158. *Unicité du Prolongement des Solutions des Équations Elliptiques du Quatrième Ordre*

Par Sigeru MIZOHATA

Université de Kyôto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1958)

1. *Introduction.* Le problème de l'unicité du prolongement des solutions pour les équations elliptiques quelconques est, dans ma connaissance, resté ouvert (voir à ce sujet, les références à la fin du texte). Cette Note a pour but de démontrer cette propriété pour tout opérateur différentiel elliptique du quatrième ordre. Notre méthode n'est qu'une variante de celle de Calderón, mais le résultat est nouveau.

2. On va partir d'une variante du Lemme 1 de [2]:

Lemme 2,1. *Soit $u(t)$, $0\leq t\leq h$, une fonction continuement différentiable en t à valeurs dans L^2 telle que $\Lambda u(t)$ soit continue. On suppose que $u(t)$ s'annule à $t=0$, mais ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$. Soient $P(t)$ et $Q(t)$ deux opérateurs d'intégrale singulière tels que les symboles $\sigma(P)=F_1(x,t,z)$, $\sigma(Q)=F_2(x,t,z)$ soient (à valeurs réelles) dans C^∞_β, $\beta>1$, pour $|z|\geq 1$. On suppose que $P(t)^{-1}$ existe pour $0\leq t\leq h$. On a alors*

(A)
$$J_n=\int_0^h \varphi_n^2\left\|\frac{d}{dt}u+(P+iQ)\Lambda u\right\|^2 dt\geq(\rho-1)^2I^2+\frac{I^2}{n}-o\Big(\frac{I^2}{n}\Big)-o\Big(\frac{\rho I^2}{n}\Big).$$

Preuve. Nous nous limitons à expliciter les modifications à faire. D'abord, dans l'analyse de Calderón, le terme

$$\|(\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u\|^2$$

n'a joué aucun rôle. Ici on va lui faire jouer un rôle important. Dans le Lemme 2,2, on utilisera l'inégalité

$$\int_0^h\|(\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u\|^2dt\geq\frac{1}{2}\int_0^h\|(\varphi u)'\|^2dt-\int_0^h\varphi^2\|Q\Lambda u\|^2dt. \tag{2,1}$$

Mais, dans ce Lemme cette inégalité est trop grossière. On fait comme suit:

$$\begin{aligned}&[(\varphi u)',P\Lambda\varphi u]+[P\Lambda\varphi u,(\varphi u)']\\&\quad=[\varphi u,P\Lambda\varphi u]'-[\varphi u,P\Lambda(\varphi u)']-[\varphi u,P'_t\Lambda\varphi u]+[P\Lambda\varphi u,(\varphi u)']\\&\quad=[\varphi u,P\Lambda\varphi u]'+[(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u,(\varphi u)']-[\varphi u,P'_t\Lambda\varphi u].\end{aligned}$$

Notons $\varphi^2(h)=O(I^2/n^2)$, et $\int_0^h\varphi_n^2\|u\|^2dt=o(I^2/n^2)$ par suite

$$\int_0^h\varphi^2\|\Lambda u\|\,\|u\|dt=o(\rho I^2/n).$$

D'abord, $$\int_0^h[\varphi u,P'_t\Lambda\varphi u]dt=o(\rho I^2/n),$$

ensuite, compte tenu de ce que $(P\Lambda-\Lambda P^*)$ est un opérateur borné,

$$[(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u, (\varphi u)'] = [(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u, (\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u] + i[(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u, Q\Lambda\varphi u], \quad \text{d'où}$$

$$(2,2)\qquad -\int_0^h |[(P\Lambda-\Lambda P^*)\varphi u, (\varphi u)']|\,dt \geq -\frac{1}{2}\int_0^h \|(\varphi u)'+iQ\Lambda\varphi u\|^2 dt - c\int_0^h \varphi^2\|u\|^2 dt - o\Big(\frac{\rho I^2}{n}\Big). \qquad \text{c.q.f.d.}$$

De l'inégalité (A), on déduit que, en prenant s'il est nécessaire une suite partielle des φ_n,

$$(\mathrm{B})\qquad J_n \geq C(u)\frac{\rho^2 I^2}{n}, \quad \text{si} \quad n \geq N(u),$$

où $C(u)$ est une constante positive ne dépendant que de u.

En effet, 1) en cas où ρ est borné, on aura $\rho^2 I^2 \leq kI^2$, $k>0$, d'où, $J_n \geq I^2/2n$, si n est assez grand, donc $\geq \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\rho^2 I^2}{k}$;

2) en cas où ρ n'est pas borné, en prenant une suite partielle des φ_n, on en déduit $J_n \geq \dfrac{\rho^2 I^2}{2}$, si n est assez grand.

Par la même raison, en prenant s'il est nécessaire une suite partielle

(C) $J_n \geq I^2/2n$, si n est assez grand.

Nous ometterons désormais de dire "si n est assez grand" et "en prenant une suite partielle".

Considérons

$$(2,3)\qquad \int_0^h \varphi_n^2\Big\|\Big(\frac{d}{dt}+(P_1+iQ_1)\Lambda\Big)\Big(\frac{d}{dt}+(P_2+iQ_2)\Lambda\Big)u\Big\|^2 dt,$$

en supposant que $\Lambda^i\Big(\dfrac{d}{dt}\Big)^j u(t)$, $i+j\leq 2$, soient des fonctions continues à valeurs dans L^2, et que $u(0)=\dfrac{d}{dt}u(0)=0$, où P_i, Q_i sont des opérateurs vérifiant les conditions du Lemme 2,1. On suppose que $u(t)$ ne s'annule identiquement dans aucun voisinage de $t=0$, alors

$$(2,4)\qquad v(t)=\Big(\frac{d}{dt}+(P_2+iQ_2)\Lambda\Big)u(t)$$ l'est. En effet, si $v(t)$ s'annule pour $t\leq t_0$, $t_0>0$, d'après le Lemme 1 de [2], en supposant $h=t_0$, on déduirais $u(t)\equiv 0$ dans un voisinage de $t=0$.

En appliquant alors à v l'inégalité (B), on aura

$$\text{l'intégrale } (2,3) \geq C(v)\rho^2 I^2/n = C(v)\frac{1}{n}\int_0^h \varphi_n^2\Big\|\Lambda\Big(\frac{d}{dt}+(P_2+iQ_2)\Lambda\Big)u\Big\|^2 dt.$$

Comme

$$\Lambda\Big(\frac{d}{dt}+(\cdots)\Lambda\Big)u=\Big(\frac{d}{dt}+(\cdots)\Lambda\Big)\Lambda u+(\Lambda P_2-P_2\Lambda)\Lambda u+i(\Lambda Q_2-Q_2\Lambda)\Lambda u,$$

d'où, si l'on intègre le carré de la norme de cette fonction en multipliant φ_n^2, le deuxième terme peut être négligé par rapport au premier, compte tenu de ce que $\Lambda P_2-P_2\Lambda$ et $\Lambda Q_2-Q_2\Lambda$ sont bornés. En appliquant donc la formule (C) au premier terme, on a

(2,5) $$\text{l'intégrale (2,3)}\geq C(v)\frac{1}{2n^2}\int_0^h \varphi_n'^2\|\Lambda u\|^2 dt.$$

Compte tenu de $\displaystyle\int_0^h \varphi_n^2\|u\|^2 dt=o(I^2/n^2)$,

(2,5) devient, en ajoutant l'inégalité (2 fois) itérée de (C),

(2,6) $$\text{l'intégrale (2,3)}\geq M(n)C(v)\int_0^h \varphi_n^2\{\|\Lambda u\|^2+n\|u\|^2\}\,dt,$$

où $M(n)$ est une suite tendant vers $+\infty$ avec n.

Ceci fait, considérons l'intégrale J_n en supposant, outre les hypothèses du Lemme 2,1, que le symbole $\sigma(P)$ soit positif pour $|z|\geq 1$, $x\in R^n$, $0\leq t\leq h$, et de plus que

(2,7) pour chaque $t\in[0,h]$ il existe un x_0, tel que $\|(P(t)-P_0(t))u\|\leq\rho\|Pu\|$, $\rho<1$, où $P_0(t)$ est l'opérateur (*de convolution*) tel que $\sigma(P_0(t))=F_1(x_0,t,z)$. Alors, on a

Lemme 2,2

(2,8) $$J_n\geq\sigma\Big(\int_0^h \varphi_n^2\Big\|\frac{d}{dt}u\Big\|^2 dt+\int_0^h \varphi_n^2\|\Lambda u\|^2 dt+n\int_0^h \varphi_n^2\|u\|^2 dt\Big),$$

où $\sigma>0$ est une constante indépendante de u.

Démonstration

$$\|P\Lambda\varphi u-\varphi' u\|^2=\|P\Lambda\varphi u\|^2+\|\varphi' u\|^2-\varphi\varphi'\{[P\Lambda u,u]+[u,P\Lambda u]\}.$$

Or, $[P\Lambda u,u]=[P_0\Lambda u,u]+[(P-P_0)\Lambda u,u]$ où $[P_0\Lambda u,u]>0$.

En vertu de (2,7),

$$2\int_0^h|\varphi\varphi'|\,|[(P-P_0)\Lambda u,u]|\,dt\leq\frac{\rho}{\varepsilon}\int_0^h\varphi^2\|P\Lambda u\|^2 dt+\varepsilon\int_0^h\varphi'^2\|u\|^2 dt.$$

En prenant, $1>\varepsilon>\rho$, nous avons

$$\int_0^h\|P\Lambda\varphi u-\varphi' u\|^2 dt\geq\sigma'\Big(\int_0^h\varphi^2\|P\Lambda u\|^2 dt+\int_0^h\varphi'^2\|u\|^2 dt\Big),\quad \sigma'>0.$$

Deuxièmement, $\displaystyle\int_0^h\|(\varphi u)'\|^2+\|\varphi' u\|^2 dt=\int_0^h\varphi^2\|u'\|^2 dt-\frac{I^2}{n}-o\Big(\frac{I^2}{n}\Big),$

compte tenu de l'inégalité (A) et (2,1) on aura le Lemme.

Lemme 2,3. *Pour tout opérateur d'intégrale singulière H tel que $\sigma(H)=h(x,z)\in C_\beta^\infty$, $\beta=+\infty$, on a*

(2,9) $$\Lambda^p H=H\Lambda^p+H'\Lambda^{p-1}+H^{(0)},\quad p\geq 1,$$

où, H', $H^{(0)}$ sont des opérateurs bornés de L^2 dans lui-même.

Nous en donnerons la démonstration dans [6] en bref. Remarquons que, dans l'hypothèse, $\beta=+\infty$ n'est pas nécessaire: il suffit de prendre, pour p donné, par exemple (on pourrait améliorer),

$$\beta\geq p+n+1. \tag{2,10}$$

Envisageons maintenant, *en supposant que $u(t)$ ne s'annule identiquement* dans aucun voisinage de $t=0$,[1]

$$K_n=\int_0^h \varphi_n^2\left\|\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt}+(-P_i+iQ_i)\Lambda\right)\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt}+(P_i+iQ_i)\Lambda\right)u\right\|^2 dt, \tag{2,11}$$

où $P_i(t)$, $Q_i(t)$ vérifient les conditions des Lemmes 2,1 et 2,2 avec $\beta\geq n+4$. En appliquant l'inégalité (2,6),

$$K_n\geq M(n)C'(v)\int_0^h \varphi_n^2\{\|\Lambda v\|^2+n\|v\|^2\}dt, \quad \text{où} \tag{2,12}$$

$$v(t)=\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt}+(P_i+iQ_i)\Lambda\right)u(t).$$

Comme P_i $(i=1, 2)$ sont positifs (par abus de langage), en appliquant deux fois l'inégalité (2,8), et compte tenu du Lemme 2,3,

$$K_n\geq M(n)C'(v)\rho'\left(\int_0^h \varphi_n^2\left\{\sum_{i+j\leq 3,\, j\leq 2}\left\|\Lambda^i\left(\frac{d}{dt}\right)^j u(t)\right\|^2\right\}dt\right), \tag{2,13}$$

où, ρ' est une constante >0 ne dépendant que de u.
En tenant compte de

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 u(t)=\left(\frac{d}{dt}+(-P_2+iQ_2)\Lambda\right)\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt}+(P_i+iQ_i)\Lambda\right)u(t)-\cdots,$$

et du Lemme 2,3, on aura finalement

$$K_n\geq M(n)A(u)\left(\int_0^h \varphi_n^2\left\{\sum_{0\leq \nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_n\leq 3}\left\|\left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}u(t)\right\|^2\right\}dt\right), \tag{2,13'}$$

où $A(u)$ est une constante positive, $M(n)$ est une suite tendant vers $+\infty$ avec n.

3. Revenons maintenant à notre but; soit L un opérateur elliptique du quatrième ordre *à coefficients réels*; prenons un des x_i comme t; considérons le problème de Cauchy pour $t\geq 0$; $Lu=0$ prendra alors la forme

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^4 u+\sum_{j=3}^{0}A_j\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)^j u+B(u)=0, \tag{3,1}$$

où $A_j\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ sont des polynomes de dérivation de $(4-j)^{\text{-ième}}$ ordre (homogènes); supposons les coefficients des A_j sont $(n+4)$-fois continue-

---

1) On suppose ici que $\Lambda^i\left(\dfrac{d}{dt}\right)^j u(t)$, $i+j\leq 4$, soient des fonctions continues à valeurs dans L^2, et que $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^i u(0)=0$, $i=0, \cdots, 3$.

ment différentiables et que les autre coefficients sont mesurables bornés; supposons que $u(t)$, $0 \leq t \leq h$, est une solution de (3,1) 4-fois continuement différentiable, avec la donnée de Cauchy 0 pour $t=0$; on suppose de plus que

(C_1) le polynome caractéristique

$$\lambda^4 + \sum_{j=3}^{0} A_j(x, t, iz)\lambda^j \quad \text{se factorise} = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - \lambda_i(x, t, z)|z|),$$

$\lambda_i(x, t, z)$ vérifiant la condition du Lemme 2,1 avec $\beta = n+4$; (C_2) le support de $u(t)$ soit strictement convexe à l'origine (0,0) dans $t \geq 0$.[2]

On a alors le

Théorème. *Dans les conditions* (C_1), (C_2), *le problème de Cauchy est unique, plus précisément,* $u(t) \equiv 0$ *dans un voisinage de* $t=0$.

Démonstration. L'ellipticité et la condition (C_1) entraînent que les 4 racines λ_i sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe imaginaire dans le plan complexe. Soient $\sigma(P_i) > 0$,

$$\sigma(\pm P_1 + iQ_1) = \lambda_1, \lambda_2; \quad \sigma(\pm P_2 + iQ_2) = \lambda_3, \lambda_4.$$

Les conditions des Lemmes 2,1 et 2,2 peuvent être considérées vérifiées à cause de (C_2).

Or, l'opérateur $\left(\frac{d}{dt}\right)^4 + \sum_{j=3}^{0} A_j\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$ et

$\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt} + (-P_i + iQ_i)\Lambda\right)\prod_{i=1,2}\left(\frac{d}{dt} + (P_i + iQ_i)\Lambda\right)$ sont égaux, à

$\sum_{0 \leq p+q \leq 3} \Lambda^q\left(\frac{d}{dt}\right)^p$ près, d'après le Théorème 3 de [2] et du Lemme 2,3.

c.q.f.d.

Quant à (C_2), par le changement de coordonnées bien connu (de Holmgren), cette condition se toujours réaliser. Mais, alors, la condition (C_1) est, nous semble-t-il, difficile à vérifier. Je ne sais pas si cette condition soit toujours vérifiée pour tous les opérateurs. Mais, si (3,1) se décompose en deux opérateurs elliptiques du deuxième ordre à coefficients réels et plus un opérateur d'ordre ≤ 3, la condition (C_1) est toujours vérifiée et même quand on fait le changement de coordonnées. On a donc

Corollaire 1. *Pour tous les opérateurs elliptiques du* $4^{\text{-ième}}$ *ordre de la forme:* $P = P_1P_2 +$ *termes d'ordre* ≤ 3, P_1, P_2 *étant des opérateurs elliptiques à coefficients réels (d'ordre* $=2$*), l'unicité locale des solutions du problème de Cauchy est toujours affirmée.*

Lorsque la partie principale de l'opérateur (3,1) est un opérateur à coefficients constants $\left(\text{c'est-à-dire que } A_j\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$, le raisonnement ci-dessus devient simple. Dans ce cas, les conditions (C_1), (C_2) sont inutiles; nous énonçons le

2) Voir [4, p. 90].

Corollaire 2 (*Unicité globale*). *Pour tous les opérateurs elliptiques du* $4^{\text{-ième}}$ *ordre à coefficients réels dont la partie principale soit opérateur à coefficients constants, on a l'unicité globale du problème de Cauchy: Toute solution* $u(t)$, $t \geq 0$, *continue en* t *avec* $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu} u(t)$, $\nu_0 + |\nu| \leq 4$, *à valeurs dans* L^2, *avec la donnée de Cauchy* 0 *sur* $t=0$, *s'annule identiquement dans un voisinage de* $t=0$.

Prenons, comme titre d'exemple, $\varDelta^2 + \sum_{|\nu| \leq 3} c_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}$. Pour cet opérateur, les solutions du problème de Cauchy local sont uniques d'après le Corollaire 1. On peut affirmer aussi cette propriété du Corollaire 2: en effet, la pseudo-analyticité des solutions en découle immédiatement (voir [4 p. 99]).

Références

[1] N. Aronszajn: Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre, C. R. Acad. Sci., Paris, **242**, 723–725 (1956).

[2] A. P. Calderón: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Jour., **53**, 16–36 (1958).

[3] S. Mizohata: Unicité dans le problème de Cauchy pour quelques équations différentielles elliptiques, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., ser. A, **31**, Math., 121–128 (1958).

[4] L. Nirenberg: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **10**, 85–105 (1957).

[5] R. N. Pederson: On the unique continuation theorem for certain second and fourth elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math., **11**, 67–80 (1958).

[6] S. Mizohata: Le problème de Cauchy pour le passé pour quelques équations paraboliques, Proc. Japan Acad., **34**, 693–696 (1958).