

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR DE ORDEM REDUZIDA  
PARA SISTEMAS MIMO COM SAÍDAS INDEPENDENTES  
DE SEUS MODOS NÃO DOMINANTES

PEDRO BAPTISTA FERNANDES

DM – 01/2014

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PEDRO BAPTISTA FERNANDES

CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR DE ORDEM REDUZIDA  
PARA SISTEMAS MIMO COM SAÍDAS INDEPENDENTES  
DE SEUS MODOS NÃO DOMINANTES

DM – 01/2014

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

PEDRO BAPTISTA FERNANDES

CONTROLADORES ROBUSTOS DO TIPO LQG/LTR DE ORDEM REDUZIDA  
PARA SISTEMAS MIMO COM SAÍDAS INDEPENDENTES  
DE SEUS MODOS NÃO DOMINANTES

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Energia.

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil

2014

---

Fernandes, Pedro Baptista, 1986 -

Projeto de controladores robusto de ordem reduzida para sistemas MIMO com saídas independentes de seus modos não dominantes / Pedro Baptista Fernandes. - 2014.

Orientador: Jorge Roberto Brito de Souza.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2014.

1. Controle robusto. 2. Controladores programáveis. 3. Filtro de Kalman.  
I. Título.

CDD 629.8 ed. 22

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

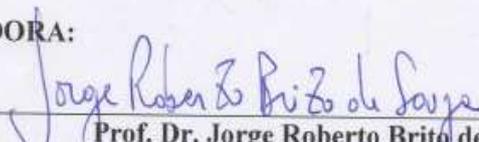
**“PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTO DE ORDEM REDUZIDA PARA SISTEMAS MIMO COM SAIDAS INDEPENDENTES DE SEUS MODOS NÃO DOMINANTES”**

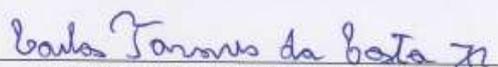
AUTOR: **PEDRO BAPTISTA FERNANDES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO** SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE **MESTRE** EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE SISTEMA DE ENERGIA ELÉTRICA.

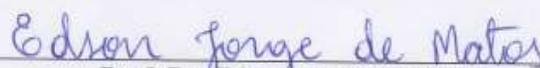
APROVADA EM: 17 / 02 / 2014

**BANCA EXAMINADORA:**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Jorge Roberto Brito de Souza**  
(Orientador – PPGEE/UFPA)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Junior**  
(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Walter Barra Junior**  
(Avaliador Interno – PPGEE/UFPA)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Edson Jorge de Matos**  
(Avaliador Externo – UFPA / Bragança)

**VISTO:**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes**  
(Coordenador do PPGEE/ITEC/UFPA)

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente à minha família que sempre me deu suporte em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Roberto Brito de Souza, pela orientação segura durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Walter Barra Jr., pelo apoio e incentivo constantes.

Aos alunos e professores que frequentavam a sala de estudos, em especial Marcos, Erick, Cleyton, Laurindo e Conceição, que sempre se disponibilizaram a ajudar quando preciso.

Aos meus grandes amigos e colegas de mestrado Danilo Figueiredo e Gilson Fernandes que se dispuseram a ajudar.

A todos os professores que me deram aula durante o curso, pelos ensinamentos valiosos.

Ao PPGEE e todos os funcionários que o compõem e ao CAPES que acreditaram e deram condições para que o projeto se desenvolvesse.

## Sumário

<b>1. Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>O Método LQG/LTR .....</b>	<b>2</b>
1.1.1. Desvantagens do Método LQG/LTR.....	3
<b>Algumas Técnicas de Redução de Ordem.....</b>	<b>4</b>
<b>Escopo e Contribuição desta Dissertação.....</b>	<b>5</b>
<b>Organização do Conteúdo .....</b>	<b>6</b>
<b>2. Síntese do Método LQG/LTR.....</b>	<b>8</b>
<b>Considerações Preliminares .....</b>	<b>9</b>
2.1.1. Representação das Incertezas do Modelo.....	9
2.1.2. Valores Singulares e Estabilidade de Sistemas Multivariáveis .....	11
<b>Procedimentos Duais para a Realização do Método LQG/LTR.....</b>	<b>13</b>
<b>O Regulador Linear Ótimo Quadrático (LQR).....</b>	<b>14</b>
<b>O Filtro de Kalman .....</b>	<b>15</b>
<b>O Projeto de um Controlador Robusto LQG/LTR .....</b>	<b>18</b>
2.1.3. Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR) .....	18
2.1.4. Projeto do Filtro de Kalman .....	19
2.1.5. Adição de Integradores.....	21
2.1.6. Equalização de Ganhos em Todas as Frequências.....	21
<b>Conclusões .....</b>	<b>24</b>
<b>3. Compensadores Dinâmicos.....</b>	<b>25</b>
<b>Determinação da Ordem do Compensador Dinâmico.....</b>	<b>26</b>
<b>Alocação de Pólos.....</b>	<b>27</b>
<b>Descrição Matemática dos Compensadores Dinâmicos .....</b>	<b>28</b>
<b>Conclusões .....</b>	<b>29</b>
<b>4. Aplicação do Projeto de Controlador Robusto LQG/LTR para um Sistema Multiva- riável com Redução de Ordem de Modelo com Variáveis Desacopladas .....</b>	<b>30</b>
<b>Descrição do Sistema a Ser Controlado.....</b>	<b>31</b>
<b>Obtenção do Modelo Reduzido .....</b>	<b>34</b>
<b>Pré-Estabilização do Sistema Reduzido .....</b>	<b>37</b>

<b>Projeto do Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida .....</b>	<b>40</b>
4.1.1. Adição de Integradores na Saída da Planta .....	42
4.1.2. Projeto de um Regulador LQR com Equalização de Ganhos em Todas as Frequências .....	44
4.1.3. Projeto de um Filtro de Kalma .....	48
4.1.4. Implementação do Controlador Projetado com a Planta Original .....	51
<b>Análise de Estabilidade do Sistema Controlado.....</b>	<b>54</b>
<b>Análise do Desempenho do Sistema Controlado .....</b>	<b>56</b>
<b>Comentário Sobre a Escolha de Parâmetros no Projeto.....</b>	<b>62</b>
<b>Conclusões .....</b>	<b>68</b>
<b>5. Conclusão.....</b>	<b>70</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>74</b>
<b>Apêndice A: Rotina Computacional para o Projeto .....</b>	<b>77</b>

## Lista de Ilustrações

2.1. Diagrama de Blocos de um Sistema Real MIMO Controlado com Realimentação Unitária.....	9
2.2. Representação do Sistema Controlador em Malha Fechada com Incertezas do Modelo na Forma Multiplicativa.....	10
2.3. Diagrama de Blocos do Sistema para a Análise da Abertura da Malha Fechada do Sistema Controlado.....	14
2.4. Diagrama de Blocos do Filtro de Kalman.....	16
2.5. Diagrama de Blocos do Controlador $K(s)$ .....	20
2.6. Modelo do Sistema com Incertezas na Sua Entrada e Integradores na Saída.....	21
3.1. Diagrama de Blocos de um Sistema $G(s)$ com um Pré-Compensador Dinâmico.....	28
4.1. Ganhos Principais do Sistema $G_p(s)$ .....	33
4.2. Diagrama de Blocos de $G_p(s)$ com o Destaque das Variáveis $x_{\bar{a}}$ do Restante do Sistema.....	35
4.3. Comparação dos Ganhos do Sistema Original aos do Sistema Reduzido.....	36
4.4. Pólos de $\bar{G}_p(s)$ .....	37
4.5. Alocação de Modos Instáveis e a Criação de um Novo $\bar{G}_c(s)$ .....	39
4.6. Comparação dos Ganhos Após a Alimentação do Compensador Dinâmico de 1ª Ordem ao Sistema Original e ao Sistema Reduzido.....	40
4.7. Ganhos das Incertezas do Modelo.....	41
4.8. Diagrama de Blocos Após Adição de Integradores na Saída do Sistema e as Incertezas Multiplicativas na Entrada.....	42
4.9. Ganhos Principais de $\bar{G}_i(s)$ .....	43
4.10. Equalização dos Ganhos do Sistema.....	46
4.11. Relação Inversamente Proporcional entre $\rho$ e $\omega_{crossover}$ .....	47
4.12. Ganhos Principais da Malha de Referência.....	48
4.13. Ganhos Principais de $T_{LQ}$ Comparados com os de $K(s)\bar{G}_i(s)$ .....	50
4.14. Comparação entre os Ganhos de $G_i(s)$ e $\bar{G}_i(s)$ .....	52
4.15. Ganhos Principais de $T_{LQ}$ Comparados com os de $K(s)G_i(s)$ .....	53
4.16. Teste de Estabilidade do Sistema Controlado.....	54
4.17. Ganho Inferior de $I + K(s)G_i(s)$ .....	55

4.18. Saídas do Sistema com Controlador Reduzido com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Primeira Referência .....	57
4.19. Saídas do Sistema com Controlador Reduzido com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Segunda Referência .....	57
4.20. Sinais de Controle do Sistema com Controlador Reduzido com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Primeira Referência .....	58
4.21. Sinais de Controle do Sistema com Controlador Reduzido com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Segunda Referência .....	58
4.22. Saídas do Sistema Fazendo $\rho = 0.005$ com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Primeira Referência.....	66
4.23. Saídas do Sistema Fazendo $\rho = 0.005$ com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Segunda Referência .....	66
4.24. Sinais de Controle do Sistema Fazendo $\rho = 0.005$ com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Primeira Referência .....	67
4.25. Sinais de Controle do Sistema Fazendo $\rho = 0.005$ com Estímulo de um Sinal Degrau Unitário na Segunda Referência .....	67
4.26. Deslocamento de Pólos Após Alteração do Valor de $\rho$ .....	68

## Lista de Tabelas

2.1. Parâmetros Duais do Regulador LQR e do Filtro de Kalman .....	17
4.1. Zeros de Transmissão do Sistema Controlado.....	59
4.2. Pólos em Malha Aberta e em Malha Fechada Correspondentes ao Sistema Controlado.....	60
4.3. Pólos em Malha Fechada e Zeros de Transmissão Mais Próximos da Região de Instabilidade do Sistema Controlado .....	61
4.4. Comparação das Ordens dos Controladores com e sem a Redução de Ordem de Modelo .....	62

## RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é apresentar uma solução eficiente, prática e de simples implementação para um problema recorrente em projetos de controladores robustos multivariáveis do tipo LQG/LTR: a elevada ordem que estes controladores podem obter dependendo das complicações apresentadas pelo sistema dificultando para que este possa ser controlado de maneira satisfatória.

Para que esta meta seja alcançada, é apresentada uma técnica de redução do modelo de sistemas com metodologia bastante descomplicada, dispensando qualquer necessidade de complexas programações para a sua utilização. Esta metodologia porém, é somente aplicável a uma classe bastante específica de sistema. Em suma, o sistema deve possuir variáveis de estado desacopladas do restante do sistema, ou seja, variáveis que não sofram influências de outras e que também não provoquem grande efeito nas saídas do sistema.

Foi escolhido um sistema multivariável de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas para que a técnica de redução de ordem de modelo seja testada. Este sistema possui as características especiais mencionadas anteriormente bem como exige o projeto de compensador dinâmico e a adição de integradores às suas saídas para que seja controlado adequadamente.

Este trabalho pretende apresentar o procedimento de todo o projeto mencionado, desde a obtenção de um modelo de ordem reduzida até a implementação do controlador LQG/LTR. Em seguida, o controlador obtido é testado através de diversas simulações e os resultados encontrados são discutidos para a avaliação da eficácia e da praticidade do método proposto para obtenção de controladores de ordem reduzida.

**PALAVRAS-CHAVES:** Controladores LQG/LTR, redução de modelos de sistemas, compensadores dinâmicos, sistemas multivariáveis.

## ABSTRACT

This thesis' main goal is to introduce an efficient, practical and easy to implement solution to a recurring problem in projects of LQG/LTR multivariable robust controllers: the high order these controllers may obtain depending on the complications presented by the system hampering its control in a satisfactory way.

For this goal to be achieved, a system model reduction technique with very simple methodology is introduced, dispensing any needs of complex programming for its use. This methodology however, is only applicable to a very specific class of system. Summarizing, the system must have state variables decoupled from the rest of the system, that is, variables that don't not influenced by others and that also don't cause major effects on the system's outputs.

It was chosen a sixth order multivariable system having two inputs and two outputs for the model order reduction be tested. This system has the special characteristics mentioned before and also demands a dynamic compensator project as well as the integrators addition to its outputs so it can be controlled adequately.

This text intends to show the procedure for the whole project, since the reduced order model achievement to the LQG/LTR controller implementation. Then, the obtained controller is tested through several simulations and the attained results are discussed for effectiveness and practicality evaluation of the proposed method for reduced order controller project.

**KEYWORDS:** LQG/LTR controllers, Systems models reduction, dynamic compensators, multivariable systems.

## Capítulo 1: Introdução

O papel da Engenharia de Controle é de fundamental importância para o desenvolvimento de modernos sistemas de controle para aplicações tanto em processos industriais e de produção, como também nos campos da robótica e de sistemas aeroespaciais, dentre outras. Seu principal foco é a elaboração de projetos de controladores para determinados sistemas com base em modelos matemáticos que descrevem seus comportamentos dinâmicos de acordo com os sinais físicos que os influenciam.

O projeto de um controlador robusto visa fazer com que o sistema obtenha certo grau de imunidade a uma classe específica de perturbações, ou seja, ele deve ser capaz de manter a estabilidade e assegurar certo grau de insensibilidade do sistema controlado quando este é submetido a distúrbios e ruídos. Além de assegurar a robustez da estabilidade, o controlador deve proporcionar um bom desempenho dinâmico ao sistema controlado, isto é, ele deve proporcionar um desempenho rápido e preciso do processo sobre o qual ele atua.

Tendo em vista a sua importância, foram desenvolvidas recentemente diversas técnicas para o projeto de controladores robustos, baseadas nas classes de incertezas estruturais previamente conhecidas. Estas incertezas são as estimativas realizadas com o intuito de limitar quaisquer erros provenientes da modelagem do sistema. Os controladores robustos devem ser capazes de proporcionar o bom desempenho dinâmico do sistema, dentro dos limites estabelecidos previamente para tais incertezas. Esses são chamados controladores com estrutura fixa [1].

Existem duas abordagens básicas que podem ser estudadas para o projeto de controladores robustos. A primeira utiliza o conceito de variações paramétricas, e ela é adequada para sistemas dinâmicos cujos parâmetros incertos assumem valores dentro de um intervalo determinado por limites superior e inferior. Neste caso, o controlador robusto deve garantir a estabilidade do sistema para quaisquer valores que as variáveis do vetor de parâmetros de incerteza assumam dentro de seus intervalos. Pode-se destacar o método PRLQG (“*Parameter Robust Linear-Quadratic Gaussian*”) proposto por Tahk e Speyer [2], o

método PRCBI (“*Parameter Robust Control by Bayesian Identification*”) introduzido por Gomes [3], e o método de Siljak [4], dentre outros.

Na segunda abordagem as incertezas do sistema são representadas no domínio da frequência por uma função que as limita. Durante o projeto, busca-se garantir boas margens de estabilidade que acomodem tais incertezas, impedindo assim o mal funcionamento do sistema controlado. Existem várias técnicas de projeto de controladores robustos que são baseadas nesta abordagem, tais como os métodos  $H_2$  e  $H_\infty$  [5] ou o método LQG/LTR [6]. Este último método será considerado nesta dissertação, dando-se ênfase ao controle de sistemas que necessitam de pré-estabilização e equalização dos seus ganhos principais, operações que aumentam a ordem do sistema a ser controlado.

## 1.1 O Método LQG/LTR

O método LQG/LTR é uma das metodologias mais utilizadas para o projeto de controladores robustos para sistemas lineares contínuos. O procedimento se baseia numa abordagem no domínio da frequência, aplicando-se então a sistemas lineares e invariantes no tempo. Este método é basicamente uma combinação de um regulador LQR e um filtro de Kalman.

O regulador LQR, também chamado regulador linear ótimo quadrático, possui como característica a garantia de estabilidade em malha fechada [7], bem como um alto grau de robustez do sistema controlado, proporcionando margem de ganho infinita e margem de fase de  $\pm 60^\circ$  [8], quando aplicado a sistemas contínuos SISO e MIMO [9].

A grande desvantagem destes reguladores é a necessidade da utilização de observadores de estados com o objetivo de estimar os estados do sistema e tornar possível a realimentação de todos eles, visto que, sem os observadores, vários estados não são acessíveis [10]. Porém, Doyle provou [11] que a adição de observadores de estados reduz drasticamente as características de robustez do regulador LQR. Foi então que Doyle e Stein [12] propuseram um procedimento semelhante ao filtro de Kalman, com mudanças nas matrizes de covariância das perturbações e dos ruídos atuantes no sistema. Esta metodologia permite então o cálculo dos observadores necessários ao regulador LQR, mantendo as suas boas propriedades de robustez.

O método LQG/LTR garante então elevada robustez do controlador projetado diante de perturbações do ambiente e ruídos, além de suportar ampla classe de erros de modelagem, dando ao projetista segurança ao realizar simplificações no modelo. Esta característica é o que possibilita a realização do objetivo deste trabalho.

### **1.1.1 Desvantagens do Método LQG/LTR**

Apesar de todas as excelentes propriedades citadas anteriormente, o método LQG/LTR para o projeto de controladores robustos também possui algumas propriedades desfavoráveis que dificultam o desempenho do controlador. Inicialmente, as únicas restrições ao procedimento são as de que o sistema a ser controlado seja linear e de fase mínima, sendo assim, o sistema deve possuir somente zeros de transmissão estáveis. O fato do controlador LQG/LTR incorporar a inversa da matriz de transferência da planta implica em um controlador instável, quando projetado para um sistema de fase não-mínima.

Mas não basta que a planta estudada seja de fase mínima para que o projeto do controlador seja realizado sem obstáculos. Se o modelo analisado contiver modos instáveis muito próximos do eixo imaginário, o sistema com controlador LQG/LTR pode apresentar um comportamento transitório com oscilações mal amortecidas. Isso ocorre porque os zeros de transmissão do controlador não conseguem anular por completo os efeitos destes modos instáveis que, por estarem próximos do eixo imaginário, são dominantes. Pode-se aumentar o ganho da malha do sistema controlado para atenuar este efeito, mas muitas vezes essa ação não é eficaz e normalmente é necessário incluir um compensador dinâmico ao projeto do controlador LQG/LTR para pré-estabilizar o sistema.

Outro requisito necessário para realizar o projeto deste tipo de controlador robusto é a equalização dos ganhos principais da planta, em sistemas MIMO, visando-se obter o desacoplamento dos seus diversos canais de entrada-saída. Em [13] é apresentado um método que utiliza integradores em cada canal do sistema, e equaliza seus ganhos principais nas baixas e nas altas frequências. A referida equalização pode ser estendida a qualquer faixa de frequência utilizando-se uma fórmula alternativa apresentada em [6]. Esta fórmula, porém, só pode ser aplicada no caso de sistemas sem pólos na origem, já que ela requer a inversão da matriz  $A$  do modelo da planta.

Por fim, o controlador LQG/LTR, por ser uma combinação de um regulador LQR e um filtro de Kalman, tem a mesma ordem do sistema a ser controlado. Porém, como se viu anteriormente, dependendo das suas características, este sistema pode ser constituído por um compensador dinâmico estabilizador e por integradores, além da própria planta a ser controlada. Dessa forma, o sistema final pode atingir uma ordem extremamente elevada, dificultando não só o projeto do controlador, mas também a sua implementação prática. Esta dificuldade é o principal foco desta dissertação, a qual apresenta como solução a redução de ordem do modelo matemático do sistema para a realização do projeto do controlador.

## **1.2 Algumas Técnicas de Redução de Ordem**

A dificuldade encontrada para aplicações de técnicas de controle em sistemas muito complexos e/ou de grandes dimensões vem sendo motivo de muitos de estudos há pelo menos meio século. De fato, existem muitas técnicas para tratar deste assunto [14] que focalizam o problema com diferentes tipos de abordagens.

Davison [15] propôs, em 1966, que o modelo de um sistema pode ser reduzido a um modelo mais simples ao serem considerados apenas os efeitos dos pólos dominantes do sistema, ou seja, aqueles mais próximos da instabilidade. Este princípio simplesmente despreza os modos estáveis mais afastados do eixo imaginário. O procedimento é realizado através de manipulações matriciais que identificam as menores constantes de tempo do sistema, as quais devem ser desprezadas. Essa abordagem, bem simples, tem a desvantagem de muitas vezes resultar em modelos reduzidos que apresentam muitas imprecisões no seu comportamento dinâmico quando comparado ao comportamento do sistema original.

Outro método de grande importância para a obtenção de modelos de ordem reduzida é o método da agregação, proposto por Aoki [16]. Ele sugere procedimentos de decomposição modal com o objetivo de identificar os pólos dominantes do modelo original os quais são agregados ao modelo de ordem reduzida, enquanto os modos mais rápidos (não dominantes) são desprezados. Esta técnica lança mão de métodos de diagonalização de sistemas, para que a eliminação destes modos não resulte em grandes mudanças nas características dinâmicas do sistema original.

Há também vários métodos de redução de ordem de modelo baseados no domínio da frequência [17]-[18], e na norma das matrizes características [19]-[20], dentre outros.

Este trabalho explora, conforme sugerido por Matos [21], propriedades especiais apresentadas por certos sistemas do tipo MIMO, cujas saídas não dependem diretamente de certas variáveis dinâmicas do sistema, as quais, por sua vez, são desacopladas entre si e também em relação às demais variáveis do sistema. Além disso, estas variáveis desacopladas das demais devem estar associadas a modos não dominantes do sistema. As características deste tipo particular de sistema permitem que a redução de seus modelos seja feita de maneira imediata, sem a necessidade de complexas manipulações matemáticas, uma vez que estes modos dominantes podem ser desprezados sem causar grande mudança no desempenho dinâmico do sistema. Modelos com estas propriedades costumam ser encontrados em aplicações na área de sistemas de controle aeroespaciais, como por exemplo, nos casos dos aviões dos tipos F14 e Canard, que são abordados em [13] e [22], respectivamente.

### **1.3 Escopo e Contribuição desta Dissertação**

O grande destaque negativo dos controladores do tipo LQG/LTR é o fato de sua ordem ser igual à do sistema a ser controlado. Este problema torna-se ainda mais grave dependendo das características específicas deste sistema. O foco principal desta dissertação é a realização de um controlador robusto desse tipo utilizando um modelo reduzido do sistema original a ser controlado, com o intuito de reduzir a complexidade do controlador final projetado, minimizando assim o problema citado.

O procedimento utilizado neste trabalho para a redução do modelo original do sistema é voltado para um tipo bem específico de planta, na qual há variáveis desacopladas das outras, cujas influências não afetam diretamente as saídas do sistema e que estão ligadas aos modos rápidos e, portanto, não-dominantes.

Outro problema também abordado é a presença de oscilações de baixas frequências em sistemas MIMO que possuem pólos instáveis próximos ao eixo imaginário, quando estão sendo controlados por controladores do tipo LQG/LTR. Nesse caso, é necessário o projeto de

um compensador dinâmico, que resolve este obstáculo, porém deixa a ordem do sistema ainda mais elevada.

A redução da ordem do modelo original pode implicar, dependendo do sistema, em um compensador dinâmico de ordem menor em comparação com o que seria projetado para pré-estabilizar o sistema original. Esta redução pode resultar em um desempenho um pouco inferior em termos de transitório, mas é vantajosa em termos gerais.

Os procedimentos apresentados neste trabalho para a realização da redução de ordem, do projeto do compensador dinâmico, dos integradores necessários à equalização dos ganhos do sistema e, finalmente, ao controlador robusto LQG/LTR, serão mostrados usando o exemplo de um sistema instável multivariável de sexta ordem, com duas entradas e duas saídas.

## **1.4 Organização do Conteúdo**

Esta dissertação está organizada da seguinte forma.

O Capítulo 2 apresenta um resumo a respeito dos controladores robustos LQG/LTR. Para o melhor entendimento da teoria por trás desta técnica, é feito um breve resumo de tópicos muito importantes para o projeto tais como o tratamento das incertezas de um modelo, os seus valores singulares e as técnicas utilizadas para a determinação do seu grau de estabilidade. São descritas as principais equações relacionadas com o regulador linear ótimo quadrático (LQR) e o filtro de Kalman, além do próprio controlador LQG/LTR. Considera-se o caso em que as incertezas do modelo nominal são representadas na entrada da planta.

O Capítulo 3 apresenta conceitos básicos relacionados com compensadores dinâmicos, estrutura capaz de estabilizar um sistema através da alocação de modos instáveis para regiões de estabilidade. A determinação da ordem do compensador dinâmico, bem como o modo de ação sobre a localização dos pólos é descrita, bem como sua representação matemática.

O Capítulo 4 apresenta um estudo de caso, onde o modelo utilizado é o de um sistema MIMO instável de fase mínima, com duas entradas e duas saídas. Além disso, este

sistema apresenta características especiais que são aproveitadas para a realização de uma forma bastante direta de redução de ordem de seu modelo, simplificando o projeto em geral. Todo o projeto é apresentado neste capítulo, desde a já mencionada redução de ordem, passando pela inclusão de compensadores dinâmicos, até o projeto do controlador LQG/LTR propriamente dito. Ao final os resultados obtidos através de simulações são discutidos, bem como há observações sobre a importância da escolha apropriada de certos parâmetros de projeto, inclusive fazendo novas simulações com novos valores para que as diferenças nos resultados sejam analisadas e discutidas.

O Capítulo 5, por fim, apresenta as conclusões desta dissertação, observando as vantagens e desvantagens do projeto apresentado bem como a sua contribuição, além de apresentar sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2: Síntese do Método LQG/LTR

O método LQG/LTR (*“Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery”*) é um procedimento de grande eficácia para a realização do projeto de controladores robustos para sistemas lineares, monovariáveis ou multivariáveis. Esta técnica consiste basicamente numa combinação de um regulador LQR e um filtro de Kalman. Deste modo, trata-se de um controlador LQG, já que é constituído por um observador de estados para que seja possível a realimentação dos mesmos.

A síntese de um controlador LQG/LTR depende da localização das incertezas do sistema, que podem ser consideradas na saída ou na entrada da planta a ser controlada. Dependendo desta informação, o regulador LQR e o filtro de Kalman devem ser projetados em momentos diferentes do projeto. Sendo assim, existem duas versões para a aplicação do método LQG/LTR.

Normalmente o projetista tem a liberdade de escolher onde as incertezas do modelo devem estar localizadas, podendo então determinar posições convenientes para a simplificação do projeto. Porém, ambas as formas devem ser igualmente funcionais. Existem diversos trabalhos publicados usando as duas versões: com incertezas na saída [23] e na entrada da planta [24]. É notável, em várias publicações, a preferência em considerar estas incertezas na saída da planta, uma vez que essa abordagem permite reduzir o número de operações necessárias para o cálculo dos parâmetros do controlador.

Nesta dissertação, as incertezas do modelo estudado são consideradas na entrada da planta, por razões a serem discutidas no Capítulo 4. Neste caso, o método LQG/LTR tem como primeiro passo o projeto de um regulador LQR, e em seguida o desenvolvimento de um filtro de Kalman.

Este capítulo apresenta inicialmente algumas considerações a respeito da resposta desejada para o sistema a ser controlado, com ênfase na garantia de sua estabilidade em malha fechada, e na obtenção de altas margens de ganho e de fase. As etapas do desenvolvimento do controlador LQG/LTR são igualmente abordadas, expondo de maneira resumida a teoria por trás deste método.

## 2.1 Considerações Preliminares

O desenvolvimento de um controlador robusto tem como objetivos principais garantir a estabilidade do sistema controlado em malha fechada e lhe proporcionar um bom desempenho dinâmico. Sendo assim, o controlador projetado deve ser capaz de acomodar eventuais variações na dinâmica do sistema, o que é natural ocorrer em qualquer processo.

Para que essas metas sejam satisfeitas é necessário impor certas restrições sobre os ganhos principais da matriz de transferência  $G(s)K(s)$  do sistema controlado em malha aberta, conforme o diagrama de blocos mostrado na Figura 2.1. Estas restrições são definidas sobre os ganhos principais, superior e inferior, de  $G(s)K(s)$ . Estes ganhos devem ser altos nas baixas frequências e baixos nas altas frequências.

### 2.1.1. Representação das Incertezas do Modelo

A Figura 2.1 representa de maneira básica um sistema de controle real. Note-se que, em princípio, o sistema real  $G_R(s)$  difere do sistema nominal  $G(s)$ , mas o controlador é o mesmo nos dois casos. Considera-se que  $G_R(s)$  seja o modelo considerando as incertezas de modelagem.

Uma das maneiras mais imediatas de representar o erro de modelagem é através da chamada forma aditiva [25]. Neste caso a incerteza é representada por uma função  $L_A(s)$  que é definida por

$$L_A(s) = G_R(s) - G(s). \quad (2.1)$$

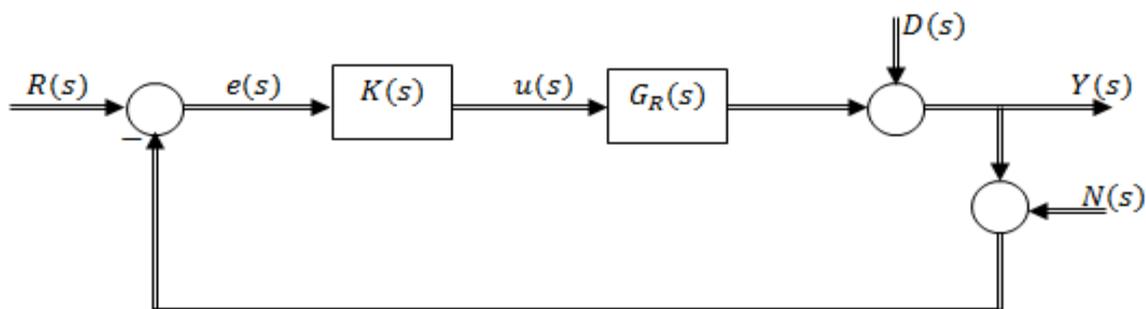


Figura 2.1: Diagrama de blocos de um sistema real MIMO controlado com realimentação unitária.

O inconveniente da representação das incertezas do sistema através de  $L_A(s)$  é que esta função é atrelada ao controlador  $K(s)$ . Verifica-se isso quando se considera o sistema com controlador. Neste caso obtém-se, a partir da Equação (2.1), que

$$G_R(s)K(s) - G(s)K(s) = L_A(s)K(s). \quad (2.2)$$

Esta situação é bastante inconveniente, visto que o objetivo é justamente projetar o controlador  $K(s)$ . Ou seja, é desejável que a função das incertezas do modelo seja dependente apenas da planta do sistema.

Para contornar esta inconveniência, opta-se então pela representação das incertezas do sistema através da chamada forma multiplicativa não estruturada, que é denotada por  $L_M(s)$ , e definida por

$$L_M(s) = \frac{G_R(s) - G(s)}{G(s)}. \quad (2.3)$$

Caso esta representação seja utilizada no sistema com controlador, verifica-se que

$$\frac{G_R(s)K(s) - G(s)K(s)}{G(s)K(s)} = L_M(s) \quad (2.4)$$

Portanto, a função que representa a incerteza do sistema na forma multiplicativa é a mesma com ou sem a inclusão do controlador, isto é, ela só depende do modelo do sistema.

Da Equação (2.3) obtém-se que

$$G_R(s) = [I + L_M(s)]G(s). \quad (2.5)$$

A Figura 2.2 apresenta o diagrama de blocos deste sistema, com as incertezas do modelo representadas na entrada da planta.

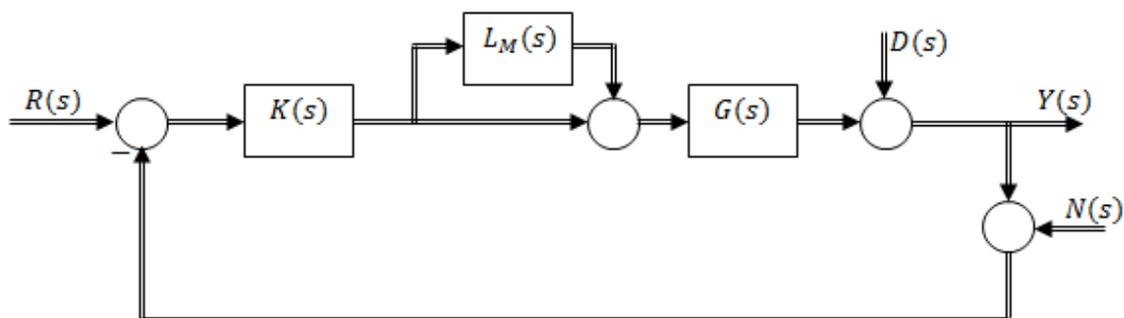


Figura 2.2: Representação do sistema controlado em malha fechada com incertezas do modelo na forma multiplicativa.

Como a função  $L_M(s)$  é desconhecida, estima-se então uma função limitante  $l_M(\omega)$  que define os valores máximos que as incertezas multiplicativas  $L_M(s)$  podem alcançar. Assim tem-se que

$$\|L_M(j\omega)\| < l_M(\omega) \quad (2.6)$$

Segundo Cruz [6], tipicamente as incertezas estimadas assumem valores menores em baixas frequências, mas tornam-se maiores conforme o aumento da frequência. Sendo assim, os modelos costumam ser mais confiáveis em baixas frequências. Estes erros em altas frequências podem estar associados a vários efeitos como indutâncias e capacitâncias parasitas, dinâmica de atuadores, dentre outros.

### 2.1.2. Valores Singulares e Estabilidade de Sistemas Multivariáveis

Em sistemas monovariáveis, o desempenho de um sistema é analisado através do conceito de ganho ou magnitude. Em sistemas multivariáveis, contudo, é necessário estabelecer um método para medir estas magnitudes com a intenção de obter respostas em frequência adequadas.

Com esse fim usa-se o conceito de norma euclidiana, que é definida por

$$\|x\| = \sqrt{x^* x} \quad (2.7)$$

onde  $(.)^*$  denota o vetor ou a matriz conjugada de  $x$ .

Através do quociente de Rayleigh [26], a norma euclidiana da matriz de transferência da planta  $G(s)$  pode ser escrita como

$$\|G\| = \sqrt{\lambda_{\max}(G^* G)} \quad (2.8)$$

onde  $\lambda_{\max}$  é o máximo autovalor da matriz  $G^* G$ .

A Equação (2.8) sugere a seguinte definição de valores singulares:

$$\sigma_i(G) = \sqrt{\lambda_i(G^* G)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

onde  $\lambda_i(.)$  indica o  $i$ -ésimo autovalor de  $(.)$ .

Observa-se que o número de valores singulares que a matriz de transferência  $G(s)$  possui depende das dimensões desta matriz. Por esta razão, visando simplificar a análise do sistema, trabalha-se somente com os ganhos principais, superior e inferior, de  $G(s)$ , visto que todos os outros valores singulares ficam inevitavelmente confinados entre esses referidos ganhos, os quais são denotados e definidos pelas equações que seguem:

$$\bar{\sigma}(G) = \sqrt{\lambda_{\max}(G^*G)} = \|G\| \quad (2.10)$$

$$\underline{\sigma}(G) = \sqrt{\lambda_{\min}(G^*G)} = \frac{1}{\|G^{-1}\|} \quad (2.11)$$

Com base nestas definições de ganhos principais, superior e inferior, de um sistema  $G(s)$ , é dito que a matriz de transferência possui ganhos altos quando seu ganho principal inferior é alto. Analogamente, considera-se que  $G(s)$  tem baixos ganhos quando seu ganho principal superior é baixo.

Observando-se o diagrama de blocos da Figura 2.1, percebe-se que a saída  $Y(s)$  do sistema depende dos sinais de referência  $R(s)$ , de distúrbios  $D(s)$  e de ruídos  $N(s)$ . A relação entre estes sinais é dada pela seguinte equação matricial complexa

$$Y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} G(s)K(s)[R(s) - N(s)] + [I + G(s)K(s)]^{-1} D(s) \quad (2.12)$$

Os sinais de referência  $R(s)$  e os distúrbios externos  $D(s)$  costumam operar com frequências baixas, ao contrário dos ruídos  $N(s)$  presentes nos processos, que normalmente possuem frequências bastante elevadas.

Observa-se na Equação (2.12) que, quando os ganhos da matriz de transferência  $G(s)K(s)$  é elevado em baixas frequências, a saída do sistema segue o seu sinal de referência e os distúrbios são rejeitados. Ou seja, para baixas frequências é desejável que

$$\underline{\sigma}[G(s)K(s)] \gg 1. \quad (2.13)$$

De outro lado, os ganhos de  $G(s)K(s)$  devem ser baixos em altas frequências para, dessa forma, atenuar os efeitos provenientes dos ruídos do sistema. Assim, para altas frequências pode-se estabelecer a condição

$$\bar{\sigma}[G(s)K(s)] \ll 1. \quad (2.14)$$

Através da utilização do Critério de Nyquist para sistemas multivariáveis, foi deduzida [27] a seguinte condição de robustez da estabilidade de sistemas reais em malha fechada:

$$\bar{\sigma} \left\{ [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1} G(j\omega)K(j\omega) \right\} < \frac{1}{l_M(\omega)} \quad (2.15)$$

Nota-se que, quando  $l_M(\omega)$  atinge altos valores, normalmente em altas frequências, a matriz de transferência  $G(j\omega)K(j\omega)$  deve ter ganhos baixos, corroborando a condição exposta na Equação (2.14).

Apesar da desigualdade mostrada em (2.15) garantir a estabilidade do sistema diante de incertezas não-estruturadas, não fica estabelecida ainda uma margem sobre a qual é possível um grau de variação de determinados elementos do sistema sem resultar na sua desestabilização. Os critérios de margem de ganho e margem de fase são uma definição mais adequada neste sentido, indicando a capacidade de robustez de sistemas MIMO.

É demonstrado em [28] que as margens de ganho e de fase para sistemas multivariáveis são dadas respectivamente por

$$\frac{1}{1 + \alpha_0} < MG < \frac{1}{1 - \alpha_0} \quad (2.16)$$

$$-2 \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{\alpha_0}{2} \right) < MF < 2 \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{\alpha_0}{2} \right), \quad (2.17)$$

onde o parâmetro  $\alpha_0$  é calculado por

$$\alpha_0 = \min_{\omega} \underline{\sigma} [I + G(j\omega)K(j\omega)]. \quad (2.18)$$

A estabilidade do sistema é garantida até estes limites definidos de margem, porém, se este limite for ultrapassado, o sistema não necessariamente se torna instável [21].

## 2.2 Procedimentos Duais para a Realização do Método LQG/LTR

Existem duas formas de se proceder em relação ao projeto de um controlador robusto LQG/LTR dependendo da localização das incertezas do modelo em relação à planta, como já foi mencionado anteriormente nesta dissertação. Esses procedimentos são duais e devem, a princípio, resultar em desempenhos parecidos do sistema final em malha fechada.

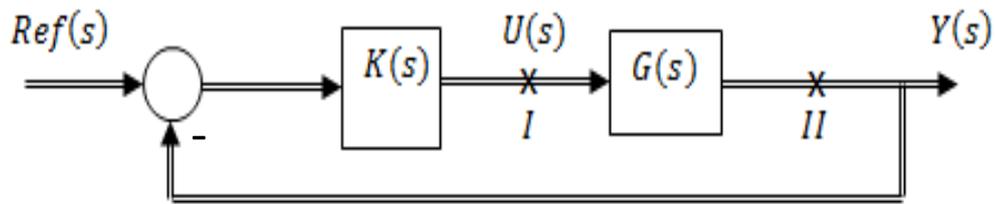


Figura 2.3: Diagrama de blocos do sistema para a análise da abertura da malha fechada do sistema controlado.

A primeira forma de se proceder está associada à matriz de transferência  $G(s)K(s)$  cujas incertezas localizam-se na saída da planta. Sua malha é aberta no ponto  $II$  do diagrama de blocos da Figura 2.3, ou seja, no mesmo local em que estão localizadas as incertezas em relação a  $G(s)$ .

No segundo caso, com as incertezas do modelo situadas na entrada da planta, a malha é aberta no ponto indicado em  $I$ . Desta forma, este procedimento está ligado à matriz de transferência  $K(s)G(s)$ .

Nesta dissertação somente o segundo caso será discutido, pois, devido ao método escolhido para a redução da ordem do modelo do sistema estudado, será mais conveniente a representação das incertezas na entrada da planta. Dessa forma, primeiramente será projetado um Regulador LQR para em seguida ser feito o projeto de um filtro de Kalman.

## 2.3 O Regulador Linear Ótimo Quadrático (LQR)

Considere um certo sistema de ordem  $n$  representada em espaço de estados pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema, e  $u(t), y(t) \in \mathfrak{R}^m$  são respectivamente os seus vetores de controle e de saída. As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  tem dimensões compatíveis e os pares  $(A, B)$  e  $(A, C)$  são controlável e observável, nesta ordem.

Considere também o problema de controle ótimo que consiste na minimização do índice de desempenho  $J$  que é definido por

$$J = \int_0^{+\infty} [x^T Q_c x + u^T R_c u] dt, \quad (2.20)$$

onde as matrizes  $Q_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $R_c \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  são dadas por

$$Q_c = C^T C, \quad Q_c = Q_c^T \geq 0, \quad (2.21)$$

$$R_c = \rho I_{m \times m}, \quad \rho > 0. \quad (2.22)$$

A solução que minimiza o índice de desempenho da Equação (2.20) é dada por

$$u^*(t) = -K_c x(t), \quad (2.23)$$

onde  $K_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos do regulador LQR. Esta matriz é calculada por

$$K_c = \frac{1}{\rho} B^T P, \quad (2.24)$$

onde a matriz simétrica  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a única solução positiva definida da seguinte Equação Algébrica de Riccati (EAR)

$$A^T P + PA - P B R_c^{-1} B^T P + Q_c = 0. \quad (2.25)$$

Então, através das Equações (2.19) a (2.24), observa-se que é possível a obtenção do sinal ótimo de controle  $u^*(t)$  a partir das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  que representam o sistema a ser controlado.

## 2.4 O Filtro de Kalman

Admita-se um sistema como o da Equação (2.19) com o acréscimo de alguns termos como mostrado abaixo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \Gamma \varepsilon(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

sendo que  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada dos ruídos existentes no processo,  $\varepsilon \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor que contém estes ruídos e  $v(t) \in \mathfrak{R}^p$  é o vetor dos ruídos de medição do sinal de

saída. Ambos os vetores mencionados supostamente são ruídos brancos, gaussianos e independentes entre si, tal que

$$E[\varepsilon(t)] = 0 \quad (2.27)$$

$$E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(\tau)] = Q_o\delta(t-\tau) \quad (2.28)$$

$$E[v(t)] = 0 \quad (2.29)$$

$$E[v(t)v^T(\tau)] = R_f\delta(t-\tau) \quad (2.30)$$

onde  $E[.]$  é o valor esperado dos processos estocásticos,  $Q_o \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  é a matriz de intensidade do ruído no estado e  $R_f \in \mathfrak{R}^{p \times p}$  é a matriz de intensidade do ruído na medida. Estas matrizes são respectivamente positiva semi-definida e positiva definida, e dadas por

$$Q_o = I_{m \times m}, \quad (2.31)$$

$$R_f = \mu I_{p \times p}, \quad \mu > 0. \quad (2.32)$$

A Figura 2.4 apresenta a estrutura do Filtro de Kalman. A partir dela, pode-se verificar que se pode representá-lo através das equações

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_F[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $K_F \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  é a matriz de ganhos do filtro de Kalman, que é dada por

$$K_F = \Sigma C^T R_f^{-1}. \quad (2.34)$$

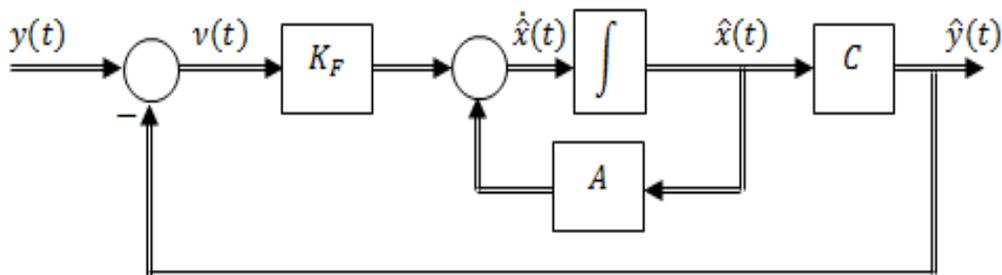


Figura 2.4: Diagrama de blocos do Filtro de Kalman.

A matriz simétrica  $\Sigma \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é a única solução positiva definida da seguinte Equação Algébrica de Riccati

$$A\Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T R_f^{-1} C \Sigma + Q_f = 0 \quad (2.35)$$

onde

$$Q_f = \Gamma Q_o \Gamma = \Gamma \Gamma^T . \quad (2.36)$$

Comparando-se as Equações (2.34) e (2.35) com as Equações (2.24) e (2.25), percebe-se que o Filtro de Kalman e o Regulador LQR são duais entre si, sendo possível se obter relações análogas mediante uma simples correspondência de parâmetros, conforme mostrada na Tabela 2.1.

LQR	Filtro
$A$	$A^T$
$B$	$C^T$
$C$	$B^T$
$R_C$	$R_f$
$P$	$\Sigma$
$K_C$	$K_F$

Tabela 2.1: Parâmetros duais do Regulador LQR e do Filtro de Kalman.

Diante da analogia estabelecida na Tabela acima, então se pode assegurar que o Filtro de Kalman possui as mesmas propriedades de estabilidade e robustez que o Regulador LQR possui.

A estimativa gerada pelo Filtro é ótima no sentido de que ela minimiza a variância do erro de estimação, ou seja,

$$\min \sum_{i=1}^n E \left\{ [x_i(t) - \hat{x}_i(t)]^2 \right\}. \quad (2.37)$$

## 2.5 O Método LQG/LTR

Pode-se definir o controlador linear quadrático Gaussiano (LQG), de maneira básica, como uma combinação de um regulador linear ótimo quadrático (LQR) e um Filtro de Kalman, sendo que este último atua como um estimador dos estados necessários para o pleno funcionamento do primeiro, ou seja, a solução da Equação (2.23) é possível com a utilização dos dados estimados na Equação (2.33).

A partir das Equações citadas acima, pode-se obter a expressão que relaciona a saída  $U(s)$  e a entrada  $Y(s)$  do controlador LQG no domínio da frequência, que é dada por

$$U(s) = -K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f Y(s). \quad (2.38)$$

Como já observado nesta dissertação, a existência de dualidade entre os projetos de um regulador LQR e um Filtro de Kalman proporciona ao projetista duas maneiras distintas de projeto. Uma vez que este trabalho trata de um sistema o qual, por suas características intrínsecas, é melhor analisado posicionando-se as suas incertezas multiplicativas na entrada da planta, então primeiro será feito o projeto do regulador LQR. Somente depois de concluído este primeiro passo, será projetado o Filtro de Kalman com algumas especificidades para que a função de transferência de malha aberta do sistema controlado recupere aproximadamente as características de resposta em frequência desejadas, conhecido como “*Target Feedback Loop*” [13].

### 2.5.1. Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR)

A matriz de transferência do regulador LQR é dada por

$$G_{LQR}(s) = K_c \Phi B \quad (2.39)$$

sendo que  $\Phi = (sI - A)^{-1}$ . Os ganhos deste regulador, definidos de acordo com a Equação (2.10), satisfazem a seguinte relação que é derivada a partir da chamada Identidade de Kalman [29] e da aplicação de propriedades de dualidade:

$$\sigma_i [I + G_{LQR}(s)] = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2 [H \Phi B]}. \quad (2.40)$$

Dado que a região de frequências onde se exige bom desempenho do sistema é aquela em que  $\sigma_i [G_{LQR}(s)] \gg 1$ , pode-se então aproximar esta equação da seguinte forma

$$\sigma_i [G_{LQR}(s)] = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sigma_i [H \Phi B] \quad (2.41)$$

Os parâmetros de projeto  $\rho$  e  $H$  devem ser ajustados de modo que as curvas de resposta em frequência dos ganhos principais de  $G_{LQR}(s)$  tenham as características desejadas para um sistema controlado em malha aberta, isto é, altos ganhos nas baixas frequências e baixos ganhos nas altas frequências, além de equalização de ganhos e uma frequência de *crossover* apropriada.

A determinação desses parâmetros é feita com auxílio das Equações (2.21)-(2.22), e (2.24)- (2.25). Aplicando-as corretamente, encontram-se valores adequados para  $\rho$  e  $H$ . O parâmetro  $\rho$  é basicamente utilizado para o ajuste da frequência de *crossover*.

## 2.5.2. Projeto do Filtro de Kalman

Para completar o projeto do controlador LQG/LTR é necessário o projeto de um Filtro de Kalman com o intuito de atuar como um estimador de estados para o regulador LQR projetado anteriormente.

O projeto do Filtro de Kalman deve ter o cuidado de fazer com que as curvas de resposta em frequência do sistema controlado tenham características semelhantes às respectivas curvas de  $G_{LQR}(s)$ . Essa ação é chamada de *Loop Transfer Recovery* (LTR).

Esses objetivos de ação do Filtro de Kalman são alcançados através do uso das Equações (2.31), (2.33) e (2.34), além da seguinte expressão:

$$Q_f = BB^T + q^2 BB^T \quad (2.42)$$

onde  $q^2$  é denominado “parâmetro de recuperação” do sistema.

A Equação (2.42) constitui a principal diferença entre o projeto do Filtro de Kalman para um controlador LQG/LTR e um projeto convencional, no qual é utilizada a Equação (2.36). A inclusão da parcela com  $q^2$  permite que as características desejadas para  $G_{LQR}(s)$

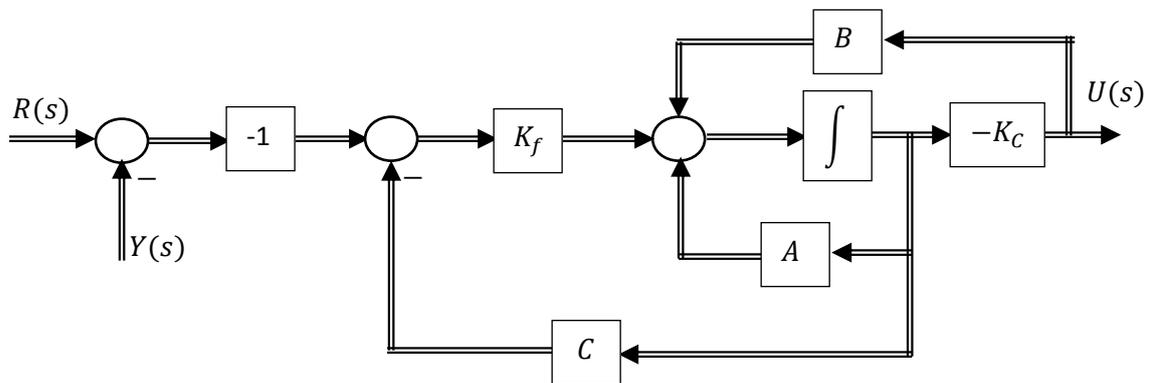


Figura 2.5: Diagrama de blocos do controlador  $K(s)$ .

sejam recuperadas após a adição do Filtro de Kalman, sendo que quanto maior o valor do parâmetro de recuperação ( $q^2 \rightarrow \infty$ ), melhor será o “rastreamento” obtido no projeto.

O controlador LQG/LTR possui então a matriz de transferência dada abaixo e o seu diagrama de blocos é mostrado na Figura 2.5.

$$K(s) = K_c (sI - A + BK_c + K_f C)^{-1} K_f. \quad (2.43)$$

### 2.5.3. Adição de Integradores

Uma dificuldade comumente encontrada durante o projeto de um controlador LQG/LTR é a grande diferença existente entre os ganhos principais  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  e  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ . Esta característica indica a presença de acoplamento entre os diversos canais do sistema, logo é desejável que os ganhos principais, superior e inferior, do sistema a ser controlado sejam os mais próximos possíveis entre si. Deve-se, portanto, adicionar integradores ao sistema, de modo a solucionar o problema mencionado.

Convém mencionar que a adição de integradores faz com que os ganhos do sistema sejam grandes em frequências muito baixas. Desse modo, este processo de adição de integradores torna-se inerente ao projeto de controladores LQG/LTR.

Os integradores devem ser posicionados de maneira oposta às incertezas do sistema, em relação à planta  $G(s)$ . Como já foi explicado, este trabalho representa as incertezas do sistema na sua entrada, logo os integradores devem ser posicionados na saída do modelo, conforme indicado na Figura 2.6.

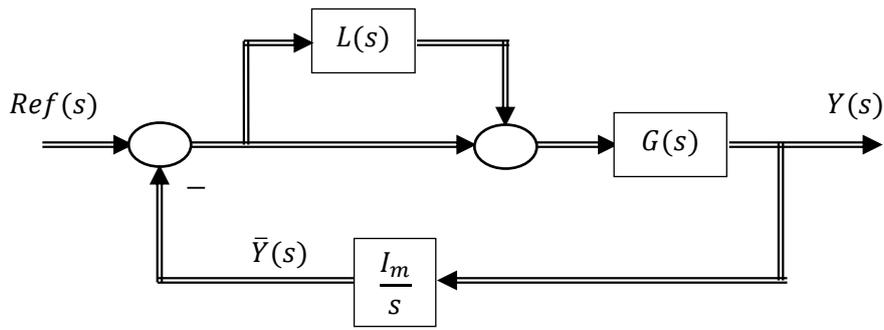


Figura 2.6: Modelo do sistema com incertezas na sua entrada e integradores na saída.

Após a adição dos integradores, a representação em espaço de estados do sistema aumentado assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0_{n \times m} \\ C & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= \begin{bmatrix} 0_{p \times n} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

e sua matriz de transferência correspondente é dada por

$$\frac{I_m}{s} G(s) = \bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}. \quad (2.45)$$

#### 2.5.4. Equalização de Ganhos em Todas as Frequências

Em termos gerais, é exigido que um controlador tenha ganho inferior alto em baixa frequência e ganho superior baixo em alta frequência, bem como uma frequência de *crossover* compatível com o sistema. Tais exigências se aplicam em sistemas SISO e MIMO, porém os ganhos superiores e inferiores de um sistema SISO são os mesmos. Contudo, em sistemas MIMO, os ganhos superiores e inferiores devem ser próximos para evitar o acoplamento.

Durante o projeto do Regulador LQR, pode-se adaptar as características da curva de resposta em frequência de  $G_{LQR}(s)$  de acordo com o desejado através da escolha de valores adequados de  $\rho$  e  $H$ , de acordo com o que já foi descrito anteriormente neste texto.

No caso de sistemas MIMO, porém, a equalização de ganhos em todas as frequências é necessária para desacoplar o sistema. Assim, a matriz de transferência de malha aberta procurada para o sistema controlado  $K(s)G(s)$  é uma matriz diagonal com todos os elementos iguais.

Este novo objetivo é incorporado ao projeto de  $G_{LQR}(s)$ , através de uma escolha adequada de valores para o parâmetro de projeto  $H$ . Na literatura existem várias deduções para a determinação deste parâmetro com o intuito de equalizar os ganhos principais do sistema nas baixas frequências e/ou nas altas frequências, porém sem equalizar referidos ganhos na faixa de frequências intermediárias. Nesta dissertação será abordado somente o método que é usado para equalizar os ganhos do sistema em todas as frequências [6]. A partir deste momento  $G_{LQR}(s)$  passará a ser chamado de  $T_{ROL}(s)$ , ou seja,

$$T_{ROL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} H (sI - \bar{A})^{-1} \bar{B}. \quad (2.46)$$

A partir da Equação (2.44), que inclui os integradores adicionados ao sistema estudado, pode-se reescrever a Equação (2.46) como

$$T_{ROL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} sI_n - A & 0_{n \times m} \\ -C & sI_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

que ao ser desenvolvida resulta em.

$$T_{ROL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} [H_1 \quad H_2] \begin{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} & 0_{n \times m} \\ \frac{C (sI_n - A)^{-1}}{s} & \frac{I_m}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

e finalmente em

$$T_{ROL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[ H_1 (sI_n - A)^{-1} B + H_2 \frac{C (sI_n - A)^{-1}}{s} B \right]. \quad (2.49)$$

O objetivo é determinar o parâmetro  $H$  de modo que os ganhos de  $T_{ROL}(s)$  em todas as frequências estejam equalizadas. O modo mais fácil é fazer com que  $T_{ROL}(s)$  seja uma matriz diagonal com elementos iguais. Uma matriz  $H$  que cumpre tal função é dada por

$$[H_1 \quad H_2] = [H_2 C A^{-1} \quad -(C A^{-1} B)^{-1}]. \quad (2.50)$$

Substituindo-se a Equação (2.50) na Equação (2.49) obtém-se o seguinte resultado para a matriz de transferência  $T_{ROL}(s)$

$$T_{ROL}(s) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} I \\ s \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Ou seja,  $T_{ROL}(s)$  torna-se uma matriz diagonal com todos os termos iguais, o que significa que todos os seus ganhos são iguais a

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

As Equações (2.51)-(2.52) demonstram que todos os valores singulares são idênticos em todas as frequências, com os ganhos do sistema apresentando declividade de  $20 \text{ dB/dec}$ . Dessa forma são garantidos ganhos altos em baixa frequência e ganhos baixos para frequências elevadas. Estas fórmulas também indicam que o valor de  $\rho$  pode ser variado de forma a transladar a curva de resposta em frequência para cima ou para baixo, fazendo o ajuste de maneira bastante simples da frequência de *crossover* conforme a conveniência e praticidade.

Com a equalização dos ganhos do sistema garantida em todas as frequências, o projeto deve prosseguir de acordo com o mostrado nas Seções 2.3 e 2.4 deste capítulo, tomando a atenção de usar o sistema após a inclusão dos integradores, mostrado nas Equações (2.44)-(2.45).

Ao final do projeto, o controlador LQG/LTR é representado em espaço de estado pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (\bar{A} - \bar{B}K_c - K_f\bar{C})\hat{x} - K_f y \\ u &= -K_c \hat{x} \end{aligned} \quad (2.53)$$

e sua matriz de transferência é dada por

$$K(s) = K_c (sI - \bar{A} + \bar{B}K_c + K_f\bar{C})^{-1} K_f. \quad (2.54)$$

A representação em espaço de estados do sistema controlado  $K(s)\bar{G}(s)$  é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}K_c - K_f\bar{C} & -K_f\bar{C} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} Rf \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

## 2.6 Conclusões

Neste capítulo procurou-se apresentar de maneira resumida os principais procedimentos necessários para a realização de um projeto de controlador LQG/LTR para sistemas do tipo MIMO.

Os principais pontos abordados foram os projetos do Regulador LQR e do Filtro de Kalman, porém também foram abordados aspectos importantes como, por exemplo, a necessidade de desenvolver uma malha cuja resposta em frequência deve ter assegurados vários requisitos desejados no projeto, bem como a necessidade de fazer com que o sistema controlado use essa resposta como referência.

Foram também discutidas as técnicas utilizadas para incluir os integradores ao sistema analisado e para a equalização dos ganhos da planta. Tais procedimentos tem suma importância no que diz respeito ao bom funcionamento do controlador nas mais variadas faixas de frequência, assim como no desacoplamento dos diversos canais do sistema.

Quanto ao projeto do Regulador LQR, foi observado que os parâmetros  $\rho$  e  $H$  podem ser alterados livremente, de acordo com as necessidades. Contudo, ao passo que  $\rho$  pode ser variado do modo que convir, o parâmetro  $H$  deve obedecer certas equações para a obtenção da equalização dos ganhos do sistema em todas as frequências.

Durante o projeto do Filtro de Kalman, o parâmetro de recuperação  $q^2$  pode ser escolhido, sendo que quanto maior for o seu valor, melhor será a recuperação da curva de referência pelo sistema controlado, porém há limites para esse aumento que serão comentados nos próximos Capítulos.

### Capítulo 3: Compensadores Dinâmicos

Os compensadores dinâmicos formam uma classe de controladores lineares que são projetados no espaço de estados e que utilizam como sinais de entrada as saídas do sistema a ser controlado, ou seja, funcionam na base da realimentação de saídas, e dessa forma a sua implementação não requer a inclusão de estimadores e/ou observadores de estados, como ocorre no caso das tradicionais técnicas de posicionamento de pólos por realimentação de estados. A desvantagem do uso desses compensadores é que eles aumentam a ordem do sistema.

Quando o sistema a ser controlado é controlável e observável, os compensadores dinâmicos são capazes de posicionar arbitrariamente os pólos do referido sistema. Assim sendo, eles podem ser usados para estabilizar sistemas instáveis e/ou melhorar o desempenho dinâmico de sistemas que possuam pólos de malha aberta estáveis, porém com baixo fator de amortecimento.

No contexto do projeto de controladores robustos do tipo LQG/LTR, é sabido que esses controladores garantem a estabilidade do sistema controlado em malha fechada, mesmo que em malha aberta referido sistema seja instável.

Ocorre que quando esses controladores são aplicados em sistemas que possuem pólos instáveis próximos do eixo imaginário do plano- $s$ , o comportamento transitório do sistema controlado apresenta oscilações mal amortecidas.

Isso acontece porque os zeros de transmissão dos controladores do tipo LQG/LTR só cancelam perfeitamente os pólos estáveis do sistema controlado. Quando o sistema possui pólos instáveis, os zeros de transmissão do controlador LQG/LTR correspondentes a esses pólos são posicionados simetricamente em relação ao eixo imaginário. Ao fechar-se a malha do sistema os pólos instáveis são atraídos pelos seus zeros de transmissão respectivos, no semi-plano esquerdo (estável). Ocorre que ao serem atraídos, os pólos instáveis apenas se aproximam dos referidos zeros de transmissão, mas o cancelamento perfeito dos polos não acontece. Por isso tudo, os pólos instáveis do sistema são estabilizados, mas ficam situados em posições pouco amortecidas.

Para superar a dificuldade apresentada, uma saída é estabilizar previamente o sistema instável a ser controlado, antes de se projetar o controlador LQG definitivo. Para a realização dessa estabilização prévia uma boa opção é o uso de um compensador dinâmico, já que este tipo de controlador é capaz de reposicionar arbitrariamente os pólos do sistema.

Os compensadores dinâmicos podem ser usados para estabilizar e/ou controlar sem maiores dificuldades sistemas SISO e MIMO, indistintamente.

### 3.1 Determinação da Ordem do Compensador Dinâmico

Considere o sistema linear MIMO representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $y \in \mathfrak{R}^p$  é o vetor de saída e  $u \in \mathfrak{R}^m$  é o vetor de entrada, e cuja matriz de transferência é dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B. \quad (3.2)$$

A ordem mínima de um compensador dinâmico capaz de reposicionar arbitrariamente os pólos desse sistema linear é dada pela seguinte relação [29]

$$n_{cd} = \min\{n_c, n_o\} - 1, \quad (3.3)$$

onde  $n_c$  e  $n_o$  são respectivamente os índices de controlabilidade e de observabilidade do sistema.

O índice de controlabilidade é o menor número inteiro  $n_c$  que satisfaz a relação

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n_c-1}B \end{bmatrix} = n \quad (3.4)$$

enquanto que o índice de observabilidade é o menor número inteiro  $n_o$  que satisfaz

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_o-1} \end{bmatrix} = n. \quad (3.5)$$

Com a inclusão do compensador dinâmico, a ordem do sistema controlado torna-se igual a

$$n_{G+CD} = n + n_{cd}. \quad (3.6)$$

### 3.2 Alocação de Pólos

O problema referente à alocação de pólos pode ser tratado de maneiras diferentes dependendo do objetivo de cada projeto. Nesta dissertação, a meta principal é estabilizar o sistema antes de se começar a projetar um controlador LQG/LTR. Sendo assim, os únicos modos que devem sofrer alocações são aqueles cujos posicionamentos causam instabilidade ao sistema, ou seja, os pólos posicionados à direita do eixo imaginário do plano- $s$ . Desta maneira, considerando-se um sistema de ordem  $n$  com pólos  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , a determinação do novo posicionamento de pólos desejados para o sistema é definida por

$$\lambda_{i-novo} = \lambda_i, \quad (3.7)$$

caso  $\lambda_i$  seja um pólo estável, e

$$\lambda_{i-novo} = \lambda_i - 2\text{Re}(\lambda_i), \quad (3.8)$$

caso  $\lambda_i$  seja um pólo instável.

A Equação (3.8) mostra que a alocação é feita mudando-se somente a parte real de cada modo instável, tornando-o negativo, porém à mesma distância do eixo imaginário. Este esforço é o suficiente para tornar o sistema estável, e dessa maneira melhorar o desempenho do controlador LQG/LTR a ser projetado em uma etapa posterior.

Vale ressaltar, porém, que a ordem do sistema aumenta de acordo com a ordem do compensador dinâmico projetado, ou seja, o sistema compensado possui um número  $n_{cd}$  de novos pólos. Estes pólos devem ser escolhidos arbitrariamente durante o projeto de modo que sejam modos estáveis e rápidos, ou seja, bem distantes do eixo imaginário.

O polinômio característico do modelo descrito pelas Equações (3.1)-(3.2) em malha aberta é dado por

$$a(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0. \quad (3.9)$$

Pode-se afirmar que a principal função de um compensador dinâmico é atuar de modo a alterar o polinômio característico do sistema, adaptando-o com o intuito de obter os novos pólos desejados, ou seja, será criado um novo polinômio característico que possua as raízes estipuladas nas Equações (3.7)-(3.8), além dos pólos arbitrados para o compensador. Esse polinômio característico desejado é obtido através da seguinte equação

$$p(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_{n+n_{cd}}). \quad (3.10)$$

### 3.3 Descrição Matemática dos Compensadores Dinâmicos

A representação em espaço de estados de um compensador dinâmico é definida pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= F z(t) + G y(t) \\ v(t) &= H z(t) + J y(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

e sua matriz de transferência é dada por

$$G_{cd}(s) = H(sI - F)^{-1}G + J. \quad (3.12)$$

Fica nítido pela Equação (3.11) que o sinal de saída  $y(t)$  do sistema atua como sinal de entrada do pré-estabilizador. A Figura 3.1 apresenta a configuração de um compensador dinâmico conectado a um sistema MIMO.

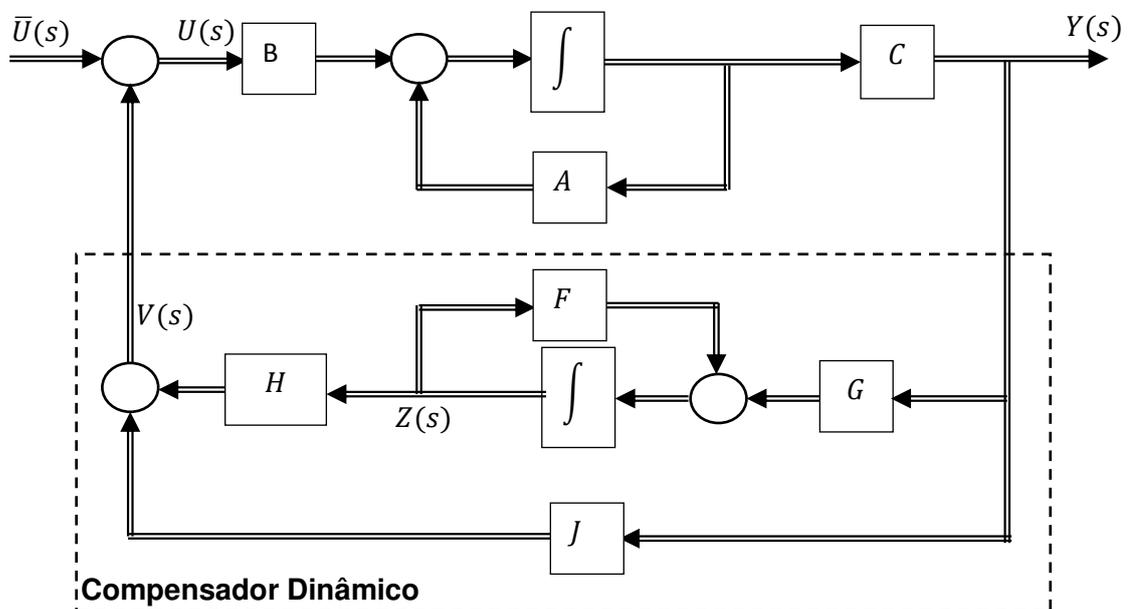


Figura 3.1 - Diagrama de blocos de um sistema  $G(s)$  com um pré-compensador dinâmico.

A determinação das matrizes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  com as quais o sistema com compensador dinâmico possui um polinômio característico como o da Equação (3.10) é feita através de uma série de equações matriciais que são descritas em [29], e cuja formulação computacional pode ser encontrada em [30].

Após a inclusão do compensador dinâmico no sistema  $G(s)$ , a representação em espaço de estados do sistema pré-estabilizado assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BJC & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_{cd} \times m} \end{bmatrix} \bar{u} \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0_{p \times n_{cd}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.4 Conclusões

Este capítulo apresentou resumidamente uma parte da teoria em que se baseiam os projetos de compensadores dinâmicos, dispositivos muito usados quando o sistema precisa ser estabilizado por qualquer razão.

Nesta dissertação é abordado o fato do controlador LQG/LTR ter dificuldade para garantir o bom desempenho em sistema que possuam modos instáveis muito próximos do eixo imaginário, logo a pré-estabilização destes pólos se faz necessária.

Foi mostrado como é determinada a ordem do compensador e também o polinômio característico que o sistema compensado deve ter. É importante destacar o fato do compensador dinâmico ter como sinal de entrada a própria saída do sistema, o que torna a sua implementação mais fácil.

Destaca-se também que a ordem de um compensador dinâmico costuma ser significativamente menor que a de controladores que usam realimentação de estados estimados, que também poderiam realizar a alocação de pólos. Como o objetivo principal deste trabalho é centrado na redução de ordem do sistema controlado, a escolha de se utilizar um compensador para a pré-estabilização do sistema a ser controlado é natural.

## **Capítulo 4: Aplicação do Projeto de Controlador Robusto LQG/LTR para um Sistema Multivariável com Redução de Ordem de Modelo com Variáveis Desacopladas**

O projeto de controladores pelo método LQG/LTR constitui uma das técnicas mais consagradas na literatura de controle robusto porque ela possui excelentes características, tais como, por exemplo, o fato de ser aplicável a sistemas dos tipos SISO e MIMO, de garantir a estabilidade do sistema controlado em malha fechada, e de proporcionar ao sistema controlado grandes margens de ganho e de fase. Na realidade, as únicas limitações de ordem geral impostas por esta metodologia são as de que o sistema a ser controlado seja linear e de fase mínima.

Não obstante essas boas características, à medida que se trabalha com este tipo de controlador, aplicado em diferentes tipos de sistemas, vez por outra surgem algumas dificuldades. Uma delas, que foi explicitada no capítulo anterior, diz respeito às oscilações transitórias que pólos originalmente instáveis do sistema controlado em malha aberta podem causar nos sinais de saída do sistema, mesmo após eles serem estabilizados em malha fechada com a presença do controlador LQG/LTR. Essas oscilações podem ser eliminadas mediante a estabilização prévia do sistema instável a ser controlado, que pode ser feita através de técnicas de posicionamento de pólos mediante o uso de compensadores dinâmicos.

Esta dissertação, contudo, visa estabelecer uma solução para outro obstáculo que pode atrapalhar e até mesmo inviabilizar o projeto do tipo LQG/LTR: a ordem que este controlador pode alcançar. Por ser basicamente uma combinação das técnicas de um regulador LQR e um Filtro de Kalman, este controlador costuma ter, a priori, ordem igual à do sistema a ser controlado, ou seja, para controlar um sistema de  $10^{\text{a}}$  ordem, o regulador LQG/LTR também será de  $10^{\text{a}}$  ordem. Se considerarmos, porém, que em projetos de controladores robustos normalmente são introduzidos integradores ao sistema, e outros dispositivos para auxiliar no controle, como eventualmente um compensador dinâmico, pré-estabilizador, então a ordem do controlador – e, conseqüentemente, do sistema controlado final – torna-se bastante elevada.

Diante de tal problema, é bastante imediato tentar obter um modelo de ordem reduzida do modelo do sistema para o projeto do controlador, porém é necessário ter cuidado com a forma escolhida de redução de modelo. Em [14] são mostrados vários tipos diferentes de técnicas que podem ser utilizadas com tal fim. Se for escolhida uma técnica qualquer, ela pode mostrar-se bastante complexa dependendo do sistema ao qual ela é aplicada, podendo ser mesmo ineficaz.

A redução do modelo é feita principalmente com o objetivo de simplificar projetos e as exigências quanto às características que o sistema de ordem reduzida deve ter pode variar de um projeto para outro, mas em geral deseja-se que os ganhos do sistema reduzido sejam aproximadamente iguais ao modelo original, principalmente em baixas frequências, onde esses ganhos devem ser grandes para manter a robustez do sistema.

Este capítulo descreve o projeto de um controlador robusto do tipo LQG/LTR para um sistema MIMO, fazendo uso de uma técnica de redução da ordem de modelos de sistema. A eficácia desse método de redução será analisada através da observação do desempenho do sistema controlado mediante excitação e também fazendo comparações com o mesmo projeto feito na forma padrão, com o sistema original sendo utilizado.

#### **4.1 Descrição do Sistema a Ser Controlado**

Basicamente as técnicas de redução de ordem de modelos procuram desprezar o efeito que as variáveis de estados associadas a modos não-dominantes causam no resto do sistema. Esta dissertação propõe uma técnica com a mesma proposta, mas que é implementada de forma bastante simples, sendo aplicável somente a uma classe específica de sistemas MIMO.

A classe de sistema à qual a técnica mencionada pode ser aplicada tem que possuir as seguintes características:

- O sistema deve possuir variáveis de estado que não influenciem diretamente nas saídas do sistema;
- Estas variáveis não devem sofrer influência de nenhuma das outras variáveis do sistema ou entre si, sendo que a derivada de qualquer uma delas depende somente da própria variável associada;

- As variáveis de estado com as características citadas anteriormente devem ser associadas a pólos estáveis não-dominantes do sistema, caso esses pólos sejam instáveis ou dominantes, a redução através do método que será apresentado provavelmente se mostrará ineficaz.

Se o modelo analisado possuir todas as características acima, então as variáveis mencionadas, as quais podem ser ditas como desacopladas do restante do sistema, poderão ser desprezados para efeito de projeto. Ou seja, o número de variáveis desacopladas determinará a extensão da redução do modelo utilizando o método proposto neste texto.

O sistema de teste utilizado nesse projeto pode ser encontrado em [22] e descreve o comportamento de um avião do tipo *Canard* quanto ao seu ângulo de ataque, definido como o ângulo entre o eixo do avião e a direção de seu movimento. Este sistema é representado através da equação

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

e sua matriz de transferência é dada por

$$G_p(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \quad (4.2)$$

sendo a tripla de matrizes que representa este sistema mostradas a seguir:

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 & 3.2509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 & -0.1708 & -0.0050 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 & -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 \end{bmatrix}, \quad (4.3a)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} e, \quad (4.3b)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3c)$$

Observa-se que o sistema considerado é de 6ª ordem e possui duas entradas e duas saídas. Os ganhos principais deste sistema são mostrados na Figura 4.1. Numa rápida análise observando-se a configuração da Equação (4.1) e as matrizes da Equação (4.3), pode-se afirmar que o vetor de estados do sistema possui duas variáveis ( $x_5$  e  $x_6$ ) que não sofrem interferências das outras variáveis do sistema, e que elas não influenciam diretamente as saídas do sistema. Seus efeitos são apenas indiretos, através das outras variáveis do sistema.

O sistema possui apenas um zero de transmissão, em  $z = -0.0209$ , e portanto ele é de fase mínima. Já os pólos deste sistema são os seguintes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.2580 \\ \lambda_2 &= -5.6757 \\ \lambda_{3,4} &= 0.6899 \pm j0.2484 \\ \lambda_{5,6} &= -30 \end{aligned} \quad (4.4)$$

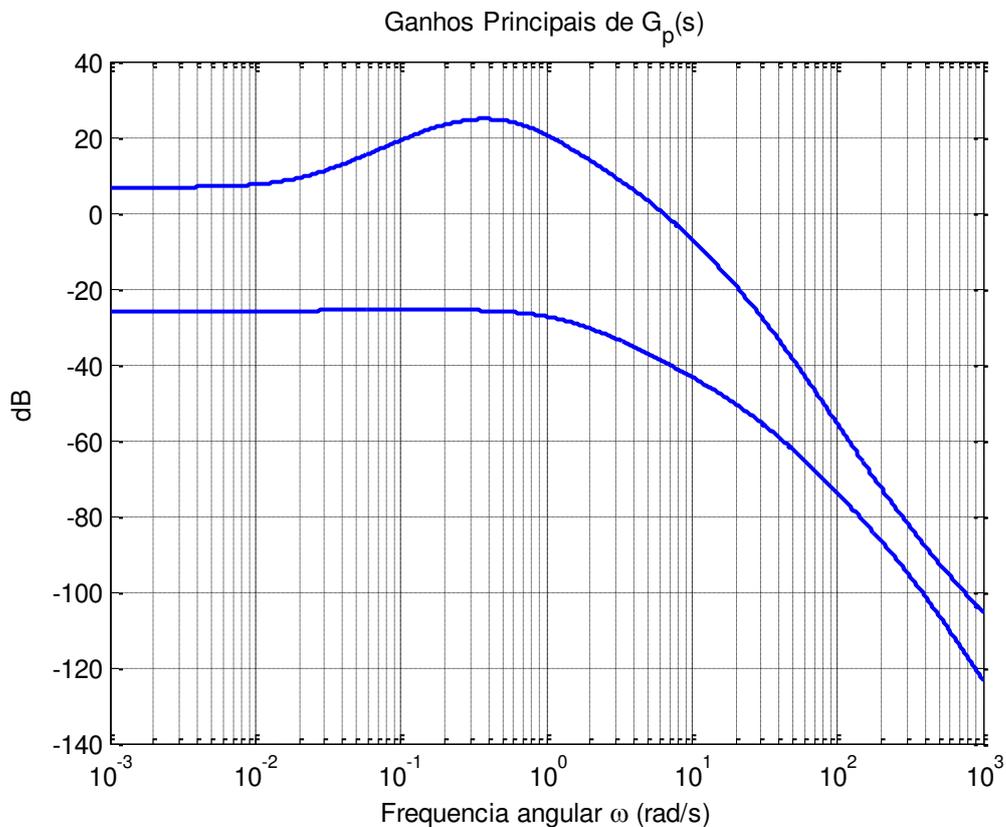


Figura 4.1: Ganhos principais do sistema  $G_p(s)$ .

Observa-se então que, de fato, as variáveis desacopladas,  $x_5$  e  $x_6$ , estão associadas a pólos estáveis não-dominantes posicionadas em  $-30$ . Por tudo isso, o sistema atende as características requeridas para que a redução do seu modelo seja feita de uma forma direta.

Vale destacar ainda a presença de dois modos instáveis,  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ , muito próximos do eixo imaginário, o que compele ao projeto de um pré-compensador estabilizador, pelos motivos discutidos no capítulo anterior.

Um outro sistema, com características bastante parecidas com o analisado neste projeto, pode ser encontrado em [23] onde o modelo descreve o comportamento de aviões do tipo F-15.

## 4.2 Obtenção do Modelo Reduzido

O sistema descrito nas Equações (4.1) – (4.3) satisfaz as características procuradas para a aplicação do método de redução de ordem de sistema apresentado a seguir.

Primeiramente, as matrizes que representam o modelo serão particionadas de modo a isolar as variáveis desacopladas deste sistema, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dots \\ \dot{x}_d^- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0_{2 \times 4} & \vdots & -30I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ \dots \\ x_d^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ \dots \\ 30I_2 \end{bmatrix} u_p \\ y_p &= [C_1 \quad \vdots \quad 0_{2 \times 2}] \begin{bmatrix} x_d \\ \dots \\ x_d^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Desse modo, a tripla de matrizes da Equação (4.3) deverá ser dividida conforme indicado a seguir:

$$A_p = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -0.0226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 & 3.2509 & -0.7626 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 & -0.1708 & -0.0050 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 & -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30.0000 \end{array} \right], \quad (4.6a)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ e,} \quad (4.6b)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6c)$$

Na Equação (4.5), as variáveis denominadas por  $x_{\bar{d}}$  e sua respectiva derivada estão associadas às variáveis desacopladas do restante do sistema, assim sendo, a saída  $y_p$  não depende de  $x_{\bar{d}}$ . Pode-se também fazer a seguinte relação.

$$\dot{x}_{\bar{d}} = -30I_2 x_{\bar{d}} + 30I_2 u_p. \quad (4.7)$$

Como  $\dot{x}_{\bar{d}}$  está associada a modos não-dominantes e que, conseqüentemente, atuam de modo rápido, esta derivada pode ser considerada nula

$$\dot{x}_{\bar{d}} \approx 0, \quad (4.8)$$

ou seja,

$$x_{\bar{d}} \approx u_p, \quad (4.9)$$

e então o diagrama de blocos que representa o sistema pode ser redesenhado de acordo com a Figura 4.2. As variáveis associadas aos modos mais rápidos estão destacadas neste diagrama, de modo a revelar que, ao ser feita a aproximação indicada na Equação (4.9), estas variáveis poderão ser desprezadas.

Destaca-se que o bloco que representa as variáveis a serem desprezadas no modelo de ordem reduzida fica na entrada do restante do sistema. Esta particularidade é determinante no posicionamento das incertezas multiplicativas do modelo de ordem reduzida a ser obtido.

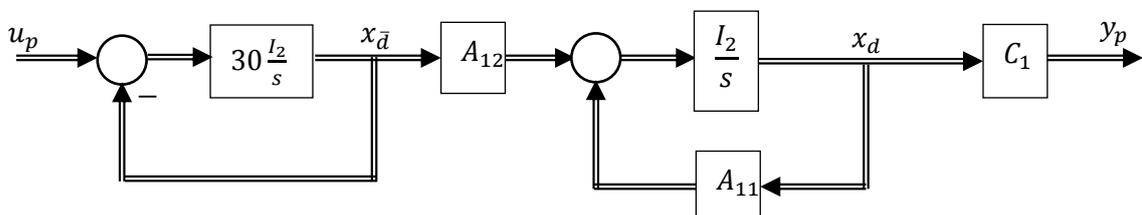


Figura 4.2: Diagrama de blocos de  $G_p(s)$  com o destaque das variáveis  $x_{\bar{d}}$  do restante do sistema.

Percebe-se pelas matrizes da Equação (4.6) que, a partir do momento que o bloco referente as variáveis desacopladas for desprezado, o modelo reduzido  $\bar{G}_p(s)$  será de 4ª ordem com a seguinte representação

$$\dot{\bar{x}}_p = \begin{bmatrix} -0.2226 & -36.6170 & -18.8970 & -32.0900 \\ 0.0001 & -1.8997 & 0.9831 & -0.0007 \\ 0.0123 & 11.7200 & -2.6316 & 0.0009 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_p + \begin{bmatrix} 3.2509 & -0.7626 \\ -0.1708 & -0.0050 \\ -31.6040 & 22.3960 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_p \quad (4.10)$$

$$\bar{y}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_p$$

cuja matriz de transferência associada é dada por

$$\bar{G}_p(s) = \bar{C}_p (sI - \bar{A}_p)^{-1} \bar{B}_p, \quad (4.11)$$

onde a tripla de matrizes  $\bar{A}_p$ ,  $\bar{B}_p$  e  $\bar{C}_p$  são iguais a  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  e  $C_1$ , respectivamente.

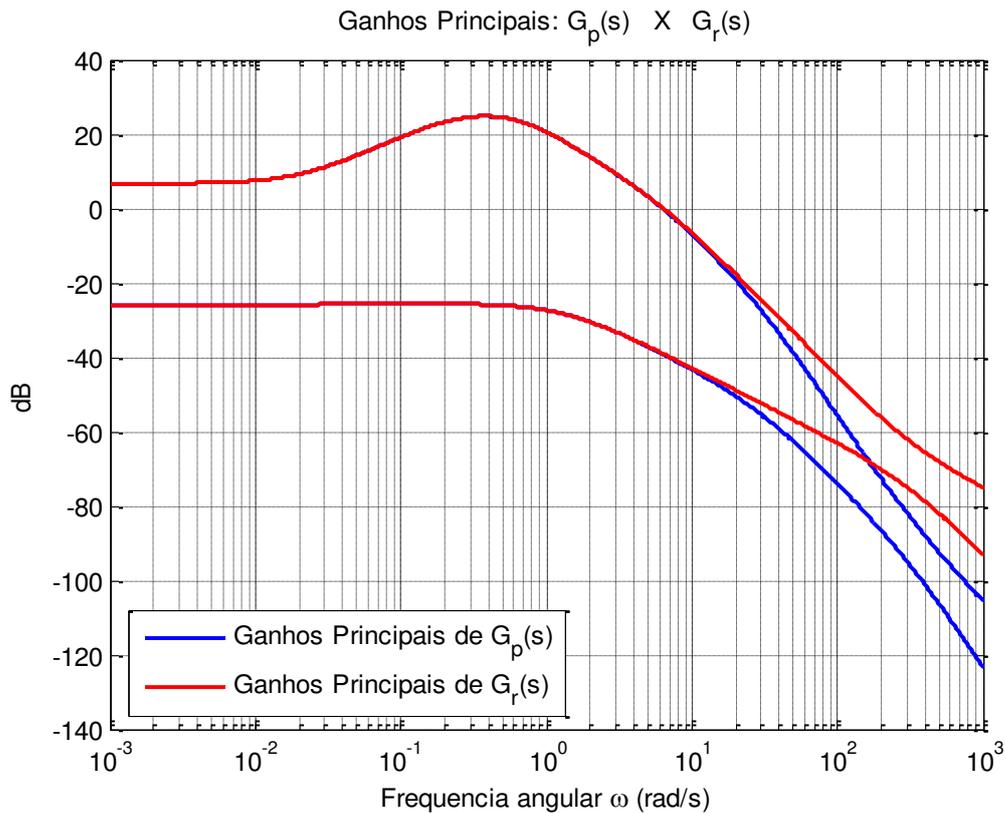


Figura 4.3: Comparação dos ganhos do sistema original aos do sistema reduzido.

A Figura 4.3 apresenta a comparação dos ganhos do sistema original com os ganhos principais do sistema reduzido. Observa-se que a aproximação é bastante precisa em baixas frequências, faixa de maior interesse na maioria de projetos de controle. A precisão começa a ser perdida a partir da frequência de  $20 \text{ rad/seg}$ .

### 4.3 Pré-Estabilização do Sistema Reduzido

Após a redução do modelo do sistema, os dois pólos localizados em  $-30$  são desconsiderados, sobrando então quatro modos. Contudo, já foi percebida a presença de dois modos instáveis em  $\lambda_{3,4} = 0,6899 \pm j0,2484$ , muito próximos do eixo imaginário do plano- $s$ , o que compele o projeto de um compensador dinâmico para estabilizar o sistema com a realocação destes modos instáveis. A Figura 4.4 explicita graficamente a situação dos modos do sistema reduzido.

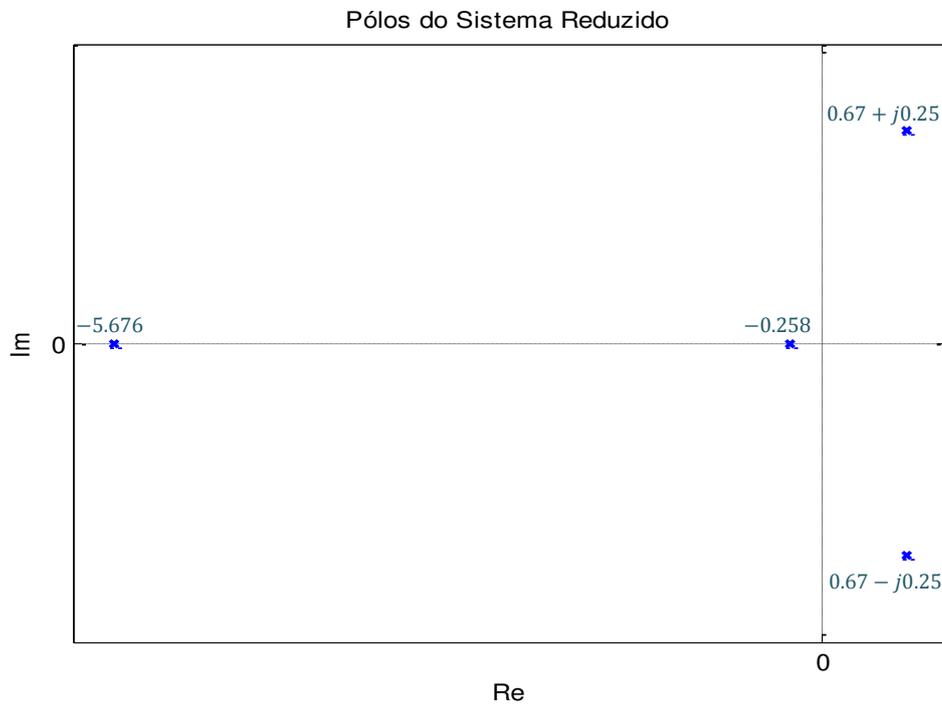


Figura 4.4: Pólos de  $\bar{G}_p(s)$ .

No Capítulo 3 desta dissertação foi feito um resumo de como proceder para o projeto de um compensador dinâmico. Com o auxílio do *software* MATLAB, foi feito o cálculo dos índices de controlabilidade e observabilidade do sistema reduzido, tendo-se obtido  $n_c = n_o = 2$ . Desse modo, de acordo com a Equação (3.3), a ordem do compensador

dinâmico para pré-estabilizar a planta é  $n_{cd} = 1$ . Destaque-se que, caso o compensador fosse projetado com o modelo original do sistema, ele seria de 2ª ordem.

Como o compensador é de 1ª ordem, logo ele contribui com um novo pólo para o sistema. Este novo modo é arbitrário, e neste trabalho foi posicionado em  $\lambda_{cd} = -8$ , de maneira que ele não seja dominante. Considerando-se que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  devem ser mantidos em suas posições originais, e que os modos instáveis devem ser substituídos por  $\lambda_{3,4} = -0,6899 \pm j0,2484$ , então o polinômio característico do sistema compensado é igual a

$$p(s) = s^5 + 15.3134s^4 + 68.6962s^3 + 86.7219s^2 + 42.4717s + 6.2981. \quad (4.12)$$

O compensador dinâmico que estabiliza o sistema com este polinômio característico desejado é representado pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -47.1610 z + [1 \quad 0]y \\ v &= 10^4 \begin{bmatrix} 0.9293 \\ 1.3076 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -204.6304 & 0 \\ -290.1253 & 0 \end{bmatrix} y \end{aligned} \quad (4.13)$$

De acordo com a Equação (3.13), o sistema reduzido compensado é representado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_p \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}J\bar{C} & \bar{B}H \\ G\bar{C} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \bar{u}_c \\ \bar{y}_c &= \begin{bmatrix} \bar{C} & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_p \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

podendo ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c \bar{u}_c \\ \bar{y}_c &= \bar{C}_c \bar{x}_c \end{aligned} \quad (4.15)$$

cuja matriz de transferência correspondente é dada por

$$\bar{G}_c(s) = \bar{C}_c (sI - \bar{A}_c)^{-1} \bar{B}_c. \quad (4.16)$$

A Figura 4.5 mostra o posicionamento dos novos modos do sistema, indicando onde houve mudanças em comparação com a Figura 4.4. Destaca-se principalmente o fato do objetivo principal ter sido alcançado: alocar os modos instáveis para uma posição simétrica na região estável do plano-s.

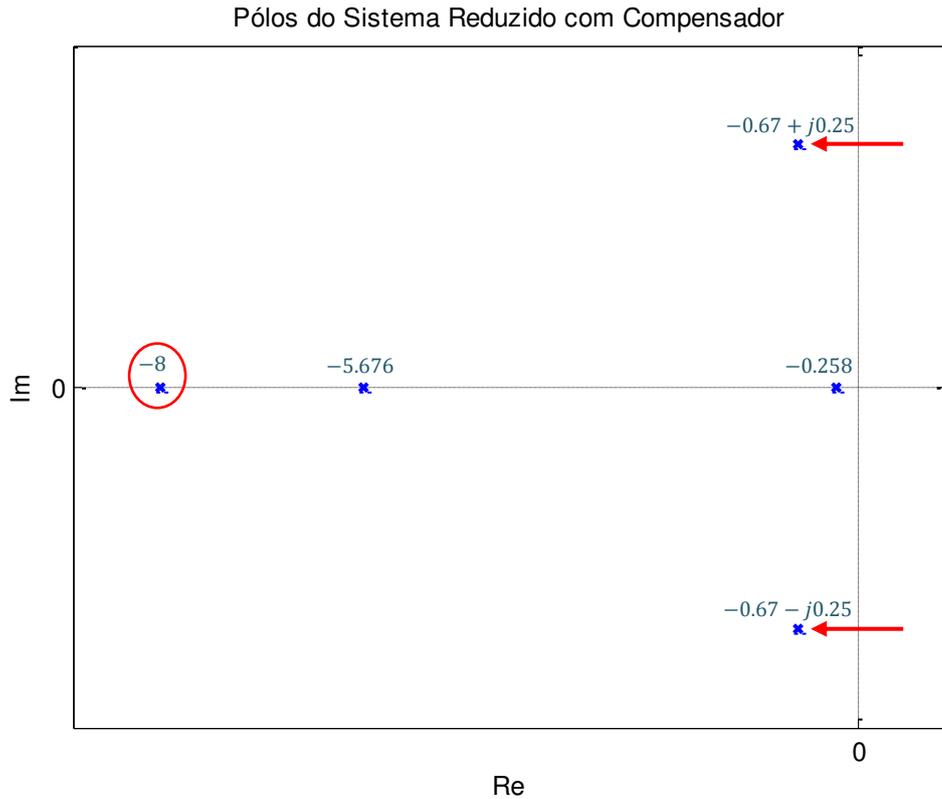


Figura 4.5: Alocação de modos instáveis e a criação de um novo em  $\bar{G}_c(s)$ .

Incluindo-se o compensador de 1ª ordem projetado no sistema original, de 6ª ordem, obtém-se a seguinte realização

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{d}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{B}_c \\ 0_{2 \times 5} & -30I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{d}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ 30I_2 \end{bmatrix} u_c \\ y_c &= \begin{bmatrix} \bar{C}_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{d}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

que pode ser compactada na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u_c \\ y_c &= C_c x_c \end{aligned} \quad (4.18)$$

cuja matriz de transferência associada é dada por

$$G_c(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c. \quad (4.19)$$

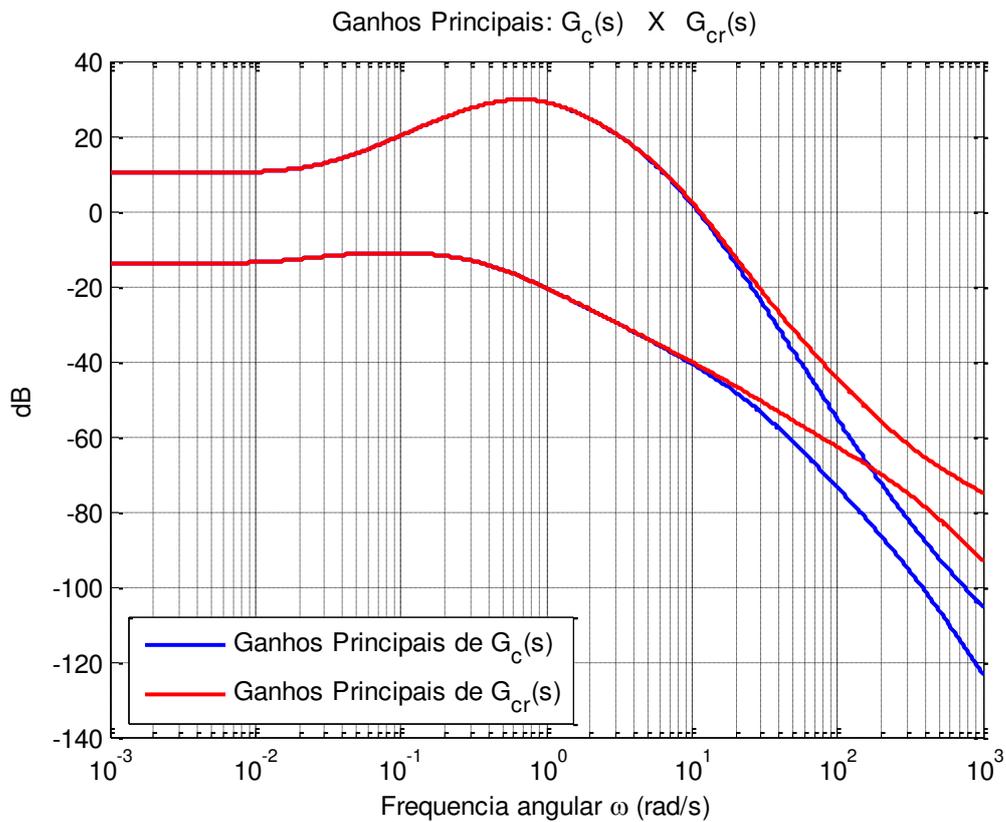


Figura 4.6: Comparação dos ganhos após a implementação do compensador dinâmico de 1ª ordem ao sistema original e ao sistema reduzido.

A Figura 4.6 apresenta os ganhos principais dos sistemas original e reduzido após a introdução do pré-compensador dinâmico estabilizador de 1ª ordem que foi projetado. Como já observado na comparação sem a pré-estabilização, a aproximação por um modelo reduzido não causa diferenças nas baixas frequências, sendo que apenas por volta de  $20 \text{ rad/seg}$  essa imprecisão passa a ser significativa na simulação realizada.

#### 4.4 Projeto do Controlador LQG/LTR de Ordem Reduzida

A partir do momento em que o modelo do sistema a ser controlado está reduzido e estabilizado, o projeto de controlador robusto LQG/LTR pode ser iniciado. Existem dois métodos diferentes para a realização deste projeto, e a escolha de qual deles deve-se utilizar depende somente da localização das incertezas multiplicativas do modelo do sistema.

Em geral a localização dessas incertezas pode ser feita de modo arbitrário, seguindo-se critérios de conveniência. Porém, no caso deste projeto, no qual as incertezas são

decorrentes da desconsideração de algumas variáveis do sistema, deve-se levar em conta que os elementos desprezados durante a obtenção do modelo de ordem reduzida encontram-se na entrada da planta, conforme mostrado na Figura 4.2. Por este motivo, as incertezas do sistema devem ser necessariamente representadas na entrada de  $\bar{G}_p(s)$ , e elas são descritas pela expressão que representa a dinâmica ignorada durante a redução do modelo

$$L(s) = \frac{-s}{s + 30} I_2. \quad (4.20)$$

O ganho da função  $L(s)$  é mostrado na Figura 4.7. Percebe-se que essas incertezas são mais significativas nas regiões de baixas frequências, e sendo assim elas poderão influenciar fortemente no seu desempenho.

Uma vez determinada a localização das incertezas do modelo do sistema na entrada da planta, deve-se utilizar a versão do método LQG/LTR que começa com o projeto de um regulador LQR, e em seguida é feito o projeto de um Filtro de Kalman.

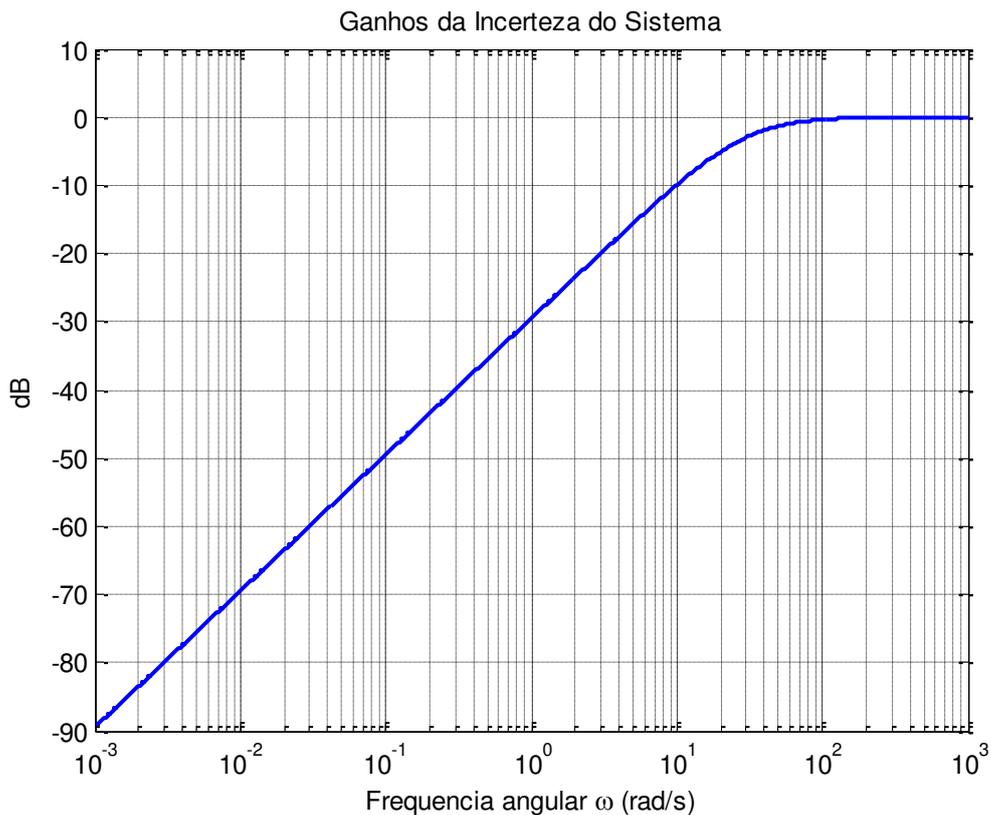


Figura 4.7: Ganhos das Incertezas do Modelo.

#### 4.4.1. Adição de Integradores na Saída da Planta

O projeto de um controlador robusto do tipo LQG/LTR tem como primeiro passo, em geral, a adição de integradores ao sistema. Esta prática apresenta como principais vantagens a garantia de altos ganhos em baixas frequências e baixos ganhos em altas frequências, auxiliando no desempenho e na robustez do sistema controlado. Além disso, a adição de integradores possibilita a equalização dos ganhos do sistema, diminuindo assim o acoplamento existente entre os seus diversos canais de entrada-saída.

Devido à opção de posicionamento das incertezas multiplicativas do modelo de ordem reduzida do sistema na entrada da planta, os integradores devem ser incluídos na sua saída. O diagrama de blocos da Figura 4.8 mostra o esquema desta tal configuração.

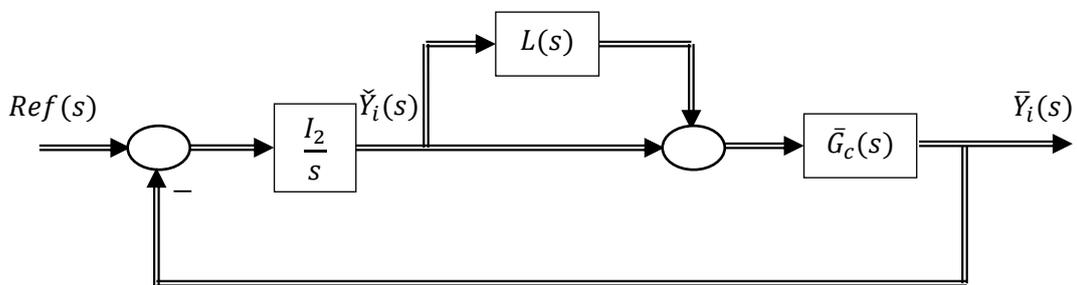


Figura 4.8: Diagrama de blocos após a adição de integradores na saída do sistema e as incertezas multiplicativas na entrada.

O sinal de entrada dos integradores, conforme mostrado na Figura 4.8, é o sinal de saída da planta  $\bar{y}_i$ , gerando o sinal  $\tilde{y}_i$ , que é basicamente a integral do sinal de saída do sistema.

$$\tilde{Y}_i(s) = \frac{I_2}{s} \bar{Y}_i(s). \quad (4.21)$$

Considerando  $\bar{G}_c(s)$  descrito na Equação (4.18) e a relação acima, o sistema com integradores é representado pela seguinte realização em espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \mathbf{0}_{5 \times 2} \\ -\bar{C}_c & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{y}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} u_i \quad (4.22)$$

$$\bar{y}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 5} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{y}_i \end{bmatrix}$$

cujas matrizes são denotadas por  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$  e  $\bar{C}_i$ . A sua matriz de transferência correspondente é obtida através da relação

$$\bar{G}_i(s) = \bar{C}_i (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i. \quad (4.23)$$

Os ganhos principais do sistema, após a adição dos integradores nas suas saídas, são apresentados na Figura 4.9.

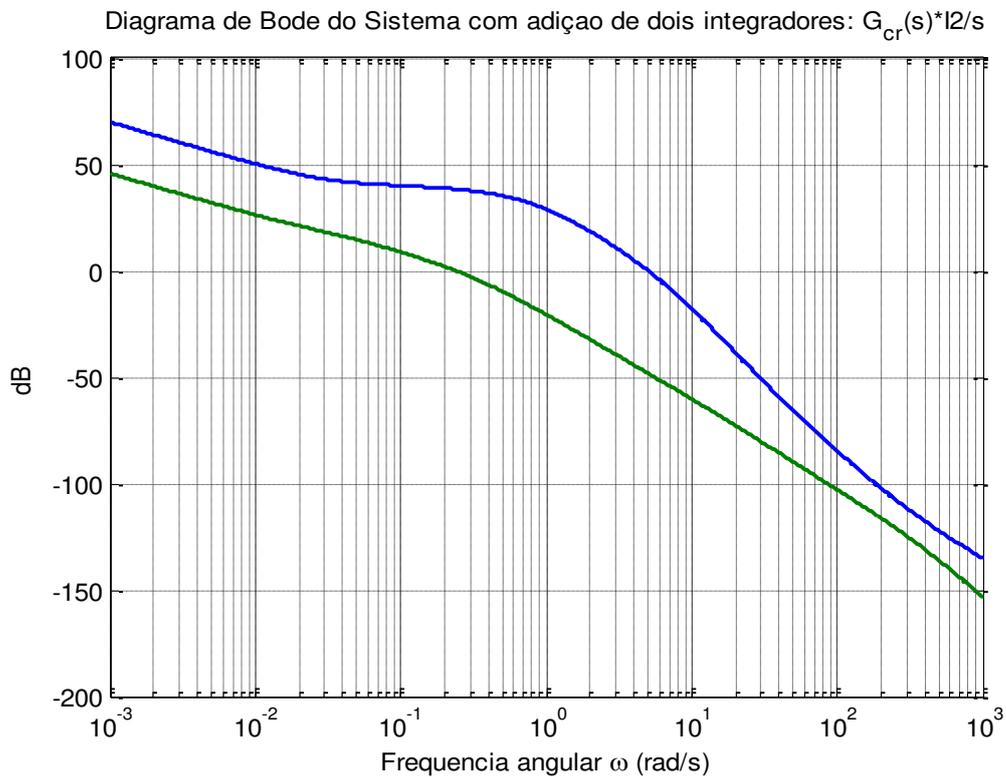


Figura 4.9: Ganhos principais de  $\bar{G}_i(s)$ .

O gráfico acima revela que a introdução de dois integradores às saídas da planta realmente acarretou um significativo aumento dos ganhos principais do sistema nas baixas frequências e uma considerável diminuição nas altas frequências. Nota-se também uma menor distância entre os ganhos principais, superior e inferior, do sistema, mesmo que de

um modo ainda não satisfatório para o desacoplamento total do sistema, que é justamente a próxima etapa da realização do projeto.

#### 4.4.2. Projeto de um Regulador LQR com Equalização de Ganhos em Todas as Frequências

Após a adição dos integradores, o próximo passo na realização do projeto do controlador LQG/LTR é o desenvolvimento de um regulador LQR cujas características de resposta em frequência dos ganhos principais de sua matriz de transferência em malha aberta sejam equalizadas e com frequência de *crossover* (frequência onde as curvas de ganho passam por 0 dB) que proporcione uma rápida resposta transitória para o sistema regulado em malha fechada. O objetivo principal é gerar uma malha de referência, ou seja, a malha a qual o sistema controlado final deve tentar emular.

A matriz de transferência do Regulador LQR é

$$T_{LQR}(s) = K_c (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i, \quad (4.24)$$

onde  $K_c$  é a matriz de ganhos do regulador, escolhida de forma a otimizar o sinal de controle gerado pelo regulador, e é determinada por

$$K_c = R_c^{-1} \bar{B}_i^T P, \quad (4.25)$$

e a matriz  $P$  é a única matriz simétrica positiva definida que resolve a Equação Algébrica de Riccati (EAR)

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i - P \bar{B}_i R_c^{-1} \bar{B}_i^T P + Q_c = 0. \quad (4.26)$$

A matriz  $Q_c$ , por sua vez, é dada por

$$Q_c = \bar{H}^T \bar{H}, \quad (4.27)$$

onde a matriz  $\bar{H}$  é determinante para a equalização dos ganhos do sistema e para o projeto de uma malha de referência adequada para o sistema controlado.

A malha de referência é calculada através dos procedimentos descritos na Seção 2.4.4 desta dissertação. A fim de facilitar a compreensão, serão revistos alguns passos adaptando as notações.

A malha de referência é dada por

$$T_{ROL}(s) = \bar{H} (sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i \quad (4.28)$$

cuja matriz  $\bar{H}$  deve ser

$$\bar{H} = [\bar{H}_1 \quad \bar{H}_2] \quad (4.29)$$

tal que faça os ganhos de  $T_{ROL}(s)$  se assemelharem aos de integradores, visto que esta característica garante o desacoplamento dos diversos canais do sistema.

Revisando-se as Equações (2.47)-(2.49), conclui-se que o problema encarado nessa etapa pode ser equacionado por

$$T_{ROL}(s) = \left[ \bar{H}_1 (sI_2 - \bar{A}_c)^{-1} \bar{B}_c + \bar{H}_2 \frac{\bar{C}_c (sI_2 - \bar{A}_c)^{-1} \bar{B}_c}{s} \right] = \frac{I_2}{s}. \quad (4.30)$$

A partir da sugestão de Cruz [6] para projetos com a localização de incertezas na saída do sistema e que, portanto, deve-se adaptar para o projeto deste trabalho através das características de dualidade dos dois métodos, é possível achar a seguinte solução para a Equação (4.30)

$$[\bar{H}_1 \quad \bar{H}_2] = [\bar{H}_2 \bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \quad -(\bar{C}_c \bar{A}_c^{-1} \bar{B}_c)^{-1}]. \quad (4.31)$$

Daí então basta aplicar-se a Equação (4.27) em (4.26) para finalmente obter-se a relação desejada, isto é,

$$T_{ROL}(s) = \frac{I_2}{s}. \quad (4.32)$$

Aplicando a Equação (4.27) ao projeto obtém-se

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0.0276 & 5.9601 & 0.0023 & -5.3317 & -195.9067 & -3.5830 & -0.8901 \\ 0.0127 & 8.0897 & -0.0424 & -7.8243 & -277.2599 & -3.4651 & -0.4136 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

A Figura 4.10 apresenta os ganhos principais do sistema após ser feita a equalização dos ganhos. A frequência de *crossover* é de 1 rad/seg e o decaimento é de 20 dB/década, características de um integrador puro.

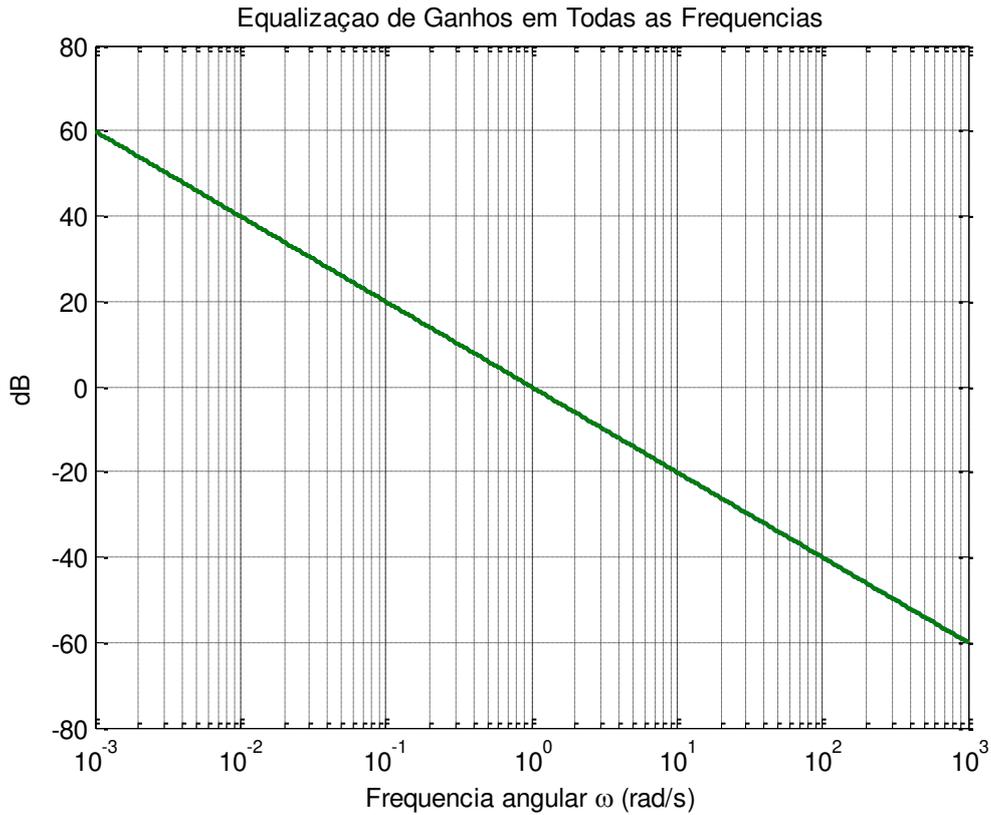


Figura 4.10: Equalização dos ganhos do sistema.

Para a solução da Equação (4.25) também é necessária a relação

$$R_c = \rho I_2, \quad (4.34)$$

onde o parâmetro escalar  $\rho$  é de grande importância para o projeto visto que, dentre outras características que serão comentados mais adiante nesta dissertação, ela se relaciona com a frequência de *crossover* do sistema através da seguinte equação:

$$\omega_{crossover} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (4.35)$$

de modo que a Equação (4.32) pode se reescrita

$$T_{ROL}(s) = \omega_{crossover} \frac{I_2}{s} = \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \frac{I_2}{s}. \quad (4.36)$$

Esta relação é mostrada na Figura 4.11, onde foram atribuídos vários valores de  $\rho$  e observa-se a relação inversamente proporcional entre este parâmetro e a frequência de *crossover*.

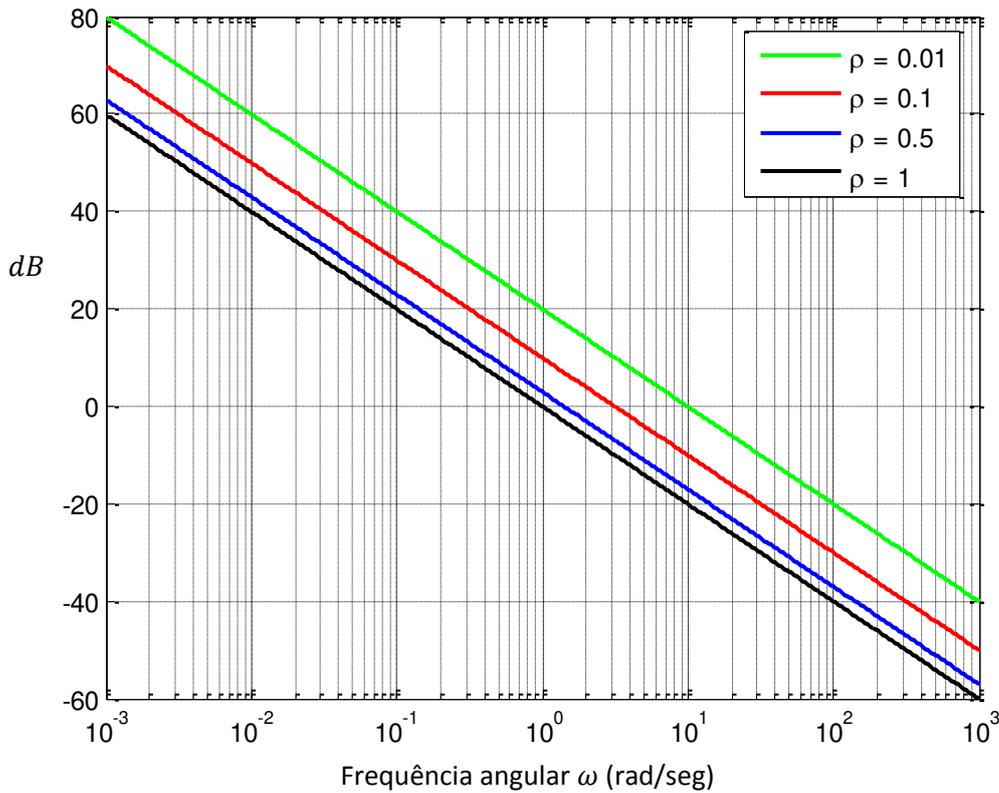


Figura 4.11: Relação inversamente proporcional entre  $\rho$  e  $\omega_{crossover}$ .

Neste projeto escolheu-se  $\rho = 0.5$ , o que implica em uma frequência de *crossover* de aproximadamente  $1,4 \text{ rad/seg}$ . As características dos ganhos principais da malha de referência escolhida são mostradas isoladamente na Figura 4.12.

Com a determinação dos parâmetros de  $\rho$  e  $\bar{H}$  da maneira acima descrita, então a Equação (4.25) resulta em

$$K_c = \begin{bmatrix} -0.0390 & -8.4289 & -0.0032 & 7.5402 & 277.0539 & 5.0672 & 1.2588 \\ -0.0180 & -11.4405 & 0.0600 & 11.0653 & 392.1048 & 4.9004 & 0.5850 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

que é a matriz que faltava na Equação (4.24). Assim, o regulador LQR está completamente determinado e pode-se então prosseguir para a próxima etapa, que é o projeto de um Filtro de Kalman.

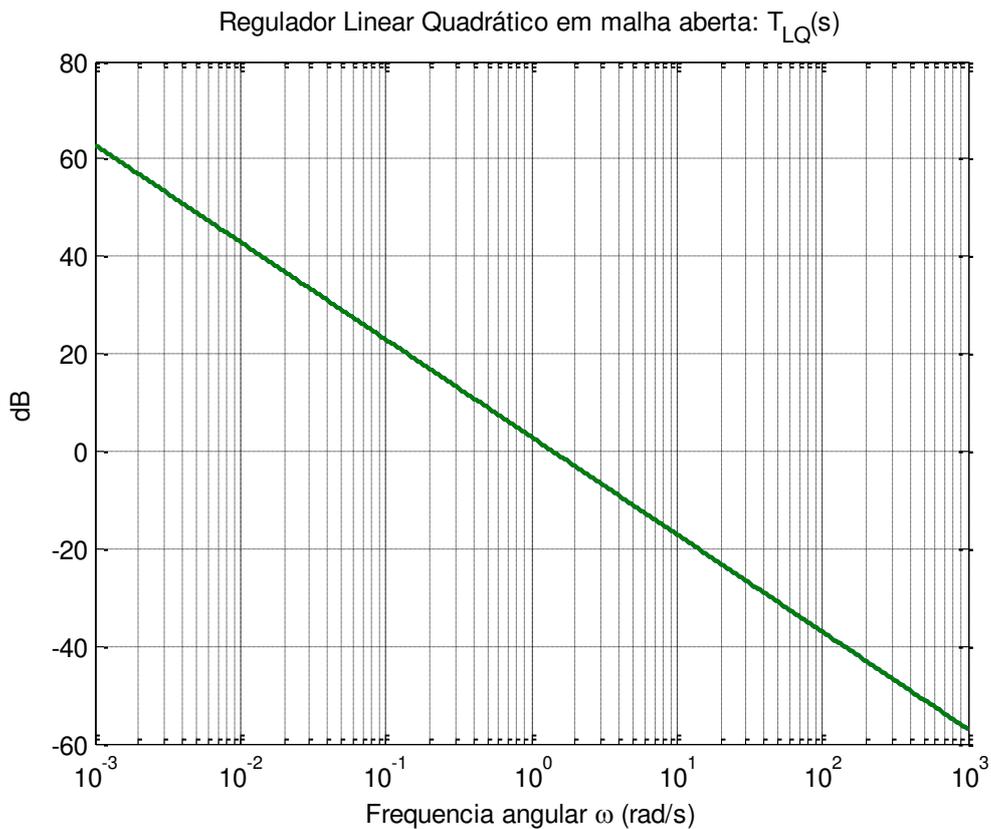


Figura 4.12: Ganhos Principais da Malha de referência.

#### 4.4.3. Projeto de um Filtro de Kalman

O passo final no desenvolvimento do controlador robusto do tipo LQG/LTR desejado é o projeto de um filtro de Kalman que, em conjunto com o regulador LQR já projetado, deve garantir a estabilidade e robustez do sistema controlado. Juntos, esses dois dispositivos constituem o referido controlador, que é denotado por  $K(s)$ .

Na etapa anterior, foi determinada uma malha de referência a qual o sistema controlado final  $K(s)\bar{G}_i(s)$  deve se assemelhar em termos de ganhos principais. Caso essa meta seja alcançada, será obtido um sistema estável, robusto e com alto grau de independência entre os seus diversos canais.

O procedimento necessário para o projeto do filtro de Kalman já foi descrito no Capítulo 2, porém será revisto para o sistema estudado, adaptando-se as notações quando necessário.

A matriz de transferência do filtro de Kalman é dada por

$$T_{KF}(s) = \bar{C}_i (sI - \bar{A}_i)^{-1} K_F, \quad (4.38)$$

onde  $K_F$  é a matriz de ganhos do filtro de Kalman, que é calculada por

$$K_F = \Sigma \bar{C}_i^T R_f^{-1}. \quad (4.39)$$

e  $\Sigma$  é a única matriz simétrica positiva definida que resolve a seguinte EAR

$$\bar{A}_i \Sigma + \Sigma \bar{A}_i^T - \Sigma \bar{C}_i^T R_f^{-1} \bar{C}_i \Sigma + Q_f = 0. \quad (4.40)$$

Outras equações necessárias para resolver (4.39) são

$$R_f = \mu I_2, \quad (4.41)$$

onde deve-se escolher  $\mu = 1$  neste projeto, e

$$Q_f = \bar{B}_i \bar{B}_i^T + q^2 \bar{B}_i \bar{B}_i^T \quad (4.42)$$

sendo  $q^2$  denominado de parâmetro de recuperação, uma vez que o seu valor influencia diretamente na eficácia com que  $K(s)\bar{G}_i(s)$  recupera a malha de referência de  $T_{LQ}(s)$  mostrada na Figura 4.12. Quanto maior o valor deste parâmetro, melhor a recuperação da malha de referência, porém o sinal de controle do sistema também pode atingir valores extremamente elevados, se não forem tomadas as devidas precauções na escolha deste valor. Neste trabalho, foi escolhido  $q^2 = 10^{16}$  que apesar de aparentemente ser elevado, torna-se adequado devido a outros fatores que serão abordados ainda neste Capítulo.

Após os devidos cálculos, a matriz de ganhos do filtro de Kalman projetado torna-se

$$K_F = \begin{bmatrix} 3.5800 & 1.0404 \\ -0.1843 & -0.0095 \\ -33.5469 & -19.2225 \\ -0.0128 & -0.0311 \\ -0.00006 & -0.000003 \\ 0.00006 & 0.000003 \\ 0.000003 & 0.00002 \end{bmatrix} \times 10^8. \quad (4.43)$$

Uma vez determinadas as matrizes de ganhos  $K_C$  e  $K_F$ , conclui-se o projeto do controlador LQG/LTR, e então resta apenas a sua implementação junto ao sistema.

A representação em espaço de estados do controlador é definida por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\bar{A}_i - \bar{B}_i K_C - K_F \bar{C}_i) \hat{x} - K_F y \\ u &= -K_C \hat{x}\end{aligned}\tag{4.44}$$

e a sua matriz de transferência é dada por

$$K(s) = K_C (sI - \bar{A}_i + \bar{B}_i K_C + K_F \bar{C}_i)^{-1} K_F .\tag{4.45}$$

Apenas para fins de verificação, este controlador desenvolvido foi testado com o uso do modelo reduzido, com o intuito de verificar se a malha de referência é realmente recuperada de forma satisfatória. Essa realização é definida pela seguinte tripla de matrizes:

$$\bar{A}_K = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i K_C - K_F \bar{C}_i & -K_F \bar{C}_i \\ \mathbf{0}_{7 \times 7} & \bar{A}_i \end{bmatrix},\tag{4.46a}$$

$$\bar{B}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{7 \times 2} \\ \bar{B}_i \end{bmatrix} e,\tag{4.46b}$$

$$\bar{C}_K = [K_C \quad \mathbf{0}_{2 \times 7}].\tag{4.46c}$$

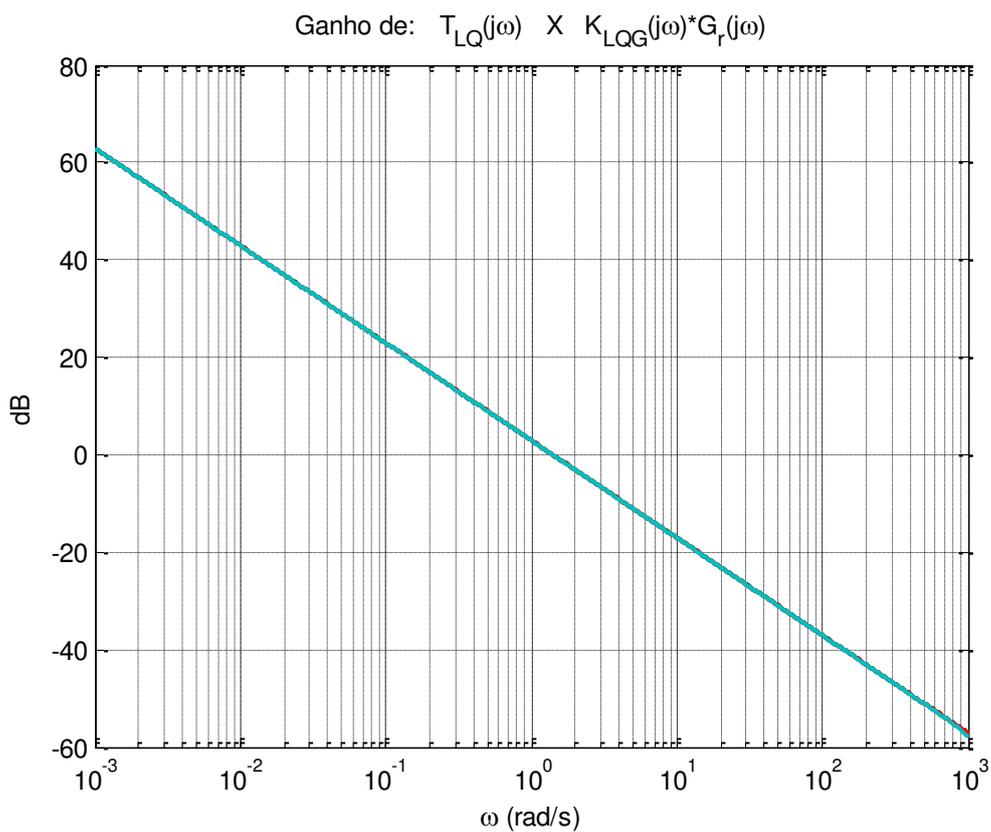


Figura 4.13: Ganhos principais de  $T_{LQ}(s)$  comparados com os de  $K(s)\bar{G}_i(s)$ .

A Figura 4.13 acima revela que houve um perfeito casamento de ganhos entre  $T_{LQ}(s)$  e  $K(S)\bar{G}_i(s)$  dentro da faixa de frequência mostrada, ou seja, a recuperação da malha de referência foi total, validando o projeto realizado. Contudo o controlador deve ser testado com o sistema original  $G_p(s)$ , e só então pode-se avaliá-lo de maneira definitiva.

#### 4.4.4. Implementação do Controlador Projetado com a Planta Original

Antes de integrar o controlador ao sistema  $G_p(s)$ , é necessário primeiramente adicionar a este sistema o compensador dinâmico de 1ª ordem projetado, além dos integradores às saídas da planta. Ou seja, todos os passos feitos com o sistema reduzido serão refeitos, com a diferença de que o pré-estabilizador e o controlador robusto já estão projetados, restando apenas implementá-los.

Na Seção 4.3 deste capítulo, a adição do compensador dinâmico de 1ª ordem ao sistema original já foi feita e este processo é descrito nas Equações (4.17)-(4.19) e os respectivos ganhos principais são apresentados na Figura 4.6.

A próxima etapa é adicionar integradores às saídas de  $G_c(s)$ . A seguinte representação em espaço de estados é referente a este acréscimo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_c & 0_{7 \times 2} \\ -C_c & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} u_i \\ y_i &= \begin{bmatrix} 0_{2 \times 7} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.47)$$

A matriz de transferência desta realização é dada por

$$G_i(s) = C_i(sI - A_i)^{-1} B_i \quad (4.48)$$

A Figura 4.14 apresenta uma comparação entre os ganhos principais do sistema original após a adição de integradores nas suas saídas, e os referidos ganhos quando o sistema é representado por seu modelo de ordem reduzida, mostrando novamente que a aproximação entre os modelos é muito boa.

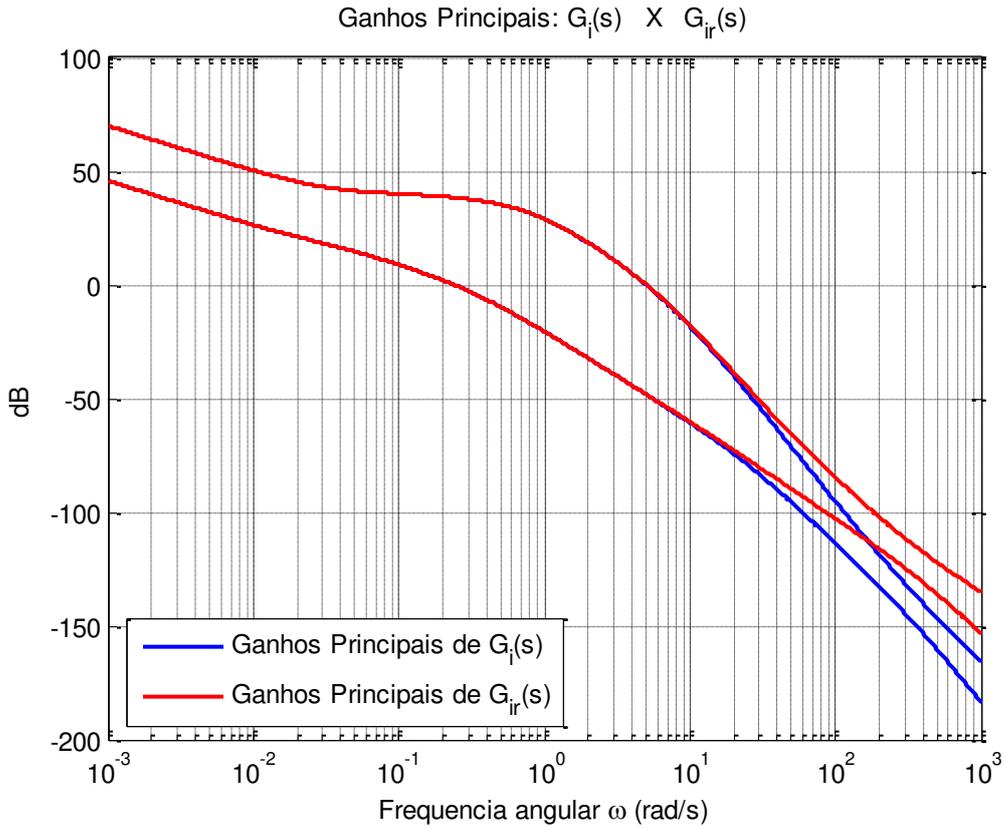


Figura 4.14: Comparação entre os ganhos de  $G_i(s)$  e  $\bar{G}_i(s)$ .

Quando o controlador robusto LQG/LTR descrito pelas Equações (4.44)-(4.45) é incluído no sistema, a matriz de transferência  $K(s)G_i(s)$  é representada pelas equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K x_K + B_K u + B_{REF} ref \\ u &= -C_U x_K \\ y &= C_K x_K \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde  $ref$  é o sinal de referência e as matrizes  $A_K$ ,  $B_K$  e  $C_K$  são aquelas que representam o sistema controlado em malha aberta e são calculados por

$$A_K = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{B}_i K_C - K_F \bar{C}_i & -K_F \bar{C}_i \\ 0_{9 \times 7} & A_i \end{bmatrix}, \quad (4.50a)$$

$$B_K = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 2} \\ B_i \end{bmatrix} e, \quad (4.50b)$$

$$C_K = [0_{2 \times 7} \quad C_c \quad 0_{2 \times 2}]. \quad (4.50c)$$

As matrizes  $B_{REF}$  e  $C_U$  são respectivamente a matriz de entrada dos sinais de referencia que atuam no sistema, e a matriz de saída dos sinais de controle, e são dadas por

$$B_{REF} = \begin{bmatrix} 0_{14 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$C_U = [K_C \quad 0_{2 \times 9}]. \quad (4.52)$$

A recuperação da malha de referência obtida por esse sistema é mostrada na Figura 4.15. Em comparação com as curvas apresentadas na Figura 4.13, percebe-se que a malha de referência não é recuperada com a mesma perfeição de antes, porém é notável a eficácia para a recuperação na faixa das baixas frequências, como é desejado.

Após a implementação do controlador robusto LQG/LTR de ordem reduzida à planta  $G_p(s)$ , conclui-se o projeto em si. Resta ainda fazer as últimas simulações permitindo assim a análise do desempenho do sistema controlado.

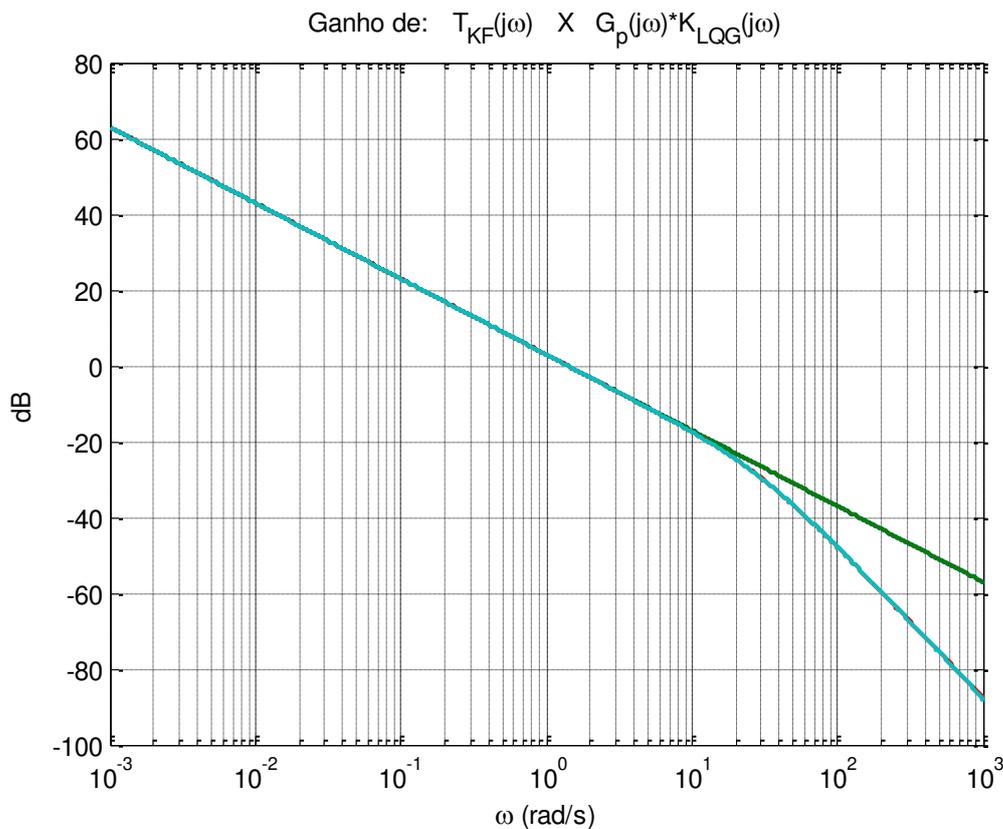


Figura 4.15: Ganhos principais de  $T_{LQ}(s)$  comparados com os de  $K(s)G_i(s)$ .

## 4.5 Análise de Estabilidade do Sistema Controlado

Durante o projeto de um controlador robusto, a questão da estabilidade do sistema controlado deve ter atenção especial. No Capítulo 2 foram analisadas algumas técnicas para a avaliação da estabilidade proporcionada pelo acréscimo do controlador à planta e tais métodos serão usados neste momento.

Um desses métodos é estabelecido pela Equação (2.14), que é adaptada para o caso analisado como

$$\bar{\sigma} \left\{ [I + K(s)G_i(s)]^{-1} K(s)G_i(s) \right\} < \frac{1}{L(s)} \quad (4.53)$$

A desigualdade acima mostra então que o ganho superior do termo à esquerda da equação não pode, para nenhum valor de frequência, se igualar ou ser maior que o inverso da curva das incertezas do sistema. A Figura 4.16 apresenta a comparação dessas duas curvas, comprovando-se que esta característica necessária para a estabilidade do sistema controlado é respeitada.

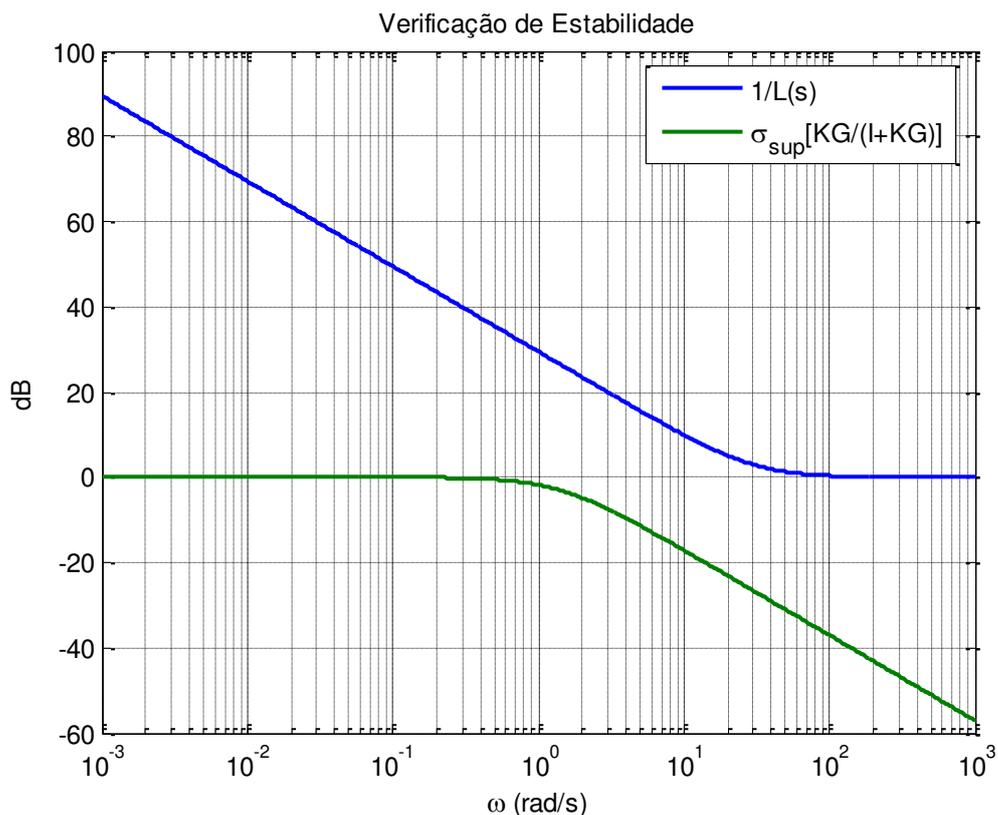


Figura 4.16: Teste de estabilidade do sistema controlado.

Outro teste necessário para se confirmar a robustez da estabilidade é verificar as margens de ganho e de fase do sistema controlado. Teoricamente, um sistema controlado por um controlador do tipo LQG/LTR garante margem de ganho tendendo ao infinito e margem de fase de  $\pm 60^\circ$ , porém na prática os valores podem ser bem menores.

Para o cálculo dessas margens são utilizadas as Equações (2.15) e (2.16), contudo é necessário obter o valor do parâmetro  $\alpha_0$  para calculá-las. Este valor é definido como o mínimo valor do ganho principal inferior da matriz  $I + K(s)G_i(s)$ , cujo gráfico é mostrado na Figura 4.17. A partir da análise desta curva e da Equação (2.18) verifica-se que

$$\alpha_0 = 0.9979. \quad (4.54)$$

Dessa forma é possível o cálculo das margens de ganho e de fase do sistema controlado. Os resultados são dados a seguir:

$$\begin{aligned} 0.5005 < MG < 479.9297 \\ -59.8622^\circ < MF < 59.8622^\circ \end{aligned} \quad (4.55)$$

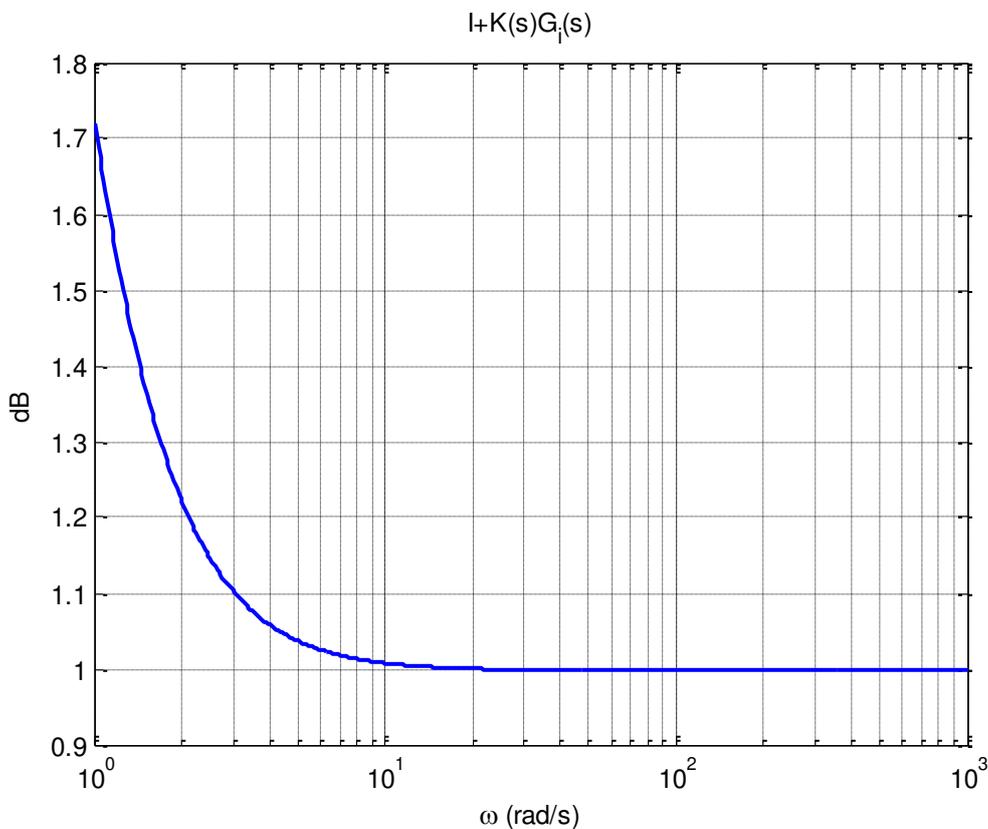


Figura 4.17: Ganho inferior de  $I + K(s)G_i(s)$ .

## 4.6 Análise do Desempenho do Sistema Controlado

O desempenho do sistema controlado pelo controlador de ordem reduzida projetado é analisado a seguir com o auxílio das Figuras 4.18, 4.19, 4.20 e 4.21.

As duas primeiras apresentam o comportamento dos sinais de saída do sistema após a aplicação de um sinal do tipo degrau unitário na primeira e na segunda referência do sistema, respectivamente. Nesses dois casos a outra referência – segunda e primeira, respectivamente, foram mantidas com valor nulo.

Analisando-se as curvas percebe-se que, nos dois casos, os sinais de saída  $y_1$  e  $y_2$  do sistema, atingem, em regime permanente, os seus respectivos valores de referência. Além disso, as duas saídas se mostram bem desacopladas, principalmente na primeira situação. Percebe-se um leve acoplamento transitório quando o sinal de referência não nulo é aplicado na segunda referência, porém, mesmo nesse caso, referido acoplamento é de magnitude tolerável e completamente amortecido em cerca de três segundos.

As respostas do sistema são razoavelmente rápidas e não apresentam comportamento oscilatório. No primeiro gráfico, relativo ao degrau na primeira referência, nota-se que a saída  $y_1$  converge para o seu valor de referência em aproximadamente 3.3 segundos, e não há efeito apreciável de acoplamento sobre  $y_2$ . No segundo gráfico, relativo ao degrau na segunda referência, observa-se que a saída  $y_2$  converge para o seu valor de referência em cerca de 2.3 segundos e que a saída  $y_1$  sofre um leve efeito de acoplamento, o qual é completamente amortecido em 3.0 segundos.

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram o comportamento dos sinais de controle que atuam no sistema, nos casos das duas situações analisadas anteriormente. Em ambos os casos, os sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  atuam intensamente logo após a aplicação dos sinais de referência, e convergem muito rapidamente para valores constantes de regime permanente. Em nenhum dos dois casos os sinais de controle atingem valores muito elevados, sendo que nas duas situações o sinal de controle  $u_2$  atua com maior intensidade que o sinal  $u_1$ , independentemente da referência aplicada.

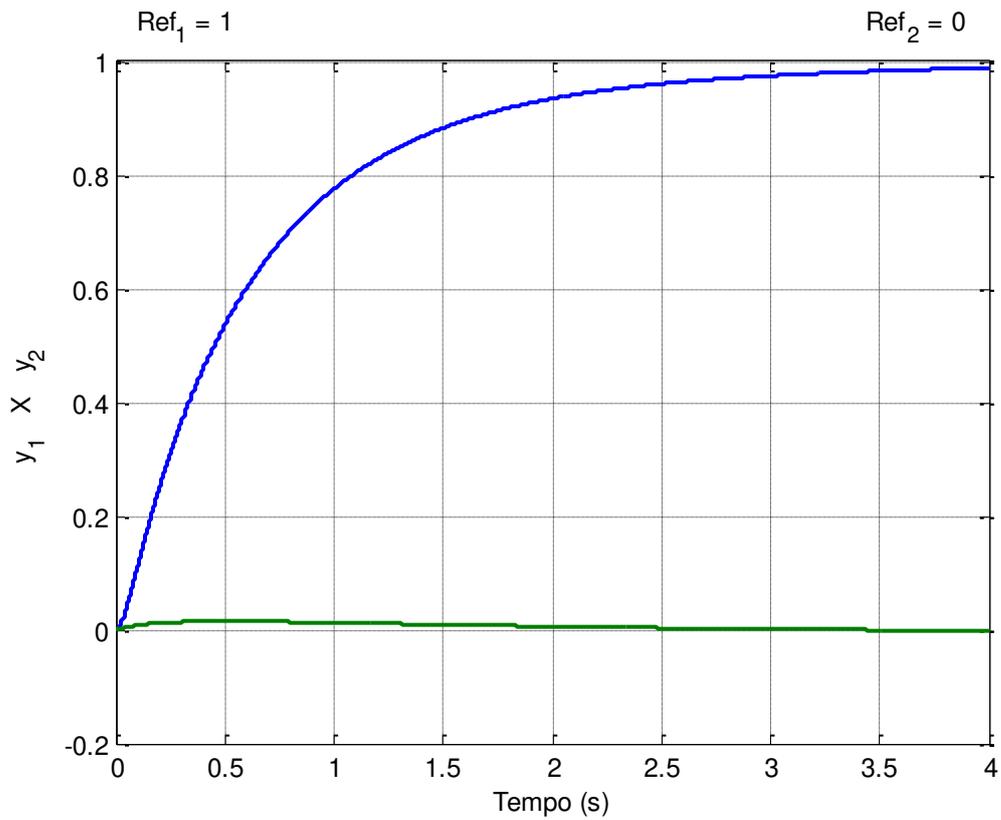


Figura 4.18: Saídas do sistema com controlador reduzido com estímulo de um sinal degrau unitário na primeira referência.

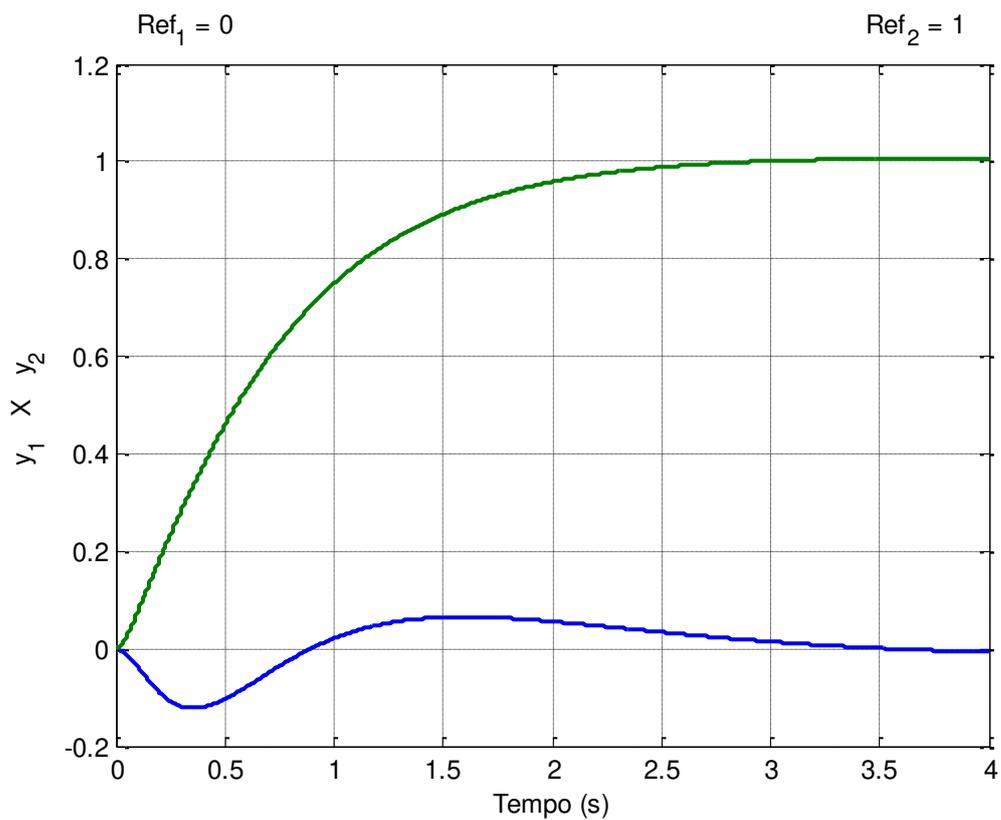


Figura 4.19: Saídas do sistema com controlador reduzido com estímulo de um sinal degrau unitário na segunda referência.

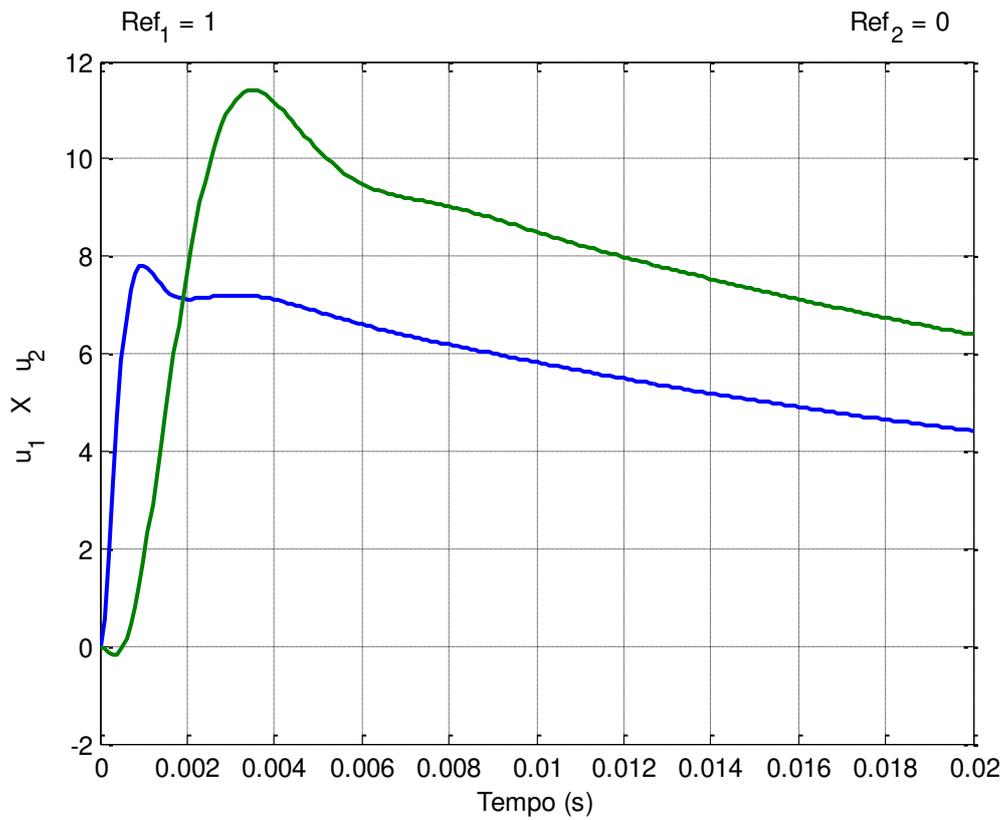


Figura 4.20: Sinais de controle do sistema com controlador reduzido com estímulo de um sinal degrau unitário na primeira referência.

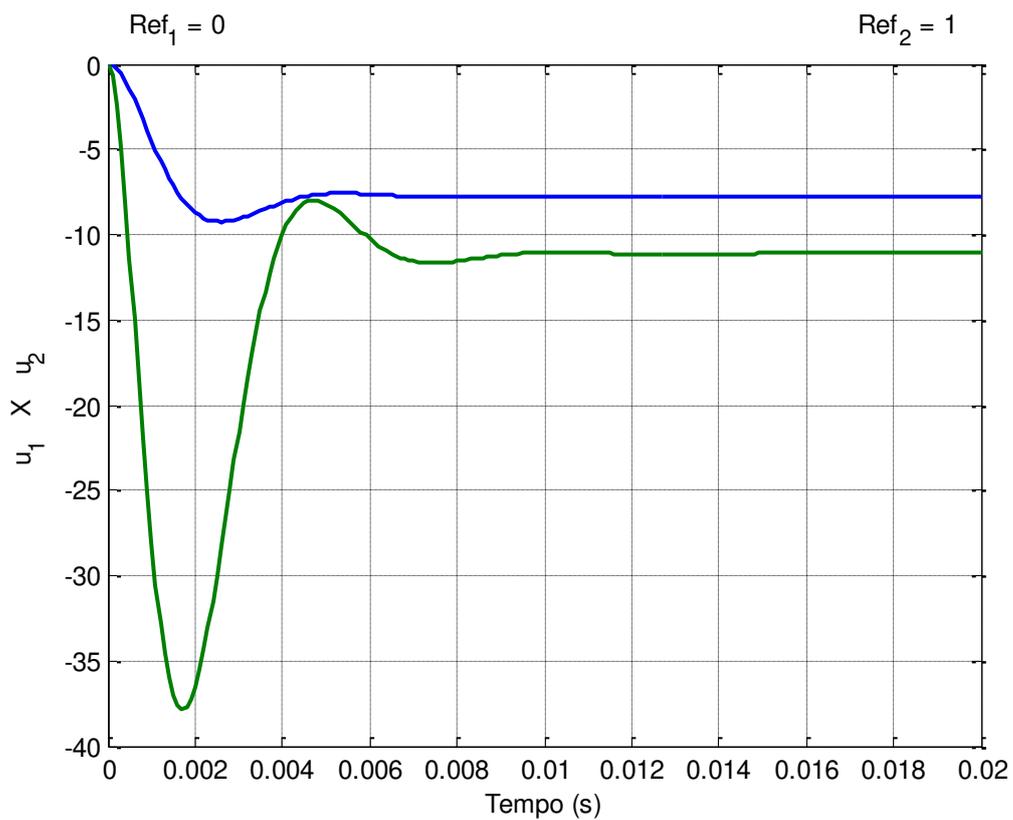


Figura 4.21: Sinais de controle do sistema com controlador reduzido com estímulo de um sinal degrau unitário na segunda referência.

Um aspecto importante para a análise das características do controlador projetado é a verificação e/ou checagem dos pólos e zeros de transmissão do sistema controlado, em malha aberta e em malha fechada. A Tabela 4.1 apresenta a localização dos zeros de transmissão da matriz de transferência  $K(s)G_i(s)$  do sistema controlado em malha aberta. O zero localizado em  $-0.0209$  é do próprio sistema, enquanto que o zero em  $-47.1611$  é resultante do acréscimo do compensador dinâmico que estabiliza o sistema. Todos os outros cinco zeros de transmissão são intrínsecos de  $K(s)$ , o controlador LQG/LTR projetado.

$-47.16109529040443$
$-7.99999996660301$
$-5.67566510375794$
$-0.68987833469047 + j0.24842837966287$
$-0.68987833469047 - j0.24842837966287$
$-0.25799052487347$
$-0.02092483091153$

Tabela 4.1: Zeros de transmissão do sistema controlado.

A Tabela 4.2 apresenta os pólos do sistema controlado, em malha aberta e em malha fechada. Comparando-se esses dois conjuntos de pólos, verifica-se que os pólos de malha aberta que coincidem com os zeros de transmissão do sistema (que são dados na Tabela 4.1) não sofrem deslocamentos quando a malha do sistema é fechada. Já os pólos de malha aberta não coincidentes com os zeros de transmissão, sofrem deslocamentos, maiores ou menores, quando a malha do sistema é fechada.

Os maiores deslocamentos ocorrem com os pólos de malha aberta situados em  $-30$ , ou seja, os pólos não dominantes do sistema que foram desprezados durante o processo de redução de ordem do modelo do sistema; e os pólos situados em  $0$ , correspondentes aos integradores adicionados ao sistema.

O controlador contribui com sete modos/pólos, sendo um deles coincidente com o zero de transmissão do sistema original e outro coincidente com o zero de transmissão adicionado pelo compensador dinâmico estabilizador. Devido ao alto valor de  $q^2$ , alguns modos/pólos do controlador estão localizados a uma grande distância do eixo imaginário.

Observa-se na Tabela 4.2 alguns dados que podem gerar certa confusão, notadamente os dois últimos modos em malha aberta, que correspondem aos integradores adicionados ao sistema, e assim sendo, deveriam localizar-se exatamente em 0. Porém, devido a erros de arredondamento numérico feitos pelo *software* que foi utilizado, eles apresentam valores apenas aproximados. Um desses pólos, inclusive, apresenta valor positivo, o que deixaria o sistema controlado em malha aberta instável. Esta característica não traz problemas para a simulação, pois ao se fechar a malha do sistema, esses pólos são afastados do eixo imaginário, em direção ao lado esquerdo, que é a região de estabilidade.

Malha Aberta	Malha Fechada
$(-2.92000728321844 + j2.92732216789216) \times 10^3$	$(-2.92001449136814 + j2.92732212840464) \times 10^3$
$(-2.92000728321844 - j2.92732216789216) \times 10^3$	$(-2.92001449136814 - j2.92732212840464) \times 10^3$
$-1.33784305480270 \times 10^3$	$-1.33787544745667 \times 10^3$
$(-0.66819459586626 + j1.14003729048985) \times 10^3$	$(-0.66821122448609 + j1.14004638976641) \times 10^3$
$(-0.66819459586626 - j1.14003729048985) \times 10^3$	$(-0.66821122448609 - j1.14004638976641) \times 10^3$
-47.16101287871997	-47.16101293153427
-8.00000000000406	-8.00000055817553
-0.02092483169709	-0.02092483169840
-5.67566504846878	-5.67566316474657
$-0.68987806398008 + j0.24842787272730$	$-0.68986876010989 + j0.24846694120758$
$-0.68987806398008 - j0.24842787272730$	$-0.68986876010989 + j0.24846694120758$
-0.25799107952443	-0.25798391186036
-30.00000000000000	-28.49724251088898
-30.00000000000000	-28.44643514932512
-0.00000000000186	-1.48810886388598
0.00000000000409	-1.48817433102083

Tabela 4.2: Pólos em malha aberta e em malha fechada correspondentes ao sistema controlado.

Um problema que pode ser originado das aproximações computacionais relacionadas à simulação é a não coincidência total ou exata da localização dos pólos (em malha fechada) e zeros de transmissão do sistema controlado. Este problema pode ser crítico, principalmente quando o sistema a ser controlado possui pólos ou zeros de transmissão muito próximos do eixo imaginário do plano- $s$ . O controlador projetado age de modo a cancelar/anular os efeitos desses pólos e zeros de transmissão do sistema, contudo o fato dessa anulação não ser total ou exata pode ser crucial, até porque os pólos e zeros de transmissão introduzidos pelo controlador acabam por também contribuir com o comportamento oscilatório do sistema controlado. A Tabela 4.3 revela justamente que não há essa anulação total dos pólos e zeros mais próximos da zona de instabilidade. No caso do sistema estudado nessa dissertação, esta característica pode explicar um comportamento indesejado do sistema mesmo depois de controlado, tornando-se necessária a escolha de valores relativamente altos de  $\rho$  e  $q^2$  para que isso não ocorra.

Zeros	Pólos em Malha Fechada
$-0.68987833469047 + j0.24842837966287$	$-0.68986876010989 + j0.24846694120758$
$-0.68987833469047 - j0.24842837966287$	$-0.68986876010989 + j0.24846694120758$
$-0.25799052487347$	$-0.25798391186036$
$-0.02092483091153$	$-0.02092483169840$

Tabela 4.3: Pólos em malha fechada e zeros de transmissão mais próximos da região de instabilidade do sistema controlado.

O sistema final, com a utilização do controlador projetado através do modelo reduzido do sistema  $G_p(s)$ , é de 16ª ordem, resultante de um sistema original de 6ª ordem, ao qual foi adicionado um compensador dinâmico estabilizador de 1ª ordem, e depois mais dois integradores e um controlador robusto do tipo LQG/LTR de 7ª ordem. Caso o projeto do controlador fosse feito sem a redução da ordem do modelo do sistema, o resultado final seria um sistema de 20ª ordem. Ou seja, houve uma redução de 20% na ordem de  $K(s)G_i(s)$ . A Tabela 4.4 faz a comparação da ordem utilizando os dois métodos.

	MODELO ORIGINAL	MODELO REDUZIDO
$G_p(s)$	6ª ordem	6ª ordem
$G_c(s)$	8ª ordem	7ª ordem
$G_i(s)$	10ª ordem	9ª ordem
$K(s)G_i(s)$	20ª ordem	16ª ordem
<b>CONTROLADOR</b>	14ª ordem	10ª ordem

Tabela 4.4: Comparação das ordens dos controladores com e sem redução de ordem do modelo.

Considerando-se que tudo aquilo que é adicionado ao sistema original faz parte do controlador, conclui-se que o resultado final do projeto, caso a simplificação do modelo não fosse aplicada, seria um controlador de 14ª ordem. Com a redução do modelo antes da realização do projeto, o controlador robusto desenvolvido torna-se de 10ª ordem. Obtém-se portanto, uma redução de cerca de 30% na ordem do controlador projetado

#### 4.7 Comentários Sobre a Escolha de Parâmetros no Projeto

Durante o projeto descrito neste Capítulo, houve momentos nos quais foi comentado que o projetista tinha uma certa liberdade para escolher certos parâmetros que influenciariam em menor ou maior grau sobre as características do sistema. De modo geral, um projetista teria a liberdade de escolher a localização do pólo introduzido pelo compensador dinâmico, assim como determinar onde seriam posicionadas as incertezas, calcular uma matriz  $\bar{H}$  e valor de  $\rho$  desejado durante o projeto do regulador LQR e, finalmente, um valor para o parâmetro de recuperação  $q^2$  durante o projeto do filtro de Kalman.

Em resumo, o pólo do compensador dinâmico é determinado de forma que ele não seja dominante, ou seja, deve ser negativo e distante do eixo imaginário, porém não distante a ponto de necessitar de esforços elevados do estabilizador, para alocá-lo dessa forma.

Quanto à localização das incertezas multiplicativas do sistema, já foram bastante discutidas na Seção 4.4 deste capítulo as razões principais para optar por representá-las na entrada da planta, forçando o posicionamento dos integradores às saídas do sistema.

No caso da determinação de matriz  $\bar{H}$  usada na determinação de  $K_C$ , não existe realmente uma escolha a ser feita, já que ela deve ser calculada de forma a equalizar os ganhos principais do sistema. Porém, essa equalização pode ser feita em faixas restritas do sistema: somente em baixas frequências, somente em altas frequências, nas baixas e nas altas frequências (não havendo equalização na faixa intermediária) ou em todas as frequências. Como as diferenças entre cada técnica se restringe basicamente ao embasamento matemático, não há grandes consequências quanto à implementação de qualquer uma delas, fazendo com que a última seja uma escolha fácil, salvo qualquer objetivo de projeto que force a escolha de qualquer outro tipo de equalização. A descrição matemática da matriz  $\bar{H}$  pode ser obtida a partir de [6].

O caso do parâmetro  $\rho$  é mais delicado que aparenta. Já foi comentado que o valor escolhido é inversamente proporcional à frequência de *crossover*, na relação dada na Equação (4.35). Já a Equação (4.36) revela que este parâmetro influencia diretamente os ganhos do sistema e, portanto, os sinais de saída do sistema. Inicialmente, a escolha deste parâmetro é feita de modo a proporcionar uma frequência de *crossover* adequada, mantendo ganhos altos nas baixas frequências e ganhos baixos nas altas frequências.

Porém, a Figura 4.8 informa que, em cascata com o sistema, estão as incertezas multiplicativas  $L(s)$ , representadas na Equação (4.20). Ou seja, assumindo que o controlador LQG/LTR esteja projetado adequadamente, o sistema controlado em malha aberta é representado por

$$K(s)\bar{G}_i(s) \times L(s) = \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) \frac{I_2}{s} \times \frac{30}{s+30} = \frac{30/\sqrt{\rho}}{s(s+30)} I_2 . \quad (4.56)$$

Em malha fechada, sua matriz de transferência torna-se então

$$H_{MF}(s) = \frac{30/\sqrt{\rho}}{s^2 + 30s + 30/\sqrt{\rho}} I_2 . \quad (4.57)$$

Comparando-se o coeficiente da matriz identidade que aparece na equação anterior com a função de transferência genérica de um sistema escalar de segunda ordem, que é dada por

$$H_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4.58)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural não-amortecida do sistema de segundo grau e  $\xi$  é o seu coeficiente de amortecimento, chega-se às seguintes relações:

$$\omega_n = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt[4]{\rho}}, \quad (4.59)$$

$$\xi = \frac{\sqrt{30}}{2} \sqrt[4]{\rho}. \quad (4.60)$$

Dado que um sistema SISO de segunda ordem tem comportamento oscilatório (ou sub-amortecido) quando  $\xi < 1$ , e não oscilatório quando  $\xi \geq 1$ , então, de acordo com a Equação (4.60), o sistema em malha fechada dado na Equação (4.57), não apresenta oscilações quando  $\rho \geq 0.0178$  aproximadamente, e torna-se oscilatório em caso contrário.

Pode-se também afirmar que, quanto maior o valor de  $\rho$ , as saídas do sistema controlado ficam mais lentas, menos oscilatórias e com menor presença de acoplamento, ao mesmo tempo em que os sinais de controle tornam-se mais suaves.

O parâmetro  $q^2$  é definido durante o projeto do filtro de Kalman e tem relação direta com os ganhos  $K_F$  do controlador. A elevação do valor deste parâmetro torna a recuperação da malha de referência mais eficaz, conforme observado na Subseção 4.4.4 deste trabalho.

Quanto maior o valor atribuído a  $q^2$ , mais amortecidas e desacopladas tornam-se as saídas do sistema, porém assim elas também se tornam mais lentas. Ainda mais, paga-se também o custo de um grande esforço dos sinais de controle.

O sistema analisado nesta dissertação possui a grande desvantagem de apresentar grande oscilação e acoplamento, mesmo com um controlador robusto LQG/LTR, se não forem escolhidos valores adequados para  $\rho$  e  $q^2$ . Esta alta oscilação justifica a escolha de valores relativamente altos para estes dois valores, em especial  $q^2$  cujo valor elevado

garante um melhor desempenho do sistema. O valor de  $\rho$  foi escolhido de modo a evitar sobressinais e suavizar os sinais de controle.

Para fins de simulação, análise e comparação, foi projetado um novo controlador tendo como única diferença para o projeto descrito anteriormente neste Capítulo o valor estipulado para  $\rho$ , sendo que nesse novo caso foi escolhido  $\rho = 0.005$ , ou seja, um valor bem menor do que 0.0178 e, sendo assim é esperado um comportamento oscilatório das saídas do sistema com a presença de sobressinais.

As Figuras 4.22 e 4.23 mostram as saídas com esta mudança. Quando a excitação é feita na primeira referência, é observado um *overshoot* de aproximadamente 18% sobre  $y_1$ , que converge após apenas 0.45 segundos, bem mais rapidamente que a curva mostrada na Figura 4.18. A saída  $y_2$  não sofre grande efeito de acoplamento.

Quando o sinal degrau unitário é aplicado na segunda referência, percebe-se um pequeno *overshoot* em  $y_2$  de 1.9%, chegando ao valor de referência em 0.45 segundos. O efeito do acoplamento sobre a saída  $y_1$  é mais brusco fazendo este sinal atingir valores relativamente elevados, porém este comportamento cessa em 2.2 segundos. Comparando com as curvas da Figura 4.19, notam-se saídas mais rápidas, contudo há maior presença de oscilações e acoplamento.

As Figuras 4.24 e 4.25 revelam que os sinais de controle passam a atuar com intensidade bem maior do que no caso do projeto anterior. Dessa forma esses sinais, que são de duração bem rápida, apresentam maiores semelhanças com sinais do tipo impulso, o que pode constituir uma dificuldade para a sua implementação, devido às suas variações extremamente bruscas para valores muito elevados.

Através das Equações (4.58), (4.59) e (4.60) é possível obter-se uma estimativa aproximada do posicionamento dos modos dominantes do sistema controlado, em função do novo valor escolhido para o parâmetro  $\rho$ . Este cálculo indica dois pares de pólos complexos localizados em  $-15 \pm j14.1161$ , o que explica a ocorrência do sobressinal. No caso anterior, do primeiro projeto, essas mesmas equações indicam dois pares de polos dominantes reais situados em  $-1.480$  e  $-28.5120$ , que de fato constam na Tabela 4.2, o que explica a não ocorrência de sobressinal. Este deslocamento é ilustrado na Figura 4.26.

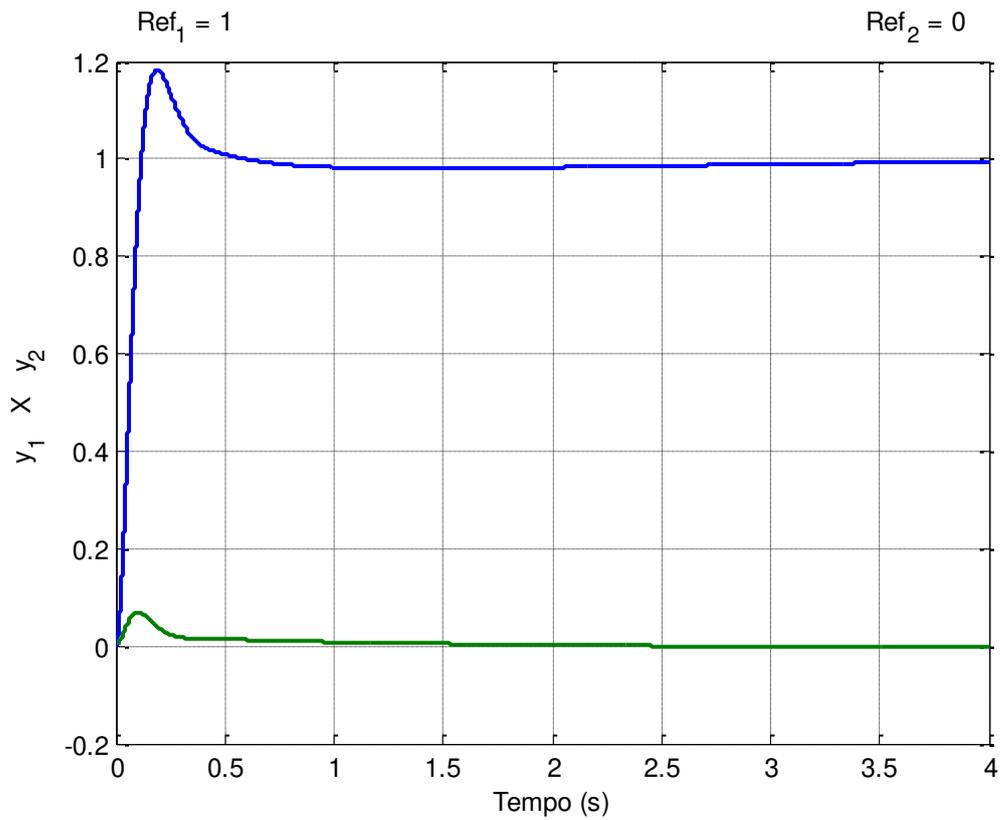


Figura 4.22: Saídas do sistema fazendo  $\rho = 0.005$  com estímulo de um sinal degrau unitário na primeira referência.

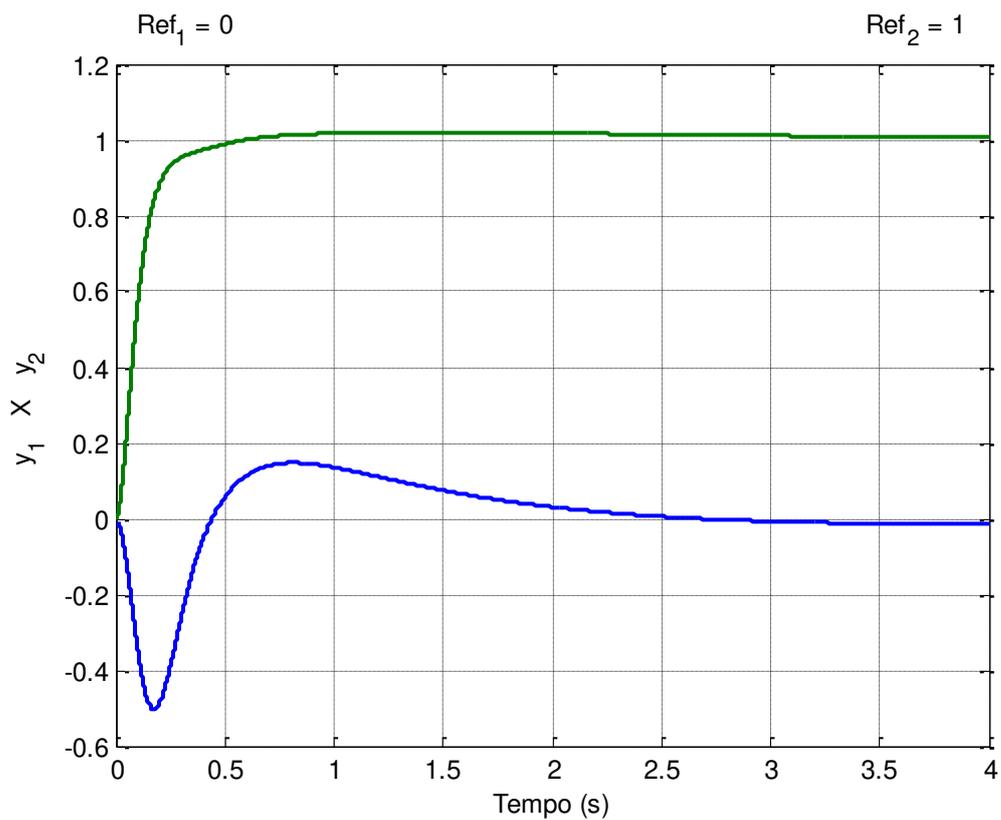


Figura 4.23: Saídas do sistema fazendo  $\rho = 0.005$  com estímulo de um sinal degrau unitário na segunda referência.

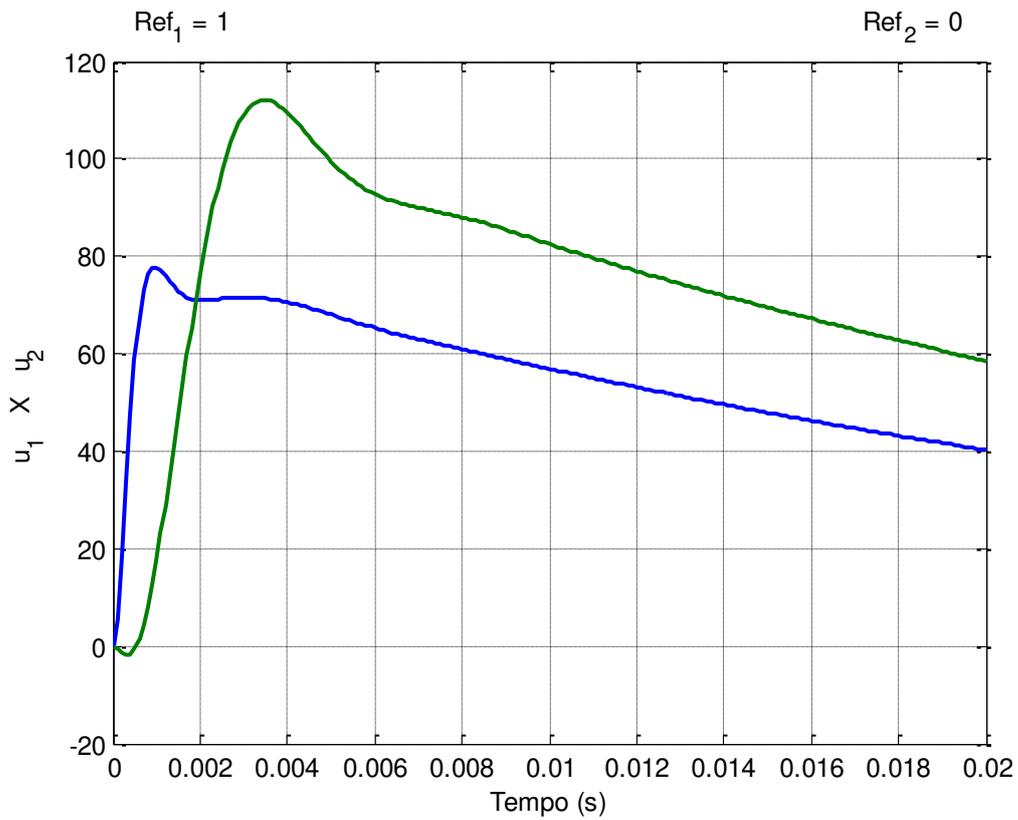


Figura 4.24: Sinais de controle fazendo  $\rho = 0.005$  com estímulo de um sinal degrau unitário na primeira referência.

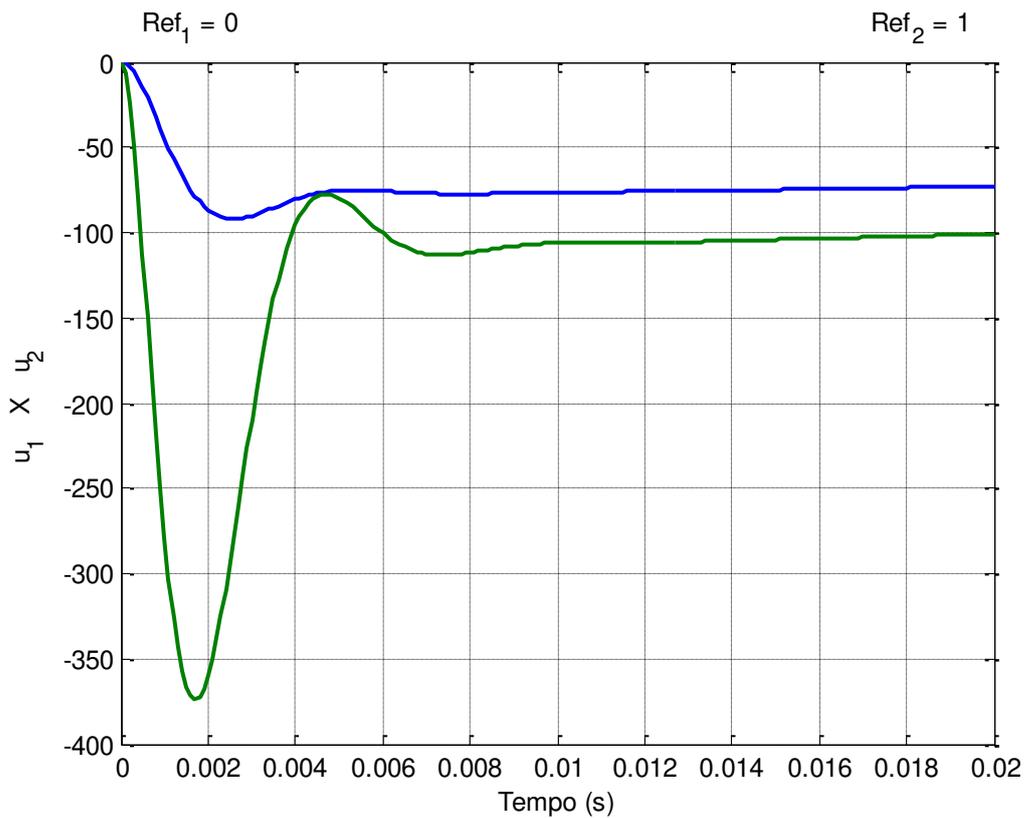


Figura 4.25: Sinais de controle fazendo  $\rho = 0.005$  com estímulo de um sinal degrau unitário na segunda referência.

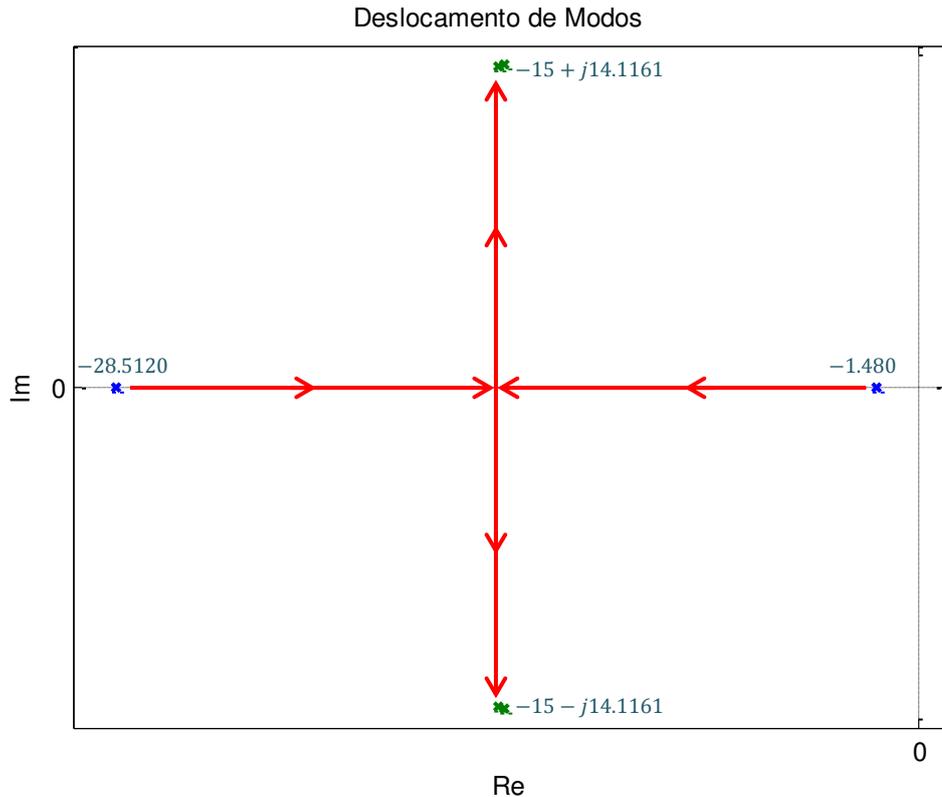


Figura 4.26: Deslocamento de pólos após alteração do valor de  $\rho$ .

## 4.8 Conclusões

Foi apresentado neste capítulo todas as etapas do projeto de um controlador robusto LQG/LTR, desde as características do sistema a ser trabalhado até as simulações finais.

A metodologia utilizada só pode ser aplicada a uma classe específica de sistema, na qual haja a presença de variáveis de estado desacopladas das outras, ou seja, que não sofram interferência das outras variáveis e que não causem efeitos diretos nas saídas do sistema, e estas variáveis devem estar associadas a modos não dominantes do sistema.

A redução do sistema mostrou-se bastante simples de ser efetuada, e resultou em um controlador com ordem cerca de 30% menor do que o obtido caso o projeto fosse feito de maneira padrão, sem redução.

Houve a necessidade de considerar as incertezas multiplicativas do sistema na entrada da planta, característica que força a inserção dos integradores necessários ao projeto nas saídas da planta. Dessa forma, o regulador LQR deve ser projetado antes do filtro de Kalman. Esse tipo de projeto, embora tão eficaz quanto o método dual, é pouco presente

na literatura, visto que, como normalmente não há uma regra para a representação das incertezas, essas são incluídas nas saídas do sistema.

O sistema controlado apresentou boas margens de ganho e de fase. O seu desempenho foi testado através de simulações nas quais sinais de referência do tipo degrau unitário foram aplicados. Os resultados mostraram um bom desempenho do sistema, dado que suas saídas foram precisas em regime permanente, rápidas no transitório e com mínimos efeitos de acoplamento. Já os sinais de controle apresentaram variações de grandes amplitudes no período transitório logo após a aplicação das entradas de referência, mas eles rapidamente convergiram para valores constantes com menores amplitudes.

As incertezas do sistema, neste caso, faz com que as saídas possam apresentar oscilações no transitório dependendo principalmente do valor do parâmetro  $\rho$ . Além disso, o sistema, mesmo com controlador, apresenta uma forte característica oscilatória justificando os valores relativamente altos escolhidos para  $\rho$  e  $q^2$  durante o projeto. Foram inclusive apresentados gráficos mostrando que a diminuição do valor de  $\rho$  causa oscilações no sistema.

Uma característica que pode acentuar esta dificuldade é o fato de não haver anulação completa dos pólos e zeros situados próximos ao eixo imaginário do plano- $s$ . Isto acontece devido principalmente a pequenos arredondamentos realizados no *software* que somados causam este problema.

## Capítulo 5: Conclusão

Esta dissertação teve como foco principal a realização do projeto de controladores robustos do tipo LQG/LTR de ordem reduzida. O objetivo principal foi evitar que o controlador, em conjunto com o sistema controlado, resultasse em um sistema com ordem muito elevada. Este objetivo foi alcançado através da simplificação do modelo do sistema a ser controlado mediante a redução prévia de sua ordem.

Importante ressaltar que o trabalho concentrou sua atenção sobre um tipo específico de sistemas, que são comumente encontrados na literatura associada com o controle de sistemas aeroespaciais, os quais possuem variáveis de estado que podem ser consideradas como desacopladas das demais variáveis do sistema, e que ao mesmo tempo também são associadas aos modos mais rápidos do sistema. Por outro lado, uma característica complicadora, e certamente perigosa do sistema considerado, é que ele é instável, o que torna a realização do projeto de seu controlador mais difícil e desafiador, pois surge a necessidade da estabilização prévia do sistema, antes do projeto do controlador.

Mostrou-se que, para este tipo especial de sistema multivariável, a simplificação com redução de ordem de seu modelo pode ser feita de forma imediata, e sem grandes necessidades de esforços matemáticos ou computacionais. Mostrou-se também que este método de simplificação não compromete, sequer minimamente, a representação das características do sistema nas baixas frequências, que é a faixa espectral de maior interesse na realização do projeto do controlador.

A opção de se fazer a redução de ordem do modelo do sistema antes mesmo do projeto do compensador dinâmico estabilizador mostrou-se acertada, pois dessa maneira obteve-se um estabilizador de menor ordem do que se teria sido obtido de outra forma. A redução de ordem do modelo não garante um estabilizador de ordem menor. Por isso, deve-se verificar os índices de controlabilidade e observabilidade dos modelos original e reduzido do sistema. Caso seja confirmada a possibilidade da diminuição de ordem, indica-se então que projeto do compensador/estabilizador seja feito com base no modelo reduzido do sistema — em caso contrário recomenda-se a utilização do modelo original.

Nesta dissertação a simplificação com redução de ordem feita no modelo original do sistema considerado foi tratada como uma incerteza do tipo multiplicativa não estruturada associada com o modelo reduzido. Por conta da forma que a simplificação foi feita, referidas incertezas tiveram de ser representadas na entrada do modelo reduzido. Essa situação constitui um caso que é pouco relatado na literatura, e por esse motivo sua abordagem nesta dissertação representa uma de suas contribuições principais.

A representação das incertezas multiplicativas na entrada do modelo reduzido do sistema tornou necessária a obtenção de uma nova fórmula (Equação 4.31) para a equalização dos ganhos principais do sistema controlado em malha aberta. Esta fórmula foi deduzida por dualidade a partir de uma outra fórmula existente na literatura [6], mas que só é aplicável quando as incertezas do sistema são representadas em sua saída.

Outra perspectiva apontada neste trabalho (Seção 4.7) é a possibilidade, mediante a escolha criteriosa dos parâmetros de projeto, de se controlar o comportamento transitório dos sinais de saída do sistema, diminuindo-se os seus tempos de subida ou então reduzindo-se os seus sobressinais.

O valor de  $10^{16}$  escolhido para o parâmetro de recuperação  $q^2$  no projeto apresentado foi relativamente alto com o intuito de causar um cancelamento mais preciso entre pólos de malha fechada do sistema controlado em malha fechada e seus zeros de transmissão, principalmente aqueles localizados mais próximos do eixo imaginário. Caso fossem escolhidos valores menores para esse parâmetro, o referido cancelamento seria menos preciso e/ou satisfatório e, como há vários pólos e zeros de transmissão perto do eixo imaginário, eles poderiam causar oscilações mal amortecidas nos sinais de saída do sistema.

As simulações apresentadas na Seção 4.6, onde se usou  $\rho = 0.5$ , mostram que as saídas do sistema com o controlador de ordem reduzida são rápidas, desacopladas e não oscilatórias no regime transitório; e precisas em regime permanente. Neste caso os sinais de controle mostraram-se muito rápidos e intensos nos primeiros instantes, mas convergindo para valores menores logo em seguida.

Os bons resultados mencionados acima, bem como a constatação de que o sistema controlado é totalmente estável, e apresenta margens de ganho e de fase bastante altas, confirmam o sucesso do projeto no seu principal objetivo: mostrar que a redução de ordem

do modelo da planta resulta em controladores robustos de ordem reduzida que são bem eficientes, justificando assim, a utilização do método apresentado.

Destaca-se também as simulações apresentadas na Seção 4.7, onde se considerou  $\rho = 0.005$ . Com este valor, as saídas (respostas) do sistema tornam-se subamortecidas e, portanto, mais rápidas (com menor tempo de subida). Neste caso, a principal desvantagem é a ocorrência de sobressinais (“*overshoots*”) altos, e possivelmente um maior acoplamento dos canais de entrada-saída do sistema. Os sinais de controle também tendem a ficar mais “impulsivos”, isto é, com grandes intensidades em um transitório mais curto, antes de se estabilizarem.

Com relação à ordem final do controlador projetado, constatou-se que ela fica reduzida em cerca de trinta por cento com relação à ordem do controlador que seria projetado caso o modelo do sistema não fosse simplificado (com redução de ordem).

Diante de tudo que foi analisado, conclui-se que a metodologia apresentada nesta dissertação constitui uma boa alternativa — fácil, sistemática e flexível, para a realização do projeto de controladores robustos do tipo LQG/LTR de ordem reduzida para sistemas multivariáveis que tenham as mesmas características específicas que foram destacadas neste trabalho.

Para todos os tópicos abordados, esta dissertação apresenta exemplos ilustrativos bem detalhados, que assim permitem a sua reconstituição e/ou verificação por parte de qualquer interessado.

No Apêndice consta a rotina básica que foi desenvolvida para a realização dos projetos apresentados e a simulação dos resultados.

Como sugestão para futuros trabalhos, que possam ampliar a extensão deste estudo e buscar novas aplicações, são sugeridas as seguintes possibilidades:

- análise de eficiência da técnica mostrada nesta dissertação para a redução de modelos de sistema em comparação com outros métodos mais avançados;
- realização de estudos para determinar as influências exatas dos parâmetros  $q^2$  sobre o comportamento transitório e  $\rho$  sobre os acoplamentos apresentados nas simulações finais deste sistema, determinando também valores ótimos destes parâmetros.

Esses tópicos são relevantes e podem se constituir como temas para estudos e/ou pesquisas que possam gerar artigos para congressos e simpósios.

## Referências Bibliográficas

- [1] Dorato, P., Tempo, R., Muscato, G., "Bibliography on Robust Control". *Automatica*, vol. 29, nº 1, pp. 201-213, 1993.
- [2] Tahk, M., Speyer, J. L., "A Parameter Robust LQG Design Synthesis with Applications to Control of Flexible Structures". *American Control Conference*, pp. 386-392, 1987.
- [3] Gomes, G. M. P., "Synthèse d'une Commande Robuste Lieé a la Qualité de L'indentification Bayesienne". Tese de Doutorado, École Nationale Superieure de l'Aeronautique et de l'Espace, Toulouse, 1991.
- [4] Siljak, D. D., "Parameter Space Methods for Robust Control Design: A Guided Tour". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-34, n.º 7, pp. 674-688, 1989.
- [5] Scherer, C., " $H_\infty$ -Control by State Feedback and Fast Algorithms for the Computation of Optimal  $H_\infty$ -Norms". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 35, nº 10, pp. 1090-1099, 1990.
- [6] Cruz, J. J., "Controle Robusto Multivariável". São Paulo, SP: Ed. USP – Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [7] Kailath, T., "Linear Systems". Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980.
- [8] Anderson, B.D.O., Moore, J.B., "Linear Optimal Control". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [9] Safonov, M.G., Athans, M., "Gain and Phase Margin of Multiloop LQG Regulators". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-22, nº 2, pp. 173-179, 1977.
- [10] Elbert, T. F., "Estimation and Control of Systems". New York, NY: Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1984.
- [11] Doyle, J. C., "Guaranteed Margins for LQG Regulators". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-23, nº 4, pp. 756-757, 1978.
- [12] Doyle, J. C. e Stein, G., "Robustness with Observers". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-24, nº 4, pp. 607-611, 1979.

- [13] Banda, S. S., Ridgely, D. B., "Introduction to Robust Multivariable Control". Relatório Técnico nº AFWAL-TR-85-3102, Flight Dynamic Laboratory, Patterson-Wright Air Force Base, EUA, 1986.
- [14] Genesio, R., Milanese, M., "A Note on the Derivation and Use of Reduced-Order Models". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-21, nº 2, pp. 118-122, 1976.
- [15] Davison, E. J., "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-11, pp. 93-101, 1966.
- [16] Aoki, M., "Control of Large Scale Dynamic Systems by Aggregation". *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-13, pp. 246-253, 1968.
- [17] Bosley, M. J., Lees, F. P., "A Survey of Simple Transfer Function Derivations from High Order State-Variable Models". *Automatica*, 8, pp. 765-775, 1974.
- [18] Shamash, Y., "Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and the Padé Approximation Technique". *Int. Journal of Control*, Vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975.
- [19] Moore, B. C., "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 17-31, 1981.
- [20] Goddard, P. J., "Performance-Preserving Controller Approximations". Tese de Doutorado, Trinity College, Cambridge, 1995.
- [21] Matos, E. J., "Projetos de Controladores Robustos do Tipo LQG/LTR para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico". Tese de Doutorado, UFPA, Belém-PA, 2008.
- [22] Chiang, R. Y. e Safonov, M. G., "Robust Control Toolbox". The MathWorks, Inc., 1996.
- [23] Matos, E. J., Souza, R. N. e Souza, J. R. B., "Projeto de Controlador Robusto para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico". *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática*, Salvador, BA, vol. I, pp. 2454-2459, 2006.
- [24] Fernandes, P. B. e Souza, J. R. B., "Projeto de Controladores Robustos de Ordem Reduzida para uma Certa Classe de Sistemas MIMO". *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Fortaleza, CE, 2013.

- [25] Lehtomaki, N.A., "Practical Robustness Measures in Multivariable Control System Analysis". Tese de PhD, MIT, Cambridge, MA, 1981.
- [26] Strang, G., "Linear Algebra and Its Applications". *Academic Press*, New York, NY, 1988.
- [27] Doyle, J. C., Stein, G., "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, nº 1, pp. 4-16, 1981.
- [28] Lehtomaki, N. A., Sandell, N. R., Athans, M., "Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-26, nº 1, pp. 75-93, 1981.
- [29] Brasch, F. M., Pearson, J. B., "Pole Placement Using Dynamic Compensator". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-15, nº 1, pp. 34-43, 1970.
- [30] Makino, M. S. T., "Projeto de Compensadores Dinâmicos para Posicionamento de Pólos". TCC, Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, UFPA, 1997.

## Apêndice A: Rotina Computacional para o Projeto

```
% Início da Rotina
% {A,B,C} - Realização do Sistema
% pd - Pólos Desejados
% indc - Índice de Controlabilidade
% indo - índice de Observabilidade
% n - Ordem do Sistema
% beta - Ordem do Compensador
%%
% Cálculo da dimensões das matrizes A,B,C
%
A=[-0.0226    -36.6170   -18.8970   -32.0900    3.2509   -0.7626 ;
    0.0001    -1.8997    0.9831   -0.0007   -0.1708   -0.0050 ;
    0.0123    11.7200   -2.6316    0.0009   -31.6040   22.3960 ;
    0.0        0.0        1.0        0.0        0.0        0.0 ;
    0.0        0.0        0.0        0.0        -30.00     0.0 ;
    0.0        0.0        0.0        0.0        0.0       -30.0]
%
B=[0.0    0.0  0.0  0.0  30.0  0.0;
   0.0    0.0  0.0  0.0  0.0  30.0]'
%
C=[0 1 0 0 0 0;
   0 0 0 1 0 0]
%
D=[0 0; 0 0]
%
eig(A)
pause
%
% Redução da ordem do sistema através da 'eliminação' de x5 e x6
%
A11=A(1:4,1:4);
A12=A(1:4,5:6);
C1=C(:,1:4);
%
Aor=A11
Bor=A12
Cor=C1
Dor=D
pause
%
% Comparação dos ganhos de G(s) e Gor(s)
%
w=logspace(-3,3,1000);
sv=sigma(A,B,C,D,w);
svsdb=20*log10(sv(1,:));
svidb=20*log10(sv(2,:));
semilogx(w,svsdb,'blue',w,svidb,'blue','linewidth',1.5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Ganhos Principais de G_p(s)')
pause
%
svor=sigma(Aor,Bor,Cor,Dor,w);
svorsdb=20*log10(svor(1,:));
svoridb=20*log10(svor(2,:));
```

```

semilogx(w,svsdb,'b',w,svorsdb,'r',w,svidb,'b',w,svoridb,'r','linewidth',1.
5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Ganhos Principais: G_p(s) X G_r(s)')
legend('Ganhos Principais de G_p(s)', 'Ganhos Principais de
G_r(s)', 'Location', 'Southwest')
pause
%
% Início do Projeto de Compensador Dinâmico
%
xx=size(Aor);
n=xx(1);
xx=size(Bor);
r=xx(2);
xx=size(Cor);
m=xx(1);
polos=eig(Aor)
pause
%
% Cálculo dos índices de controlabilidade e de observabilidade
%
CC=obsv(Aor,Cor);
xx=rank(CC);
if xx<n,
    disp('A realização não é observável')
    disp('Tecle <ctrl+c> para sair do programa')
    pause
else
    CC=Cor;
    for i=1:n-1,
        CC=[CC;Cor*(Aor^i)];
        xx=rank(CC);
        if xx==n,
            indo=i+1;
            break;
        end
    end
end
end
%
CC=ctrb(Aor,Bor);
xx=rank(CC);
if xx<n,
    disp('A realização não é controlável')
    disp('Tecle <ctrl> para sair do programa')
    pause
else
    CC=Bor;
    for i=1:n-1,
        CC=[CC (Aor^i)*Bor];
        xx=rank(CC);
        if xx==n,
            indc=i+1;
            break;
        end
    end
end
end
%
% Cálculo da ordem do Controlador
%
beta=min(indc-1,indo-1);

```

```

disp('Ordem do Controlador:');
beta
np=0;
for i=1:n
if real(polos(i))>=0
np=np+1;
end
end
%
nbeta=n+beta;
disp('Tecle <enter> para continuar')
pause
%
%   Entrada dos pólos desejados
%
for i=1:n;
    if real(polos(i))<0
        pd(i)=polos(i);
    else
        pd(i)=-2*real(polos(i))+polos(i);
    end;
end
%
for i=(n+1):nbeta
    pd(i)=input('Entre com um/outro pólo desejado:');
end;
%
%   Formação do polinômio característico
%
P=1;
for i=1:nbeta;...
    P=conv(P,[1 -pd(i)]);...
end;
disp('Polinômio característico desejado:')
P
alfa=poly(Aor);
%
%   Formação da matriz booleana cujas colunas darão origem ao vetor "etat"
%   Obs.: "etat" é um vetor formado por elementos booleanos(0's e 1's) onde
%   os 1's
%   correspondem às linhas da matriz C, Combinadas linearmente para formar
%   gt.
%
tabela=[];
tamanho=2^m;
for i=1:m,
    xx=zeros(1,2^(i-1));
    yy=ones(1,2^(i-1));
    bloco=[xx yy];
    linha=[];
    while length(linha)<tamanho,
        linha=[linha bloco];
    end
    tabela(i,:)=linha;
end
%
%   Determinação de "etat"
%
tabela=tabela';
for i=2:2^m,
    etat=[];

```

```

    etat=tabela(i,:);
    gt=etat*Cor;
    if rank(observ(Aor,gt))==n,
        break;
    end
end
tabela=[];
%
if(i==2^m) & (rank(observ(Aor,gt))~=n),
    disp('Não foi possível determinar gt tal que rank(observ(A,gt)=n)')
    disp('')
    disp('Tecle <ctrl+c> para finalizar a execução')
    pause
end
%
%   Formação da matriz L
%
ll=[];
for i=1:n,
    ll=[ll [zeros(size([1:i-1])) alfa(1:n-i+1)]];
end
%
%   Formação da matriz [gt*bor;gt*Aorbor;gtAor^2bor;...;gtAor^(n-1)bor]
%
cc=[];
for i=0:n-1,
    cc=[cc; gt*Aor^i*bor];
end
L=ll*cc;
ll=[];
cc=[];
%
%   Formação da matriz Y
%
Y=[];
for i=1:n,
    Y(i)=P(i+1)-alfa(i+1);
end
%
for i=(n+2):(n+beta+1),
    Y(i-1)=P(i);
end
Y=Y';
%
%   Montagem da matriz M
%
M=[];
for i=1:beta;
    M=[M [zeros(size([1:i-1])) alfa zeros(size([1:beta-i]))]];
end
for i=1:(beta+1),
    M=[M [zeros((beta-i+1),r); L; zeros(i-1,r)]];
end
%
%   Formação da matriz Q: MX = Y
%
Q=[M Y];
[R,jb]=rref(Q);
X=[];
if length(jb)~=(beta+r*(beta+1)),
    q=[];

```

```

for i=(length(jb)+1):(beta+r*(beta+1)),
    q=[q R(:,i)];
end
for i=(length(jb)+1):(beta+r*(beta+1)),
    X(i)=1;
end
Xq=[];
for i=1:(beta+r*(beta+1)-length(jb)),
    Xq(i)=1;
end
end
%
w=[];
if length(jb)~= (beta+r*(beta+1)),
    w=R(:,beta+r*(beta+1)+1)-q*Xq';
else
    w=R(:,beta+r*(beta+1)+1);
end
for i=1:length(jb),
    X(i)=w(i);
end
X=X';
%
%   Formação da matriz K0
%
K0=[];
K0=[[-X(1:beta)]';[eye(beta-1) zeros(beta-1,1)]];
%
%   Formação dos (beta+1) blocos de comprimento r
%
tam=beta;
bloco=[];
for i=1:(beta+1);
    bloco=[X(tam+1:tam+r) bloco];
    tam=tam+r;
end
H=[];
for j=1:r,
    hj=-[bloco(j,:)]'-(-bloco(j,1))*[0;X(1:beta)];
    H=[H hj];
end
K2=[];
for j=1:r,
    K2(j,:)=[H(1,j)*etat];
end
K3=[];
for j=1:r,
    K3(j,:)=[H(2:beta+1,j)]';
end
Ka=[K2 K3];
K1=[1 zeros(1,beta-1)]'*etat;
Kb=[K1 K0];
%
%   Realização do controlador
%
K=[Ka;Kb];
F=K0;
G=K1;
J=K2;
H=K3;
%

```

```

F=real(F);
G=real(G);
J=real(J);
H=real(H);
pause
%
%   Sistema em malha fechada
%
Acd=[Aor+Bor*J*Cor Bor*H;G*Cor F]
Bcd=[Bor;zeros(beta,r)]
Ccd=[Cor zeros(m,beta)]
Dcd=D
%
disp('Tecler <enter> para continuar')
pause
%
%   Autovalores do sistema em malha fechada
%
disp('')
disp('Os autovalores do sistema em malha fechada são:')
eig(Acd)
disp('Tecler <enter> para continuar')
pause
disp('As matrizes da realização do compensador são:')
F
G
H
J
pause
%
%   Planta original com o CD(s) calculado
%
Aa=[Acd Bcd; 0*Ccd -30*eye(2)]
Ba=[0*Bcd; 30*eye(2)]
Ca=[Ccd 0*eye(2)]
Da=D
pause
eig(Aa)
tzero(Aa,Ba,Ca,Da)
%

%
%   Comparação dos ganhos do sistemas reduzido e original
%           após a adição do CD(s)
%
w=logspace(-3,3,1000);
svcd=sigma(Acd,Bcd,Ccd,Dcd,w);
svcdsdb=20*log10(svcd(1,:));
svcdidb=20*log10(svcd(2,:));
sva=sigma(Aa,Ba,Ca,Da,w);
svasdb=20*log10(sva(1,:));
svaidb=20*log10(sva(2,:));
semilogx(w,svasdb,'b',w,svcdsdb,'r',w,svaidb,'b',w,svcdidb,'r','linewidth',
1.5),grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Ganhos Principais: G_c(s) X G_c_r(s)')
legend('Ganhos Principais de G_c(s)', 'Ganhos Principais de
G_c_r(s)', 'Location', 'Southwest')
pause
%
```

```

Ar=Aa(1:5,1:5)
Br=Aa(1:5,6:7)
Cr=Ca(:,1:5)
Dr=Da
%
%
%   Adição dos integradores
%
Ai=[Ar 0*Br; -Cr 0*eye(2)];
Bi=[Br; 0*eye(2)];
Ci=[0*Cr eye(2)];
Di=Dr;
%
svint=sigma(Ai,Bi,Ci,Di,w);
svint_sdb=20*log10(svint(1,:));
svint_idb=20*log10(svint(2,:));
%
semilogx(w,svint_sdb,w,svint_idb,'linewidth',1.5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Diagrama de Bode do Sistema com adição de dois integradores:
Gr(s)*I2/s')
pause
%
%   Calculo da matriz H para a equalização
%   dos ganhos em TODAS as frequencias
%
%   Calculo de TROL(s) = H*(sI-A)-1*B
%
H2_ALLF=-inv(Cr*inv(Ar)*Br);
H1_ALLF=H2_ALLF*Cr*inv(Ar);
H_ALLF=[H1_ALLF H2_ALLF];
%
svTROL_ALLF=sigma(Ai,Bi,H_ALLF,Di,w);
svTROLsdb_ALLF=20*log10(svTROL_ALLF(1,:));
svTROLidb_ALLF=20*log10(svTROL_ALLF(2,:));
%
semilogx(w,svTROLsdb_ALLF,w,svTROLidb_ALLF,'linewidth',1.5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Equalização de Ganhos em Todas as Frequencias (7 ordem)')
pause
%
%   Cálculo de Kc / e / TLQ(s)=Kc*(sI-A)-1*B
%
Qc=H_ALLF'*H_ALLF;
ro=input('Entre com o valor de ro ==> ') %Valor usado ro=0.5
Rc=ro*eye(2);
Kc=lqr(Ai,Bi,real(Qc),Rc);
%
tkc=sigma(Ai,Bi,Kc,Di,w);
tkcsdb=20*log10(tkc(1,:));
tkcidb=20*log10(tkc(2,:));
%
semilogx(w,tkcsdb,w,tkcidb,'linewidth',1.5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Regulador Linear Quadrático em malha aberta: TLQ(s) de 7 ordem')
pause
%
%   Calculo de Kf

```

```

%
rf=eye(2);
q2=input('Entre com o valor de q²: ') %Valor usado q2=10^16;
qf=Bi*Bi'+q2*Bi*Bi';
Kf=lqr(Ai',Ci',qf,rf)';
%
% Sistema em malha aberta: K(s)G(s)
%
Akg=[Ai-Bi*Kc-Kf*Ci Kf*Ci;0*eye(7) Ai];
Bkg=[0*Kf; Bi];
Ckg=[Kc 0*Ci];
Dkg=Di;
%
svKG=sigma(Akg,Bkg,Ckg,Dkg,w);
svdbKG=20*log10(svKG);
semilogx(w,tkcsdb,w,tkcidb,w,svdbKG,'linewidth',1.5),grid
xlabel('\omega (rad/s)'), ylabel('dB')
title('Ganho de: TKF(jw) X Gr(jw)*KLQG(jw)')
pause
%
% Verificação da estabilidade: teste de KG/(I+KG) <= 1/L(w)
%
lganho=w./sqrt((w.^2)+(30^2));
sv_incerteza=20*log10(1./lganho);
SV=sigma(Akg-Bkg*Ckg,Bkg,Ckg,Dkg,w);
SVsup=20*log10((SV(1,:)));
semilogx(w,sv_incerteza,w,SVsup,'linewidth',1.5),grid
pause
%
svKGe = sigma (Akg,Bkg,Ckg,Dkg,w,2);
KGi = svKGe(2,:);
alfa0 = min(KGi);
MG = 1/(1-alfa0)
MFemgraus = 2*asin(alfa0/2)*180/pi
pause
%
% Pólos e zeros do sistema em malha aberta
%
polo_KG_aberto=eig(Akg);
zero_KG_aberto=tzero(Akg,Bkg,Ckg,Dkg);
%
% Sistema em malha fechada
%
Acl = Akg-Bkg*Ckg;
Bcl = Bkg;
Ccl = Ckg;
Dcl = Dkg;
%
Bref=[0*Bi; 0*Br; eye(2)];
Cx=[0*Ci Cr 0*eye(2)];
%
polo_KG_fechado = eig(Acl);
display('Zeros de transmissão do sistema')
zeeros = tzero(Acl,Bcl,Ccl,Dcl)
pause
%
display('Pólos em malha aberta / Pólos em malha fechada')
[polo_KG_aberto polo_KG_fechado]
%
% Adição de integradores ao sistema original
%

```

```

Ai9=[Aa 0*Ba; -Ca 0*eye(2)];
Bi9=[Ba; 0*eye(2)];
Ci9=[0*Ca eye(2)];
Di9=Da;
%
svint9=sigma(Ai9,Bi9,Ci9,Di9,w);
svint9_sdb=20*log10(svint9(1,:));
svint9_idb=20*log10(svint9(2,:));
%
semilogx(w,svint9_sdb,w,svint9_idb,'linewidth',1.5), grid
xlabel('Frequencia angular \omega (rad/s)')
ylabel('dB')
title('Diagrama de Bode do Sistema com adiçao de dois integradores:
Gp(s)*I2/s')
pause
%
% Sistema K(s)*I2(s)*Gi(s)
%
Akga=[Ai-Bi*Kc-Kf*Ci Kf*Ci9;0*Bi9*Kc Ai9];
Bkga=[0*Kf;Bi9];
Ckga=[Kc 0*Ci9];
Dkga=Di;
%
svKGa=sigma(Akga,Bkga,Ckga,Dkga,w);
svdbKGa=20*log10(svKGa);
semilogx(w,tkcsdb,w,tkcidb,w,svdbKGa,'linewidth',1.5),grid
xlabel('\omega (rad/s)'), ylabel('dB')
title('Ganho de: T_K_F(j\omega) X G_p(j\omega)*K_L_Q_G(j\omega)')
pause
%
% Cálculo de MG e MF
%
lganho=w./sqrt((w.^2)+(30^2));
sva_incerteza=20*log10(1./lganho);
SVa=sigma(Akga-Bkga*Ckga,Bkga,Ckga,Dkga,w);
SVasup=20*log10((SV(1,:)));
semilogx(w,sv_incerteza,w,SVsup,'linewidth',1.5),grid
xlabel('\omega (rad/s)'), ylabel('dB')
title('Verificação de Estabilidade')
pause
%
% Cálculo de MG e MF
%
svKGea = sigma (Akga,Bkga,Ckga,Dkga,w,2);
KGia = svKGea(2,:);
alfaa0 = min(KGia);
MGa = 1/(1-alfaa0)
MFaemgraus = 2*asin(alfaa0/2)*180/pi
pause
%
% Análise de pólos e zeros
%
polo_KGa_aberto=eig(Akga);
zero_KGa_aberto=tzero(Akga,Bkga,Ckga,Dkga);
%
Acla = Akga-Bkga*Ckga;
Bcla = Bkga;
Ccla = Ckga;
Dcla = Dkga;
%
Bref2=[0*Bi; 0*Ba; eye(2)];

```

```

Cx2=[0*Ci Ca 0*eye(2)];
%
polo_KGa_fechado = eig(Acla);
display('Zeros de transmissão do sistema')
zeerosa = tzero(Acla,Bcla,Ccla,Dcla)
pause
%
display('Pólos em malha aberta / Pólos em malha fechada')
[polo_KGa_aberto polo_KGa_fechado]
%
%   Sinais de Saída e de Controle do Sistema Controlado
%   Ref-1 = 1           Ref-2 = 0
%
ya=step(Acla,Bref2,Cx2,Dcla,1,t);
plot(t,ya(:,1),t,ya(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('y_1 X y_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
ua = step(Acla,Bref2,Ccla,Dcla,1,t2);
plot(t2,ua(:,1),t2,ua(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('u_1 X u_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
uat = step(Acla,Bref2,Ccla,Dcla,1,t2t);
plot(t2t,uat(:,1),t2t,uat(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('u_1 X u_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
%   Sinais de Saída e de Controle do Sistema Controlado
%   Ref-1 = 0           Ref-2 = 1
%
ya2=step(Acla,Bref2,Cx2,Dcla,2,t);
plot(t,ya2(:,1),t,ya2(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('y_1 X y_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
ua2=step(Acla,Bref2,Ccla,Dcla,2,t2);
plot(t2,ua2(:,1),t2,ua2(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('u_1 X u_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
ua2t=step(Acla,Bref2,Ccla,Dcla,2,t2t);
plot(t2t,ua2t(:,1),t2t,ua2t(:,2),'linewidth',1.5),grid
xlabel('Tempo (s)');ylabel('u_1 X u_2');
title('Ref_1 = 1
Ref_2 = 0')
pause
%
display('FIM DO SCRIPT')

```