
VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE COM A LATITUDE E ALTITUDE^{†*}

Wilson Lopes

Departamento de Física – Universidade Guarulhos
Guarulhos – SP

Resumo

Propõe-se, neste trabalho, uma equação para o módulo do vetor aceleração da gravidade, variando com a latitude e altitude. Para essa finalidade, foram usados os seguintes valores para a aceleração da gravidade, ao nível do mar: no equador, $g_0 = 9,7803 \text{ m/s}^2$ e, na latitude de 45° , $g_P = 9,8062 \text{ m/s}^2$. O perfil terrestre foi assumido como sendo um elipsóide de revolução, achatado nos pólos, e a aceleração da gravidade variando com a altitude, em relação ao nível do mar, foi considerada também dependente da latitude.

Palavras-chaves: *Elipsóide de revolução; variação da aceleração da gravidade; latitude e altitude.*

Abstract

The propose of this work is an equation for the module of the acceleration vector of the gravity, varying with the latitude and altitude. For this purpose, the following values of the gravity acceleration were used, at the sea level: in the equator, $g_0 = 9,7803 \text{ m/s}^2$, and in the latitude of 45° , $g_P = 9,8062 \text{ m/s}^2$. The terrestrial profile were assumed as being a revolution ellipsoid, flattened in the poles, and the acceleration of the gravity varying with the altitude, at sea level, was considered dependent of the latitude too.

[†] Variation of the gravity acceleration with the latitude and altitude

* *Recebido: novembro de 2007.
Aceito: julho de 2008.*

Keywords: *Revolution ellipsoid; acceleration variation of gravity; latitude and altitude.*

I. Introdução

É notória a dificuldade de alguns alunos, que ingressam no curso superior, em admitir que a aceleração da gravidade não seja uma grandeza física constante. Afinal, é natural que, após um longo período de tempo (pelo menos três anos) usando $9,8 \text{ m/s}^2$ (ou seu valor aproximado para 10 m/s^2) ficasse consolidado, na mente do aluno, essa grandeza física como sendo “constante”. Contudo, o vetor aceleração da gravidade varia em módulo, direção e sentido. Sugere-se, portanto, que o professor de Física, no curso secundário e mesmo no início do curso superior, discuta com seus alunos a respeito desse tema, mostrando aos mesmos que o peso de qualquer objeto é função do vetor aceleração da gravidade.

Para superar essas dificuldades, procura-se estabelecer, neste artigo, uma equação simples da variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude, que forneça valores compatíveis com a *equação internacional*, até o quinto algarismo significativo.

A Terra, devido ao seu movimento de rotação, com velocidade angular $w = 7,292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, é achatada nos pólos, assemelhando-se a um elipsóide de revolução, em que o raio equatorial $a = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$ é maior que o polar $b = 6,357 \times 10^6 \text{ m}$. Seu volume é dado por: $V = 4\pi a^2 b / 3 = 1,083 \times 10^{21} \text{ m}^3$. Na suposição de uma Terra perfeitamente esférica, com o mesmo volume do elipsóide de revolução, seu raio assumiria o valor: $R = [3 \cdot 1,083 \times 10^{21} / (4\pi)]^{1/3} = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$ (STACEY, 1977).

Devido a essa velocidade angular e a esse achatamento, a aceleração da gravidade, ao nível do mar, aumenta ao percorrer-se um meridiano no sentido dos pólos, segundo a equação internacional:

$$g(\lambda) = 9,78032677(1 + 0,0052790414 \cdot \text{sen}^2 \lambda + 0,0000232718 \cdot \text{sen}^4 \lambda) \quad (1)$$

em que λ representa a latitude medida em graus (MAROJA; VITURINO; PEREIRA, 2007).

Uma equação mais simples e que fornece valores, com cinco algarismos significativos, praticamente iguais à equação (1), para a aceleração da gravidade, variando com a latitude e ao nível do mar, é dada por:

$$g_\lambda = g_0(1 + \beta \text{sen}^2 \lambda) \quad (2)$$

em que $g_0 = 9,7803 \text{ m/s}^2$ representa um valor aproximado da aceleração da gravidade, no equador e ao nível do mar, obtido com a equação (1), e $\beta = 5,300 \times 10^{-3}$ é um fator numérico que leva em conta a rotação terrestre, em torno de seu eixo, e o achatamento polar devido a essa rotação (COOK, 1969). Se levássemos em conta somente a aceleração centrípeta, esse coeficiente numérico seria: $\beta \approx 3,388 \times 10^{-3}$ (RESNICK; HALLIDAY, 1970). Entretanto, o valor desse coeficiente numérico é 1,564 vezes maior, ou seja, a contribuição do achatamento da Terra, para o coeficiente numérico é, aproximadamente, $1,912 \times 10^{-3}$.

Tabela 1: Estes valores da aceleração da gravidade, ao nível do mar e variando com a latitude, foram gerados com as equações (1) e (2).

Equação	Latitude em graus									
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
[1]	9,7803	9,7819	9,7864	9,7932	9,8017	9,8107	9,8192	9,8261	9,8306	9,8322
[2]	9,7803	9,7819	9,7864	9,7933	9,8017	9,8107	9,8192	9,8261	9,8306	9,8321

II. Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude

Com relação à altitude, a aceleração da gravidade varia segundo a equação¹:

$$\frac{\Delta g_z}{g_\lambda} \approx -\frac{2z}{R} \quad (3)$$

Substituindo-se, na equação (3), g_λ definido pela equação (2), obtém-se:

$$\Delta g_z \approx -\frac{2g_0(1 + \beta \text{sen}^2 \lambda)z}{R} \quad (4)$$

em que z é altitude, localizada a uma determinada latitude λ , e $R = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$ é o raio da Terra, suposta esférica, com o mesmo volume do elipsóide de revolução que, nesse caso, melhor representa a figura terrestre.

A variação da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude, pode ser definida por:

¹ Halliday e Resnick (1970, p. 417-418) apresentam uma equação de variação da aceleração da gravidade com a altitude, um pouco diferente: $dg/g = -2.dr/r$. No nosso caso, na equação (3), estamos supondo z muito menor que o raio terrestre ($z \ll R$), como se fosse o infinitésimo dr .

$$\begin{aligned}
g_{\lambda,z} &\approx g_{\lambda} + \Delta g_z \\
&\approx g_0(1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \lambda) - \frac{2g_0(1 + \text{sen}^2 \lambda) z}{R} \\
&\approx g_0(1 + \beta \cdot \text{sen}^2 \lambda)(1 - 2z/R)
\end{aligned} \tag{5}$$

A equação (5) fornece a aceleração da gravidade, em função da aceleração da gravidade no equador e ao nível do mar, da latitude e altitude (LOPES, 1999).

Na equação (2), pode-se assumir $g_{\lambda} = g_{45^\circ} = 9,8062 \text{ m/s}^2$ que representa a aceleração da gravidade padrão, ao nível do mar e na latitude $\lambda = 45^\circ$, que será indicada por g_P . Portanto:

$$g_0 = \frac{g_P}{1 + \beta \cdot \text{sen}^2 45^\circ} = \frac{g_P}{1 + \beta/2} \tag{6}$$

Substituindo-se (6) em (5), obtém-se:

$$g_{\lambda,z} \approx \frac{g_P}{1 + \beta/2} (1 + \beta \text{sen}^2 \lambda)(1 - 2z/R) \tag{7}$$

A equação (7), da mesma maneira que a equação (5), fornece os valores da aceleração da gravidade, em função da gravidade considerada padrão, $g_P = 9,8062 \text{ m/s}^2$, em função da latitude e altitude².

Tabela 2: Variação da aceleração da gravidade com a altitude, na latitude de 45° .

Altitude (km)	$g_{\lambda,z}^*$ (m/s ²)	$g_{\lambda,z}$ (m/s ²)
0	9,806	9,8062
1	9,803	9,8031
4	9,794	9,7939
8	9,782	9,7816
16	9,757	9,7570
32	9,708	9,7077
100	9,598	9,4984

² Devido à aproximação introduzida pela equação (3), não convém calcular a aceleração da gravidade, com as equações (5) ou (7), para valores da altitude superiores a 32 km, conforme a Tabela 2. Os valores da segunda coluna, da Tabela 2, são encontrados no livro de Resnick e Halliday (1970) e os da terceira coluna foram obtidos com o auxílio das equações (5) ou (7).

III. Conclusão

Existem balanças eletrônicas, nos laboratórios de Física, que medem massa até centésimos de grama. Como exemplo, suponhamos que essa balança de precisão mediu a massa de um objeto $m = 11,91$ g, com quatro algarismos significativos, num laboratório localizado na cidade de São Paulo ($\lambda \approx -22,55^\circ$ de latitude; $z = 760$ m de altitude). Não seria conveniente determinar o peso do objeto, usando-se o valor aproximado da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ ($g = 1,0 \times 10^3 \text{ cm/s}^2$), encontrando-se $P = mg = 11,91 \cdot 1,0 \times 10^3 = 1,2 \times 10^4$ dina, ou $1,1 \times 10^4$ dina (com o primeiro ou segundo resultado para o módulo da força peso, o segundo algarismo é duvidoso). Seria melhor, através das equações (5) ou (7), avaliar-se a aceleração da gravidade local, $g = 978,56 \text{ cm/s}^2$ ($g = 9,7856 \text{ m/s}^2$) e multiplicá-la pela massa, a saber: $P = m g = 11,91 \cdot 978,56 = 1,1655 \times 10^4$ dina. Se em todos os problemas de Física que, por comodidade, tornou-se um hábito, até mesmo nas universidades, de se considerar a aceleração da gravidade 10 m/s^2 ou $9,8 \text{ m/s}^2$, em relação à força peso do exemplo exposto acima, não haveria a necessidade de uma balança tão precisa.

Qual é a diferença de peso de uma pessoa, de massa $m = 80,00$ kg, ao se deslocar, ao nível do mar, do equador até o pólo? Essa pergunta, de acordo com este texto, responde-se da seguinte maneira:

$\Delta P = 80,00 (9,8321 - 9,7803) = 80,00 \cdot 0,0518 = 4,144$ N (verifique as acelerações da gravidade no equador e no pólo na Tabela 1).

Da mesma maneira, qual é a variação do peso da mesma pessoa de $80,00$ kg, ao deslocar-se da cidade de Santos (latitude $-23,96^\circ$; altitude $2,00$ m), $g = 9,7888 \text{ m/s}^2$, à cidade de Campos do Jordão (latitude $-22,74^\circ$; altitude 1628 m), $g = 9,7830 \text{ m/s}^2$?

A variação no peso da pessoa é dada por:

$\Delta P = 80,00 (9,7888 - 9,7830) = 80,00 \cdot 0,0058 = 0,464$ N (calculam as acelerações da gravidade com as equações (5) ou (7)).

Medidas experimentais da aceleração da gravidade, com cinco ou mais algarismos significativos, comparadas com os valores teóricos da aceleração da gravidade, variando em função da latitude e altitude, poderiam revelar algumas anomalias dessa grandeza física na crosta terrestre. Encontrando-se, experimentalmente, para a aceleração da gravidade, numa certa localidade, um valor sensivelmente menor que o valor indicado pelas equações (5) ou (7), poderia revelar no subsolo uma jazida petrolífera; encontrando-se um valor sensivelmente maior, poderia revelar, no subsolo, a presença de minerais metálicos, com uma densidade

superior à da crosta terrestre (a Tabela 3 apresenta valores da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude, obtidos com a equação (5)).

A maioria dos livros de Física, do curso secundário (e até mesmo do superior) apresenta, para facilitar os cálculos, a aceleração da gravidade: 10, 9,8 e 9,81 m/s² (este último valor raramente é encontrado). Concordo, plenamente, que o valor mais usado, $g = 10 \text{ m/s}^2$, representa uma grande facilidade no desenvolvimento dos cálculos para se chegar à solução de um problema de Física. Contudo, essa insistência no valor de 10 m/s² leva a maioria dos alunos a pensar que se trata de uma grandeza física constante. Para se contornar esse problema, desde o curso secundário, os professores deveriam discutir com seus alunos sobre as variações do módulo da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. Para mostrar que se trata de um vetor variável, seria muito fácil: bastaria desenhar a Terra e representá-lo perpendicularmente à superfície terrestre no equador e nos pólos, mostrando que a direção e o sentido do vetor são variáveis. Após esses cuidados, mesmo que o aluno usasse o valor 10 m/s², estaria ciente de que se trata de uma grandeza física variável, muito importante quando obtida experimentalmente com um número maior de algarismos significativos.

Bibliografia

COOK, A. H. **Gravity and the Earth**. London: Wykeham Publications LTD, 1969. 95 p.

LOPES, W. Uma equação barométrica coerente com a equação de Laplace. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. v. 21, n. 4, p. 524, 1999.

MAROJA, A. M.; VITURINO, M. F. C.; PEREIRA, J. de S. **Medida da Aceleração da Gravidade**. Disponível em:

<www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0297.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2007.

RESNICK, R; HALLIDAY, D. **Física**. Parte I. Tradução: Euclides Cavallari e Bento Afini Jr. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1970. 739 p.

STACEY, F. D. **Physics of the Earth**. 2. ed. New York: John Willey & Sons, 1977. 414 p.

Anexo

Tabela 3: Valores da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude, obtidos com a equação (5).

Altitude z (m)	Latitude em graus									
	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
0	9,7803	9,7807	9,7819	9,7838	9,7864	9,7896	9,7933	9,7974	9,8017	9,8062
50	9,7801	9,7805	9,7817	9,7836	9,7862	9,7894	9,7931	9,7972	9,8016	9,8061
100	9,7800	9,7804	9,7816	9,7835	9,7861	9,7892	9,7929	9,7970	9,8014	9,8059
150	9,7798	9,7802	9,7814	9,7833	9,7859	9,7891	9,7928	9,7969	9,8013	9,8058
200	9,7797	9,7801	9,7812	9,7832	9,7857	9,7889	9,7926	9,7967	9,8011	9,8056
250	9,7795	9,7799	9,7811	9,7830	9,7856	9,7888	9,7925	9,7966	9,8009	9,8054
300	9,7794	9,7798	9,7809	9,7829	9,7854	9,7886	9,7923	9,7964	9,8008	9,8053
350	9,7792	9,7796	9,7808	9,7827	9,7853	9,7885	9,7922	9,7963	9,8006	9,8051
400	9,7791	9,7795	9,7806	9,7825	9,7851	9,7883	9,7920	9,7961	9,8005	9,8050
450	9,7789	9,7793	9,7805	9,7824	9,7850	9,7882	9,7919	9,7960	9,8003	9,8048
500	9,7788	9,7792	9,7803	9,7822	9,7848	9,7880	9,7917	9,7958	9,8002	9,8047
550	9,7786	9,7790	9,7802	9,7821	9,7847	9,7879	9,7916	9,7957	9,8000	9,8045
600	9,7785	9,7789	9,7800	9,7819	9,7845	9,7877	9,7914	9,7955	9,7999	9,8044
650	9,7783	9,7787	9,7799	9,7818	9,7844	9,7876	9,7913	9,7954	9,7997	9,8042
700	9,7782	9,7785	9,7797	9,7816	9,7842	9,7874	9,7911	9,7952	9,7996	9,8041
750	9,7780	9,7784	9,7796	9,7815	9,7841	9,7873	9,7910	9,7950	9,7994	9,8039
800	9,7778	9,7782	9,7794	9,7813	9,7839	9,7871	9,7908	9,7949	9,7993	9,8038
850	9,7777	9,7781	9,7793	9,7812	9,7838	9,7869	9,7906	9,7947	9,7991	9,8036
900	9,7775	9,7779	9,7791	9,7810	9,7836	9,7868	9,7905	9,7946	9,7989	9,8034
950	9,7774	9,7778	9,7789	9,7809	9,7834	9,7866	9,7903	9,7944	9,7988	9,8033
1000	9,7772	9,7776	9,7788	9,7807	9,7833	9,7865	9,7902	9,7943	9,7986	9,8031
1050	9,7771	9,7775	9,7786	9,7805	9,7831	9,7863	9,7900	9,7941	9,7985	9,8030
1100	9,7769	9,7773	9,7785	9,7804	9,7830	9,7862	9,7899	9,7940	9,7983	9,8028
1150	9,7768	9,7772	9,7783	9,7802	9,7828	9,7860	9,7897	9,7938	9,7982	9,8027
1200	9,7766	9,7770	9,7782	9,7801	9,7827	9,7859	9,7896	9,7937	9,7980	9,8025
1250	9,7765	9,7769	9,7780	9,7799	9,7825	9,7857	9,7894	9,7935	9,7979	9,8024
1300	9,7763	9,7767	9,7779	9,7798	9,7824	9,7856	9,7893	9,7934	9,7977	9,8022
1350	9,7762	9,7765	9,7777	9,7796	9,7822	9,7854	9,7891	9,7932	9,7976	9,8021
1400	9,7760	9,7764	9,7776	9,7795	9,7821	9,7853	9,7890	9,7930	9,7974	9,8019
1450	9,7758	9,7762	9,7774	9,7793	9,7819	9,7851	9,7888	9,7929	9,7973	9,8018
1500	9,7757	9,7761	9,7773	9,7792	9,7818	9,7849	9,7886	9,7927	9,7971	9,8016

Tabela 3 (continuação): Valores da aceleração da gravidade, em função da latitude e altitude, obtidos com a equação (5).

Altitude z (m)	Latitude em graus								
	50	55	60	65	70	75	80	85	90
0	9,8107	9,8151	9,8192	9,8229	9,8261	9,8287	9,8306	9,8317	9,8321
50	9,8106	9,8149	9,8190	9,8227	9,8259	9,8285	9,8304	9,8316	9,8320
100	9,8104	9,8148	9,8189	9,8226	9,8258	9,8284	9,8303	9,8314	9,8318
150	9,8103	9,8146	9,8187	9,8224	9,8256	9,8282	9,8301	9,8313	9,8317
200	9,8101	9,8145	9,8186	9,8223	9,8255	9,8280	9,8300	9,8311	9,8315
250	9,8099	9,8143	9,8184	9,8221	9,8253	9,8279	9,8298	9,8310	9,8314
300	9,8098	9,8142	9,8182	9,8219	9,8251	9,8277	9,8296	9,8308	9,8312
350	9,8096	9,8140	9,8181	9,8218	9,8250	9,8276	9,8295	9,8307	9,8311
400	9,8095	9,8138	9,8179	9,8216	9,8248	9,8274	9,8293	9,8305	9,8309
450	9,8093	9,8137	9,8178	9,8215	9,8247	9,8273	9,8292	9,8304	9,8307
500	9,8092	9,8135	9,8176	9,8213	9,8245	9,8271	9,8290	9,8302	9,8306
550	9,8090	9,8134	9,8175	9,8212	9,8244	9,8270	9,8289	9,8300	9,8304
600	9,8089	9,8132	9,8173	9,8210	9,8242	9,8268	9,8287	9,8299	9,8303
650	9,8087	9,8131	9,8172	9,8209	9,8241	9,8267	9,8286	9,8297	9,8301
700	9,8086	9,8129	9,8170	9,8207	9,8239	9,8265	9,8284	9,8296	9,8300
750	9,8084	9,8128	9,8169	9,8206	9,8238	9,8263	9,8283	9,8294	9,8298
800	9,8083	9,8126	9,8167	9,8204	9,8236	9,8262	9,8281	9,8293	9,8297
850	9,8081	9,8125	9,8166	9,8203	9,8234	9,8260	9,8279	9,8291	9,8295
900	9,8079	9,8123	9,8164	9,8201	9,8233	9,8259	9,8278	9,8290	9,8294
950	9,8078	9,8122	9,8162	9,8199	9,8231	9,8257	9,8276	9,8288	9,8292
1000	9,8076	9,8120	9,8161	9,8198	9,8230	9,8256	9,8275	9,8287	9,8290
1050	9,8075	9,8118	9,8159	9,8196	9,8228	9,8254	9,8273	9,8285	9,8289
1100	9,8073	9,8117	9,8158	9,8195	9,8227	9,8253	9,8272	9,8283	9,8287
1150	9,8072	9,8115	9,8156	9,8193	9,8225	9,8251	9,8270	9,8282	9,8286
1200	9,8070	9,8114	9,8155	9,8192	9,8224	9,8250	9,8269	9,8280	9,8284
1250	9,8069	9,8112	9,8153	9,8190	9,8222	9,8248	9,8267	9,8279	9,8283
1300	9,8067	9,8111	9,8152	9,8189	9,8221	9,8246	9,8266	9,8277	9,8281
1350	9,8066	9,8109	9,8150	9,8187	9,8219	9,8245	9,8264	9,8276	9,8280
1400	9,8064	9,8108	9,8149	9,8186	9,8218	9,8243	9,8263	9,8274	9,8278
1450	9,8062	9,8106	9,8147	9,8184	9,8216	9,8242	9,8261	9,8273	9,8277