30 % et 40 %) et deux étalements (2 et 3) sont considérés.

La Figure 9 décrit l'évolution de la tortuosité en fonction de la fraction volumique des granulats pour les deux étalements considérés. Les résultats sont comparés à ceux de Stroeven [8]. Les résultats sont du même ordre de grandeur que l'estimation de la tortuosité rectiligne tout en restant supérieurs. La tortuosité augmente avec la fraction volumique de granulats et semble également augmenter avec l'étalement.

5 Conclusion

La prise en compte de la contribution de la structure dans le calcul de l'incrément a été validée sur des cas

Tableau 6. Tortuosités rectilignes et numériques obtenues pour deux étalements et deux fractions volumiques de granulats.

Table 6. Straight tortuosities for two volume fractions and two spreadings.

	Fraction volumique	30 %	40 %
Stroeven	étalement de 2	1,07	1,10
	étalement de 3	1,07	1,10
Numérique	étalement de 2	1,12	1,15
	étalement de 3	1,14	1,18

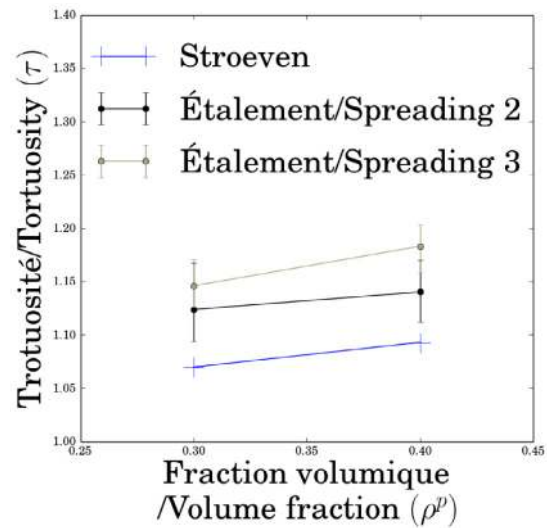


Fig. 9. Évolution de la tortuosité en fonction de la fraction volumique pour deux étalements différents (2 en noir et 3 en gris); comparaison avec les expressions de Stroeven [8].

Fig. 9. Tortuosity as a function of volume fraction for two different spreadings (2 in black and 3 in grey); comparison with the Stroeven expression [8].

complexes de fissuration : mode mixte et application dynamique. Les deux contributions (de l'élément et de la structure) dans l'évaluation de l'incrément d'énergie sont conservées pour l'extension aux matériaux hétérogènes. L'hypothèse de vérification du critère de Griffith local à un élément a été utilisée lors de ce travail.

Pour valider cette extension, un cas test sur un bimatérial avec interphase a été mis en place. L'évolution du faciès de fissuration avec le taux de restitution d'énergie critique de l'interphase a été étudiée. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de la fissuration d'un bimatérial.

Une application a alors été proposée dans le cas d'un milieu cimentaire. La tortuosité a été étudiée au travers de deux études portant sur des variations structurales du milieu cimentaire (fraction volumique des différentes classes, fraction volumique totale et étalement). Les résultats ont alors été comparés avec ceux de Stroeven [8]. Nous retenons alors les points suivants :

- la distribution des fractions volumiques pour différentes classes de granulats a une importance faible sur l'évolution de la tortuosité;

- la tortuosité augmente avec la fraction volumique totale de granulats ;
- une évolution de la tortuosité avec l'étalement est remarquée.

La méthode d'*Eigeneration* présente de nombreux atouts : faible coût de calcul, équivalent à un calcul standard par éléments finis, et une mise en œuvre aisée. Elle requiert cependant une maîtrise de certains paramètres (e.g. ϵ) et une adaptation de la méthode dans le cas des branchements multiples (calcul de l'incrément de fissuration).

Références

- [1] A. Pandolfi, M. Ortiz, *Int. J. Numer. Methods Eng. Wiley* **92** (2012) 694-714
- [2] G.A. Francfort, J.-J. Marigo, *J. Mech. Phys. Solids Elsevier* **46** (1998) 1319-1342
- [3] B. Schmidt, F. Fraternali, M. Ortiz, *Multiscale Modeling and Simulation SIAM* **7** (2009) 1237-1266
- [4] T. Mura, *Mechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff, 1987
- [5] L. Bichet, F. Dubois, Y. Monerie, F. Perales, *Eng. Fracture Mech. Elsevier* (2015)
- [6] B. Li, A. Pandolfi, M. Ortiz, *Mech. Mater.* **80** (2015) 288-297
- [7] J.F. Kalthoff, *Int. J. Fracture Springer* **101** (2000) 1-31
- [8] P. Stroeven, *Cement Concrete Comp.* **22** (2006) 331-341
- [9] M. Elices, G.V. Guinea, J. Gómez, J. Planas, *Eng. Fracture Mech. Elsevier* **69** (2002) 923-944
- [10] M.B. Nooru-Mohamed, *Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach*, Université de Delf, 1992
- [11] G. Ventura, J.X. Xu, T. Belytschko, *Int. J. Numer. Methods Eng. Wiley* **54** (2002) 923-944