

# Uso de la Transformada Curvelet en el filtrado de mapas de fase.

Nivia Escalante, Jesús Villa, Ismael De la Rosa y Osvaldo Gutiérrez-Mata  
Doctorado en Ciencias de la Ingeniería,  
Unidad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma de Zacatecas,  
Av. Ramón López Velarde #801, C.P. 98000, Zacatecas, México.

4 de Septiembre de 2012

## Resumen

Se presenta una nueva metodología de filtrado de mapas de fase utilizando la Transformada Curvelet. El desenvolvimiento de fase es requerido para construir un mapa de fase continuo a partir de un mapa de fase envuelto en áreas como la interferometría óptica, la Interferometría de Radar de Apertura Sintética y la Resonancia Magnética. Sin embargo, al momento de la adquisición de la imagen la presencia de ruido es inevitable. El proceso de la eliminación de ruido se puede convertir en una tarea difícil de realizar y se requiere de un filtrado para tratar de eliminar la mayor cantidad de información no deseada. La principal ventaja de nuestra propuesta utilizando la transformada Curvelet es que no se requiere una previa estimación de la orientación del mapa de fase; como es el caso de las técnicas de filtrado direccional recientemente reportadas. La técnica presentada, la cual se encuentra aún en desarrollo presenta buenas expectativas en su desempeño para la eliminación de ruido y con un tiempo de procesamiento razonable.

## 1. Introducción

Es evidente que la existencia del interferograma o su observación visual no son suficientes para inferir en el valor de la magnitud que se pretende medir; es por ello que se establecen métodos de medida que proporcionen esa extracción de información, adicionalmente, el estudio de las franjas puede detectar pequeños movimientos del suelo sobre áreas extensas, algunos ejemplos son: Las placas tectónicas que rozan entre sí, la respiración lenta de volcanes activos, la subsidencia de una calle urbana, debido a la extracción de agua subterránea, o incluso la expansión térmica de un edificio en un día soleado o caluroso.

Un importante paso en el análisis de mapas de fase es llamado desenvolvimiento de fase; el conocimiento de la fase es un tema importante en diversas áreas que incluyen desde el procesamiento de Fourier, interferometría, holografía, RADAR, y la resonancia magnética. La distribución de fase queda envuelta en el rango de  $-\pi$  a  $\pi$  (wrapped), debido a esto la información de fase presenta discontinuidades con saltos de  $2\pi$ , estas variaciones pueden ser corregidas adicionando y substrayendo  $2\pi$  dependiendo si estos saltos se dan de  $-\pi$  a  $\pi$  o viceversa (unwrapping). En algunas ocasiones la estimación de la fase absoluta enfrenta algunas dificultades debido al ruido, generalmente presentes en los valores de fase del interferograma. Las causas de este ruido (o errores en el interferograma) están generalmente asociados con áreas de pendientes pronunciadas, superficies rugosas y las zonas con los valores de amplitud baja (sombras y el agua), entre otros factores [1, 2, 3].

Una observación importante en el filtrado de mapas de fase es la eliminación de ruido para este tipo de imágenes, lo que se trata de realizar es extraer la fase de manera fácil, robusta y con mayor precisión. Sin embargo, la frecuencia de las franjas y el ruido usualmente están traslapadas y no pueden ser separadas de forma adecuada es debido a esta razón que los filtros utilizados tradicionalmente (Filtros: Mediana, media, Gaussianos, etc. ) para el procesamiento de mapas de fase, tienen una gran pérdida de información en las características de las franjas; especialmente en las franjas que contienen una alta densidad. Por esta razón se inicia propuesta de nuevos algoritmos para el filtrado de imágenes tratando de preservar una mayor cantidad de información [4, 5].

## 2. Uso de la Transformada Curvelet en el filtrado

Similar a la Transformada Wavelet la familia de bases Curvelets se construyen mediante transformaciones de una función Curvelet madre o generadora. La transformada Curvelet usa tres dimensiones para generar la familia, el escalamiento diádico y translación tal como se hace para generar la familia Wavelet, y la rotación, la cual brinda una dimensión adicional en el análisis de las imágenes 2-D. Una propiedad importante es que las curvas singulares pueden ser adecuadamente aproximadas con muy pocos coeficientes y en una manera no adaptable por ello su nombre Curvelets. Comparada con la transformada Wavelet la transformada Curvelet puede representar un contorno liso con muy pocos coeficientes con la misma precisión.

### 2.1. Filtrado de Mapas de Fase

En los mapas de fase envueltos existe una cantidad de ruidos que necesitan ser eliminados; estos ruidos pueden ser causado por la temperatura del sistema, superposiciones y correspondencia imprecisa, etc. El filtrado del mapas de fase tiene una gran influencia pero la utilización de filtros tradicionales no son adecuados para ellos. Un mapa de fase envuelto es definido como  $\varphi_w(x, y)$  y puede representarse mediante senos y cosenos:

$$C(x, y) = \cos[\varphi_w(x, y)], \quad S(x, y) = \sin[\varphi_w(x, y)] \quad (1)$$

El equivalente esta basado en el hecho de que la fase envuelta puede ser únicamente recuperada de acuerdo a:

$$\varphi_w(x, y) = \arctan[S(x, y), C(x, y)]. \quad (2)$$

donde  $\varphi_w(x, y) = \arctan(\cdot, \cdot)$  es la función inversa de la tangente en el cuarto cuadrante. Entonces, filtrando  $C$  y  $S$ , las cuales son funciones continuas, es equivalente a filtrar  $\varphi_w(x, y)$ .

### 2.2. Filtrado de Mapas de Fase utilizando la Transformada Curvelet

La transformada Curvelet proporciona casi una óptima representación para imágenes que tienen discontinuidades a lo largo de las curvas  $C^2$  (doblemente diferenciable). Los pasos generales son mostrados en la Figura 1, después de calcular la Transformada Discreta de Fourier (DFT) en 2-D de la imagen mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT), el siguiente paso es aplicar las ventanas Curvelets a diferentes frecuencias, escalas y ángulos. Finalmente se calcula la Transformada Inversa de Fourier bidimensional (2-D IFFT), para obtener los coeficientes de la transformada Curvelet. La imagen puede ser recuperada sin error desde los coeficientes generados por la transformada Curvelet invirtiendo cada paso involucrado [6, 7]. La complejidad computacional de la FDCT es solamente  $O(N^2 \times \lg N)$  para una imagen de  $M \times N$  [8].

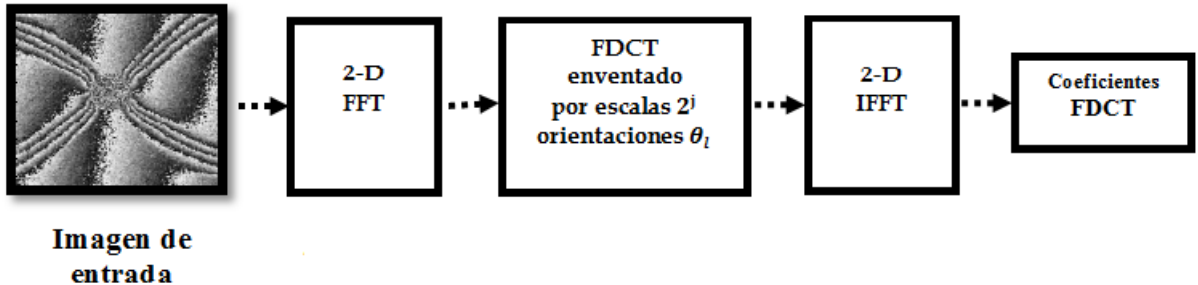
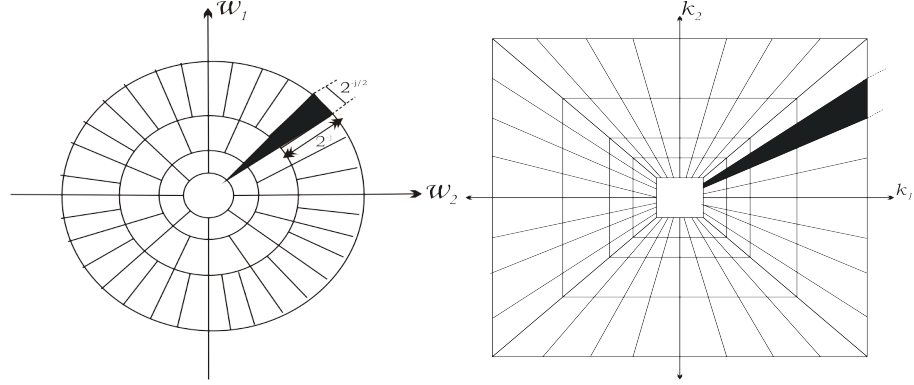


Figura 1: Diagrama de flujo del funcionamiento de la FDCT.

En general el numero de iteraciones se incrementa debido a la DFT en 2-D, debido a que se calcula en cada canal del banco de filtros. Esto es  $J$  veces más comparado con el algoritmo original de la transformada rápida Curvelet. Sin embargo, la complejidad computacional se mantiene como  $O(N^2 \times \lg N)$  para una imagen de  $M \times N$ . La transformada rápida Curvelet reemplaza la división polar de Fourier por una división recto-polar, esto es ilustrado en la Figura 2. Las direcciones  $\alpha$  son uniformemente discretizadas de modo que las pendientes de los bordes contienen el soporte de las Curvelets y están uniformemente distribuidas en cada cuadrante de Fourier (norte, sur, este y oeste). Una Curvelet es una función  $C(x)$  que tiene desapariciones a lo largo de la dirección horizontal como una Wavelet [9]. Cada borde es el soporte de la DFT bidimensional  $\hat{C}_j^\alpha[k_1, k_2]$  corresponde a la transformada discreta Curvelet  $c_j^\alpha[n_1, n_2]$ .



(a) Plano seccionado (tiling) frecuencial de la TCv . El área negra es un borde obtenido co-TCv. Las ventanas radial y angular definen el producto de una ventana radial y una ventana angular.  
(b) Plano seccionado (tiling) discreto de la TCv. Las ventanas radiales y angulares definen los bordes trapezoidales como muestra el área negra.

Figura 2: Plano seccionado (tiling) de la Transformada Curvelet

La transformada Curvelet discreta (Fast Discret Curvelet Transform, por sus siglas en inglés)[10] publicada en el software CurveLab (toolbox de Matlab). Es la discretización de la Transformada Curvelet Continua que implementa el *Tight Frame* Curvelet dado por su fórmula de reconstrucción:

$$f = \sum_{j,l,k} \langle f, \psi_{j,l,k} \rangle \psi_{j,l,k} \quad (3)$$

Definida en la escala  $2^{-j}$ , orientación  $\theta_l$  y posición  $x_k^{j,l} = R_{\theta_l}^{-1}(k_1 \cdot 2^{-j}, k_2 \cdot 2^{-j}/2)$ ,  $R$  es una matriz de rotación dada por el ángulo  $\theta$ .

En esta sección, se describen los pasos del algoritmo para la eliminación de ruido que esta basada en la Transformada Curvelet y descartando los coeficientes menos significativos mediante la aplicación de un umbral, para obtener mejores resultados del filtrado de la imagen. Mediante la función podemos ajustar los parámetros de los coeficientes que se utilizan en la Transformada Curvelet. La arquitectura de la FDCT via wrapping se explica a continuación [8, 11]:

1. Aplicar la transformada de Fourier en 2-D y obtener muestras :

$$\widehat{f}[n_1, n_2], -n/2 \leq n_1, n_2 \leq n/2. \quad (4)$$

2. Para cada escala  $j$  y ángulo  $l$ , del producto

$$\widehat{U}_{j,l}[n_1, n_2] = \widehat{f}[n_1, n_2]. \quad (5)$$

3. Realizar el producto alrededor del origen y se obtiene

$$\widetilde{f}_{i,j}[n_1, n_2] = W(\widetilde{U}_{j,l}, \widehat{f})[n_1, n_2]. \quad (6)$$

donde el rango para  $n_1$  y para  $n_2$  es ahora  $0 \leq n_1 \leq L_{1,j}$  y  $0 \leq n_2 \leq L_{2,j}$  (para  $\theta$  en el rango de  $[-\pi/4, \pi/4]$ ).

4. Aplicar la inversa de la transformada de Fourier en 2-D para cada  $\widetilde{f}_{j,l}$ , por lo tanto, se colectan los coeficientes discretos  $C^D(j, l, k)$ . Este algoritmo tiene una complejidad computacional de  $O(N^2 \lg N)$ .
5. El filtrado con la FDCT es aplicada de la siguiente manera: una vez que la FDCT es calculada, los coeficientes menos significativos (los cuales representan el ruido) son atenuados por medio de un umbral. De esta forma, sólo los coeficientes más significativos son usados para modelar las franjas.
6. Finalmente, se aplica la transformada inversa usando la IFDCT para recuperar la imagen filtrada.

### 3. Resultados

En esta sección presentamos los resultados experimentales obtenidos en el filtrado de mapas de fase. El algoritmo fue implementado utilizando MATLAB 2009 [11].

El primer experimento fue realizado con un mapa de fase sintético (tamaño  $200 \times 200$ ), agregando ruido uniformemente distribuido con un rango de 0 a 1. En este caso las escalas de la FDCT fueron 5 y 32 ángulos. El tiempo de procesamiento fue de 2.31 segundos. La Figura 3 muestra los resultados obtenidos.

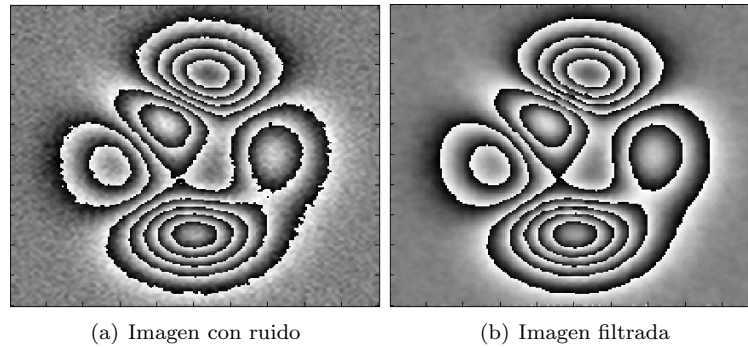


Figura 3: Resultados del filtrado con la Transformada Curvelet

Para el segundo experimento se utilizaron mapas de fase que se obtuvieron experimentalmente (tamaño  $480 \times 400$ ), de igual forma contiene ruido uniformemente distribuido en el rango de 0 a 1. La transformada FDCT fue ajustada con 4 escalas y 64 ángulos, además el tiempo de procesamiento fue de 3.27 segundos. El resultado del procesamiento es mostrado en la Figura 4.

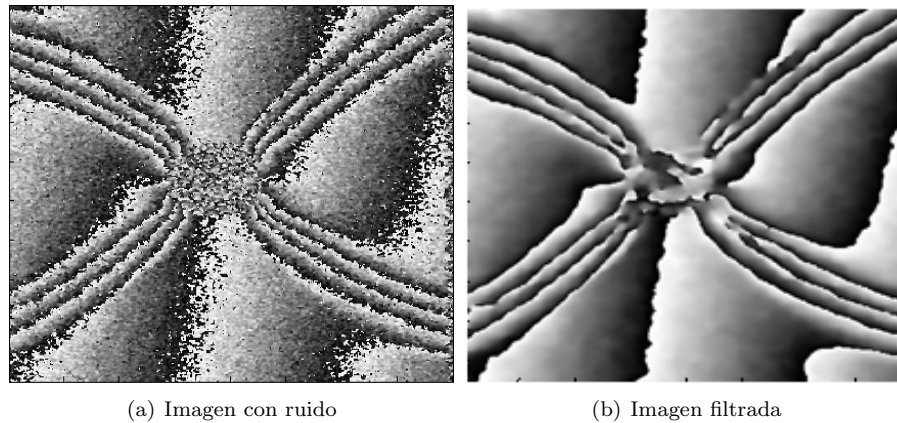


Figura 4: Desempeño de la Transformada Curvelet en mapa de fase ESPI

### 4. Conclusión

El filtrado de mapas de un paso muy importante en el procesamiento de imágenes, la mayoría de las veces la eliminación de ruido en las imágenes requiere el uso de algoritmos especiales debido a que los métodos tradicionales no siempre obtienen resultados satisfactorios. La Transformada Curvelet ha sido desarrollada como una alternativa de la transformada Wavelet en la cual cada elemento se define por los parámetros de escala, ubicación y orientación. Atenuando los coeficientes menos significativos podemos propiamente remover la mayor cantidad de ruido. La principal ventaja de nuestra propuesta utilizando la transformada Curvelet es que no se requiere el cálculo previo de la orientación de las franjas, como es el caso de las técnicas direccionales reportadas recientemente. El uso de la Transformada Curvelet es una opción prometedora para las imágenes interferométricas

(Mapas de fase e interferogramas). Los resultados se pueden considerar positivos, teniendo en cuenta que estos corresponden a una parte preliminar del algoritmo.

## Referencias

- [1] Dorrió, B. V. and Fernández J. L. , “Phase-evaluation method in whole-field optical measurement techniques”, *Meas. Sci. Technol.*, Vol. **10**, no. 3, pp. 33-55, 1999.
- [2] Palacios F., Goncalves, E., Ricardo J., and Valin, J.L. “Adaptive filter to improve the performance of phase-unwrapping in digital holography”. *Opt. Comm.*, Vol. **238**, No. 4-5, pp. 245-251, 2004.
- [3] Kemaó, Q., Nam, L.T.H., Feng, L., and Soon, S.H., “Comparative analysis on some filters for wrapped phase maps”, *Applied Optics*, Vol. **46**, No. 30, pp. 7412-7418, 2007.
- [4] Villa, J., Quiroga, J.A., and De la Rosa, I., “Regularized quadratic cost function for oriented fringe-pattern filtering,” *Opt. Lett.* , Vol. **34**, no. 11, pp. 1741 – 1743, 2009.
- [5] Villa, J., Vera-Rodríguez, R., Quiroga, J.A., De la Rosa, I., and González, E. “Anisotropic phase-map denoising using a regularized cost-function with complex-valued Markov Random Fields,” *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. **48**, no.6, pp. 650 – 656, 2010.
- [6] Starck, J-L., Candès, E. and, Donoho, D. L, “The Curvelet transform for image Denoising,” *IEEE transactions on image processing*, Vol. **11**, No. 6, pp. 670-684, 2002.
- [7] Palakkal, S., and Prabhu, K.M.M., “Poisson noise removal from images using the fast discrete curvelet transform”, *Communications National Conference (NCC)*, ISBN: 978-1-61284-090-1, 2011.
- [8] Candès, E. J., Guo, F., “New multiscale transform, minimum total variation synthesis: applications to edge-preserving image reconstruction,” *Signal Processing*, Vol. 82, No. 11, pp. 1519-1543, 2002.
- [9] Mallat S., *A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way*, third edition, pp.194-201, 2009.
- [10] E Candès, L Demanet, L Ying, *CurveLab Toolbox, Version 2.0*, [Online] Available: <http://www.curvelet.org/papers/curvelab.pdf>
- [11] Candès, E. J., Demanet, L., Donoho, D., and Ying, L., “Fast Discrete Curvelet Transforms,” *SIAM Multiscale Modeling and Simulation* , Vol. **5**, No. 3, pp. 861-899, 2006.