

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ARNAUD BEAUVILLE

Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, n° 3 (1977), p. 309-391

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_3_309_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS DE PRYM ET JACOBIENNES INTERMÉDIAIRES

PAR ARNAUD BEAUVILLE

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION.....	309
CHAPITRE 0. Rappels.....	311
CHAPITRE I. Fibrés en quadriques.....	320
CHAPITRE II. Jacobienne intermédiaire d'un fibré en quadriques.....	329
CHAPITRE III. Le groupe de Chow d'un fibré en quadriques.....	337
CHAPITRE IV. Rationalité des fibrés en quadriques.....	353
CHAPITRE V. Variétés de Fano.....	358
CHAPITRE VI. Intersections de trois quadriques.....	361
CHAPITRE VII. Le problème de Torelli.....	378
BIBLIOGRAPHIE.....	390

INTRODUCTION

Ce travail est consacré aux applications de la théorie des variétés de Prym à la géométrie des variétés de dimension 3, et plus généralement de certaines variétés de dimension impaire. Le point de départ de ces applications est le fait que des variétés de Prym apparaissent comme jacobienues intermédiaires de certaines variétés très simples, telles que l'hypersurface cubique dans \mathbf{P}^4 ou l'intersection de trois quadriques dans \mathbf{P}^{2n} . Ces exemples rentrent dans une classe générale de variétés qu'on a appelées « fibrés en quadriques » : en dimension 3, cette notion coïncide avec celle de « conic bundle » introduite par Mumford (*cf.* [C-G], app. C).

Les fibrés en quadriques sont définis au chapitre I; les chapitres II et III contiennent les deux résultats fondamentaux qui les relient aux variétés de Prym. Au chapitre II, on montre que la jacobienne intermédiaire d'un fibré en quadriques est une variété de Prym, généralisant ainsi un résultat de Mumford sur les fibrés en coniques. Au chapitre III, on montre que le « groupe de Chow » d'un fibré en quadriques (groupe des classes de cycles algébriquement équivalents à zéro modulo équivalence rationnelle) est canoniquement isomorphe au groupe des points rationnels de la variété de Prym associée;

de plus, la variété de Prym, munie de sa polarisation, possède une propriété universelle vis-à-vis des classes de cycles. Ces résultats ont été démontrés par Murre ([Mu 1], [Mu 2], [Mu 3]) dans le cas particulier de l'hypersurface cubique dans \mathbf{P}^4 ; la technique utilisée ici est très différente.

Le reste de ce travail consiste en des applications des résultats qu'on vient d'énoncer. En dimension 3, un des intérêts d'avoir une description explicite des jacobiniennes intermédiaires est la possibilité d'obtenir des résultats de non-rationalité; on étudie cette question au chapitre IV, où l'on obtient de nombreux exemples de variétés unirationnelles non rationnelles, comme par exemple l'intersection de trois quadriques dans \mathbf{P}^6 . Le théorème sur le groupe de Chow permet d'obtenir ces résultats en toute caractéristique $\neq 2$.

Bien entendu, il existe des classes de variétés de dimension 3 unirationnelles qui ne sont pas des fibrés en quadriques; mais dans tous les cas concrets, on constate qu'on peut faire dégénérer ces variétés de façon qu'elles deviennent — après désingularisation — des fibrés en quadriques. Au chapitre V, on met à profit ce phénomène pour démontrer (sur \mathbf{C}) un théorème de « non-rationalité générique » : on considère les familles classiques de variétés unirationnelles, étudiées par Fano, pour lesquelles la rationalité n'est pas connue; on montre qu'une variété générique, dans chacune de ces familles, n'est pas rationnelle.

Le chapitre VI est consacré à un exemple particulièrement intéressant, celui des intersections de trois quadriques dans \mathbf{P}^{2n} . La géométrie de ces variétés se révèle très riche. On associe à une telle variété X une courbe plane de degré $(2n+1)$, munie d'un revêtement double, de façon que la variété de Prym associée soit isomorphe à la jacobienne intermédiaire de X ; on démontre alors que la donnée de X est équivalente à celle de cette courbe plane munie de son revêtement double.

Une partie des résultats de ce paragraphe a été obtenue indépendamment par Tjurin et Reid (cf. [T 1], ainsi que la thèse — non publiée — de M. Reid).

Il résulte du chapitre VI que le théorème de Torelli pour les intersections de trois quadriques équivaut à un théorème de Torelli pour les variétés de Prym; ce problème est examiné au chapitre VII. On arrive à une bonne compréhension du problème local, qui permet notamment de démontrer que la famille des variétés de Prym de dimension g dépend effectivement de $3g$ modules (« théorème de Wirtinger »); par contre, pour le problème global, on n'a que des résultats négatifs, c'est-à-dire des contre-exemples pour les genres trop bas. Il faut signaler que Tjurin a publié une démonstration (et même deux dans le cas des courbes planes) du théorème de Torelli pour les variétés de Prym [T 2], mais les deux démonstrations sont incorrectes. Le problème de Torelli pour les intersections de trois quadriques reste donc ouvert.

Un chapitre 0 (qu'on engage le lecteur à sauter) rassemble un certain nombre de résultats qui sont plus ou moins « bien connus », mais pour lesquels il n'est pas immédiat de trouver une référence.

Dans tout ce travail on considère des variétés sur un corps de base k algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$; aux chapitres II et V on aura $k = \mathbf{C}$.

CHAPITRE 0

Rappels

0.1 GROUPE DE CHOW. — Soit X une variété quasi-projective et lisse sur un corps algébriquement clos k ; on note $C^q(X)$ le groupe des cycles de codimension q sur X modulo l'équivalence rationnelle, et $A^q(X)$ le sous-groupe de $C^q(X)$ formé des cycles algébriquement équivalents à zéro. On renvoie par exemple à [S] pour les définitions de ces notions. On note $NS^q(X)$ le groupe de Néron-Severi $C^q(X)/A^q(X)$; on écrira aussi $NS^1(X) = NS(X)$.

LEMME 0.1.1. — *Le groupe $A^q(X)$ est divisible.*

Démonstration. — Si $x \in A^q(X)$, il existe une courbe lisse complète C , deux points a, b de C et une classe de cycle $z \in C^q(X \times C)$ telle que

$$z|_{X \times \{a\}} = x, \quad z|_{X \times \{b\}} = 0.$$

Notons p_1, p_2 les projections de $X \times C$ sur X et C . L'homomorphisme $\varphi : A^1(C) \rightarrow A^q(X)$ défini par $\varphi(d) = p_{1*}(z \cdot p_2^* d)$ applique le diviseur $[a] - [b] \in A^1(C)$ sur x ; comme le groupe $A^1(C)$, égal au groupe des points rationnels de la jacobienne J_C , est divisible, on conclut que $A^q(X)$ est divisible.

PROPOSITION 0.1.2. — *Soient X une variété quasi-projective lisse sur k , Y une sous-variété fermée de X , de codimension r , $U = X - Y$, i (resp. j) l'inclusion de Y (resp. U) dans X , $\varepsilon : Y' \rightarrow Y$ une désingularisation de Y .*

(i) *La suite :*

$$C^{q-r}(Y') \xrightarrow{(i\varepsilon)_*} C^q(X) \xrightarrow{j^*} C^q(U) \rightarrow 0$$

est exacte;

(ii) *l'homomorphisme $j^* : A^q(X) \rightarrow A^q(U)$ est surjectif;*

(iii) *si $A^q(U) = 0$ et si le groupe de Néron-Severi $NS^q(Y')$ est de type fini, la flèche $(i\varepsilon)_* : A^{q-r}(Y') \rightarrow A^q(X)$ est surjective.*

Démonstration. — (i) est classique [Sém Ch]. Soit u un élément de $A^q(U)$; il existe une variété T , deux points a, b de T et un cycle $z \in C^q(U \times T)$ tel que

$$z|_{U \times \{a\}} = u, \quad z|_{U \times \{b\}} = 0.$$

D'après (i) il existe un cycle $y \in C^q(X \times T)$ dont la restriction à $U \times T$ est égale à z ; si l'on pose $x = y|_{X \times \{a\}} - y|_{X \times \{b\}}$, il est clair que x est algébriquement équivalent à zéro et que $j^* x = u$, d'où (ii).

Prouvons (iii). Notons $C_0^{q-r}(Y')$ le sous-groupe de $C^{q-r}(Y')$ formé des cycles y tels que $(i\varepsilon)_* y \in A^q(X)$. Par hypothèse, la flèche $(i\varepsilon)_* : C_0^{q-r} \rightarrow A^q(X)$ est surjective, et le

quotient $C_0^{q-r}(Y')/A^{q-r}(Y')$ est un groupe de type fini; il en résulte que le conoyau de la flèche :

$$(i\varepsilon)_* : A^{q-r}(Y') \rightarrow A^q(X)$$

est un groupe divisible (0.1.1) et de type fini, donc nul.

On aura besoin de calculer le groupe de Chow (resp. la cohomologie) d'une variété éclatée. Si T est une variété lisse sur k , on note $H^q(T)$ ou bien la cohomologie entière $H^q(T, \mathbf{Z})$ si $k = \mathbf{C}$, ou bien la cohomologie l -adique $H^q(T, \mathbf{Z}_l)$ si $l \neq \text{car}(k)$.

PROPOSITION 0.1.3. — Soit Y une sous-variété lisse d'une variété lisse X , de codimension $2+c$ ($c \geq 0$). On note $\varepsilon : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de Y , E le diviseur exceptionnel, i l'inclusion de E dans X' , j l'inclusion de Y dans X , $g : E \rightarrow Y$ l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & X' \\ \downarrow g & & \downarrow \varepsilon \\ Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

naturelle, h la classe dans $C^1(E) = \text{Pic}(E)$ du fibré $\mathcal{O}_E(1)$ [resp. la classe de Chern de $\mathcal{O}_E(1)$ dans $H^2(E)$]. On note N le fibré normal de Y dans X , de sorte qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow g^* \check{N} \rightarrow \mathcal{O}_E(1) \rightarrow 0.$$

On pose enfin $\gamma_r = c_r(\check{F}) = h^r + h^{r-1} \cdot g^* c_1(N) + \dots + g^* c_r(N)$.

(i) Pour tout $x' \in C^q(X')$ [resp. $x' \in H^q(X')$], on a

$$x' = \varepsilon_* \varepsilon_* x' - i_* \left(\sum_{r=0}^c h^r \cdot g_* g_* (\gamma_{c-r} \cdot i^* x') \right).$$

(ii) Les applications :

$$C^q(X') \xrightarrow[u]{u} C^q(X) \oplus \sum_{r=0}^c C^{q-1-r}(Y) \quad \left(\text{resp. } H^q(X') \xrightarrow[u]{u} H^q(X) \oplus \sum_{r=0}^c H^{q-2-2r}(Y) \right),$$

définies par

$$u(x') = \varepsilon_* x' + \sum_{r=0}^c g_* (\gamma_{c-r} \cdot i^* x') \quad v \left(x + \sum_{r=0}^c y_r \right) = \varepsilon_* x - i_* \left(\sum_{r=0}^c h^r \cdot g_* y_r \right)$$

sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, qui induisent par restriction des isomorphismes inverses :

$$A^q(X') \xrightarrow[u]{u} A^q(X) \oplus \sum_{r=0}^c A^{q-1-r}(Y).$$

Démonstration. — On utilisera les « formules-clés » :

(a) $\varepsilon^* j_* y = i_* (\gamma_{c+1} \cdot g^* y)$ pour tout $y \in A^q(Y)$ [resp. $H^q(Y)$],

(b) $i^* i_* e = -h \cdot e$ pour $e \in A^q(E)$ [resp. $H^q(E)$],

pour lesquelles on renvoie à [L-M-S] (resp. [SGA 5], VII).

Démontrons (i). On peut écrire $\varepsilon_* \varepsilon_* x' - x' = i_* z$, avec $z \in A^{q-1}(E)$ [resp. $H^{q-2}(E)$] (utiliser 0.1.2, resp. la suite exacte de Gysin). On aura

$$z = \sum_{r=0}^{c+1} h^r \cdot g_* a_r, \quad \text{avec } a_r \in A^{q-r-1}(Y) \quad [\text{resp. } H^{q-2r-2}(Y)].$$

De plus on doit avoir $\varepsilon_* i_* z = 0$, soit $j_* g_* z = 0$, c'est-à-dire $j_* a_{c+1} = 0$. La « formule-clé » (a) permet alors, en modifiant z , de supposer $a_{c+1} = 0$.

Par restriction à E on trouve :

$$i^* x' - g^* j^* \varepsilon_* x' = -i^* i_* z = z \cdot h = \sum_{r=0}^c h^{r+1} \cdot g^* a_r.$$

Rappelons que $g_*(h^r) = 0$ pour $r < c+1$, et $g_*(h^{c+1}) = 1$; de ceci et du fait que $\gamma_{c+2} = 0$ résulte :

$$g_*(h^r \cdot \gamma_s) = \begin{cases} 0, & \text{si } r+s \neq c+1, \\ 1, & \text{si } r+s = c+1. \end{cases} \quad r \leq c+1,$$

Donc en multipliant l'égalité obtenue par γ_{c-r} et en appliquant g_* , on trouve :

$$g_*(\gamma_{c-r} \cdot i^* x') = a_r (0 \leq r \leq c), \quad \text{d'où (i).}$$

En termes des applications u et v , la formule (i) se réécrit $vu(x') = x'$; on vérifie facilement que $uv = 1$, ce qui montre que u et v sont des isomorphismes inverses. Enfin il est clair que u et v transforment les cycles algébriquement équivalents à zéro en cycles algébriquement équivalents à zéro, ce qui achève de prouver (ii).

0.2. VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES. — 0.2.1. Rappelons qu'une polarisation sur une variété abélienne A est la classe dans le groupe de Néron-Severi $NS(A)$ (0.1) d'un diviseur ample D . On dit que la polarisation est principale si $\dim H^0(A, \mathcal{O}_A(D)) = 1$.

Donnons deux autres définitions équivalentes :

(i) on peut aussi définir une polarisation comme une isogénie h de A sur sa variété duale \hat{A} , telle que $\hat{h} = h$ (via l'identification canonique $A \cong \hat{\hat{A}}$). La polarisation est principale si h est un isomorphisme.

(ii) Si $k = \mathbb{C}$, la variété abélienne A est isomorphe — en tant que groupe de Lie complexe — au quotient d'un espace vectoriel complexe V par un réseau Γ . La donnée d'une polarisation sur A est alors équivalente à la donnée d'une forme hermitienne positive non-dégénérée H sur V , telle que la forme alternée $E = \text{Im}(H)$ prenne des valeurs entières sur Γ . Dire que la polarisation est principale revient à dire que la « forme de Riemann » E sur Γ est inversible (i. e. définit un isomorphisme de Γ sur son dual).

0.2.2. Exemple : jacobiennes intermédiaires. — Nous ne définirons les jacobiennes intermédiaires que dans le cas particulier suivant : soit X une variété projective et lisse

sur \mathbf{C} , de dimension $(2n+1)$; supposons que la structure de Hodge sur $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})$ soit de niveau 1, c'est-à-dire que

$$H^{2n+1}(X, \mathbf{C}) = H^{n, n+1}(X) \oplus H^{n+1, n}(X).$$

Notons i l'homomorphisme canonique de $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})$ dans $H^{2n+1}(X, \mathbf{C})$, p la projection de $H^{2n+1}(X, \mathbf{C})$ sur $H^{n, n+1}(X)$. La jacobienne intermédiaire $J(X)$ est définie par

$$J(X) = H^{n, n+1}(X)/pi(H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})).$$

C'est dans ce cas une variété abélienne; plus précisément, il existe une polarisation principale canonique sur $J(X)$. La forme hermitienne H correspondante est donnée par

$$H(\alpha, \beta) = 2i(-1)^{n-1} \int_X \alpha \wedge \bar{\beta} \quad \text{pour } \alpha, \beta \in H^{n, n+1}(X).$$

La forme de Riemann E sur $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})$ est alors donnée par

$$E(\gamma, \gamma') = (-1)^{n-1} \cdot (\gamma, \gamma') \quad \text{pour } \gamma, \gamma' \in H^{2n+1}(X, \mathbf{Z}).$$

Pour $n = 0$, on retrouve la jacobienne de la courbe X et sa polarisation principale.

0.2.3. *Schémas abéliens principalement polarisés.* — Une polarisation principale sur un schéma abélien $f : A \rightarrow S$ est un isomorphisme $h : A \rightarrow \hat{A}$ tel que $\hat{h} = h$ (via l'identification de A et du schéma abélien bidual). Si $k = \mathbf{C}$, il revient au même de se donner une forme hermitienne positive non dégénérée sur $R_1 f_*(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire, par définition, sur le système localement constant dont la fibre en $s \in S$ est $H_1(A_s, \mathbf{C})$), telle que $E = \text{Im}(H)$ prenne des valeurs entières sur $R_1 f_*(\mathbf{Z})$.

Exemples. — (i) Si $C \rightarrow S$ est une courbe lisse au-dessus de S , $J_C = \text{Pic}^0(C/S)$ est un S -schéma abélien principalement polarisé.

(ii) Plus généralement, soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme projectif et lisse de variétés complexes, de dimension relative $(2n+1)$; supposons que pour tout $s \in S$ on ait

$$H^{2n+1}(X_s, \mathbf{C}) = H^{n+1, n}(X_s) \oplus H^{n, n+1}(X_s).$$

Il existe alors un schéma abélien principalement polarisé JX sur S , dont la fibre en tout point s coïncide avec la jacobienne intermédiaire $J(X_s)$.

(iii) Soient \tilde{C}, C deux courbes stables sur S , et $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un S -morphisme tel que pour tout $s \in S$, π_s soit un « pseudo-revêtement » (cf. 0.3.1, plus loin). Il existe un schéma abélien principalement polarisé \mathcal{P} sur S dont la fibre en s coïncide avec la variété de Prym associée au pseudo-revêtement π_s (cf. [B]). On dira que \mathcal{P} est le schéma de Prym associé à (\tilde{C}, C) .

On suppose désormais que le corps de base est le corps des complexes. L'espace $\mathcal{A}_g = H_g/\text{Sp}(2g, \mathbf{Z})$ est l'espace des modules (grossier) des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g ; cela signifie que :

$$\mathcal{A}_g(\mathbf{C}) = \{ \text{classes d'isomorphisme de variétés abéliennes} \\ \text{principalement polarisées de dimension } g \},$$

et que pour tout schéma abélien principalement polarisé $A \rightarrow S$, il existe une « application classifiante » $C : S \rightarrow \mathcal{A}_g$, telle que

$$C(s) = \text{classe de } A_s \in \mathcal{A}_g(C), \quad \text{pour tout point fermé } s \in S.$$

0.2.4. *Compactification de Satake.* — On renvoie à [Sém C] pour la définition et les propriétés de la compactification de Satake $\overline{\mathcal{A}}_g$. Rappelons qu'on a ensemblistement :

$$(0.2.4) \quad \overline{\mathcal{A}}_g(C) = \mathcal{A}_g(C) \cup \mathcal{A}_{g-1}(C) \cup \dots \cup \mathcal{A}_0(C).$$

Le seul résultat concernant $\overline{\mathcal{A}}_g$ que nous utiliserons est le suivant, qui est énoncé dans [M 2] et démontré dans [G 1].

PROPOSITION 0.2.5. — Soient S une courbe lisse (non nécessairement complète) sur \mathbb{C} , 0 un point fermé de S , $p : A \rightarrow S$ un S -schéma en groupes plat. On suppose que

— la restriction A' de A à $p^{-1}(S-0)$ est un schéma abélien au-dessus de $S-0$, de dimension relative g ;

— la fibre spéciale A_0 est extension d'une variété abélienne B par un tore; on a donc un épimorphisme $h : A_0 \rightarrow B$;

— localement sur S pour la topologie étale, il existe une classe $\theta \in \text{NS}(A)$ dont la restriction à A' définit une polarisation principale sur A' , et dont la restriction à A_0 est égale à $h^* \beta$, où β est une polarisation principale sur B .

Alors l'application classifiante $C : S-0 \rightarrow \mathcal{A}_g$, correspondant au $(S-0)$ -schéma abélien principalement polarisé A' , se prolonge en un morphisme $\overline{C} : S \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_g$; le point $\overline{C}(0) \in \overline{\mathcal{A}}_g(C)$ correspond via (0.2.4) à la variété abélienne principalement polarisée (B, β) .

Exemples 0.2.6. — La proposition 0.2.5 s'applique notamment dans les cas suivants :

(i) On a $A = \text{Pic}^0(C/S)$, où $C \rightarrow S$ est une S -courbe stable de genre g , lisse au-dessus de $S-0$. Alors (B, β) n'est autre que la jacobienne de la normalisation de C_0 .

(ii) Plus généralement, soit $X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat, tel que :

— pour $s \neq 0$, la fibre X_s est une variété lisse, de dimension $(2n+1)$, et

$$H^{2n+1}(X_s, \mathbb{C}) = H^{n, n+1}(X_s) \oplus H^{n+1, n}(X_s);$$

— X_0 a au plus des points doubles ordinaires.

On sait alors ([Z]) qu'il existe un S -schéma en groupes A tel que $A_s = J(X_s)$ pour $s \neq 0$ et que (B, β) est isomorphe à la jacobienne intermédiaire de la variété lisse X'_0 obtenue en éclatant les points doubles de X_0 .

(iii) L'exemple suivant a sa place logique après le paragraphe 0.3, dont il utilise les définitions et notations.

Supposons données sur S des courbes stables \tilde{C}, C , de genre $(2g+1)$ et $(g+1)$ respectivement, et un morphisme $\pi : C \rightarrow \tilde{C}$ vérifiant :

— pour $s \neq 0$, $\pi_s : \tilde{C}_s \rightarrow C_s$ est un pseudo-revêtement (0.3.1);

— il existe un ensemble fini Σ de points doubles de C_0 , et un ouvert V de C_0 contenant Σ , tels que la restriction de $\pi_0 : \tilde{C}_0 \rightarrow C_0$ à $\pi_0^{-1}(C_0 - \Sigma)$ [resp. à $\pi_0^{-1}(V)$] soit un pseudo-revêtement (resp. un revêtement double étale).

Soit N (resp. \tilde{N}) la courbe obtenue en normalisant C_0 (resp. \tilde{C}_0) aux points de Σ [resp. de $\pi_0^{-1}(\Sigma)$]. Le morphisme $\tilde{N} \rightarrow N$ est un pseudo-revêtement; on désigne par P la variété de Prym associée, par ξ sa polarisation naturelle.

Considérons les schémas de Picard $\tilde{J}C = \text{Pic}^0(\tilde{C}/S)$ et $JC = \text{Pic}^0(C/S)$; la norme définit un morphisme :

$$Nm : \tilde{J}C \rightarrow JC,$$

dont le noyau est un S -schéma en groupes plat. Par suite ([SGA 3], exp. VI_B, cor. 4.4), $A = (\text{Ker } Nm)^0$ est un S -schéma en groupes plat. Pour $s \neq 0$, A_s est la variété de Prym associée au pseudo-revêtement π_s ; de plus on déduit de la définition une suite exacte :

$$0 \rightarrow T \rightarrow A_0 \xrightarrow{h} P \rightarrow 0,$$

où T est un tore.

Localement sur S pour la topologie étale, on peut trouver un faisceau inversible L sur \tilde{C} , tel que

$$\deg(L_s) = 2g, \quad H^0(\tilde{C}_s, L_s) = (0), \quad \forall s \in S.$$

On sait alors ([B], chap. II) qu'il existe un diviseur Θ sur $\tilde{J}C$ tel que

$$\Theta|_{\tilde{J}C_s} = \{ M \in \tilde{J}C_s, H^0(\tilde{C}_s, L_s \otimes M) \neq (0) \}.$$

Soit θ la classe de Θ dans $\text{NS}(\tilde{J}C)$; on sait ([B]) que pour $s \neq 0$, la restriction de θ à A_s est le double de la polarisation principale de la variété de Prym A_s . La restriction de θ à $\tilde{J}C_0$ est égale à l'image réciproque de la polarisation $\tau \in \text{NS}(J\tilde{N})$, et l'on a $\tau|_P = 2\xi$, d'où $\theta|_{A_0} = 2h^*\xi$. On en déduit que, localement pour la topologie étale, la restriction de θ à A est le double d'une classe $\pi \in \text{NS}(A)$; cette classe induit sur chaque fibre A_s ($s \neq 0$) la polarisation principale de A_s , et sa restriction à A_0 est égale à $h^*\xi$.

On est donc dans les conditions d'application de 0.2.5, avec $(B, \beta) = (P, \xi)$.

0.3. VARIÉTÉS DE PRYM. — On renvoie à [M 1] pour la définition et les propriétés des variétés de Prym classiques. Nous aurons aussi à considérer les variétés de Prym généralisées étudiées dans [B]; on va en rappeler ici quelques propriétés. On fixe un corps k algébriquement clos, de caractéristique $\neq 2$.

DÉFINITION 0.3.1. — Soit C une courbe connexe sur k , ayant comme seules singularités des points doubles ordinaires. On dira qu'un morphisme $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ est un pseudo-revêtement si :

— pour tout point non-singulier s de C , il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$ soit un revêtement étale de degré deux;

— si s est un point double de C , de sorte que $\hat{\mathcal{O}}_{C,s} \cong k[[u, v]]/(uv)$, alors $\pi^{-1}(s)$ contient un seul point \tilde{s} et on peut identifier $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{C},\tilde{s}}$ à $k[[x, y]]/(xy)$ de façon que $\pi^* u = x^2$, $\pi^* v = y^2$.

Il résulte de la définition que \tilde{C} a comme seules singularités les points \tilde{s} de $\pi^{-1}(\text{Sing}(C))$, qui sont des points doubles ordinaires, et qu'il existe une involution $\iota : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ tel que π identifie C au quotient $\tilde{C}/(\iota)$.

On notera $n : N \rightarrow C$ (resp. $\tilde{n} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{C}$) la normalisation de C (resp. \tilde{C}), $\pi' : \tilde{N} \rightarrow N$ le morphisme déduit de π ; c'est un revêtement d'ordre 2, ramifié aux points de $n^{-1}(\text{Sing}(C))$.

0.3.2. Soient $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un pseudo-revêtement, ι l'involution de \tilde{C} correspondante. La variété de Prym P associée à π est définie par : $P = (\text{Ker } Nm)^0 = \text{Im}(1 - \iota) \subset J\tilde{C}$.

On a montré dans ([B], 2.1 et 3.7) que la polarisation principale sur $J\tilde{N}$ induisait sur P (via le morphisme $P \hookrightarrow J\tilde{C} \xrightarrow{\tilde{n}^*} J\tilde{N}$) le double d'une polarisation principale ξ .

Nous aurons besoin d'une définition de P en termes du revêtement $\pi' : \tilde{N} \rightarrow N$:

PROPOSITION 0.3.3. — Soit H' le sous-groupe de $\text{Pic}(\tilde{N})$ engendré par les fibrés $\mathcal{O}_{\tilde{N}}(s_1 - s_2)$ avec $n(s_1) = \tilde{n}(s_2)$; notons H_0 le sous-groupe $H' \cap J\tilde{N}(k)$ ($J\tilde{N}(k)$ étant considéré comme un sous-groupe de $\text{Pic}(\tilde{N})$) et H l'image de H_0 dans la variété abélienne $Q = J\tilde{N}/\pi'^*JN$. Alors H est formé de points d'ordre 2, et le quotient Q/H est naturellement isomorphe à P .

Démonstration. — Notons K le noyau de l'endomorphisme $(1 - \iota)$ de $J\tilde{C}$, de sorte que $P \cong J\tilde{C}/K$. Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \tilde{T} \rightarrow J\tilde{C} \xrightarrow{\tilde{n}^*} J\tilde{N} \rightarrow 0.$$

On sait ([B]) que ι agit trivialement sur \tilde{T} , donc $K \supset \tilde{T}$ et

$$P \cong J\tilde{C}/K \cong J\tilde{N}/\tilde{n}^*(K).$$

Il reste à calculer $\tilde{n}^*(K)$. On utilisera le lemme élémentaire suivant :

LEMME 0.3.4. — Soit L un faisceau inversible sur \tilde{C} tel que $\iota^* L \cong L$. On peut trouver un diviseur D sur \tilde{C} tel que $L = \mathcal{O}(D)$ et $D = \iota D$.

Démonstration. — Soit E un diviseur sur \tilde{C} tel que $L = \mathcal{O}(E)$; alors $E - \iota E = \text{div}(\varphi)$, où φ est une fonction rationnelle sur \tilde{C} . On a donc $\text{div}(\varphi \cdot \iota^* \varphi) = 0$, ce qui permet de supposer $\varphi \cdot \iota^* \varphi = 1$. On peut alors trouver une fonction rationnelle ψ telle que $\varphi = \psi \cdot (\iota^* \psi)^{-1}$ (si u est une fonction sur \tilde{C} telle que $\iota^* u = -u$, il suffit de prendre $\psi = u \cdot (\varphi - 1)$); on prendra $D = E - \text{div}(\psi)$.

Fin de la démonstration de (0.3.3). — Avec les notations de ([B], § 3), un diviseur D tel que $D = \iota D$ peut s'écrire :

$$D = \pi^* E + \sum_{s \in \text{Sing}(\tilde{C})} (\lambda_s, p_s, q_s)_s \quad \text{avec } p_s \equiv q_s \pmod{2}.$$

Dans cette écriture on peut évidemment supposer que le diviseur E est de degré nul sur chaque composante.

Notons $\Sigma' = \tilde{n}^{-1}(\text{Sing}(\tilde{C}))$; soit M le sous-groupe de $\mathbf{Z}^{\Sigma'}$ formé des $(r_s)_{s \in \Sigma'}$, tels que

— $\sum r_s = 0$ pour $s \in \Sigma' \cap \tilde{N}_i$, ceci pour toute composante \tilde{N}_i de \tilde{N} ;

— $-r_{s_1} \equiv r_{s_2} \pmod{2}$ quand $\tilde{n}(s_1) = \tilde{n}(s_2)$.

Notons α l'application évidente de $\mathbf{Z}^{\Sigma'}$ dans $\text{Pic}(\tilde{N})$. On peut alors traduire ce qui précède par l'égalité :

$$\tilde{n}^*(K) = \pi'^* JN + \alpha(M).$$

Désignons par I l'ensemble des composantes de \tilde{N} ; considérons le diagramme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M' & \rightarrow & \mathbf{Z}^{\Sigma'} & \longrightarrow & \mathbf{Z}^I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow 2 & & \downarrow (2,0) & & \\ 0 & \rightarrow & M & \rightarrow & \mathbf{Z}^{\Sigma'} & \rightarrow & \mathbf{Z}^I \oplus (\mathbf{Z}/2)^{\text{Sing}(\tilde{C})} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

On en déduit par le lemme du serpent la suite exacte :

$$0 \rightarrow M/j(M') \rightarrow (\mathbf{Z}/2)^{\Sigma'} \rightarrow (\mathbf{Z}/2)^I \oplus (\mathbf{Z}/2)^{\text{Sing}(\tilde{C})} \rightarrow 0.$$

Il est clair que $\alpha j(M') \subset \pi'^* JN$; on conclut aussitôt de ce qui précède que

$$\tilde{n}^* K = \pi'^* JN + \alpha(M) = \pi'^* JN + H_0,$$

ce qui démontre la proposition.

EXERCICE 0.3.5. — On associe à C (ou à \tilde{C} , cela revient au même) un graphe Γ de la façon suivante :

- les sommets de Γ correspondent aux composantes irréductibles de C ;
- les arêtes de Γ correspondent aux points doubles de C ;
- le ou les deux sommets d'une arête associée à un point double s correspondent à la ou les deux composantes de C passant par s .

Alors il existe un homomorphisme surjectif : $H_1(\Gamma, \mathbf{Z}/2) \rightarrow H$, dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$.

0.4. K-THÉORIE. — Soit C_k la catégorie des variétés quasi-projectives sur un corps k . Pour $X \in \text{Ob}(C_k)$, nous noterons $K(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux localement libres sur X ; il est égal au groupe de Grothendieck des complexes parfaits sur X ([SGA 6], IV, 2), groupe noté $K'(X)$ dans ([SGA 6]). Nous utiliserons librement ces deux interprétations.

Le produit tensoriel munit $K(X)$ d'une structure d'anneau. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de C_k ; l'image réciproque définit un homomorphisme d'anneaux

$$f^*: K(Y) \rightarrow K(X).$$

Si f est propre et de tor-dimension finie, l'image directe Rf_* définit un morphisme de groupes $f_*: K(X) \rightarrow K(Y)$ ([SGA 6], IV, 2.12).

Nous considérons sur $K(X)$ la « filtration topologique » définie comme suit ([SGA 6], VI, 6.5) : un élément x de $K(X)$ appartient à $K(X)_i$ si et seulement si pour tout fermé Y de X , il existe un complexe parfait M' , de classe x dans $K(X)$, tel que

$$\text{Codim}(Y \cap \text{Supp}(H^*(M')), Y) \geq i \quad \text{avec} \quad H^*(M') = \bigoplus_p H^p(M').$$

La filtration topologique est une filtration d'anneau; si $d = \dim(X)$, on a $K(X)_{d+1} = 0$ ([SGA 6], VI, 6.6).

PROPOSITION 0.4.2. — (i) Si $f: X \rightarrow Y$ est quasi-fini, on a

$$f^* K(Y)_p \subset K(X)_p, \quad \text{pour tout } p;$$

(ii) Si f est propre, de tor-dimension finie et équidimensionnel, et si X et Y sont équidimensionnels, on a

$$f_* K(X)_p \subset K(Y)_{p-r}, \quad \text{avec } r = \dim(X) - \dim(Y).$$

Démonstration. — Prouvons (i). Soient y un élément de $K(Y)_p$, X' un fermé de X ; posons $Y' = \overline{f(X')}$. Choisissons un complexe parfait M' , de classe y dans $K(Y)$, tel que : $\text{Codim}(Y' \cap \text{Supp } H^*(M'), Y') \geq p$. Il est clair que

$$\text{Supp } H^*(f^* M') \subset f^{-1}(\text{Supp } H^*(M'));$$

dès lors :

$$\text{codim}(X' \cap \text{Supp } H^*(f^* M'), X') \geq \text{codim}(Y' \cap \text{Supp } H^*(M'), Y') \geq p,$$

donc $f^* y \in K(X)_p$.

Démontrons (ii). Soient x un élément de $K(X)_p$, Y' un fermé de Y , $X' = f^{-1}(Y')$. Choisissons un complexe parfait M' , de classe x dans $K(X)$, tel que

$$\text{Codim}(X' \cap \text{Supp } H^*(M'), X') \geq p.$$

On a : $\text{Supp } H^*(Rf_* M') \subset f(\text{Supp } H^*(M'))$ et par suite, puisque f est équidimensionnel :

$$\text{Codim}(Y' \cap \text{Supp } H^*(Rf_* M'), Y') \geq \text{Codim}(X' \cap \text{Supp } H^*(M'), X') - r \geq p - r,$$

c'est-à-dire $f_* x \in K(Y)_{p-r}$.

0.4.3. On pose $G^p K(X) = K(X)_p / K(X)_{p+1}$ pour tout p ; dans la situation de (i) [resp. (ii)], f induit un homomorphisme de groupes :

$$f^*: G^p K(Y) \rightarrow G^p K(X) \quad [\text{resp. } f_*: G^p K(X) \rightarrow G^{p-r} K(Y)].$$

0.4.4. Si X est lisse sur k , on sait ([SGA 6], IV, 2.5) que $K(X)$ s'identifie au groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X . On définit alors un homomorphisme γ du groupe des cycles de X dans $K(X)$ de la façon suivante ([SGA 6], 0, app. p. 28) : Si Z est une sous-variété intègre de X , on pose : $\gamma(Z) = \{ \text{classe de } \mathcal{O}_Z \}$; on étend ensuite γ aux cycles par linéarité. On en déduit une seconde filtration (F^p) sur $K(X)$, $F^p K(X)$ étant le sous-groupe de $K(X)$ engendré par les $\gamma(Z)$ pour Z cycle de codimension $\geq p$ dans X .

LEMME 0.4.4. — On a $F^p K(X) = K(X)_p$ (X lisse sur k).

Démonstration. — Il est clair que $K(X)_p \subset F^p K(X)$; on va prouver par récurrence que $F^p K(X) \subset K(X)_p$ pour tout $p \geq 0$. C'est clair pour p grand; supposons démontré que $F^{p+1} K(X) \subset K(X)_{p+1}$ et montrons que $F^p K(X) \subset K(X)_p$, c'est-à-dire que $\gamma(Z) \in K(X)_p$ si Z est un cycle de codimension $\geq p$ dans X . Or si Z' est un cycle rationnellement équivalent à Z , on a $\gamma(Z') - \gamma(Z) \in F^{p+1} K(X)$ ([SGA 6], 0, app. 2.12); par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut bouger Z dans sa classe d'équivalence rationnelle. Par suite si Y est une sous-variété fermée de X , on peut par le lemme de Chow supposer que $\text{codim}(Y \cap Z, Y) \geq p$; on en conclut que $\gamma(Z) \in K(X)_p$, d'où le lemme.

0.4.5. Il résulte du lemme que l'application γ donne par passage au quotient un homomorphisme $C : C^p(X) \rightarrow G^p K(X)$.

0.4.6. Revenons à une variété $X \in \text{Ob}(C_k)$ quelconque. On montre facilement (nous n'en aurons pas besoin) que le rang des fibrés vectoriels définit un isomorphisme $G^0 K(X) \xrightarrow{\sim} H^0(X, Z)$. De même, le déterminant (puissance extérieure maximale d'un fibré vectoriel) définit un homomorphisme de groupes : $K(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$.

LEMME 0.4.7. — Si X vérifie la propriété S_2 ([EGA], IV, 5.7.2), le déterminant définit un homomorphisme :

$$\det : G^1 K(X) \rightarrow \text{Pic}(X).$$

Démonstration. — Il faut montrer que $\det(x) = 0$ si $x \in K(X)_2$. Or on peut représenter x par un complexe parfait M^\bullet tel que $S = \text{Supp } H^*(M^\bullet)$ soit de codimension ≥ 2 dans X . Alors $\det(M^\bullet) = \bigotimes_i (\Lambda^{\max} M^i)^{(-1)^i}$ est un faisceau inversible sur X , dont la restriction à $X-S$ est triviale; donc $\det(M^\bullet) \cong \mathcal{O}_X$, ce qui démontre le lemme.

CHAPITRE I

Fibrés en quadriques

On rappelle que dans toute la suite, on désigne par k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$.

DÉFINITION 1.1. — Un fibré en quadriques est une variété complète, connexe, lisse sur k , munie d'un morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ dont les fibres sont isomorphes à des quadriques de dimension constante m .

(On appelle quadrique le schéma des zéros d'une forme homogène de degré 2 dans l'espace projectif.)

Quand $m = 1$, on parlera de fibrés en coniques. On se permettra par abus de langage de dire qu'une variété X est un fibré en quadriques, sans mentionner explicitement l'application $X \rightarrow \mathbf{P}^2$.

PROPOSITION 1.2. — (i) *Le morphisme f est plat.*

(ii) *Il existe un fibré vectoriel E , de rang $m + 2$, un entier k et une forme $q \in H^0(\mathbf{P}^2, S^2 E(k))$ telle que X s'identifie au schéma des zéros de q dans le fibré projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^2}(E)$.*

(iii) *Il existe une courbe $C \subset \mathbf{P}^2$, lisse ou ayant au plus des points doubles ordinaires, telle que*

- *pour $s \in \mathbf{P}^2 - C$, la fibre X_s est non-singulière;*
- *pour s régulier dans C , la fibre X_s a exactement un point singulier;*
- *si s est un point double de C , X_s a une droite singulière.*

Démonstration. — La platitude de f résulte par exemple de ([EGA], IV, 15.4.2). L'assertion (ii) est équivalente à l'existence d'un faisceau inversible L sur X induisant sur chaque fibre X_s le faisceau $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ des sections hyperplanes (on prendra en effet $E = f_*(L)$). Notons que le faisceau inversible ω_X des différentielles de degré maximum (ou, ce qui revient au même, le faisceau dualisant ω_{X/\mathbf{P}^2} , qui existe puisque f est un morphisme d'intersection complète) induit sur chaque fibre le faisceau dualisant $\omega_{X_s} = \mathcal{O}_{X_s}(-m)$; cela résout la question pour $m = 1$ ($L = \omega_X^{-1}$), tandis que pour $m = 0$ on peut prendre $L = \mathcal{O}_X$. Supposons donc $m \geq 2$. Soit X_η la fibre générique de f . Comme X est non-singulière et donc localement factorielle, il existe un faisceau inversible L sur X induisant sur X_η le faisceau $\mathcal{O}_{X_\eta}(1)$. Considérons le faisceau $M = \omega_X \otimes L^m$. Il est trivial sur la fibre générique; puisque f est plat, le théorème de semi-continuité montre alors que pour tout point s de \mathbf{P}^2 , le faisceau $M_s = M|_{X_s}$ et son inverse admettent une section non nulle. Si la quadrique X_s est irréductible, il est clair que ceci entraîne que M_s est trivial; mais c'est aussi le cas si X_s est réductible, car son groupe de Picard est alors engendré par $\mathcal{O}_{X_s}(1)$ (puisque $\dim(X_s) \geq 2$). On a donc :

$$(L|_{X_s})^{\otimes m} \cong \mathcal{O}_{X_s}(m) \quad \text{pour tout } s \in \mathbf{P}^2.$$

Comme $\text{Pic}(X_s)$ est sans torsion, on voit que $L|_{X_s} \cong \mathcal{O}_{X_s}(1)$, ce qui démontre (ii).

Démontrons (iii). Remarquons d'abord que la fibre générique X_η est lisse sur le corps $k(\eta)$: en effet X_η est un schéma régulier, et une quadrique régulière est géométriquement régulière en caractéristique $\neq 2$. Dès lors l'ensemble des points s de \mathbf{P}^2 tels que X_s n'est pas lisse est une courbe C , définie par l'annulation du discriminant

$$\Delta \in H^0(\mathbf{P}^2, S^2(\Lambda^{m+2} E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}((m+2)k)).$$

Plaçons-nous en un point fermé s de C . Il existe un voisinage ouvert U de s dans \mathbf{P}^2 tel que $f^{-1}(U)$ soit défini dans $U \times \mathbf{P}^{m+1}$ par l'annulation de la forme :

$$q = \sum_{i \leq j} A_{ij} X_i X_j, \quad A_{ij} \in H^0(U, \mathcal{O}_U) \quad (0 \leq i \leq j \leq m+1).$$

On peut supposer $U \subset \mathbb{A}^2$, et choisir des coordonnées u, v sur U qui s'annulent en s .

Supposons que le lieu singulier de X_s soit de dimension ≥ 2 : on peut donc supposer : $A_{ij}(s) = 0$ pour $0 \leq i \leq j \leq 2$.

Mais alors le système jacobien des deux équations :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial u}(s) \cdot X_i X_j = 0, \quad \sum_{0 \leq i \leq j \leq 2} \frac{\partial A_{ij}}{\partial v}(s) \cdot X_i X_j = 0,$$

a une solution non triviale, qui définit un point singulier de X , ce qui contredit l'hypothèse.

Si maintenant le lieu singulier de X_s est une droite, on peut supposer que l'équation de X_s s'écrit :

$$X_2^2 + \dots + X_{m+1}^2 = 0.$$

Posons

$$A_{ij} = l_{ij} + (\text{termes de degré } \geq 2 \text{ en } u, v) \quad 0 \leq i \leq j \leq 1$$

avec

$$l_{ij} = a_{ij}u + b_{ij}v \quad (a_{ij}, b_{ij} \in k).$$

Le développement en s du discriminant Δ s'écrit alors :

$$\Delta = 4 l_{00} l_{11} - l_{01}^2 + (\text{termes de degré } \geq 3 \text{ en } u, v).$$

La lissité de X le long de la droite $X_2 = \dots = X_{m+1} = 0$ implique que le système jacobien :

$$\begin{aligned} a_{00} X_0^2 + a_{01} X_0 X_1 + a_{11} X_1^2 &= 0, \\ b_{00} X_0^2 + b_{01} X_0 X_1 + b_{11} X_1^2 &= 0, \end{aligned}$$

n'a pas de solution non triviale. On voit en particulier que les formes l_{00}, l_{01}, l_{11} ne peuvent être proportionnelles à une même forme; on peut donc supposer :

$$l_{00} = u, \quad l_{01} = v \quad \text{et} \quad l_{11} = \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in k.$$

La condition que le système jacobien n'a pas de solution s'écrit alors $\alpha^2 + \beta \neq 0$; or $4(\alpha^2 + \beta)$ est le discriminant de la forme quadratique $4 l_{00} l_{11} - l_{01}^2$. On en conclut que s est un point double ordinaire de C .

Supposons enfin que X_s ait un seul point singulier p ; son équation peut alors s'écrire :

$$X_1^2 + \dots + X_{m+1}^2 = 0, \quad p = (1, 0, \dots, 0).$$

Donc le développement en s du discriminant est :

$$\Delta = A_{00} + (\text{termes de degré } \geq 2 \text{ en } u, v).$$

Or la lissité de X en p entraîne que A_{00} contient un terme linéaire (non nul) en u, v ; donc s est un point non-singulier de C .

DÉFINITION 1.3. — On dira qu'un fibré en quadriques est ordinaire si la courbe C est non-singulière, spécial dans le cas contraire.

Exemples 1.4. — 1.4.1. Après éclatement d'une droite, l'hypersurface cubique dans \mathbf{P}^4 est un fibré en coniques (c'est l'exemple qui a motivé cette théorie, cf. [C-G], app. C) : le morphisme f est donné par la projection depuis la droite considérée. Il se trouve que dans ce cas, pour n'importe quelle cubique non-singulière, un choix convenable (d'ailleurs générique) de la droite donne un fibré en quadriques ordinaire. Cette situation est exceptionnelle : dans toutes les autres familles que l'on va considérer, la courbe C sera bien déterminée par la variété X ; elle sera non-singulière dans le cas générique, mais deviendra singulière pour certaines variétés particulières (lisses) de la famille. On ne peut donc éviter l'étude des fibrés en quadriques spéciaux.

1.4.2. Plus généralement, une hypersurface cubique dans \mathbf{P}^{m+3} , contenant un sous-espace projectif H de dimension m , devient après éclatement de H un fibré en quadriques. La courbe C est de degré $m+4$.

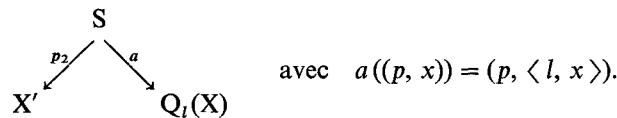
1.4.3. Une hypersurface quartique dans \mathbf{P}^4 contenant une droite double (ou, plus généralement, une hypersurface de degré n dans \mathbf{P}^4 contenant une droite avec multiplicité $(n-2)$) devient un fibré en coniques après éclatement de la droite singulière.

1.4.4. Soit X une variété non-singulière dans \mathbf{P}^n ($n \geq 6$), intersection complète de trois quadriques. Alors X est birationnellement équivalente à un fibré en quadriques.

Démonstration. — Notons Π le réseau de quadriques de \mathbf{P}^n contenant X ; on identifiera Π à un plan projectif, et on notera Q_p la quadrique de \mathbf{P}^n contenant X correspondant à un point fermé p de Π .

On vérifie aussitôt que X contient une droite l . Notons G_l la variété (isomorphe à \mathbf{P}^{n-2}) des plans projectifs contenus dans \mathbf{P}^n et contenant l . Soit $Q_l(X)$ la sous-variété de $\Pi \times G_l$ dont les points fermés sont les paires (p, π) telles que $\pi \subset Q_p$. La projection $f : Q_l(X) \rightarrow \Pi$ fait de $Q_l(X)$ un fibré en quadriques de dimension $(n-3)$. On vérifie immédiatement que la sous-variété de G_l formée des plans contenus dans Q_p est singulière si et seulement si la quadrique Q_p l'est, de sorte que la courbe C a pour points fermés les points $s \in \Pi$ tels que Q_s soit singulière. La courbe C , définie dans Π par l'annulation d'un déterminant symétrique d'ordre $(n+1)$, à coefficients linéaires, est donc de degré $(n+1)$.

Notons X' la variété obtenue par éclatement de X le long de l , et S la sous-variété de $\Pi \times X'$ dont les points fermés sont les couples (p, x) tels que $\langle l, x \rangle \subset Q_p$ ($\langle l, x \rangle$ désigne le plan engendré par l et x ; ce symbole a un sens pour tout point fermé x de X'). On a un diagramme :



Il est immédiat que p_2 et a sont des morphismes birationnels; ainsi X est birationnellement isomorphe à $Q_l(X)$.

Cet exemple sera étudié en détail au chapitre VI.

1.4.5. Soit S une surface de degré 4 dans \mathbf{P}^3 ayant un point double ordinaire p , et telle que $S-p$ soit non-singulière; soient X' le revêtement double de \mathbf{P}^3 ramifié le long

de S , X la variété obtenue par éclatement de X' en p . Alors la projection de \mathbf{P}^3 sur \mathbf{P}^2 de centre p , composée avec le morphisme $X \rightarrow \mathbf{P}^3$, fait de X un fibré en coniques. La courbe C , isomorphe à la variété des droites de \mathbf{P}^3 passant par p et tangentes à S , est de degré 6. Ses éventuels points doubles correspondent aux droites passant par p et contenues dans S .

1.4.6. Soit X' l'intersection dans \mathbf{P}^5 d'une quadrique et d'une cubique contenant un sous-espace projectif H de dimension 2. Dans la situation générale, X' admet 7 points doubles ordinaires, situés sur H , et est lisse en dehors de ces points; on supposera cette condition réalisée. Soit R la variété obtenue en éclatant \mathbf{P}^5 le long de H ; le transformé strict X de X' dans R est une variété non-singulière. La projection de sommet H fait de X un fibré en coniques.

On peut déterminer le degré de la courbe discriminante C par le calcul; on peut aussi le trouver géométriquement, de la façon suivante : il s'agit de calculer le nombre de points d'intersection de C avec une droite assez générale; autrement dit, le nombre de coniques dégénérées, deux fois incidentes à H , contenues dans un hyperplan donné P contenant H .

Soit P' le transformé strict de P dans R . La surface $P' \cap X$ (qu'on peut supposer non-singulière) est l'intersection résiduelle d'une quadrique et d'une cubique dans \mathbf{P}^4 ayant un \mathbf{P}^2 commun; on sait ([S-R], § VII, exemple 30) qu'elle est isomorphe au plan projectif éclaté en 8 points P_0, P_1, \dots, P_7 , plongé dans \mathbf{P}^4 par le système linéaire des quartiques passant doublement par P_0 et simplement par P_1, \dots, P_7 . Il est alors immédiat de vérifier que les seules droites contenues dans $P' \cap X$ sont d'une part les droites exceptionnelles E_i ($i = 1, \dots, 7$) et d'autre part les transformés stricts L_i des droites $P_0 P_i$ de \mathbf{P}^2 ($i = 1, \dots, 7$). De plus l'intersection de X avec H est le transformé strict d'une cubique de \mathbf{P}^2 passant par P_0, \dots, P_7 , de sorte que toutes les droites E_j, L_k rencontrent H . On obtient donc 7 coniques dégénérées $E_i \cup L_i$; par suite C est de degré 7.

1.5. FIBRÉS EN QUADRIQUES DE DIMENSION IMPAIRE. — Dans la suite on s'intéressera essentiellement aux fibrés en quadriques de dimension impaire. On va associer à un tel fibré $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$, avec $\dim(X) = 2n + 1$, un revêtement double de la courbe discriminante C [un pseudo-revêtement (0.3.1) si C est singulière] de la façon suivante :

Avec les notations de 1.2 (ii), désignons par $G_n(E)$ la grassmannienne des n -plans de $\mathbf{P}(E)$: un point rationnel de $G_n(E)$, au-dessus d'un point $s \in \mathbf{P}^2$, correspond à la donnée d'un sous-espace \mathbf{P}^n de $\mathbf{P}(E(s)) = \mathbf{P}^{2n}$. On note $G(f)$ la sous-variété de $G_n(E)$ dont les points rationnels au-dessus de s correspondent aux sous-espaces \mathbf{P}^n qui sont contenus dans la quadrique $X_s \subset \mathbf{P}(E(s))$.

La projection $G(f) \rightarrow \mathbf{P}^2$ se factorise à travers C , et on va considérer sa factorisation de Stein :

$$G(f) \xrightarrow{g} \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C \subset \mathbf{P}^2.$$

PROPOSITION 1.5. — Si C est non-singulière (resp. singulière), $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ est un revêtement étale de degré 2 (resp. un pseudo-revêtement (0.3.1)); le morphisme $g : G(f) \rightarrow \tilde{C}$ est une fibration localement triviale pour la topologie de Zariski. De plus il existe un ouvert U

de \tilde{C} , contenant les points singuliers de \tilde{C} , tel que la restriction de g à $g^{-1}(U)$ soit une fibration triviale.

Démonstration. — 1.5.1. Traitons d'abord le cas $n = 1$. Alors $G(f)$ est fini sur C , donc $G(f) = \tilde{C}$; il reste à montrer que le morphisme $G(f) \rightarrow C$ est un pseudo-revêtement. Si s est un point non-singulier de C , X_s est la réunion de deux droites distinctes, donc $G(f)_s$ se compose de deux points; il en résulte (par exemple par [EGA], IV, 18.10.16) qu'il existe un ouvert U de C contenant s tel que la restriction de π à $\pi^{-1}(U)$ soit un revêtement étale de degré 2.

Soit maintenant s un point double de C . Notons A le complété (ou si l'on préfère l'hensélisé) de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, s}$, et $X_A = X \times_{\mathbf{P}^2} \text{Spec}(A)$.

LEMME 1.5.2. — L'équation de X_A dans \mathbf{P}_A^2 peut s'écrire :

$$uX^2 + vY^2 - T^2 = 0 \quad \text{avec } A = k[[u, v]].$$

Démonstration. — L'équation de X_A est une forme quadratique sur le A -module libre de rang 3 M . Choisissons une section de $\mathbf{P}_A^2 - X_A$ au-dessus de $\text{Spec}(A)$; une telle section correspond à un élément m de M partout $\neq 0$, tel que $q(m)$ soit inversible dans A . On a donc $M = (A.m) \oplus (A.m)^\perp$; autrement dit, on peut écrire l'équation de X_A sous la forme :

$$q(X, Y, T) = T^2 + aX^2 + bXY + cY^2, \quad a, b, c \in A.$$

De plus X est supposée non-singulière; en appliquant le critère jacobien, on voit comme dans la démonstration de [1.2 (iii)] qu'on peut supposer

$$c = \alpha a + \beta b, \quad \alpha, \beta \in A,$$

avec $\alpha + \beta^2$ inversible.

Soit $\lambda \in A$ une solution de l'équation $\lambda^2 + 2\lambda\beta - \alpha = 0$; alors $\lambda + \beta$ est inversible; on vérifie immédiatement que les changements de variable :

$$X = X' + \lambda Y, \quad \text{puis } Y = Y' - \frac{1}{2}(\lambda + \beta)^{-1} \cdot X',$$

permettent d'écrire q sous la forme cherchée.

1.5.3. Écrivons l'équation de X_A sous la forme précédente. On a alors

$$\hat{\mathcal{O}}_{C, s} = k[[u, v]]/(uv);$$

on peut identifier $G(f)_A = G(f) \times_{\mathbf{P}^2} \text{Spec}(A)$ à un sous-schéma fermé de \mathbf{A}_A^2 , en écrivant une droite dans \mathbf{P}_A^2 sous la forme :

$$T = xX + yY, \quad x, y \text{ étant les coordonnées sur } \mathbf{A}_A^2.$$

Cette droite est contenue dans X_A si et seulement si :

$$x^2 = u, \quad y^2 = v, \quad xy = 0.$$

Donc si $\{\tilde{s}\} = \pi^{-1}(s)$, on voit que $\mathcal{O}_{\tilde{C}, \tilde{s}} \cong k[[x, y]]/(xy)$, avec $x^2 = u$, $y^2 = v$: autrement dit π est un pseudo-revêtement en s .

1.5.4. Pour traiter le cas général, on utilise le :

LEMME 1.5.4. — Pour tout $s \in C$, il existe un ouvert U de C contenant s , tel que $X_U = f^{-1}(U)$ puisse être défini dans $U \times \mathbf{P}^{2n}$ par l'équation :

$$X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + T^2 + q(X, Y) = 0,$$

où q est une forme quadratique en deux variables, à coefficients dans $H^0(U, \mathcal{O}_U)$. De plus si s est singulier, on peut supposer que U contient tous les points singuliers de C .

Démonstration. — Soit $U = \text{Spec}(A)$ un ouvert de C tel que X_U soit défini par une forme quadratique F sur le A -module M libre de rang $(2n+1)$. Supposons d'abord U non-singulier. Quitte à restreindre U , on peut supposer que le noyau de F est libre (de rang 1), et qu'il admet un supplémentaire M' libre de rang $2n$.

La restriction de F à M' définit un diviseur Q dans $\mathbf{P}_U(M')$, muni d'un morphisme lisse $q : Q \rightarrow U$ dont les fibres sont des quadriques de dimension $(2n-2)$. Supposons $n \geq 2$; comme le corps des fonctions rationnelles sur U est C_1 ([L 1]), q possède des sections locales, qui se prolongent à U tout entier puisque U est non-singulier. Une telle section correspond à un élément e de M' , partout $\neq 0$, tel que $F(e) = 0$. Comme la restriction à M' de la forme bilinéaire φ associée à F est non-dégénérée en tout point, il existe un élément f' de M' tel que $\varphi(e, f') = 1$. Posons $f = f' - (1/2) F(f').e$; alors e, f engendrent un plan hyperbolique H dans M' . On peut continuer en appliquant le procédé à H ; on arrive ainsi à une équation de la forme :

$$F = X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + a T^2 + b TX + c X^2.$$

Par un changement des variables T, X , on peut supposer a inversible dans U et $b = 0$; en multipliant les coordonnées X_0, \dots, X_{2n-4} par a , on arrive finalement à

$$F = X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + T^2 + \delta X^2 = 0, \quad \delta \in H^0(U, \mathcal{O}_U^*).$$

Supposons maintenant que U contienne tous les points singuliers s_1, \dots, s_r de C . Notons $K_i \subset M \otimes_A k(s_i)$ le noyau de F en s_i . Quitte à restreindre U , on peut trouver une décomposition :

$$M = R \oplus M',$$

où :

- R et M' sont des modules libres, de rang 2 et $(2n-1)$ respectivement ;
- $R \otimes_A k(s_i) = K_i$ pour tout i ;
- la restriction de F à M' est non-dégénérée en tout point.

Soit encore $q : Q \rightarrow U$ le morphisme lisse défini par la restriction de F à M' ; les fibres de q sont des quadriques de dimension $(2n-3)$. Notons $n : V \rightarrow U$ la normalisation de U , $Q' = Q \times_U V$, n', q' les projections de Q' sur Q, V . Le morphisme q' admet comme précédemment des sections globales; une telle section e' définira une section de q si l'on a :

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{n'} & Q \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ V & \xrightarrow{n} & U \end{array}$$

$n' e' (s'_i) = n' e' (s''_i)$ pour tout i , avec $\{s'_i, s''_i\} = n^{-1}(s_i)$. Fixons une section quelconque e_0 de q' ; par projection depuis $e_0(V)$, on obtient (en restreignant éventuellement U et V) une V -application birationnelle $t : Q' \dashrightarrow V \times \mathbf{P}^{2n-3}$. Choisissons des points $a'_1, a''_1; \dots; a'_r, a''_r$ dans \mathbf{P}^{2n-3} tels que l'application t^{-1} soit définie aux points (s'_i, a'_i) et (s''_i, a''_i) pour $1 \leq i, j \leq r$, et tels que

$$n' t^{-1}((s'_i, a'_i)) = n' t^{-1}((s''_i, a''_i)) \text{ pour tout } i.$$

On peut trouver un morphisme $u : V \rightarrow \mathbf{P}^{2n-3}$ tel que

$$u(s'_i) = a'_i, \quad u(s''_i) = a''_i \text{ pour tout } i.$$

L'application rationnelle $e : V \rightarrow Q'$ définie par $e(v) = t^{-1}((v, u(v)))$ se prolonge en une section e' de q' , qui vérifie $n' e' (s'_i) = n' e' (s''_i)$ pour tout i ; elle provient donc par changement de base d'une section globale de q au-dessus de U .

On peut alors appliquer l'argument du cas U non-singulier; on conclut que dans une base convenable :

$$F = X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + q(X, Y, T).$$

On peut de plus supposer que le coefficient de T^2 dans q est inversible dans U , ce qui permet, après changement de variable, d'écrire F sous la forme cherchée.

1.5.5. Démontrons à présent la proposition 1.5. On peut supposer (1.5.4) que X_C est défini dans $C \times \mathbf{P}^{2n}$ par l'équation :

$$X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + T^2 + q(X, Y) = 0.$$

Fixons quelques notations :

L = sous-espace de \mathbf{P}^{2n} défini par $X_0 = X_1 = \dots = X_{2n-3} = 0$;

$f_0 : X_0 \rightarrow \mathbf{P}^2$: fibré en coniques défini par : $q(X, Y) + T^2 = 0$;

P = sous-espace de \mathbf{P}^{2n} défini par $X = Y = 0$;

Q = quadrique d'équation $X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + T^2 = 0$ dans P ;

$G(Q)$ = variété (lisse connexe) des sous-espaces \mathbf{P}^{n-2} contenus dans Q ;

P' = sous-espace de \mathbf{P}^{2n} défini par $X = Y = T = 0$;

Q' = quadrique d'équation $X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} = 0$ dans P ;

$G_1(Q')$ = une des deux composantes de la variété des sous-espaces \mathbf{P}^{n-2} contenus dans Q' .

La proposition résultera aussitôt de (1.5.2) et du :

LEMME 1.5.5. — Il existe un C -isomorphisme $G(f) \xrightarrow{\sim} G(f_0) \times H(Q)$.

Démonstration. — Soit t un point fermé de C . Si W est un sous-espace \mathbf{P}^n contenu dans X_t , $W \cap P$ est un sous-espace \mathbf{P}^{n-2} contenu dans Q ; on définit ainsi un morphisme :

$$a : G(f) \rightarrow G(Q).$$

Pour $H \in G_1(Q')$, notons $G^H(f)$ l'ouvert de $G(f)$ dont les points rationnels au-dessus de t sont les sous-espaces W tels que

$$W \cap H = \emptyset, \quad \langle W, H \rangle \not\subset L,$$

($\langle W, H \rangle$ désigne le sous-espace engendré par W et H ; si $W \cap H = \emptyset$, c'est un hyperplan dans \mathbf{P}^{2n}).

On vérifie sans peine que lorsque $W \in G^H(f)_t$, $\langle W, H \rangle \cap L$ est une droite contenue dans $(X_0)_t$, et qu'on définit ainsi un morphisme $b : G^H(f) \rightarrow G(f_0)$. Considérons alors le morphisme :

$$\varphi_H : G^H(f) \xrightarrow{(b,a)} G(f_0) \times G(Q).$$

Un calcul élémentaire montre que φ_H est un isomorphisme de $G^H(f)$ sur l'ouvert de $G(f_0) \times G(Q)$, dont les points au-dessus de $t \in C$ sont les paires (l, W_1) tel que $W_1^0 \cap H = \emptyset$ (W_1^0 désignant le conjugué de W_1 par rapport à la quadrique X_t); l'isomorphisme inverse est donné par :

$$(l, W_1) \mapsto \langle W_1, l' \rangle \quad \text{avec} \quad l' = W_1^0 \cap \langle l, H \rangle.$$

On voit ainsi en particulier que $G^H(f)$ est réduit.

Pour W fixé dans $G(f)_t$, l'ensemble des H tels que $W \in G^H(f)_t$ est ouvert dans $G_1(Q')$, donc irréductible; il en résulte que φ_H et $\varphi_{H'}$ coïncident ensemblistement sur $G^H(f) \cap G^{H'}(f)$, donc sont égaux sur cet ouvert (puisqu'il est réduit). Par suite les φ_H se recollent et définissent un isomorphisme au-dessus de C :

$$\varphi : G(f) \xrightarrow{\sim} G(f_0) \times G(Q).$$

Ceci achève la démonstration du lemme, et donc de la proposition (1.5).

1.5.6. Il résulte de (1.5) que le morphisme $g : G(f) \rightarrow \tilde{C}$ admet des sections globales : en effet g possède des sections au-dessus d'un ouvert U de \tilde{C} contenant $\text{Sing}(\tilde{C})$; de telles sections se prolongent globalement. On en déduit aussitôt le corollaire suivant, qui nous sera utile au chapitre II.

COROLLAIRE 1.5.6. — *Il existe un fibré projectif $h : Z \rightarrow \tilde{C}$, de dimension relative n , et un morphisme $r : Z \rightarrow X$, tels que pour tout point t de \tilde{C} : la restriction de r à Z_t est un plongement ; $r(Z_t)$ est un sous-espace \mathbf{P}^n de $X_{\pi(t)}$, correspondant à un point L_t de $G(f)$; on a $g(L_t) = t$.*

1.6. Il est utile dans la pratique d'avoir une description explicite du pseudo-revêtement π . Pour cela notons K (resp. \tilde{K}) l'anneau des fonctions rationnelles sur C (resp. \tilde{C}), c'est-à-dire le produit des corps de fonctions des composantes irréductibles de C (resp. \tilde{C}).

Le pseudo-revêtement $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ correspond à une extension quadratique $K \rightarrow \tilde{K}$, qui détermine complètement le pseudo-revêtement. Le lemme suivant permet de calculer explicitement cette extension :

LEMME 1.6. — Soit U un ouvert dense de C tel que X_U soit défini dans $U \times \mathbf{P}^{2n}$ par l'équation : $\sum A_{ij} X_i X_j = 0$, où les A_{ij} sont des fonctions sur U , donc des éléments de K . Il existe un mineur diagonal d'ordre $2n$ M_{ii} qui est non nul, et l'on a $\tilde{K} = K(\sqrt{M_{ii}})$.

Démonstration. — La matrice $M_{ij} = \Lambda^{2n}(A_{ij})$ est symétrique et de rang 1; on en déduit immédiatement que $M_{ij} = s_i s_j$, où (s_0, \dots, s_{2n}) est un vecteur non nul du noyau de (A_{ij}) . Par suite un au moins des éléments $M_{ii} = s_i^2$ est non nul.

Supposons que s_0 (et donc M_{00}) soit non nul. Par un changement de coordonnées (à coefficients dans K), on peut supposer que $A_{0i} = 0$ pour $i = 0, \dots, 2n$, et ceci sans modifier les A_{ij} pour $i, j \geq 1$. Par un second changement de coordonnées, on peut comme en 1.5.4 mettre l'équation sous la forme :

$$q(X_1, \dots, X_{2n}) = X_1 X_2 + \dots + X_{2n-3} X_{2n-2} + X_{2n-1}^2 + \delta X_{2n}^2 = 0 \quad \text{avec } \delta \in K.$$

Il résulte alors de 1.5.5 que l'on a $\tilde{K} = K(\sqrt{\delta})$. Or δ est le discriminant de la forme quadratique $q(X_1, \dots, X_{2n})$; à multiplication par un facteur carré près, il est donc égal au déterminant de la matrice $(A_{ij})_{i, j \geq 1}$, c'est-à-dire au mineur M_{00} .

Remarque 1.7 : caractéristique 2. — Il existe une notion raisonnable de fibrés en quadriques en caractéristique 2 : il faut ajouter, dans la définition 1.1, la condition que la fibre générique soit lisse sur le corps des fonctions rationnelles de \mathbf{P}^2 . Les propriétés (i) et (ii) de la proposition 1.2 restent valables; mais l'énoncé (iii) doit être modifié. En dimension paire, même si toutes les fibres X_s ont au plus un point singulier, la courbe discriminante C peut avoir des singularités arbitraires; de même, en dimension impaire, un point s de C tel que X_s possède une droite singulière peut être très singulier. Par contre, en dimension impaire, un point s tel que X_s ait un seul point singulier est un point non-singulier de C ; la notion de fibré en quadriques ordinaire de dimension impaire a donc les mêmes propriétés qu'en caractéristique $\neq 2$. En particulier, on peut définir comme en (1.5) un revêtement étale double $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$.

CHAPITRE II

Jacobienne intermédiaire d'un fibré en quadriques

Le but essentiel de ce chapitre est de démontrer le :

THÉORÈME 2.1. — Soit X un fibré en quadriques ordinaire sur C , de dimension $(2n+1)$, et soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le revêtement étale double correspondant (1.5).

(i) $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})$ est sans torsion.

(ii) La structure de Hodge sur $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z})$ est de niveau 1 (i. e.

$$H^{2n+1}(X, \mathbf{C}) \cong H^{n, n+1} \oplus H^{n+1, n}.$$

(iii) La jacobienne intermédiaire $J(X)$ (0.2.2) est canoniquement isomorphe (comme variété abélienne principalement polarisée) à la variété de Prym P associée au revêtement $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$.

Démonstration. — Posons $S' = f^{-1}(C)$. L'application qui à un point t de C associe le point singulier de X_t définit une section $e : C \rightarrow S'$. Notons $\pi : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de $e(C)$, E le diviseur exceptionnel, S le transformé propre de S' , i (resp. j) l'inclusion de E (resp. S) dans X' .

Soit $h : S \rightarrow C$ la restriction de $f \circ \varepsilon$ à S . La fibre $h^{-1}(t)$ ($t \in C$) est isomorphe à la variété obtenue par éclatement du cône X_t au point singulier. Le morphisme h se factorise en :

$$h : S \xrightarrow{p} Q \xrightarrow{q} C,$$

où :

- $p : S \rightarrow Q$ est une fibration en droites projectives;
- $q : Q \rightarrow C$ est un morphisme lisse, dont les fibres sont des quadriques (non-singulières) de dimension $(2n-2)$.

LEMME 2.2. — Il existe un isomorphisme naturel :

$$\varphi : H^1(\tilde{C}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{2n-1}(Q, \mathbf{Z}),$$

tel que :

(i) φ induit un morphisme de poids n sur les structures de Hodge (c'est-à-dire

$$\varphi(H^{p,q}(\tilde{C})) = H^{n+p, n+q}(Q) \quad \text{pour } p, q \geq 0, p+q = 1);$$

(ii) on a

$$\begin{aligned} (\varphi(a) \cdot \varphi(b)) &= (a \cdot b) & \text{si } n \text{ impair,} \\ &= (a \cdot \iota^* b) & \text{si } n \text{ pair} \end{aligned}$$

(où ι est l'involution naturelle de \tilde{C}).

Démonstration. — Comme $R^q q_*(\mathbf{Z}) = 0$ pour q impair, la suite spectrale de Leray relative à q :

$$E_2^{pq} = H^p(C, R^q q_*(\mathbf{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(Q, \mathbf{Z})$$

fournit un isomorphisme canonique :

$$\varphi' : H^1(C, R^{2n-2} q_*(\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} H^{2n-1}(Q, \mathbf{Z}).$$

D'après ([SGA 7], Exp. 12 th. 3.3 (iii)), il existe un isomorphisme :

$$u : \pi_* \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} R^{2n-2} q_*(\mathbf{Z}).$$

On en déduit par composition l'isomorphisme φ .

La propriété (i) découle directement d'un théorème de Borel ([H], app. 2, th. 2.1).

Prouvons (ii). D'après les théorèmes généraux sur les suites spectrales, la forme symplectique sur $H^{2n-1}(Q, \mathbf{Z})$ correspond *via* ϕ' à la forme symplectique sur $H^1(C, R^{2n-2} q_*(\mathbf{Z}))$ déduite du cup-produit :

$$\cup : R^{2n-2} q_*(\mathbf{Z}) \otimes R^{2n-2} q_*(\mathbf{Z}) \rightarrow R^{4n-4} q_*(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}.$$

Le comportement de l'isomorphisme u vis-à-vis du cup-produit est décrit dans ([SGA 7], Exp. 12) : si l'on note \langle , \rangle l'accouplement canonique :

$$\pi_*(\mathbf{Z}) \otimes \pi_*(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{multiplication}} \pi_*(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbf{Z},$$

on a

$$\begin{aligned} u(a) \cup u(b) &= \langle a, b \rangle && \text{si } n \text{ impair,} \\ &= \langle a, \iota^* b \rangle && \text{si } n \text{ pair.} \end{aligned}$$

Or le cup-produit sur $H^1(\tilde{C}, \mathbf{Z})$ correspond à la forme symplectique sur $H^1(C, \pi_*(\mathbf{Z}))$ déduite de l'accouplement \langle , \rangle , d'où le lemme.

2.3. Pour alléger la notation, on écrira dans la suite de la démonstration $H^*(T)$ la cohomologie entière $H^*(T, \mathbf{Z})$ d'une variété T .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{j} & X' \\ \downarrow p & & \downarrow \varepsilon \\ Q & & X \\ \downarrow q & & \downarrow f \\ C & & \mathbf{P}^2 \end{array}$$

On déduit du lemme (2.2) l'existence d'un homomorphisme :

$$\psi : H^1(\tilde{C}) \rightarrow H^{2n+1}(X),$$

défini par la composition :

$$\psi : H^1(\tilde{C}) \xrightarrow{\phi} H^{2n-1}(Q) \xrightarrow{p^*} H^{2n-1}(S) \xrightarrow{j_*} H^{2n+1}(X') \xrightarrow{\varepsilon_*} H^{2n+1}(X).$$

Il résulte immédiatement des propriétés de l'homomorphisme de Gysin que ψ induit un morphisme $\Psi : \tilde{J}\tilde{C} \rightarrow J(X)$.

LEMME 2.3. — On a

$$(\psi(a) \cdot \psi(b)) = (-1)^n (a \cdot (b - \iota^* b)) \quad \text{pour } a, b \in H^1(\tilde{C}).$$

Démonstration. — Posons $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$. Utilisant (0.1.3), on trouve :

$$\begin{aligned} (\psi(a) \cdot \psi(b)) &= (\varepsilon_* j_* p^* x \cdot \varepsilon_* j_* p^* y) = (j_* p^* x \cdot \varepsilon^* \varepsilon_* j_* p^* y), \\ &= (j_* p^* x \cdot j_* p^* y) + \sum_{r=0}^{2n-2} (j_* p^* x \cdot i_*(h^r \cdot g^* g_*(\gamma_{2n-2-r} \cdot i^* j_* p^* y))) \end{aligned}$$

[on a utilisé les notations de (0.1.3), avec $Y = C$].

CALCUL DU PREMIER TERME. — Désignons par $s \in H^2(X')$ la classe de cohomologie de S dans X' , par $m \in H^{4n-2}(Q)$ la classe fondamentale de Q (classe de cohomologie d'un point dans Q). Alors :

$$(j_* p^* x . j_* p^* y) = (p^* x . p^* y . j^* s) = (x . y) . (p^* m . j^* s).$$

Soient $c \in H^2(P^2)$ la classe de C dans P^2 , e la classe de E dans $H^2(X')$; comme $s = \varepsilon^* f^* c - 2e$, on trouve :

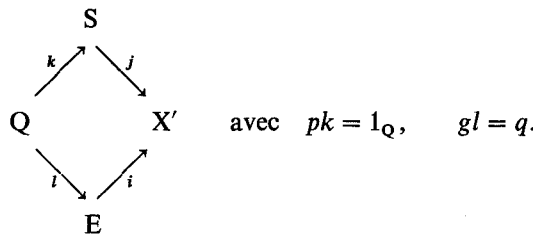
$$(p^* m . j^* s) = -2(p^* m . j^* e) = -2,$$

d'où finalement $(j_* p^* x . j_* p^* y) = -2(x . y)$.

CALCUL DU SECOND TERME. — Fixons un entier $r, 0 \leq r \leq 2n-2$. Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned} P_r &= (j_* p^* x . i_* (h^r . g^* g_* (\gamma_{2n-2-r} . i^* j_* p^* y))), \\ &= (i^* j_* p^* x . h^r . g^* g_* (\gamma_{2n-2-r} . i^* j_* p^* y)). \end{aligned}$$

Les diviseurs E et S dans X' sont lisses et se coupant transversalement; leur intersection s'identifie à Q par la projection p . On a donc un carré cartésien d'immersions :



On a alors $i^* j_* a = l_* k^* a$ pour $a \in H^k(S)$.

En particulier : $i^* j_* p^* x = l_* x$, d'où

$$\begin{aligned} P_r &= (l_* x . h^r . g^* g_* (\gamma_{2n-2-2r} . l_* y)), \\ &= (x . l^* h^r . q^* q_* (l^* \gamma_{2n-2-2r} . y)). \end{aligned}$$

Pour des raisons de degré, le seul terme non nul est obtenu pour $r = n-1$; de plus, seul le premier terme de l'expression $\gamma_{n-1} = h^{n-1} + h^{n-2} . g^* c_1(N)$ (0.1.3) donne un résultat non nul, de sorte qu'on peut remplacer γ_{n-1} par h^{n-1} dans le calcul de P_{n-1} . Compte tenu de (2.2), le lemme est conséquence du :

LEMME 2.4. — Posons $l^* h = \eta \in H^2(Q)$. Pour tout $b \in H^1(\tilde{C})$, on a

$$\varphi(b + \iota^* b) = \eta^{n-1} . q^* q_* (\eta^{n-1} . \varphi(b)).$$

Démonstration de (2.4). — Le lemme signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2n-1}(Q) & \xrightarrow{\eta^{n-1}} & H^{4n-3}(Q) & \xrightarrow{q^* q_*} & H^1(Q) & \xrightarrow{\eta^{n-1}} & H^{2n-1}(Q) \\ \uparrow \varphi & & \downarrow q_* & & \uparrow q^* & & \uparrow \varphi \\ H^1(\tilde{C}) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(C) & \xrightarrow{\sim} & H^1(C) & \xrightarrow{\pi^*} & H^1(\tilde{C}) \end{array}$$

Or le carré de gauche (resp. de droite) s'obtient (via la suite spectrale de Leray pour q) en appliquant le foncteur $H^1(C, -)$ au diagramme de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc}
 R^{2n-2} q_*(Z) & \xrightarrow{\eta^{n-1}} & R^{4n-4} q_*(Z) \\
 \uparrow u & & \downarrow \wr \\
 \pi_*(Z) & \xrightarrow{Tr} & Z
 \end{array}
 \quad \text{resp.} \quad
 \begin{array}{ccc}
 q_*(Z) & \xrightarrow{\eta^{n-1}} & R^{2n-2} q_*(Z) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow u \\
 Z & \xrightarrow{\pi^*} & \pi_*(Z)
 \end{array}$$

et la commutativité de ces diagrammes résulte de ([SGA 7], Exp. 12, th. 3.3). Ceci achève la démonstration du lemme 2.3.

LEMME 2.5. — *L'homomorphisme ψ est surjectif.*

Démonstration. — Soit $U = X - S' = X' - (S \cup E)$. On considère la suite spectrale de Leray relative à l'inclusion m de U dans X' :

$$E_2^{pq} = H^p(X', R^q m_* Z) \Rightarrow H^{p+q}(U).$$

On sait ([D], 3.1) que l'on a

$$\begin{aligned}
 R^0 m_* Z &= Z, \\
 R^1 m_* Z &= Z_S \oplus Z_E, \\
 R^2 m_* Z &= Z_{S \cap E}.
 \end{aligned}$$

D'autre part on déduit immédiatement de la suite spectrale de Leray relative à la restriction de f à V que $H^{2n+1}(V) = 0$; par conséquent : $E_{\infty}^{2n+1,0} = 0$.

Or la flèche :

$$d_2 : E_2^{2n-1,1} \rightarrow E_2^{2n+1,0}$$

s'identifie au morphisme de Gysin :

$$H^{2n-1}(S) \oplus H^{2n-1}(E) \xrightarrow{(j_*, i_*)} H^{2n+1}(X').$$

D'après la théorie de Hodge ([D], 3.2.13), les flèches d_r sont nulles pour $r \geq 3$, donc d_2 est surjective.

(On évite facilement de recourir au marteau-pilon de la théorie de Hodge : il suffit de montrer que $E_3^{2n-2,2} = 0$. Or la flèche $d_2 : E_2^{2n-2,2} \rightarrow E_2^{2n,1}$ s'identifie au morphisme de Gysin :

$$H^{2n-2}(Q) \xrightarrow{(k_*, i_*)} H^{2n}(S) \oplus H^{2n}(E)$$

qui est injectif puisque $p_* k_* = 1$.)

Comme ε_* est surjectif et $\varepsilon_* i_* = 0$, on obtient que

$$\varepsilon_* j_* : H^{2n-1}(S) \rightarrow H^{2n+1}(X)$$

est surjectif.

Le morphisme $p : S \rightarrow Q$ est une fibration projective, admettant k comme section; on a donc :

$$H^{2n-1}(S) = p^* H^{2n-1}(Q) \oplus k_* H^{2n-3}(Q).$$

Comme $\varepsilon_* j_* k_* = \varepsilon_* i_* l_* = 0$, on conclut que $\varepsilon_* j_* p^*$ est surjectif, ce qui prouve le lemme.

2.6. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — La surjectivité de ψ entraîne l'assertion (ii) du théorème. De plus, il résulte de (2.3) et (2.5) que la suite :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(1-\iota) \rightarrow H^1(\tilde{C}) \xrightarrow{\psi} H^{2n+1}(X) \rightarrow 0$$

est exacte; on en déduit d'une part que $H^{2n+1}(X)$ est sans torsion, et d'autre part que la suite correspondante de variétés abéliennes :

$$0 \rightarrow \pi^* \text{JC} \rightarrow \tilde{\text{JC}} \xrightarrow{\Psi} \text{J}(X) \rightarrow 0$$

est exacte, donc que Ψ induit un isomorphisme :

$$u : P \rightarrow \text{J}(X).$$

Soit π (resp. ξ) la polarisation principale sur $\text{J}(X)$ (resp. P); on identifiera π (resp. ξ) à la forme de Riemann canoniquement associée, c'est-à-dire :

$$\pi(a, b) = (-1)^{n-1} \cdot (a \cdot b) \quad \text{pour } a, b \in H^{2n+1}(X) \quad (0.2.2)$$

(resp. $\xi(a, b) = -(1/2)(a \cdot b)$ pour $a, b \in H^1(\tilde{C})^-$).

Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à montrer que $u^* \pi = \xi$. Notons m l'immersion de P dans $\tilde{\text{JC}}$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u} & \text{J}(X) \\ \downarrow m & & \downarrow 2 \\ \tilde{\text{JC}} & \xrightarrow{\Psi} & \text{J}(X) \end{array}$$

Il suffit de vérifier que $(2u)^* \pi = 4\xi$, c'est-à-dire :

$$(-1)^{n-1} \cdot (\psi(a) \cdot \psi(b)) = -2(a \cdot b) \quad \text{pour } a, b \in H^1(\tilde{C})^-.$$

Or cela résulte immédiatement du lemme 2.3.

Remarque 2.7. — On n'a utilisé dans la démonstration que des propriétés purement formelles de la cohomologie entière; une partie de ce qui précède reste donc valable en caractéristique p , sous la forme suivante :

Soit X un fibré en quadriques ordinaires de dimension $(2n+1)$, P la variété de Prym associée. Il existe un isomorphisme canonique :

$$H^1(P, \mathbf{Z}_l) \xrightarrow{\sim} H^{2n+1}(X, \mathbf{Z}_l) \quad (l \neq p),$$

qui respecte les formes alternées définies sur $H^1(P, \mathbf{Z}_l)$ par la polarisation et sur $H^{2n+1}(X, \mathbf{Z}_l)$ par le cup-produit.

2.8. LE CAS DES FIBRÉS EN QUADRIQUES SPÉCIAUX. — L'analogue du théorème 2.1 pour les fibrés spéciaux est vrai; nous n'en donnerons pas la démonstration, qui est longue

et surtout qui n'a pas d'applications dans la pratique. En effet les seuls fibrés en quadriques spéciaux que nous rencontrerons apparaissent comme des limites de fibrés ordinaires; dans ce cas on a la :

PROPOSITION 2.8. — Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en quadriques spécial sur \mathbf{C} , de dimension $(2n+1)$; notons $\pi : \tilde{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ le pseudo-revêtement correspondant (1.5), \mathbf{P} la variété de Prym associée (0.3). On suppose que f est « limite de fibrés en quadriques ordinaires », c'est-à-dire qu'il existe une courbe irréductible \mathbf{S} sur \mathbf{C} (non nécessairement complète), un point rationnel 0 de \mathbf{S} , une variété \mathcal{X} lisse sur \mathbf{S} et un \mathbf{S} -morphisme $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}$ tel que :

- $\mathcal{X}_0 = \mathbf{X}$ et $F_0 : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbf{P}^2$ s'identifie à f ;
- pour $s \neq 0$, $F_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathbf{P}^2$ est un fibré en quadriques ordinaire.

Alors $H^{2n+1}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ est sans torsion, sa structure de Hodge est de niveau 1, et la jacobienne intermédiaire $\mathbf{J}(\mathbf{X})$, munie de sa polarisation, est isomorphe à \mathbf{P} .

Démonstration. — L'argument de (1.2) montre qu'on peut trouver un fibré vectoriel \mathbf{E} de rang 3 sur $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}$ tel que \mathcal{X} soit défini dans $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}}$ par l'annulation d'une forme quadratique F . Le discriminant de F définit une variété $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}$, telle que pour tout point fermé s de \mathbf{S} , $\mathcal{C}_s \subset \mathbf{P}^2$ est la courbe discriminante du fibré en quadriques g_s . On définit comme en (1.5) une variété $\mathbf{G}(g)$ au-dessus de \mathcal{C} , telle que $\mathbf{G}(g)_s = \mathbf{G}(g_s)$ pour $s \in \mathbf{S}$. On considère la factorisation de Stein :

$$\mathbf{G}(g) \rightarrow \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{C}.$$

Il faut vérifier que $\rho_s : \tilde{\mathcal{C}}_s \rightarrow \mathcal{C}_s$ est isomorphe au revêtement (ou pseudo-revêtement) de \mathcal{C}_s associé à g_s . C'est clair si $s \neq 0$, ou au voisinage d'un point de \mathcal{C}_0 lisse sur \mathbf{S} ; au voisinage d'un point double t de \mathcal{C}_0 , on peut, localement pour la topologie étale, mettre F sous la forme (cf. 1.5.4) :

$$F = X_0 X_1 + \dots + X_{2n-4} X_{2n-3} + T^2 + a X^2 + b XY + c Y^2, \quad a, b, c \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}, t}.$$

On peut alors appliquer l'argument de (1.5.5) pour se ramener au cas $n = 1$; le calcul direct de (1.5.1) montre que ρ_0 s'identifie à π .

Dès lors on dispose de deux schémas abéliens principalement polarisés sur \mathbf{S} : le schéma de Prym \mathcal{P} [0.2.3 (iii)], dont la fibre en $s \in \mathbf{S}$ est la variété de Prym associée au fibré en quadriques g_s , et le schéma $\mathbf{J}\mathcal{X}$ [0.2.3 (ii)] dont la fibre en s est la jacobienne intermédiaire $\mathbf{J}(\mathcal{X}_s)$; on a de plus un isomorphisme de \mathcal{P} sur $\mathbf{J}\mathcal{X}$ au-dessus de $\mathbf{S}-0$. On en conclut que $\mathcal{P}_0 = \mathbf{P}$ est isomorphe, comme variété abélienne principalement polarisée, à $(\mathbf{J}\mathcal{X})_0 = \mathbf{J}(\mathbf{X})$.

2.9. DÉFORMATION DES FIBRÉS EN QUADRIQUES. — Nous nous contenterons d'étudier le cas le plus simple. On appelle fibré en quadriques dégénéré une variété \mathbf{X} sur \mathbf{C} , de dimension $(2n+1)$, ayant comme seules singularités des points doubles ordinaires z_1, \dots, z_r , munie d'un morphisme $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{P}^2$ tel que :

- (i) les fibres de f sont des quadriques;
- (ii) z_i est le seul point singulier de $X_{f(z_i)}$ ($i = 1, \dots, r$);

(iii) il existe une courbe lisse S sur C , un point rationnel $0 \in S$, un S -schéma \mathcal{X} et un S -morphisme propre et plat $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^2 \times S$ tels que :

- pour $s \neq 0$, $F_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathbf{P}^2$ est un fibré en quadriques ordinaire;
- \mathcal{X}_0 est isomorphe à X , et le morphisme $F_0 : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbf{P}^2$ s'identifie à f par cet isomorphisme.

On vérifie alors comme en 1.2 que (i) et (ii) entraînent :

- le lieu des points $s \in \mathbf{P}^2$ tels que la quadrique X_s soit singulière est une courbe plane C , ayant au plus des points doubles ordinaires;
- un point s de C est non-singulier si et seulement si la quadrique X_s a un point singulier z , avec $z \notin \{z_1, \dots, z_r\}$;
- un point s de C est singulier si et seulement si : ou bien X_s a une droite double, ou bien $s = f(z_i)$ ($1 \leq i \leq r$).

On considère comme en 1.5 la variété $G(f)$ dont les points rationnels au-dessus de $s \in C$ sont les sous-espaces \mathbf{P}_n contenus dans X_s , et la factorisation de Stein :

$$G(f) \rightarrow \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C.$$

Il résulte de ce qui précède que π est un pseudo-revêtement en dehors de $f(z_1), \dots, f(z_r)$, et un revêtement étale de degré 2 dans un voisinage de $f(z_1), \dots, f(z_r)$. Ainsi π induit un pseudo-revêtement $\tilde{N} \rightarrow N$, où N (resp. \tilde{N}) est la courbe obtenue en normalisant C aux points de $\Sigma = \{f(z_1), \dots, f(z_r)\}$ (resp. \tilde{C} aux points de $\pi^{-1}(\Sigma)$).

On déduit de (iii) qu'il existe des courbes stables \mathcal{C} , $\tilde{\mathcal{C}}$ et un morphisme $\bar{\pi} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que :

- pour $s \neq 0$, $\bar{\pi}_s : \tilde{\mathcal{C}}_s \rightarrow \mathcal{C}_s$ est le revêtement étale double associé au fibré en quadriques F_s ;
- $\bar{\pi}_0 : \tilde{\mathcal{C}}_0 \rightarrow \mathcal{C}_0$ est isomorphe à $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$.

On peut alors appliquer la proposition 0.2.5 deux fois : d'une part à la famille des jacobiniennes intermédiaires JX_s [0.2.6 (ii)], d'autre part à la famille des variétés de Prym associées aux revêtements doubles $\bar{\pi}_s$. D'après 2.1 les deux applications classifiantes ainsi obtenues coïncident; on déduit donc de 0.2.5 que si X' est la variété obtenue en éclatant les points doubles z_1, \dots, z_r de X , alors la jacobienne intermédiaire JX' est isomorphe à la variété de Prym associée au pseudo-revêtement $\tilde{N} \rightarrow N$ (en tant que variétés abéliennes principalement polarisées).

Exemple 2.10. – Soit X_0 une hypersurface cubique dans \mathbf{P}^4 ayant un seul point double ordinaire z . Choisissons une droite l contenue dans X_0 et ne passant pas par z ; soit X la variété obtenue en éclatant X_0 le long de l . La projection depuis l fait de X un fibré en quadriques dégénéré. La courbe C est de degré 5, et on peut vérifier que pour un choix convenable de l , elle n'a qu'un point double ordinaire [le point $f(z)$]; sa normalisée N est donc une courbe de genre 5 trigonale (c'est-à-dire munie d'un morphisme $N \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré 3 : dans ce cas, c'est la projection depuis le point double de C). La jacobienne intermédiaire de X' est isomorphe à la variété de Prym associée à N et à un revêtement

double de N (2.9). Mais par ailleurs considérons dans \mathbf{P}^4 la projection de centre z ; elle induit un isomorphisme de X_0 éclaté en z sur un espace projectif \mathbf{P}^3 éclaté le long d'une courbe de genre 4 plongée canoniquement dans \mathbf{P}^3 . Par conséquent la jacobienne intermédiaire de X' est aussi isomorphe à la jacobienne d'une courbe de genre 4 ([C-G], 3.11). On en conclut que toute jacobienne de dimension 4 peut se réaliser (avec sa polarisation) comme variété de Prym d'une courbe trigonale de genre 5; inversement, étant donné une courbe trigonale de genre 5 et un revêtement double, il est facile de les obtenir comme paire (\tilde{N}, N) associée à une hypersurface cubique à point double : donc la variété de Prym d'une courbe trigonale de genre 5 est toujours une jacobienne. Ces résultats ont été généralisés en genre quelconque par Recillas [Re].

CHAPITRE III

Le groupe de Chow d'un fibré en quadriques

3.1. Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en quadriques ordinaire de dimension $(2n+1)$ sur k ; on note comme d'habitude $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le revêtement associé. Un point t de \tilde{C} correspond à une famille de sous-espaces \mathbf{P}^n contenus dans la quadrique $X_{\pi(t)}$. Tous ces sous-espaces sont rationnellement équivalents (comme cycles dans X); on notera $L(t)$ leur classe dans $C^{n+1}(X)$.

THÉORÈME 3.1. — *L'application $t \mapsto L(t)$ se prolonge en un homomorphisme surjectif $\varphi : J\tilde{C}(k) \rightarrow A^{n+1}(X)$, dont le noyau est $(\pi^* JC)(k)$; autrement dit on obtient par passage au quotient un isomorphisme :*

$$\psi : \text{Prym}(\tilde{C}/C)(k) \xrightarrow{\sim} A^{n+1}(X).$$

Énonçons d'abord deux lemmes :

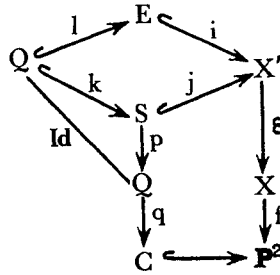
LEMME 3.1.1. — *Soient C une courbe non-singulière (non nécessairement complète) sur k , $q : Q \rightarrow C$ un morphisme propre et lisse dont les fibres géométriques sont des quadriques de dimension $2r$, $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le revêtement double correspondant aux deux familles de génératrices (= sous-espaces \mathbf{P}^r) des fibres de q . Pour $t \in \tilde{C}$, toutes les génératrices de la famille définie par t ont même classe dans $C^{r+1}(Q)$; on la note $L_0(t)$. Alors l'application $t \mapsto L_0(t)$ se prolonge en un isomorphisme : $l : A^1(\tilde{C}) \xrightarrow{\sim} A^{r+1}(Q)$.*

De plus le groupe de Néron-Séveri $C^{r+1}(Q)/A^{r+1}(Q)$ est de type fini.

LEMME 3.1.2. — *Soient U un ouvert de \mathbf{P}^2 , $f : V \rightarrow U$ un morphisme propre et lisse dont les fibres sont des quadriques de dimension $(2n-1)$. Alors $A^{n+1}(V) = 0$.*

On notera que le lemme (3.1.1) est trivial, et le lemme (3.1.2) facile (cf. 3.1.7, plus bas), dans le cas d'un fibré en coniques ($n = 1$).

3.1.3. On utilisera les notations du chapitre II, qui se résument en le diagramme suivant :



On pose $e = i_* 1 =$ classe de E dans $C^1(X')$

$$h = -i^* e, \quad s = j^* e = k_* 1, \quad \eta = l^* h = -k^* s,$$

η induit sur chaque quadrique $q^{-1}(t)$ ($t \in C$) la classe d'une section hyperplane; il en résulte les relations :

$$\begin{aligned} q_* (\eta^{n-1} \cdot l(\alpha)) &= \pi_* \alpha, & \text{pour } \alpha \in A^1(\tilde{C}), \\ \eta^{n-1} \cdot q^* \beta &= l(\pi^* \beta), & \text{pour } \beta \in A^1(C). \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.1.2) et (0.1.2), l'application :

$$A^n(S) \oplus A^n(E) \xrightarrow{j_* + i_*} A^{n+1}(X')$$

est surjective. On sait que

$$A^n(S) = p^* A^n(Q) \oplus k_* A^{n-1}(Q).$$

Comme $\varepsilon_* i_*$ est nul sur $A^n(E)$, l'application :

$$\varphi: A^1(\tilde{C}) \rightarrow A^{n+1}(X),$$

définie par

$$\varphi(\alpha) = \varepsilon_* j_* p^* l(\alpha)$$

est aussi surjective; on notera qu'elle prolonge à $A^1(\tilde{C})$ l'application $t \mapsto L(t)$ (3.1).

3.1.4. Il reste à déterminer le noyau de φ ; pour cela, on va calculer $p_* j^* \varepsilon^* \varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in A^1(\tilde{C})$.

Posons $x = j_* p^* l(\alpha)$; on a (0.1.3) :

$$\varepsilon^* \varphi(\alpha) = \varepsilon^* \varepsilon_* x = x + i_* (h^{n-1} \cdot g^* g_*(\gamma_{n-1} \cdot i^* x)).$$

Or $i^* x = l_* k^* p^* l(\alpha) = l_* l(\alpha)$,

d'où

$$g_*(\gamma_{n-1} \cdot i^* x) = g_*(h^{n-1} \cdot i^* x) = q_*(\eta^{n-1} \cdot l(\alpha)) = \pi_* \alpha, \quad (3.1.3)$$

et finalement :

$$\varepsilon^* \varphi(\alpha) = j_* p^* l(\alpha) + i_* (h^{n-1} \cdot g^* \pi_* \alpha).$$

Calculons maintenant $j^* \varepsilon^* \varphi(\alpha)$:

— Calcul de $j^* j_* p^* l(\alpha)$:

Posons $y = p^* l(\alpha)$; on a

$$j^* j_* y = y \cdot j^* s',$$

où s' est la classe dans $C^1(X')$ du diviseur S .

Soit c la classe de C dans $C^1(\mathbf{P}^2)$; alors :

$$s' = \varepsilon^* f^* c - 2e.$$

Notons qu'on peut réaliser y comme un cycle à support dans un nombre fini de fibres de qp ; il en résulte que $(j^* \varepsilon^* f^* c) \cdot y = 0$, et par conséquent :

$$j^* j_* y = -2s \cdot y = -2k_* l(\alpha).$$

— Calcul de $j^* i_*(h^{n-1} \cdot g^* \pi_* \alpha)$:

$$\begin{aligned} j^* i_*(h^{n-1} \cdot g^* \pi_* \alpha) &= k_* l^*(h^{n-1} \cdot g^* \pi_* \alpha) = k_*(\eta^{n-1} \cdot q^* \pi_* \alpha), \\ &= k_* l(\alpha + \iota^* \alpha) \quad (3.1.3). \end{aligned}$$

On trouve finalement : $j^* \varepsilon^* \varphi(\alpha) = k_* l(\iota^* \alpha - \alpha)$,

d'où

$$p_* j^* \varepsilon^* \varphi(\alpha) = l(\iota^* \alpha - \alpha).$$

Comme l est injectif, on déduit de $\varphi(\alpha) = 0$:

$$\alpha = \iota^* \alpha, \quad \text{c'est-à-dire } \text{Ker } \varphi \subset \pi^* A^1(C).$$

3.1.5. Montrons enfin que $\text{Ker } \varphi = \pi^* A^1(C)$, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_* j_* p^* l(\pi^* \beta) = 0, \quad \text{pour } \beta \in A^1(C).$$

ou encore $\varepsilon_* j_* p^*(\eta^{n-1} \cdot q^* \beta) = 0$ (3.1.3).

Or on a vu (1.2.2) qu'il existe un élément λ de $C^1(X)$ induisant sur chaque quadrique X_t ($t \in \mathbf{P}^2$) la classe d'une section hyperplane. On en déduit :

$$j^* \varepsilon^* \lambda \cdot p^* q^* \beta = (p^* \eta + s) \cdot p^* q^* \beta \quad \text{et} \quad j^* \varepsilon^* \lambda^{n-1} \cdot p^* q^* \beta = (p^* \eta^{n-1} + s) \cdot p^* q^* \beta,$$

par suite $\varepsilon_* j_* p^*(\eta^{n-1} \cdot q^* \beta) = \lambda^{n-1} \cdot \varepsilon_* j_* p^* q^* \beta - \varepsilon_* j_*(s \cdot p^* q^* \beta)$.

Or $\varepsilon_* j_*(s \cdot p^* q^* \beta) = \varepsilon_* j_* k_* q^* \beta = 0$; par ailleurs $\varepsilon_* j_* p^* q^* \beta = f^* r_* \beta$, où r désigne le plongement de C dans \mathbf{P}^2 ; mais $r_* \beta = 0$ puisque $A^2(\mathbf{P}^2) = 0$. Ceci achève la démonstration du théorème—modulo les lemmes (3.1.1) et (3.1.2).

3.1.6. *Démonstration du lemme 3.1.1.* — Le lemme est clair pour $r = 0$; on va le démontrer par récurrence sur r pour $r \geq 1$. Comme $\text{Br}(C) = 0$, il existe un fibré vectoriel E de rang $(2r+2)$ et un plongement de Q dans $\mathbf{P}_C(E)$. Puisque le corps $k(C)$ est C_1 ([L 1]), le morphisme q possède des sections locales, et celles-ci se prolongent globalement. Soit $e : C \rightarrow Q$ une section de q . Elle correspond à un faisceau inversible L sur C et à une suite exacte :

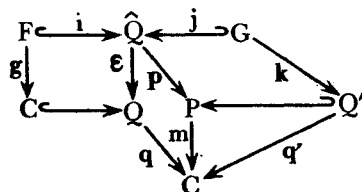
$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0.$$

La C -application rationnelle $P_C(E) \dashrightarrow P_C(N)$ qui s'en déduit est la projection (relative) depuis la section e . On écrira $P = P_C(N)$, et on notera $m : P \rightarrow C$ le morphisme canonique.

Soit $\varepsilon : \hat{Q} \rightarrow Q$ l'éclatement de Q le long de $e(C)$, F le diviseur exceptionnel, $g : F \rightarrow C$ la flèche naturelle. La projection depuis e définit un morphisme :

$$p : \hat{Q} \rightarrow P,$$

qui est birationnel; plus précisément, il existe une sous-variété Q' de P , dont les fibres au-dessus de C sont des quadriques lisses de dimension $(2r-2)$, telle que p soit l'éclatement de P le long de Q' . On note G le diviseur exceptionnel de \hat{Q} pour cet éclatement,



j le plongement de G dans \hat{Q} , k la projection de G sur Q' . Remarquons que Q' s'identifie naturellement à $F \cap G$, d'où une immersion $r : Q' \rightarrow F$ telle que $gr = q'$ soit la projection de Q' sur C .

Le plongement pi identifie F à un sous-fibré en hyperplans projectifs de P . On désignera par h la classe du fibré $\mathcal{O}_P(1)$ dans $C^1(P)$ et on posera :

$$f = i^* p^* h, \quad \eta' = r^* f, \quad \eta = \varepsilon_* p^* h,$$

f (resp. η' , resp. η) induit sur les fibres $g^{-1}(t)$ resp. $q'^{-1}(t)$, (resp. $q^{-1}(t)$) pour $t \in C$ la classe des sections hyperplanes.

Le revêtement double \tilde{C} de C associé à Q' est naturellement isomorphe à \tilde{C} ; en effet si x est une génératrice de $q'^{-1}(t)$ ($t \in C$), $\varepsilon_* j_* k^* x$ est la classe d'une génératrice de $q^{-1}(t)$, et cette correspondance définit l'isomorphisme cherché.

Par l'hypothèse de récurrence, on dispose d'un isomorphisme :

$$l' : A^1(\tilde{C}) \xrightarrow{\sim} A^r(Q').$$

On définit un homomorphisme $l : A^1(\tilde{C}) \rightarrow A^{r+1}(Q)$ en posant : $l(\alpha) = \varepsilon_* j_* k^* l'(\alpha)$; compte tenu de la remarque précédente, on voit que cet homomorphisme prolonge l'application $t \mapsto L(t)$ définie dans l'énoncé du lemme.

En appliquant deux fois (0.1.3) on obtient un isomorphisme composé :

$$u : A^r(Q') \oplus A^1(C) \xrightarrow{\sim} A^{r+1}(\hat{Q}) \xrightarrow{\sim} A^{r+1}(Q) \oplus A^1(C),$$

donné par la formule peu appétissante :

$$u(x, \beta) = (-\varepsilon_* j_* k^* x + \varepsilon_* p^*(h^r \cdot m^* \beta), g_* [f^{r-1} \cdot i^*(-j_* k^* x + p^*(h^r \cdot m^* \beta))]).$$

Posons $x = l'(\alpha)$; on va simplifier l'expression de u .

CALCUL DU PREMIER TERME. — On a $\varepsilon_* p^* h^r = \eta^r$
d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_* p^* (h^r \cdot m^* \beta) &= \varepsilon_* (p^* h^r \cdot \varepsilon^* q^* \beta) = \eta^r \cdot q^* \beta, \\ &= l(\pi^* \beta) \quad (3.1.3). \end{aligned}$$

Le premier terme est donc égal à $l(-\alpha + \pi^* \beta)$.

CALCUL DU SECOND TERME. — On a

$$i^* p^* (h^r \cdot m^* \beta) = f^r \cdot g^* \beta,$$

d'où

$$g_* (f^{r-1} \cdot i^* p^* (h^r \cdot m^* \beta)) = \beta.$$

D'autre part :

$$i^* j_* k^* x = r_* x,$$

donc :

$$g_* (f^{r-1} \cdot i^* j_* k^* x) = q'_*(\eta^{r-1} \cdot x) = \pi_* \alpha.$$

En conclusion, on obtient en composant u avec l' un isomorphisme :

$$V : A^1(\tilde{C}) \oplus A^1(C) \xrightarrow{\sim} A^{r+1}(Q) \oplus A^1(C),$$

donné par $V(\alpha, \beta) = (l(-\alpha + \pi^* \beta), \beta - \pi_* \alpha)$.

V induit un isomorphisme de $V^{-1}(A^{r+1}(Q))$ sur $A^{r+1}(Q)$; or un couple (α, β) appartient à $V^{-1}(A^{r+1}(Q))$ si et seulement si $\beta = \pi_* \alpha$. On en conclut que l'application :

$$V' : A^1(\tilde{C}) \rightarrow A^{r+1}(Q),$$

donnée par

$$V'(\alpha) = l(-\alpha + \pi^* \pi_* \alpha) = l(i^* \alpha)$$

est un isomorphisme; il en résulte que l est un isomorphisme.

La finitude du groupe de Néron-Severi se voit immédiatement par le même procédé de récurrence.

3.1.7. *Démonstration du lemme 3.1.2.* — Démontrons d'abord le lemme pour $n = 1$. Alors V est une variété de Severi-Brauer sur U ; il existe donc un morphisme $g : U' \rightarrow U$, de degré d , tel que $V' = V \times_U U'$ soit isomorphe à un fibré projectif sur U' (en fait on peut prendre $d = 2$). On note f', g' les projections de V' sur U' et V , h la classe

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{g'} & V \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ U' & \xrightarrow{g} & U \end{array}$$

d'un fibré $\mathcal{O}_{V'}(1)$ dans $C^1(V')$, ω la classe du fibré $\Omega_{V/U}^1$ dans $C^1(V)$. On sait que

$$g'^* \omega = -2h + f'^* a, \quad \text{pour un certain } a \in C^1(U).$$

Soit $z \in A^2(V)$; on peut écrire :

$$g'^*z = f'^*x + h.f'^*y.$$

Remarquons que $A^q(U) = 0$ pour tout q ; on en déduit :

$$y = f'_*g'^*z = g^*f_*z = 0,$$

et

$$\begin{aligned} 2x &= f'_*(2h.g'^*z), \\ &= f'_*(-g'^*\omega.g'^*z + f'^*a.g'^*z), \\ &= -f'_*g'^*(\omega.z) + a.f'_*g'^*z = 0. \end{aligned}$$

On en conclut que $2g'^*z = 0$, d'où, en appliquant g'_* :

$$2d.z = 0.$$

Le groupe $A^2(V)$ est divisible et annulé par $2d$, donc nul.

Dans le cas général, on démontre le lemme par récurrence sur n . Comme $n \geq 2$ et que le corps $k(X, Y)$ est $C_2[L1]$, on peut trouver des sections locales de f ; celles-ci s'étendent en dehors d'un ensemble fini S . Au-dessus de $U-S$ on peut appliquer l'argument d'éclatement de (3.1.6); comme $A^q(U-S) = 0$ pour tout q , on trouve immédiatement, compte tenu de l'hypothèse de récurrence : $A^{n+1}(V-f^{-1}(S)) = 0$. Comme $A^{n+1}(f^{-1}(s)) = 0$ et $C^{n-1}(f^{-1}(s)) = Z$ pour tout $s \in U$, on conclut par (0.1.2) que $A^{n+1}(V) = 0$.

3.1.8. On va donner des isomorphismes ψ et ψ^{-1} une expression plus formelle, qui sera utile dans la suite. Rappelons (1.5.6) qu'il existe une fibration projective $h : Z \rightarrow \tilde{C}$ et un morphisme $r : Z \rightarrow X$ tel que pour tout $t \in \tilde{C}$, $r(Z_t)$ soit un sous-espace P^n de $X_{\pi(t)}$, de classe $L(t)$.

PROPOSITION 3.1.8. — (i) On a

$$\varphi(\alpha) = r_*h^*\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in A^1(\tilde{C}),$$

(ii) On a

$$h_*r^*\varphi(\alpha) = (-1)^n(\alpha - \iota^*\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in A^1(\tilde{C}).$$

Démonstration. — L'assertion (i) est claire; démontrons (ii). Posons $\tilde{S} = S \times_C \tilde{C}$, $\tilde{S}' = S' \times_C \tilde{C}$, $\tilde{Q} = Q \times_C \tilde{C}$. Z s'identifie à une sous-variété de \tilde{S}' ; notons Z' son transformé propre dans \tilde{S} et $\zeta : Z' \rightarrow Z$ le morphisme birationnel canonique. Il existe une sous-variété Z_1 de \tilde{Q} et une fibration en droites projectives $d : Z' \rightarrow Z_1$ tel que le carré :

$$\begin{array}{ccc} Z' & \hookrightarrow & \tilde{S} \\ \downarrow d & & \downarrow \\ Z_1 & \hookrightarrow & \tilde{Q} \end{array}$$

soit cartésien. On note $a : Z_1 \rightarrow Q$ et $b : Z' \rightarrow S$ les morphismes naturels.

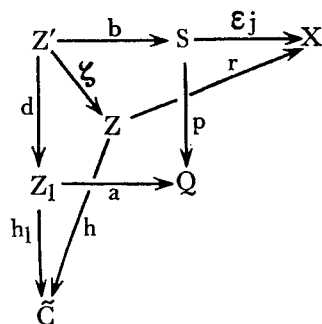
Le morphisme $h_1 : Z_1 \rightarrow \tilde{C}$ est une fibration projective; pour $t \in \tilde{C}$, $a((Z_1)_t)$ est un sous-espace \mathbf{P}^{n-1} de $Q_{\pi(t)}$, de classe $L_0(t)$ dans $C^n(Q)$ (cf. 3.1.1). Rappelons maintenant le résultat suivant (cf. [SGA 7], Exp. 12) : si on note $p(t)$ la classe dans $C^n(Z_1)$ d'un point quelconque de $(Z_1)_t$, on a

$$\begin{aligned} a^*L_0(t) &= p(t) && \text{si } n \text{ est impair,} \\ &= p(\iota t) && \text{si } n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt, pour tout $\alpha \in A^1(\tilde{C})$:

$$\begin{aligned} (h_1)_* a^* l(\alpha) &= \alpha && \text{si } n \text{ est impair,} \\ &= \iota^* \alpha && \text{si } n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

Soit maintenant $x = \varphi(\alpha)$, pour $\alpha \in A^1(C)$; on a



$$\begin{aligned} h_* r^* x &= h_* \zeta_* \zeta^* r^* x, \\ &= (h_1)_* d_* b^* j^* \epsilon^* x, \\ &= (h_1)_* a^* p_* j^* \epsilon^* x. \end{aligned}$$

On sait que $p_* j^* \epsilon^* x = l(\iota^* \alpha - \alpha)$ (3.1.4); on en déduit, compte tenu de ce qui précède, l'assertion (ii).

Remarque 3.1.9. — On remarquera qu'on n'a pas utilisé le fait que les variétés considérées sont complètes. On a donc obtenu en fait le résultat suivant : soient U un ouvert de \mathbf{P}^2 , $C \subset U$ une courbe non-singulière (non nécessairement complète), $f : V \rightarrow U$ un morphisme propre tel que :

- pour $u \in U - C$, la fibre V_u est une quadrique non-singulière, de dimension $(2n-1)$;
- pour $u \in C$, V_u est une quadrique de dimension $(2n-1)$ ayant un point singulier.

On associe à f , comme en (1.5), un revêtement étale double $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$; pour $t \in \tilde{C}$, on définit la classe $L(t)$ dans $A^{n+1}(V)$ comme en (2.1). Alors l'application $t \mapsto L(t)$ se prolonge en un homomorphisme surjectif :

$$\varphi_0 : A^1(\tilde{C}) \rightarrow A^{n+1}(V),$$

dont le noyau est $\pi^* A^1(C)$.

On peut trouver un fibré projectif $h : Z \rightarrow \tilde{C}$ et un morphisme $r : Z \rightarrow V$ tels que $r(Z_t)$ soit un sous-espace P^n contenu dans $V_{\pi(t)}$, de classe $L(t)$; on a alors comme précédemment (3.1.8) :

$$r_* h^* \alpha = \varphi_0(\alpha) \quad \text{et} \quad h_* r^* \varphi_0(\alpha) = (-1)^n \cdot (\alpha - t^* \alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in A^1(\tilde{C}).$$

Remarque 3.1.10. — La méthode de démonstration du théorème 3.1 s'applique au calcul du groupe de Néron-Severi $NS^{n+1}(X) = C^{n+1}(X)/A^{n+1}(X)$ d'un fibré en quadriques X de dimension $(2n+1)$. La seule difficulté apparaît au niveau du lemme 3.1.3 : on ne parvient pas à contrôler la 2-torsion de $NS^2(V)$. On obtient donc le résultat suivant :

soit X un fibré en coniques (resp. un fibré en quadriques de dimension $(2n+1)$, avec $n \geq 2$) ordinaire. Le groupe $NS^2(X)$ (resp. $NS^{n+1}(X)$) est somme directe d'un groupe libre de dimension 2 (resp. 3) et d'un groupe annulé par 2 (peut-être toujours nul)⁽¹⁾.

3.2. On se propose maintenant de montrer que la variété de Prym P , munie de sa polarisation principale, possède une propriété universelle vis-à-vis des cycles de X . Les définitions qui suivent semblent dues à Samuel [S]; on s'est inspiré ici de Murre ([Mu 1], [Mu 2] et [Mu 3]). Pour éviter un formalisme excessif on identifiera dans ce paragraphe une variété sur k à l'ensemble de ses points rationnels (on ne considère que des variétés réduites, et en fait non-singulières). X désigne une variété projective non-singulière.

DÉFINITION 3.2.1. — Soit T une variété non-singulière. Une application $f : T \rightarrow A^n(X)$ est algébrique s'il existe une classe de cycle $z \in C^n(X \times T)$ telle que

$$f(t) = \text{restriction de } z \text{ à } X \times \{t\} \quad \text{pour tout } t \in T.$$

DÉFINITION 3.2.2. — Soit A une variété abélienne. Un homomorphisme de groupe $g : A^n(X) \rightarrow A$ est dit régulier si pour toute variété non-singulière T et toute application algébrique $f : T \rightarrow A^n(X)$, le composé $g \circ f$ est un morphisme.

DÉFINITION 3.2.3. — On dira qu'une variété abélienne A est le représentant algébrique de $A^n(X)$ s'il existe une application régulière $G : A^n(X) \rightarrow A$ qui est universelle, c'est-à-dire que pour toute application régulière g de $A^n(X)$ dans une variété abélienne B il existe un unique morphisme de variétés abéliennes $u : A \rightarrow B$ tel que $u \circ G = g$.

$$\begin{array}{ccc} A^n(X) & \xrightarrow{g} & B \\ G \downarrow & \nearrow u & \\ A & & \end{array}$$

Remarques 3.2.4. — (i) S'il existe, le représentant algébrique de $A^n(X)$ est bien sûr unique à isomorphisme unique près. Il existe pour $n = 1$ [resp. $n = \dim(X)$], et est égal à $\text{Pic}^0(X)$ [resp. $\text{Alb}(X)$]; on ne sait pas grand-chose dans le cas général.

(ii) Si A existe, l'application $G : A^n(X) \rightarrow A$ est surjective. Soit en effet $x \in A^n(X)$; comme x est algébriquement équivalent à zéro, on peut trouver une courbe complète

⁽¹⁾ S. Bloch m'a donné une démonstration de la nullité de la 2-torsion. Sa méthode utilise des techniques cohomologiques assez élaborées.

non-singulière C_1 et une application algébrique $f_1 : C_1 \rightarrow A^n(X)$ (définie par un cycle $z \in C^n(C_1 \times X)$) dont l'image contient x et 0 . f_1 se prolonge en une application algébrique :

$$f'_1 : JC_1 \rightarrow A^n(X),$$

définie par le cycle $r_*(p^*z.q^*\lambda)$, où p, q, r sont les projections de $C_1 \times JC_1 \times X$ sur $C_1 \times X, C_1 \times JC_1, JC_1 \times X$ et λ est la classe dans $C^1(C_1 \times JC_1)$ d'un diviseur de Poincaré (i. e. $\lambda|_{C_1 \times \{\alpha\}} = \alpha$ pour $\alpha \in JC_1$). L'application $u_1 = G \circ f_1$ est un morphisme. S'il existe un élément y de $A^n(X)$ tel que $G(y) \notin u_1(JC_1)$, on prend une seconde application algébrique $f_2 : C_2 \rightarrow A^n(X)$, dont l'image contient y et 0 , et on considère $u_1(JC_1) + u_2(JC_2)$. En continuant le procédé, on voit qu'on aura nécessairement $\text{Im}(G) = u_1(JC_1) + \dots + u_k(JC_k)$ pour un entier k . Ainsi $\text{Im}(G)$ est une sous-variété abélienne de A , donc égale à A en raison de la propriété universelle (3.2.3).

Ainsi le groupe $A(k)$ est le quotient du groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro par une certaine relation d'équivalence, moins fine que l'équivalence rationnelle (appelée « équivalence abélienne » dans [S]). Un candidat pour cette relation est « l'équivalence d'incidence » étudiée par Griffiths [G 2].

(iii) Notons en passant qu'il existe une application algébrique $f : T \rightarrow A^n(X)$ telle que le morphisme $G \circ f$ soit surjectif : avec les notations de (ii), il suffit de prendre $T = JC_1 \times \dots \times JC_k$.

Exemple 3.2.5. — Soit X une variété projective non-singulière de dimension $(2n+1)$, V une sous-variété non-singulière de codimension 2 dans X , $\varepsilon : X' \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de V , $i : E \hookrightarrow X'$ l'immersion du diviseur exceptionnel, $g : E \rightarrow V$ la projection.

(i) Supposons que $A^{n+1}(X)$ (resp. $A^n(V)$) admette un représentant algébrique $G : A^{n+1}(X) \rightarrow A$ (resp. $H : A^n(V) \rightarrow B$). Alors l'application :

$$G' : A^{n+1}(X') \xrightarrow{(G \circ \varepsilon_*, H \circ g_* i^*)} A \times B,$$

fait de $A \times B$ le représentant algébrique de $A^{n+1}(X')$.

(ii) Supposons que $A^{n+1}(X) = 0$ et que $A^{n+1}(X')$ admette un représentant algébrique $G' : A^{n+1}(X') \rightarrow A'$. Alors l'application :

$$G' \circ i_* g^* : A^n(V) \rightarrow A',$$

fait de A' le représentant algébrique de $A^n(V)$.

La démonstration, purement formelle, est laissée au lecteur.

PROPOSITION 3.3. — Soit $f : X \rightarrow P^2$ un fibré en quadriques ordinaire de dimension $(2n+1)$, P la variété de Prym associée, $\psi : P \rightarrow A^{n+1}(X)$ l'isomorphisme défini en (3.1). L'application $G = \psi^{-1}$ fait de P le représentant algébrique de $A^{n+1}(X)$.

Démonstration. — 3.3.1. Montrons que G est une application régulière. Soit $u : T \rightarrow A^{n+1}(X)$ une application algébrique, définie par un cycle $z \in C^{n+1}(X \times T)$;

il faut montrer que $G \circ u$ est un morphisme. Pour cela on considère l'image réciproque au-dessus de T de la situation étudiée en (3.1); on note :

$$h' : Z \times T \rightarrow \tilde{C} \times T \quad \text{et} \quad r' : Z \times T \rightarrow X \times T$$

les morphismes déduits de h et r (3.1.8).

Considérons l'élément $d = h'_* r'^* z$ de $C^1(\tilde{C} \times T)$. Il définit un morphisme $V : T \rightarrow J\tilde{C}$, tel qu'on ait

$$V(t) = d|_{\tilde{C} \times \{t\}} \quad \text{pour } t \in T.$$

Soit t un point de T ; on sait que $z|_{X \times \{t\}} = \varphi(\alpha)$ pour un $\alpha \in J\tilde{C}$ (th. 3.1). Appliquant (3.1.8) on trouve :

$$d|_{\tilde{C} \times \{t\}} = (-1)^n \cdot (\alpha - \iota^* \alpha).$$

Donc V se factorise à travers $\text{Im}(1 - \iota)$; le morphisme composé :

$$V' : T \rightarrow \text{Im}(1 - \iota) \xrightarrow{\sim} P$$

satisfait clairement $\psi \circ V' = (-1)^n \cdot u$, donc $G \circ u = (-1)^n \cdot V'$ est un morphisme.

3.3.2. Montrons maintenant que 2ψ est une application algébrique. Notons λ la classe dans $C^1(\tilde{C} \times J\tilde{C})$ d'un « diviseur de Poincaré »; rappelons que cela signifie que la restriction de λ à $\tilde{C} \times \{\alpha\}$, pour $\alpha \in J\tilde{C}(k) = A^1(\tilde{C})$, est égale à α . On désigne par μ la restriction de λ à $\tilde{C} \times P$ (via le plongement $m : P \hookrightarrow J\tilde{C}$); on regardera la situation au-dessus de P , en notant encore h', r' les morphismes déduits de h, r par changement de base.

Considérons le cycle :

$$y = r'_* h'^* \mu \in C^{n+1}(X \times P).$$

Il résulte des formules (3.1.8) que l'on a pour $p \in P$:

$$y|_{X \times \{p\}} = \varphi(\mu|_{\tilde{C} \times \{p\}}) = \varphi(m(p)).$$

Or on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow{m} & J\tilde{C} & \xrightarrow{\varphi} & A^{n+1}(X) \\
 & \searrow 2 & \downarrow 1-\iota & \nearrow \psi & \\
 & & P & &
 \end{array}$$

d'où l'on déduit : $\varphi(m(p)) = 2\psi(p)$; on en conclut que 2ψ est une application algébrique, définie par le cycle y .

Soit maintenant $g : A^{n+1}(X) \rightarrow B$ une application régulière; la proposition sera démontrée si l'on montre que $u = g \circ \psi$ est un morphisme. Or $2u = g \circ (2\psi)$ est un morphisme, et son noyau contient les points d'ordre 2 de P ; il passe donc au quotient pour définir un morphisme v tel que $2v = 2u$, donc $v = u$: par suite u est un morphisme.

3.4. On se propose à présent de caractériser la polarisation principale de P en termes des cycles de X . Avant de donner une dernière définition (toujours d'après Murre [Mu 3]), fixons une notation : pour toute variété T , on note $\text{Corr}(T)$ le groupe des correspondances divisorielles de T dans lui-même; par définition :

$$\text{Corr}(T) = \text{Pic}(T \times T) / (p_1^* \text{Pic}(T) \oplus p_2^* \text{Pic}(T)).$$

DÉFINITION 3.4.1. — Soient X une variété projective non-singulière de dimension $(2n+1)^{\circ}$ T une variété non-singulière, z un élément de $C^{n+1}(X \times T)$. Notons p, q les deux projections de $X \times T \times T$ sur $X \times T$, r la projection sur $T \times T$. La « correspondance d'incidence » $I(z)$ associée à z est la classe dans $\text{Corr}(T)$ de l'élément $r_*(p^*z \cdot q^*z)$ de $C^1(T \times T)$.

Cette terminologie a la signification suivante : supposons qu'il existe un cycle $h \in C^{n+1}(X)$ suffisamment « ample » pour que $z|_{X \times \{t\}} + h$ soit la classe d'un cycle effectif $L(t)$ pour tout $t \in T$, et que la famille des cycles $L(t)$ satisfasse une condition de « position générale » que nous ne préciserons pas. Alors $I(z)$ est représenté par la classe du diviseur :

$$I = \{(t, t') \in T \times T, L(t) \cap L(t') \neq \emptyset\}.$$

On notera qu'il résulte du théorème du carré [M 5] que $I(z)$ ne dépend en fait que de l'application algébrique $T \rightarrow C^{n+1}(X)$ définie par z .

Rappelons d'autre part qu'une polarisation sur une variété abélienne A a une classe dans $\text{Corr}(A)$, qui la caractérise (via l'injection $\text{NS}(A) \rightarrow \text{Corr}(A)$ [M 5]).

DÉFINITION 3.4.2. — Soit X une variété projective non-singulière de dimension $(2n+1)$, A le représentant algébrique de $A^{n+1}(X)$ (3.2.3), G l'application régulière canonique de $A^{n+1}(X)$ dans A . On dit qu'une polarisation Θ sur A , de classe $\theta \in \text{Corr}(A)$, est la polarisation d'incidence (relativement à X) si pour toute application algébrique $f : T \rightarrow A^{n+1}(X)$, définie par un cycle $z \in C^{n+1}(X \times T)$, on a

$$(G \circ f)^* \theta = (-1)^{n+1} I(z) \text{ dans } \text{Corr}(T).$$

Remarques 3.4.3. — (i) La polarisation d'incidence, si elle existe, est unique : en effet, il existe une variété projective non-singulière T et une application algébrique $f : T \rightarrow A^{n+1}(X)$ telle que $G \circ f$ soit surjectif [3.2.4, (iii)]; l'homomorphisme $\text{Corr}(A) \rightarrow \text{Corr}(T)$ est alors injectif (utiliser [SGA 6], Exp. XII, cor. 1.6 et le fait que $\text{Corr}(A)$ est sans torsion).

(ii) Plus généralement, si X est une variété projective non-singulière de dimension n , A (resp. B) le représentant algébrique de $A^q(X)$ (resp. $A^{n+1-q}(X)$), on peut définir une correspondance d'incidence $\theta^q \in \text{Corr}(A, B) = \text{Hom}(A, \hat{B})$.

Exemples 3.4.4. — (i) Soit C une courbe complète non-singulière; alors la polarisation canonique sur JC est la polarisation d'incidence.

En effet, compte tenu de la propriété universelle de la jacobienne, il suffit de vérifier que la classe dans $\text{Corr}(JC)$ de la polarisation canonique est l'opposée de la correspondance d'incidence $I(\lambda)$ associée à un diviseur de Poincaré, ce qui est facile (et bien connu).

(ii) Reprenons l'exemple 3.2.5 (i), et supposons qu'il existe sur A (resp. B) une polarisation d'incidence π (resp. ρ). Alors $(p_1^* \pi + p_2^* \rho)$ est une polarisation d'incidence sur $A \times B$ (relativement à X').

Démonstration. — Soient T une variété non-singulière, $f : T \rightarrow A^{n+1}(X')$ une application algébrique, définie par $z \in C^{n+1}(X' \times T)$. Si Y est une variété, on notera p_Y et q_Y les deux projections de $Y \times T \times T$ sur $Y \times T$, et r_Y la projection sur $T \times T$. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, on notera f' le morphisme $(f, 1) : X \times T \rightarrow Y \times T$, et f'' le morphisme $(f, 1, 1) : X \times T \times T \rightarrow Y \times T \times T$.

On a (0.1.3) :

$$z = \varepsilon'^* \varepsilon'_* z - i'_* g'^* g'_* i'^* z,$$

d'où

$$I(z) = I(\varepsilon'^* \varepsilon'_* z) + I(i'_* g'^* g'_* i'^* z) + R_1 + R_2,$$

avec

$$R_1 = (r_{X'})_*(p_{X'}^* \varepsilon'^* \varepsilon'_* z \cdot q_{X'}^* i'_* g'^* i'^* z),$$

le terme R_2 étant obtenu en échangeant p et q dans l'expression de R_1 . Si $x \in A^{n+1}(X \times T)$, on a

$$I(\varepsilon'^* x) = (r_{X'})_*(p_{X'}^* \varepsilon'^* x \cdot q_{X'}^* \varepsilon'^* x) = (r_{X'})_* \varepsilon''_* \varepsilon''^* (p_{X'}^* x \cdot q_{X'}^* x) = I(x).$$

Posons $g''_* i''^* p_{X'}^* z = a$, $g''_* i''^* q_{X'}^* z = b$; alors :

$$\begin{aligned} I(i'_* g'^* g'_* i'^* z) &= (r_{X'})_*(i''_* g''^* a \cdot i''_* g''^* b), \\ &= -(r_E)_*(g''^* a \cdot g''^* b \cdot h) \quad [\text{avec } h = cl(\mathcal{O}_{E \times T \times T}(1))], \\ &= -(r_V)_*(a \cdot b) = -I(g'_* i'^* z). \end{aligned}$$

Enfin, en gardant la notation précédente et posant $\varepsilon''_* p_{X'}^* z = y$, on trouve :

$$\begin{aligned} R_1 &= (r_{X'})_*(\varepsilon''^* y \cdot i''_* g''^* b), \\ &= (r_E)_*(i''^* \varepsilon''^* y \cdot g''^* b), \\ &= (r_V)_* g''_* g''^* (\dots) = 0, \end{aligned}$$

et de même $R_2 = 0$.

On a donc, avec les notations de 3.2.5 (i) :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} I(z) &= (-1)^{n+1} I(\varepsilon'_* z) + (-1)^n I(g'_* i'^* z), \\ &= (G \varepsilon_* f)^* \pi + (H g_* i^* f)^* \rho, \\ &= (G' f)^*(p_1^* \pi + p_2^* \rho), \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

(iii) Reprenons l'exemple [3.2.5 (ii)] et supposons qu'il existe une polarisation d'incidence π sur A' relativement à X' . Alors π est une polarisation d'incidence sur A' relativement à V .

Il résulte en effet du calcul précédent que l'on a $I(x) = -I(i'_* g'^* x)$ pour toute variété non-singulière T et tout cycle $x \in A^n(V \times T)$; or ceci exprime que les polarisations d'incidence sur A' relativement à X' et à V sont égales.

PROPOSITION 3.5. — Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en quadriques ordinaire de dimension $(2n+1)$, P la variété de Prym associée. La polarisation principale ξ de P est une polarisation d'incidence relativement à X .

Démonstration. — Soit $f : T \rightarrow \mathbf{A}^{n+1}(X)$ une application algébrique, définie par $z \in \mathbf{C}^{n+1}(X \times T)$. Notons $u = G \circ f$, $u' = (1_X, u)$. On a vu (3.3.2) que l'application $2f$ peut être définie par le cycle $u'^* y$. Or comme $\text{Corr}(T)$ est sans torsion, il suffit de vérifier que $(-1)^{n+1} I(2z) = 4 u^* \xi$, ou encore $(-1)^{n+1} I(y) = 4 \xi$.

On utilisera les conventions de 3.4.4 (ii) (avec P à la place de T), ainsi que les notations de 3.3.

Posons $\mu_1 = p_P^* \mu$, $\mu_2 = q_P^* \mu$. Alors :

$$\begin{aligned} I(y) &= (r_X)_* (r''_* h''^* \mu_1 \cdot r''_* h''^* \mu_2), \\ &= (r_Z)_* (h''^* \mu_1 \cdot r''^* r''_* h''^* \mu_2), \\ &= (r_{\tilde{C}})_* (\mu_1 \cdot h''_* r''^* r''_* h''^* \mu_2). \end{aligned}$$

Or d'après (3.1.8) on a $h''_* r''^* r''_* h''^* \mu_2 = (-1)^n (\mu_2 - \iota''^* \mu_2)$, d'où

$$I(y) = (-1)^n (r_{\tilde{C}})_* (\mu_1 \cdot (\mu_2 - \iota''^* \mu_2)).$$

Notons maintenant que pour tout p dans P , la restriction à $\tilde{C} \times \{p\}$ de la classe du diviseur $\iota'^* \mu + \mu \in C^1(\tilde{C} \times P)$ est nulle; il en résulte (par le théorème du carré) que $\iota'^* \mu$ et $-\mu$ diffèrent par l'image réciproque d'un élément de $C^1(P)$, qui n'intervient pas dans le calcul de la correspondance d'incidence. Par suite :

$$I(y) = (-1)^n 2 (r_{\tilde{C}})_* (\mu_1 \cdot \mu_2) = (-1)^n 2 I(\mu).$$

Par définition $\mu = m'^* \lambda$, où m est l'immersion naturelle de P dans $J\tilde{C}$ et $m' = (1_{\tilde{C}}, m)$; d'autre part, en désignant par θ la polarisation canonique sur $J\tilde{C}$ considérée comme élément de $\text{Corr}(J\tilde{C})$, on sait que

$$I(\lambda) = -\theta [3.4.4(ii)] \quad \text{et} \quad m^* \theta = 2\xi.$$

On en conclut :

$$I(y) = (-1)^n \cdot 2 I(m'^* \lambda) = (-1)^{n+1} 2 m^* \theta = (-1)^{n+1} 4 \xi,$$

ce qui achève la démonstration.

3.6. LE CAS DES FIBRÉS EN QUADRIQUES SPECIAUX. — Soient $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en quadriques spécial de dimension $(2n+1)$, $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le pseudo-revêtement associé (1.5). On notera $n : N \rightarrow C$ (resp. $\tilde{n} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{C}$) la normalisation de \tilde{C} (resp. C), $\pi' : \tilde{N} \rightarrow N$ le revêtement ramifié déduit de π , Σ le lieu singulier de C , $\tilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma)$ celui de \tilde{C} , $\Sigma' = n^{-1}(\Sigma)$, $\tilde{\Sigma}' = (\tilde{n})^{-1}(\tilde{\Sigma}) = \pi'^{-1}(\Sigma')$.

Soit t un point rationnel de \tilde{C} . Les sous-espaces P^n contenus dans $X_{\pi(t)}$ et correspondant à t définissent la même classe dans $C^{n+1}(X)$: on la note $L(t)$. On désigne par P la variété de Prym associée au pseudo-revêtement $\tilde{C} \rightarrow C$ (0.3.2).

THÉORÈME 3.6. — (i) L'application $t \rightarrow L(n(t))$ se prolonge en un homomorphisme surjectif :

$$\varphi : \tilde{JN}(k) \rightarrow A^{n+1}(X),$$

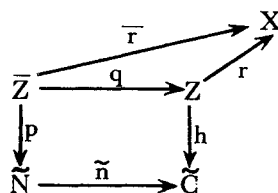
qui donne par passage au quotient un isomorphisme :

$$\psi : P(k) \xrightarrow{\sim} A^{n+1}(X).$$

(ii) L'application ψ^{-1} est régulière, et fait de P le représentant algébrique de $A^{n+1}(X)$.

(iii) La polarisation principale ξ de P est la polarisation d'incidence de P (relativement à X).

3.6.1. Démonstration de (i). — D'après (1.5.6) il existe un fibré projectif $h : Z \rightarrow \tilde{C}$ et un morphisme $r : Z \rightarrow X$ tels que pour tout point fermé t de \tilde{C} , la restriction de r à Z_t soit un plongement et $r(Z_t)$ soit un sous-espace P^n de $X_{\pi(t)}$, de classe $L(t)$. Posons $\bar{Z} = Z \times_{\tilde{C}} \tilde{N}$; notons p, q les projections de \bar{Z} sur \tilde{N} et Z , et $r = r \circ q$.



Définissons l'homomorphisme φ par la composition :

$$\varphi : A^1(\tilde{N}) \xrightarrow{p^*} A^1(\bar{Z}) \xrightarrow{\bar{r}^*} A^{n+1}(X).$$

Il est clair que φ prolonge à $A^1(\tilde{N})$ l'application $t \mapsto L(\tilde{n}(t))$. On en déduit un diagramme commutatif :

$$(3.6.1) \quad \begin{array}{ccc} A^1(\tilde{N}) & \xrightarrow{\varphi} & A^{n+1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^1(\tilde{N} - \tilde{\Sigma}') & \xrightarrow{\varphi_0} & A^{n+1}(X - \bigcup_{s \in \Sigma} X_s) \end{array}$$

où φ_0 est l'application définie dans (3.1.9).

Il résulte de la surjectivité de φ_0 (3.1.9) et de (0.1.2) que le conoyau de φ est un groupe divisible de type fini, donc nul : ainsi φ est surjective. On a vu (3.1.9) que φ_0 est nul sur $\pi'^* A^1(\tilde{N} - \tilde{\Sigma}')$; on en déduit que $\varphi \circ \pi'^*$ applique $A^1(\tilde{N})$ dans un groupe de type fini, donc est nul. De plus il est clair que l'image par φ du sous-groupe H_0 de $A^1(\tilde{N})$ défini en (0.3.3) est nulle; donc φ se factorise en un homomorphisme surjectif :

$$\psi : P(k) \rightarrow A^{n+1}(X).$$

La partie (i) du théorème résultera immédiatement du lemme suivant :

LEMME 3.6.2. — *Il existe un homomorphisme de groupes :*

$$\chi : A^{n+1}(X) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{C}),$$

tel que $(-1)^n \chi \circ \psi$ soit induit par le plongement de P dans $J\tilde{C}$.

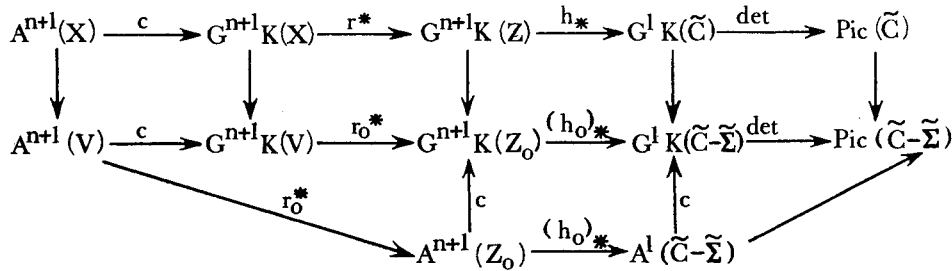
Démonstration. — On définit χ comme la composition :

$$\chi : A^{n+1}(X) \xrightarrow{c} G^{n+1}K(X) \xrightarrow{r^*} G^{n+1}K(Z) \xrightarrow{h_*} G^1K(\tilde{C}) \xrightarrow{\det} \text{Pic}(\tilde{C}),$$

où c est l'homomorphisme canonique qui associe à une sous-variété intègre Y la classe de \mathcal{O}_Y (cf. [SGA 6], 0, app. p. 39 et (0.4.4)); r^* et h_* sont les homomorphismes définis en (0.4.2).

Posons $V = X - \bigcup_{s \in \Sigma} X_s$, $Z_0 = Z - \bigcup_{s \in \tilde{\Sigma}} Z_s$; notons h_0, r_0 les restrictions de h, r à Z_0 .

En restreignant la situation au-dessus de $P^2 - \Sigma$, on obtient un diagramme commutatif :



En comparant avec le diagramme (3.6.1) et en utilisant (3.1.9), on trouve un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A^1(\tilde{N}) & \xrightarrow{\chi \circ \phi} & \text{Pic}(\tilde{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A^1(\tilde{N}-\tilde{\Sigma}') & \xrightarrow{(-1)^n(1-\nu)} & \text{Pic}(\tilde{C}-\tilde{\Sigma})
 \end{array}$$

(on a identifié $\tilde{N}-\tilde{\Sigma}'$ à $\tilde{C}-\tilde{\Sigma}$, et A^1 à un sous-groupe du groupe de Picard; les flèches verticales sont données par la restriction).

Remarquons maintenant que la flèche $\chi \circ \phi$ est « algébrique », c'est-à-dire est induite par un morphisme $\xi : J\tilde{N} \rightarrow J\tilde{C}$. En effet pour toute variété quasi-projective non-singulière T on définit par les formules précédentes des homomorphismes :

$$\phi' : C^1(\tilde{N} \times T) \rightarrow C^{n+1}(X \times T), \quad \chi' : C^{n+1}(X \times T) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{C} \times T).$$

Prenons en particulier $T = J\tilde{N}$ et désignons par λ la classe d'un diviseur de Poincaré dans $\text{Pic}(\tilde{N} \times J\tilde{N})$; l'élément $\chi' \phi'(\lambda) \in \text{Pic}(\tilde{C} \times J\tilde{N})$ définit un morphisme $\tau : J\tilde{N} \rightarrow J\tilde{C}$, qui coïncide sur les points rationnels avec $\chi \circ \phi$.

D'autre part l'endomorphisme $(-1)^n(1-\iota^*)$ de $J\tilde{C}$ s'annule sur \tilde{T} (0.3.3), donc donne par passage au quotient un morphisme $J\tilde{N} \rightarrow J\tilde{C}$. Ce morphisme coïncide avec τ après projection dans $\text{Pic}(\tilde{C}-\tilde{\Sigma})$, donc il est en fait égal à τ ; le lemme en résulte.

3.6.3. La démonstration de (ii) est analogue à celle de l'assertion correspondante pour les fibrés en quadriques ordinaires (prop. 3.3). Soit $u: T \rightarrow A^{n+1}(X)$ une application algébrique, définie par un cycle $z \in C^{n+1}(X \times T)$. L'élément $\chi'(z)$ de $\text{Pic}(\tilde{C} \times T)$ (3.6.2) définit un morphisme $T \rightarrow J\tilde{C}$, qui se factorise en $V: T \rightarrow P$; on a $\psi \circ V = u$, ce qui montre que $\psi^{-1} \circ u$ est un morphisme, donc que l'application ψ^{-1} est régulière.

Montrons que ψ^{-1} fait de P le représentant algébrique de $A^{n+1}(X)$. Notons s le morphisme composé $P \hookrightarrow J\tilde{C} \rightarrow J\tilde{N}$, et $s' = (1_{\tilde{N}}, s)$.

Posons $\mu = s'^* \lambda$, où λ désigne comme d'habitude la classe dans $C^1(\tilde{N} \times J\tilde{N})$ d'un diviseur de Poincaré. Soient $p': \tilde{Z} \times P \rightarrow \tilde{N} \times P$, $\bar{r}': \tilde{Z} \times P \rightarrow X \times P$ les morphismes déduits de p, \bar{r} par changement de base; on considère le cycle :

$$y = \bar{r}'_* p'^* \mu \in C^{n+1}(X \times P).$$

On vérifie comme en (3.3.2) que $y|_{X \times \{p\}} = 2\psi(p)$, ce qui montre que 2ψ est algébrique. On conclut alors comme en (3.3).

3.6.4. Démontrons (iii). L'argument de (3.5) montre qu'il suffit de prouver la formule : $(-1)^{n+1} I(y) = 4\xi$ dans $\text{Corr}(P)$ [y est l'élément de $C^{n+1}(X \times P)$ défini plus haut].

Gardons les notations et conventions de (3.5), μ désignant cette fois l'élément de $C^1(\tilde{N} \times P)$ défini plus haut. Posons $\mu_1 = p_{\tilde{N}}^* \mu$, $\mu_2 = q_{\tilde{N}}^* \mu$; alors :

$$\begin{aligned} I(y) &= (r_X)_* (\bar{r}'_* p''^* \mu_1 \cdot \bar{r}''_* p''^* \mu_2), \\ &= (r_Z)_* (p''^* \mu_1 \cdot \bar{r}''_* \bar{r}'_* p''^* \mu_2), \\ &= (r_{\tilde{N}})_* (\mu_1 \cdot p''_* \bar{r}''_* \bar{r}'_* p''^* \mu_2). \end{aligned}$$

On déduit immédiatement de la démonstration de (3.6.2) que

$$p''_* \bar{r}''_* \bar{r}'_* p''^* \mu_2 = (-1)^n (\mu_2 - \iota''^* \mu_2),$$

d'où

$$I(y) = (-1)^n (r_{\tilde{N}})_* (\mu_1 \cdot (\mu_2 - \iota''^* \mu_2)).$$

On peut supposer comme dans (3.5) que $\iota''^* \mu_2 = -\mu_2$, donc :

$$I(y) = (-1)^n 2(r_{\tilde{N}})_* (\mu_1 \cdot \mu_2) = (-1)^n 2I(\mu).$$

Comme $\mu = s'^* \lambda$, on trouve :

$$I(\mu) = s^* I(\lambda) = -s^* \theta,$$

où θ est la polarisation canonique sur $J\tilde{N}$; or on sait que $s^* \theta = 2\xi$, donc

$$I(y) = (-1)^{n+1} 4\xi,$$

ce qui achève la preuve du théorème 3.6.

CHAPITRE IV

Rationalité des fibrés en quadriques

PROPOSITION 4.1. — *Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en quadriques. Si f admet une section au-dessus d'un ouvert non vide de \mathbf{P}^2 , X est rationnel.*

En effet une quadrique définie sur un corps K est rationnelle sur ce corps dès qu'elle contient un point rationnel sur K , comme on le voit immédiatement par projection.

COROLLAIRE 4.2. — *Tout fibré en quadriques de dimension supérieure ou égale à 5 est rationnel.*

Le corollaire résulte de (4.1) et du fait que le corps $k(X, Y)$ est C_2 .

4.3. On ignore si tout fibré en coniques est unirationnel. On conjecture que la réponse est négative; un contre-exemple pourrait être l'hypersurface de degré n de \mathbf{P}^4 contenant une droite avec multiplicité $(n-2)$, pour $n \geq 5$.

Notons cependant la proposition suivante, due à Enriques :

COROLLAIRE 4.4. — *Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^2$ un fibré en coniques, $S \subset X$ une surface rationnelle telle que la restriction de f à S soit surjective, de degré d . Alors X est unirationnel; plus précisément, il existe une variété rationnelle R et un morphisme $R \rightarrow X$ surjectif et génériquement fini de degré d .*

Démonstration. — On applique la proposition 4.1 après le changement de base $S \rightarrow \mathbf{P}^2$.

Exemples 4.5. — 4.5.1. Si X est obtenu à partir d'une cubique dans \mathbf{P}^4 en éclatant une droite, on peut prendre pour S le diviseur exceptionnel dans cet éclatement; on a alors $d = 2$.

4.5.2. Même chose pour une quartique dans \mathbf{P}^4 contenant une droite double.

4.5.3. Si X est une intersection complète non-singulière de 3 quadriques dans \mathbf{P}^6 , et l une droite contenue dans X , on peut — compte tenu de 1.4.4 — appliquer 4.4 à X , en prenant pour S le diviseur exceptionnel dans l'éclatement de l . On trouve ici $d = 4$.

4.5.4. Si X est le revêtement double de \mathbf{P}^3 ramifié le long d'une quartique admettant un point double ordinaire (après désingularisation), la quadrique exceptionnelle Q peut jouer le rôle de S : on a encore $d = 2$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la non-rationalité des fibrés en coniques pour lesquels le degré de la courbe discriminante C est ≥ 6 .

PROPOSITION 4.6. — *Soit X une variété rationnelle de dimension 3 (projective et lisse sur k); supposons que $A^2(X)$ admette un représentant algébrique A et qu'il existe une*

polarisation d'incidence θ sur A [(3.2.3) et (3.4.2)]. Alors (A, θ) est isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobienes.

Démonstration. — On sait par [A] qu'il existe une variété R , obtenue à partir de \mathbf{P}^3 par une suite d'éclatements de points et de courbes non-singulières, et un morphisme birationnel :

$$\alpha : R \rightarrow X.$$

Il est immédiat de vérifier que l'éclatement d'un point dans une variété Y ne modifie ni $A^2(Y)$, ni son représentant algébrique, ni la polarisation d'incidence. On déduit alors de (3.2.5) et (3.4.4 (ii)) que $A^2(R)$ admet un représentant algébrique B , muni d'une polarisation d'incidence π , et que (B, π) est isomorphe à un produit de jacobienes.

En raison de la propriété universelle des représentants algébriques, l'homomorphisme : $\alpha^* : A^2(X) \rightarrow A^2(R)$ induit un morphisme de variétés abéliennes :

$$\hat{\alpha} : A \rightarrow B.$$

Il suffit de montrer (cf. [C-G], 3.2.3) que $\hat{\alpha}$ est compatible avec les polarisations, c'est-à-dire $(\hat{\alpha})^* \pi = \theta$; vu la définition des polarisations d'incidence cela signifie que pour toute variété non-singulière T et toute application algébrique $T \rightarrow A^2(X)$, définie par un cycle $z \in C^2(X \times T)$, on a

$$I(z) = I(\alpha'^* z) \quad \text{avec} \quad \alpha' = (\alpha, 1_T) : R \times T \rightarrow X \times T.$$

Démontrons cette égalité. Si Y est une variété, on note comme d'habitude p_Y, q_Y les deux projections de $Y \times T \times T$ sur $Y \times T$, et r_Y la projection sur $T \times T$; on pose $\alpha'' = (\alpha, 1_T, 1_T)$.

On a

$$\begin{aligned} I(\alpha'^* z) &= (r_R)_* (p_R^* \alpha'^* z \cdot q_R^* \alpha'^* z), \\ &= (r_X)_* \alpha''_* \alpha''^* (p_X^* z \cdot q_X^* z), \\ &= I(z), \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 4.7. — Soit C une courbe plane de degré $d \geq 6$ stable (= ayant au plus des points doubles ordinaires), $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un pseudo-revêtement de C (0.3.1), P la variété de Prym associée, Ξ un diviseur dont la classe dans $NS(P)$ est la polarisation canonique de P . Alors $Sing(\Xi)$ est de codimension ≥ 5 dans P ; en particulier (P, Ξ) n'est pas isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobienes.

Démonstration. — La dernière assertion provient du fait que si (A, Θ) est une jacobienne ou un produit de jacobienes, $Sing(\Theta)$ est de codimension ≤ 4 dans A ([A-M]).

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que C n'est pas isomorphe à l'une des courbes décrites dans le théorème 4.10 de [B]. Il est clair qu'on ne peut écrire $C = C_1 \cup C_2$ avec $\#(C_1 \cap C_2) \leq 4$; les seuls cas à éliminer sont donc :

(i) C est une courbe (stable) hyperelliptique (i. e. il existe un morphisme $C \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré 2).

- (i') C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique stable en identifiant deux points.
 (i'') C est obtenue à partir d'une courbe hyperelliptique stable en identifiant quatre points deux à deux.
 (ii) Il existe un morphisme $C \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré 3.
 (iii) Il existe une courbe elliptique lisse E et un morphisme $C \rightarrow E$ de degré 2.
 (Lorsqu'on parle du degré d'un morphisme, on sous-entend toujours que ce morphisme est fini et plat).

Il est facile d'éliminer le cas (i) (resp. (i'), resp. (i'')) : en effet soit N la courbe obtenue par éclatement dans \mathbf{P}^2 de 0 (resp. 1, resp. 2) points doubles de C; la série canonique sur N est induite par les courbes de degré $(d-3)$ dans \mathbf{P}^2 passant par 0 (resp. 1, resp. 2) points. On en déduit que la série canonique de N est très ample dès que $d \geq 5$, donc que N n'est pas hyperelliptique.

Pour éliminer le cas (ii) [resp. (iii)], on remarque qu'il existe dans ce cas un faisceau inversible de degré 3 (resp. 4) qui est engendré par ses sections, et dont le degré sur chaque composante est > 0 . On conclut avec le lemme suivant, qui donne un résultat plus général que nous utiliserons plus loin.

LEMME 4.8. — Soient C une courbe plane stable de degré $d \geq 5$, H le faisceau des sections hyperplanes de C. Soit L un faisceau inversible sur C, engendré par ses sections, tel que $\deg(L) = r \leq d$ et que le degré de L sur chaque composante soit strictement positif. Alors $L \cong H$ ou $L \cong H(-p)$, où p est un point non-singulier de C, situé sur une composante de degré ≥ 2 .

Démonstration. — Au cours de cette démonstration on notera pour abrégé $h^0(F) = \dim H^0(C, F)$ pour tout faisceau F sur C.

4.8.1. Le lemme sera démontré si l'on trouve un diviseur de Cartier effectif D tel que $H \otimes L^{-1} \cong \mathcal{O}_C(D)$; on a alors en effet $L = H(-D)$, et comme on doit avoir $h^0(L) \geq 2$ ceci n'est possible que si $\deg(D) \leq 1$, donc $D = 0$ ou $D = p$.

Montrons de plus qu'il suffit de prouver que $h^0(H \otimes L^{-1}) \geq 1$. Dans ce cas il existe une section non nulle u de $H^0(C, H \otimes L^{-1})$; cette section définit un diviseur effectif si et seulement si elle ne s'annule identiquement sur aucune composante de C. Soit C_0 la réunion des composantes de C où u s'annule identiquement; posons $C = C_0 \cup C_1$, avec $C_0 \cap C_1$ fini. On peut trouver deux sections s, t de $H^0(C, L)$ qui engendrent L; désignons par φ le morphisme de C dans \mathbf{P}^1 défini par (s, t) , de sorte que $\varphi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1) = L$. Les sections $u \otimes s$ et $u \otimes t$ de $H^0(C, H)$ ne sont pas linéairement indépendantes, car il y a au plus une section de $H^0(C, H)$ qui s'annule sur C_0 (une telle section existe si et seulement si C_0 est une droite). Ceci entraîne qu'il existe des scalaires $\alpha, \beta \in k$ tels que $\alpha s + \beta t$ s'annule sur C_1 . Par suite $\varphi(C_1)$ est réduit à un point, donc $\deg(L|_{C_1}) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

4.8.2. Montrons maintenant que $h^0(H \otimes L^{-1}) \geq 1$. Notons encore s, t deux sections de $H^0(C, L)$ qui engendrent L. La suite

$$0 \rightarrow L^{-1} \xrightarrow{(t, -s)} \mathcal{O}_C^2 \xrightarrow{(s, t)} L \rightarrow 0$$

est exacte (c'est un cas très particulier du complexe de Koszul); après produit tensoriel par H , la suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$0 \rightarrow H^0(C, H \otimes L^{-1}) \rightarrow H^0(C, H)^2 \rightarrow H^0(C, H \otimes L),$$

d'où l'on déduit :

$$h^0(H \otimes L^{-1}) \geq 6 - h^0(H \otimes L).$$

Il s'agit donc de montrer que $h^0(H \otimes L) \leq 5$, ou encore, par double application de Riemann-Roch, que

$$h^0(H^{\otimes(d-4)} \otimes L^{-1}) \leq h^0(H^{\otimes(d-4)}) - (r-2).$$

Or on peut écrire $L = \mathcal{O}_C(D)$, où D est un diviseur effectif à support non-singulier dans C . Soit I l'idéal dans $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$ du sous-schéma D de \mathbf{P}^2 ; on vérifie immédiatement que les applications de restriction

$$H^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d-4)) \rightarrow H^0(C, H^{\otimes(d-4)})$$

et

$$H^0(\mathbf{P}^2, I \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d-4)) \rightarrow H^0(C, H^{\otimes(d-4)}(-D))$$

sont des isomorphismes.

Si $D = \sum_1^k r_i P_i$, où les P_i sont des points non-singulier de C et les r_i des entiers > 0 , le système linéaire $H^0(\mathbf{P}^2, I \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d-4))$ s'identifie au système des courbes de degré $(d-4)$ passant par P_i et ayant en P_i un contact d'ordre $\geq r_i$ avec C (pour $i = 1, \dots, k$).

(Précisons que si C a pour équation affine $f(x, y) = 0$, avec $f(0, 0) = 0$, et si la droite $x = 0$ est transverse à C au point $P = (0, 0)$, dire que la courbe $g(x, y) = 0$ a un contact d'ordre $\geq r$ avec C en P signifie que le germe de g en P appartient à l'idéal $(f, x^r) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2, P}$).

Notons en général L_m le système linéaire des courbes de degré m dans \mathbf{P}^2 , et L'_m le système des courbes de degré m ayant un contact d'ordre $\geq r_i$ avec C en P_i ($i = 1, \dots, k$). Rappelons que $r = \sum r_i$.

LEMME 4.8.3 :

- (i) Si $m \geq r-1$, on a $\dim(L'_m) = \dim(L_m) - r$,
- (ii) Si $m < r-1$, on a $\dim(L'_m) \leq \dim(L_m) - (m+1)$,
- (iii) Si $m < r-1$ et s'il n'existe pas de droite ayant un contact d'ordre $\geq r_i$ avec C en P_i pour tout i , on a $\dim(L'_m) \leq \dim(L_m) - (m+2)$.

Démonstration de (4.8.3). — Pour démontrer (i), il suffit de montrer que pour toute famille d'entiers $(r'_i)_{1 \leq i \leq k}$ avec $r'_i \leq r_i$ et $\sum r'_i < r$, on peut trouver une courbe Γ de degré m ayant un contact d'ordre r'_i exactement avec C en chaque P_i . Choisissons une droite l ne contenant aucun des P_i , et pour chaque entier i une droite l_i telle que

$$P_i \in l_i; P_j \notin l_i \text{ pour } j \neq i; l_i \text{ est transverse à } C \text{ en } P_i.$$

Alors la courbe $\Gamma = \sum_i r'_i l_i + (m - \sum r'_i) l$ répond à la question (si C_1, \dots, C_k sont des courbes de \mathbf{P}^2 , d'équations $F_1 = 0, \dots, F_k = 0$, on note $\sum m_i C_i$ la courbe d'équation $F_1^{m_1} \dots F_k^{m_k} = 0$).

Pour démontrer (ii), on choisit des entiers r'_i tels que $r'_i \leq r_i$ et $\sum r'_i = m + 1$; l'assertion (ii) résulte immédiatement de (i) appliqué au système des courbes de degré m ayant un contact d'ordre $\geq r'_i$ avec C en P_i .

De plus, on voit qu'on aura inégalité stricte dans (ii) dès qu'on pourra trouver un indice p ($1 \leq p \leq k$) et une courbe Γ' de degré m ayant un contact d'ordre $\geq r'_i$ avec C en P_i ($1 \leq i \leq k$) et d'ordre $< r_p$ en P_p . En vertu de l'hypothèse il existe une droite l' ayant un contact d'ordre s_i avec C en P_i , de manière que :

$$s_p < r_p \quad \text{pour un indice } p; \quad s_i \leq r_i \quad \text{pour tout } i; \quad \sum s_i \geq 2.$$

Posons $t_i = \sup(r'_i - s_i, 0)$; on peut choisir les r'_i de façon que $r'_i < r_p$ et $\sum t_i \leq m - 1$. Alors la courbe :

$$\Gamma' = l' + \sum t_i l_i + (m - 1 - \sum t_i) l$$

a les propriétés de contact voulues.

4.8.4. Terminons la démonstration du lemme 4.8. Supposons que $h^0(H \otimes L^{-1}) = 0$; ceci implique qu'on peut appliquer (iii), avec $m = d - 4$, si $r \geq d - 2$; si $r < d - 2$, on applique (i). Dans tous les cas on trouve que : $\dim L'_{d-4} \leq \dim L_{d-4} - (r - 2)$, ce qui, d'après (4.8.2), entraîne que $h^0(H \otimes L^{-1}) > 0$: il y a contradiction. On a par suite $h^0(H \otimes L^{-1}) > 0$, ce qui d'après (4.8.1) termine la démonstration du lemme 4.8, et donc aussi de la proposition 4.7.

THÉORÈME 4.9. — *Soit X un fibré en coniques sur k ; supposons que la courbe discriminante C soit de degré ≥ 6 . Alors X n'est pas une variété rationnelle.*

Démonstration. — Le théorème résulte des propositions 4.6, 4.7, et du fait que la variété de Prym associée à (\tilde{C}, C) est le représentant algébrique de $A^2(X)$ et que la polarisation canonique ξ de P est une polarisation d'incidence relativement à X (3.3, 3.5 et 3.6).

En caractéristique zéro, on peut aussi utiliser 4.7, l'isomorphisme de (P, ξ) sur la jacobienne intermédiaire $J(X)$ (2.1 et 2.8) et le fait qu'une variété rationnelle de dimension 3 sur C a sa jacobienne intermédiaire isomorphe à un produit de jacobienues ([C-G], cor. 3.2.6).

Exemples 4.10. — 4.10.1. Soit X une hypersurface de degré 4 (resp. $m \geq 5$) dans \mathbf{P}^4 possédant une droite l double (resp. $(m - 2)$ -uple); on suppose que X devient lisse après éclatement de l . Alors X n'est pas rationnelle.

4.10.2. Il résulte de 1.4.3 qu'une intersection complète lisse de 3 quadriques dans \mathbf{P}^6 n'est pas rationnelle.

4.10.3. Soit X l'intersection dans \mathbf{P}^6 d'une quadrique et d'une cubique contenant un plan projectif H ; on suppose que X n'a pas d'autres singularités que 7 points doubles

ordinaires sur H (1.4.6). Alors X n'est pas une variété rationnelle : en effet la courbe C est de degré 7 (1.4.6).

4.10.4. Soit S une surface de degré 4 dans \mathbf{P}^3 , ayant comme seule singularité un point double ordinaire; la variété X obtenue par revêtement double de \mathbf{P}^3 , ramifié le long de S , n'est pas rationnelle.

Supposons maintenant que $k = \mathbf{C}$, et que la surface S admette $r \geq 2$ points doubles ordinaires. En choisissant un de ces points comme centre de projection on réalise X comme fibré en quadriques dégénéré (2.9). La courbe discriminante C est de degré 6, avec $(r-1)$ points doubles ordinaires correspondant aux autres points doubles de S_i ; soit N la courbe obtenue par normalisation de C en ces $(r-1)$ points. D'après (2.9), la jacobienne intermédiaire de la désingularisée de X est isomorphe à la variété de Prym associée à N . Si $r \leq 5$ un raisonnement analogue à (4.8) montre que la variété de Prym associée à N et son revêtement n'est pas un produit de jacobiniennes. Mais dès que $r \geq 7$, la variété de Prym est une jacobienne, puisque sa dimension est ≤ 3 ; j'ignore si X est ou n'est pas rationnelle.

Rappelons qu'il existe un exemple avec $r = 10$ où X n'est pas rationnelle ($[Ar-M]$); dès que la surface S correspondante acquiert un onzième point double, X devient rationnelle.

4.10.5. Rappelons que tous les exemples considérés sont des variétés unirationnelles, à l'exception peut-être du cas resp. de (4.10.1).

CHAPITRE V

Variétés de Fano

L'objet de ce chapitre est de montrer que le théorème de non-rationalité des fibrés en coniques (4.10) entraîne, sur \mathbf{C} , la non-rationalité de beaucoup d'autres solides (= variétés de dimension 3). On va s'intéresser à une classe générale de variétés qui ne sont pas très loin d'être rationnelles, les « variétés de Fano ». Nous regardons seulement les variétés de Fano appelées classiquement « de première espèce » ($\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$), pour lesquelles on a une classification complète.

Dans tout ce chapitre on prend pour k le corps des nombres complexes (les variétés de Fano existent bien sûr en toute caractéristique, mais le théorème central (5.6) n'est démontré qu'en caractéristique nulle).

DÉFINITION 5.1. — Nous appellerons variété de Fano un solide X non-singulier tel que $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$, $K^3 < 0$.

(K désigne un diviseur canonique de X).

5.2. Désignons par H le fibré ample générateur de $\text{Pic}(X)$. On a $K = -k.H$, où k est un entier strictement positif qu'on appelle l'indice de X . Le « vanishing lemma » de Kodaira permet de calculer les nombres $h^{p,q}$ de X ; on a

$$h^{1,0} = h^{2,0} = h^{3,0} = 0, \quad h^{1,1} = 1.$$

Le nombre $h^{1,2} = h^{2,1}$ est appelé le genre de X et noté $g(X)$, ou simplement g .

La classification des variétés de Fano a été faite par Roth.

THÉORÈME 5.3 ([R]). — *Soit X une variété de Fano d'indice k .*

(i) *On a $k \leq 4$; si $k = 4$, $X = \mathbf{P}^3$; si $k = 3$, X est isomorphe à une quadrique (non-singulière) de \mathbf{P}^4 .*

(ii) *Si $k = 2$, X est l'une des variétés non-singulières suivantes :*

A_2 , *revêtement double de \mathbf{P}^3 ramifié le long d'une quartique ($g = 10$);*

A_3 , *cubique dans \mathbf{P}^4 ($g = 5$);*

A_4 , *intersection de deux quadriques ($g = 2$);*

A_5 , *section linéaire (dans le plongement de Plücker) de la grassmannienne $G(2,5)$ des droites de \mathbf{P}^4 ($g = 0$);*

(iii) *Si $k = 1$, X est l'une des variétés non-singulières suivantes :*

B_2 , *revêtement double de \mathbf{P}^3 ramifié le long d'une sextique ($g = 52$);*

B_4 , *quartique dans \mathbf{P}^4 ($g = 30$);*

B'_4 , *revêtement double d'une quadrique Q de \mathbf{P}^4 , ramifié le long de $Q \cap S$, où S est une quartique de \mathbf{P}^4 ($g = 30$);*

B_6 , *intersection d'une quadrique et d'une cubique dans \mathbf{P}^5 ($g = 20$);*

B_8 , *intersection de trois quadriques dans \mathbf{P}^6 ($g = 14$);*

B_{10} , *section quadratique (i. e. par l'intersection d'une quadrique et de deux hyperplans) de $G(2,5)$ ($g = 10$);*

B_{14} , *section linéaire de $G(2,6)$ ($g = 5$);*

B_d ($d = 12, 16, 18$). *Des variétés de degrés d dans $\mathbf{P}^{d/2+2}$ ⁽²⁾.*

Les résultats « positifs » sur la rationalité ou l'unirationalité des variétés de Fano sont classiques; ils sont dus à Enriques et surtout Fano ([F1]). En résumé :

PROPOSITION 5.4. — *Toutes les variétés de Fano sont unirationnelles sauf (peut-être) les types B_2 et B_4 .*

Les variétés de type $A_4, A_5; B_{12}, B_{16}, B_{18}$ sont rationnelles.

Certaines quartiques sont unirationnelles ([I-M]); on ignore tout quant à l'unirationalité des quartiques (en général) et du type B_2 .

Les résultats de non-rationalité sont beaucoup plus récents.

(2) La démonstration de Roth est incomplète. M. Reid m'a informé que V. Iskovski va publier une étude détaillée des variétés de Fano; outre les types considérés par Roth, sa liste comprend des variétés de type A_1 et B_{22} .

PROPOSITION 5.5. — *Les types B_2, B_4 et B'_4 ne sont jamais rationnels ([I–M]).*

La cubique A_3 n'est jamais rationnelle ([C–G]).

Une variété de type B_{14} est birationnellement équivalente à une cubique ([F 2]), donc n'est jamais rationnelle.

Il reste à régler le sort des types A_2, B_6, B_8, B_{10} .

THÉORÈME 5.6. — (i) *Les variétés de type B_8 ne sont pas rationnelles.*

(ii) *Une variété générique de type A_2, B_6, B_{10} n'est pas rationnelle.*

L'assertion (ii) a la signification suivante : il est clair qu'il existe, pour chaque type considéré, une famille complète irréductible (c'est-à-dire un morphisme lisse $X \rightarrow T$, avec T irréductible, tel que les fibres X_t soient du type considéré et que toute variété du type considéré soit isomorphe à une fibre X_t , $t \in T$). Le point (ii) signifie qu'il existe un ouvert non vide U de T tel que les fibres X_u , $u \in U$, ne soient pas rationnelles.

L'assertion (i) a été prouvée en (4.10.2).

L'assertion (ii) repose sur le lemme suivant :

LEMME 5.6.1. — *Soient S une variété irréductible, 0 un point de S , $X \rightarrow S$ un morphisme plat et projectif. On suppose que :*

– *la fibre générique X_η est lisse, connexe, de dimension 3;*

– *X_0 est une variété de dimension 3 ayant au plus des points doubles ordinaires; si X'_0 est la variété non-singulière obtenue en éclatant les points doubles de X_0 , la jacobienne intermédiaire de X'_0 n'est pas isomorphe à une jacobienne ou à un produit de jacobienes.*

Dans ces conditions, il existe un ouvert non vide U de S tel que pour $u \in U$, la fibre X_u n'est pas rationnelle.

Démonstration. — Notons S' le plus grand ouvert de S au-dessus duquel X est lisse. On peut supposer que $H^{3,0}(X_s) = (0)$ pour tout $s \in S'$ (sans quoi le résultat est évident). La famille des jacobienes intermédiaires $J(X_s)$ définit un schéma abélien principalement polarisé sur S' , donc une application classifiante $C : S' \rightarrow \mathcal{A}_g$ (0.2.3). L'ensemble J_g des points de \mathcal{A}_g correspondant aux jacobienes et aux produits de jacobienes est fermé dans \mathcal{A}_g ([Ho]); s'il existe un point s' de S' tel que $C(s') \notin J_g$, il existera un ouvert U de S' tel que pour $u \in U$ la jacobienne intermédiaire $J(X_u)$ ne soit pas isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobienes, et tel que par suite ([C–G], cor. 3.2.6) X_u ne soit pas rationnelle.

On peut par conséquent supposer que S est une courbe lisse, et que la fibre X_s est lisse pour $s \neq 0$. Dès lors l'application C se prolonge en $\bar{C} : S \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_g$, et $\bar{C}(0)$ est la classe dans $\bar{\mathcal{A}}_g$ de $J(X_0)$ [0.2.6 (ii)]. On sait ([M 2]) que l'adhérence de J_g dans

$$\bar{\mathcal{A}}_g = \mathcal{A}_g \cup \mathcal{A}_{g-1} \cup \dots \cup \mathcal{A}_0$$

est ensemblistement :

$$\bar{J}_g = J_g \cup J_{g-1} \cup \dots \cup J_0.$$

Comme $\bar{C}(0) \notin \bar{J}_g$ par hypothèse, il existe un ouvert U de S tel que $\bar{C}(U) \cap \bar{J}_g = \emptyset$, d'où le lemme.

5.6.2. *Démonstration de 5.6 (ii).* — Compte tenu de 5.6.1, il suffit de voir qu'on peut trouver une déformation d'une variété lisse de type A_2 , B_6 ou B_{10} en une variété X_0 , ayant au plus des points doubles ordinaires, et telle que la jacobienne intermédiaire de sa désingularisée ne soit pas isomorphe à une jacobienne ou un produit de jacobiniennes. Pour le cas A_2 , cela résulte de 4.11.4; pour le cas B_6 , de 4.11.3.

Il reste à traiter le cas B_{10} . Supposons qu'une variété de type B_{10} acquière un point double ordinaire s ; elle se projette depuis ce point sur une variété $V \subset \mathbf{P}^6$ qui est intersection complète de 3 quadriques, et qui contient la projection du diviseur exceptionnel, qui est une quadrique Q (de dimension 2). La variété V admet 6 points doubles ordinaires, situés sur Q , qui sont les projections des 6 droites passant par s contenues dans la variété de départ.

On vérifie comme en 1.4.4 que V est birationnellement équivalente à un fibré en quadriques dégénéré X (2.9), admettant 6 points doubles ordinaires. Si Π désigne le réseau des quadriques de \mathbf{P}^6 contenant V , la courbe discriminante C s'identifie au lieu des quadriques singulières dans Π . La quadrique Q de dimension 2 est contenue dans un sous-espace projectif H de dimension 3; comme V contient Q , il existe un pinceau l de quadriques de Π qui contiennent H . Ces quadriques sont nécessairement singulières, de sorte que C est réunion de la droite l et d'une courbe C' de degré 6. Les 6 quadriques de $l \cap C_1$ ont un seul point singulier : ces 6 points sont donc les 6 points doubles de X (2.9). La jacobienne intermédiaire de la désingularisée de X est isomorphe à la variété de Prym associée à la courbe C normalisée aux points de $l \cap C_1$, c'est-à-dire à la variété de Prym associée à C_1 : on conclut par la proposition 4.7.

CHAPITRE VI

Intersection de trois quadriques

Nous allons appliquer les résultats des chapitres I et III aux variétés qui sont intersection (complète) de trois quadriques dans l'espace projectif. Dans ce chapitre, on se permettra, pour simplifier, de définir des variétés par leur ensemble de points fermés.

6.0. Soit X une sous-variété de \mathbf{P}^n qui est intersection complète de trois quadriques (donc $n \geq 3$); on supposera toujours que X est lisse sur k . On note Π le réseau des quadriques contenant X ; on le considérera comme un plan projectif. Si p est un point de Π , on note Q_p la quadrique dans \mathbf{P}^n qui lui correspond.

On associe à X la sous-variété $Q(X)$ de $\Pi \times \mathbf{P}^n$ formée des couples (p, x) tels que $x \in Q_p$.

LEMME 6.1. — *La variété $Q(X)$ est non-singulière; la projection $Q(X) \rightarrow \Pi$ fait de $Q(X)$ un fibré en quadriques, de dimension $(n+1)$.*

Démonstration. — Le critère jacobien montre qu'un point (p, x) de $Q(X)$ est singulier si et seulement si $x \in X$ et x est un point singulier de Q_p ; mais alors x est un point singulier de X , ce qui est impossible.

La seconde assertion est alors immédiate, compte tenu de la définition (1.1).

6.2. La courbe discriminante C du fibré en quadriques $Q(X)$ est le lieu dans Π des points correspondant à des quadriques singulières. C'est une courbe de degré $n+1$ (définie par l'annulation d'un déterminant symétrique d'ordre $n+1$, à coefficients linéaires), ayant au plus des points doubles ordinaires.

Si n est pair, on a associé en outre à $Q(X)$ un pseudo-revêtement $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ (1.5); si p est un point fermé non-singulier de C , les deux points de $\pi^{-1}(p)$ correspondent aux deux systèmes de génératrices de la quadrique Q_p .

THÉORÈME 6.3. — *Soit X une variété non-singulière, intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}^{2m} ($m \geq 2$); notons $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ le pseudo-revêtement correspondant (6.2), P la variété de Prym associée à π , ξ sa polarisation naturelle. Alors :*

(i) *il existe un isomorphisme naturel $A^{m-1}(X) \xrightarrow{\sim} P(k)$, qui fait de P le représentant algébrique de $A^{m-1}(X)$; ξ est la polarisation d'incidence relativement à X (3.2.3 et 3.4.2).*

(ii) *si $k = \mathbf{C}$, (P, ξ) est canoniquement isomorphe à la jacobienne intermédiaire de X .*

Démonstration. — 6.3.1. Choisissons un point fermé 0 de $\Pi - C$; on note L_0 la droite projective qui paramètre les droites de Π passant par 0 . La projection de Π sur L_0 de centre 0 se factorise en un morphisme $g : \hat{\Pi} \rightarrow L_0$, où $\hat{\Pi}$ est la variété obtenue à partir de Π par éclatement du point 0 . On note $\widehat{Q(X)}$ le transformé strict de $Q(X)$ dans $\hat{\Pi} \times \mathbf{P}^{2m}$; il est obtenu à partir de $Q(X)$ par éclatement de la quadrique lisse Q_0 .

Considérons le morphisme :

$$h : \widehat{Q(X)} \hookrightarrow \hat{\Pi} \times \mathbf{P}^{2m} \xrightarrow{(g, 1)} L_0 \times \mathbf{P}^{2m}.$$

Soit (l, x) un point de $L_0 \times \mathbf{P}^{2m}$; on voit que :

— $h^{-1}((l, x))$ est réduit à un point s'il existe $p \in l$ tel que $x \notin Q_p$;

— $h^{-1}((l, x)) = l \times \{x\}$ si $x \in Q_p$ pour tout p dans l .

Notons T la sous-variété de $L_0 \times \mathbf{P}^{2m}$ formée des couples (l, x) tels que $x \in Q_p$ pour tout p dans l . On vérifie immédiatement que T est une sous-variété non-singulière, de codimension 2 dans $L_0 \times \mathbf{P}^{2m}$. Il en résulte qu'à isomorphisme près, le morphisme h n'est autre que l'éclatement de $L_0 \times \mathbf{P}^{2m}$ le long de T .

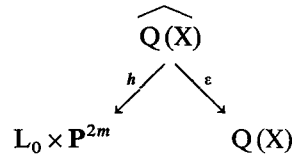
Étudions maintenant T . Si $(l, x) \in T$, le point x est dans Q_0 puisque l passe par 0 ; considérons la seconde projection $k : T \rightarrow Q_0$. Il est clair que :

— $k^{-1}(x)$ est réduit à un point si $x \notin X$;

— $k^{-1}(x) = L_0 \times \{x\}$ si $x \in X$.

Donc à isomorphisme près, k n'est autre que l'éclatement de Q_0 le long de X .

En résumé, on a mis en évidence un diagramme :



dans lequel, à isomorphisme près :

- ε est l'éclatement de Q_0 dans $Q(X)$;
- h est l'éclatement de $L_0 \times P^{2m}$ le long d'une sous-variété T , elle-même obtenue par éclatement de Q_0 le long de X .

Tous ces éclatements sont des éclatements de sous-variétés non-singulières de codimension 2.

6.3.2. Démontrons (i) : on sait (3.3 et 3.6) que P est le représentant algébrique de $A^{m+1}(Q(X))$; d'après 3.2.5 (i), c'est donc aussi le représentant algébrique de $A^{m+1}(\widehat{Q(X)})$. Il résulte alors de 3.2.5 (ii), appliqué deux fois, que P est le représentant algébrique de $A^{m-1}(X)$. En appliquant (3.6 (iii)) et (3.4.4), on voit de même que ξ est la polarisation d'incidence de P relativement à X .

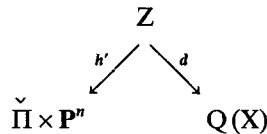
Démontrons (ii) : compte tenu de (0.1.3 (ii)), on a des isomorphismes de variétés abéliennes polarisées :

$$J(Q(X)) \cong J(\widehat{Q(X)}) \cong J(T) \cong J(X).$$

L'assertion (ii) résulte alors de (2.1) et (2.8).

Remarque 6.4. — Il existe d'autres démonstrations possibles du théorème 6.3. On va en indiquer deux, qui présentent un certain intérêt. On considère une sous-variété X de P^n , non-singulière, intersection complète de trois quadriques (on ne suppose pas n pair).

6.4.1. Notons $\check{\Pi}$ le plan projectif dual de Π ; soit Z la sous-variété de $\Pi \times \check{\Pi} \times P^n$ formée des triples (p, l, x) tels que $p \in l$ et $x \in Q_p$. Au lieu du diagramme (6.3.1) on aurait pu considérer le diagramme suivant :



où :

- d est une fibration en droites projectives;
- h' est (à isomorphisme près) l'éclatement de $\check{\Pi} \times P^n$ le long d'une sous-variété T' , elle-même isomorphe à la variété obtenue par éclatement de P^n le long de X .

Cette présentation a sur celle de (6.3.1) l'avantage de ne pas dépendre du choix d'un point 0 de Π .

6.4.2. Supposons que X contienne une droite l ; c'est toujours le cas si $n \geq 6$. Notons G_l la variété des plans projectifs contenus dans \mathbf{P}^n et contenant l . Soit $Q_l(X)$ la sous-variété de $\Pi \times G_l$ formée des paires (p, π) telles que $\pi \subset Q_p$. On a vu (1.4.4) que $Q_l(X)$ est un fibré en quadriques et que X est birationnellement isomorphe à $Q_l(X)$; on peut déduire 6.3 de cet isomorphisme.

Soit l' une seconde droite contenue dans X ; alors les fibrés en quadriques $Q_l(X)$ et $Q_{l'}(X)$ sont birationnellement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe une Π -application birationnelle $Q_l(X) \xrightarrow{\sim} Q_{l'}(X)$. En effet, supposons $l \cap l' = \emptyset$ (resp. $l \cap l' \neq \emptyset$). Si (p, π) est un point assez général de $Q_l(X)$, il existe un unique plan $\pi \subset Q_p$ contenant l' et tel que $\pi \cap l \neq \emptyset$ [resp. $\dim(\pi \cap l) \geq 1$]; l'application $(p, \pi) \mapsto (p', \pi')$ est birationnelle.

Revenant à X , on voit qu'on a obtenu une famille d'automorphismes birationnels de X , paramétrée par les paires de droites contenues dans X . La variété X admet donc beaucoup d'automorphismes birationnels; on comparera cette situation — lorsque $\dim(X) = 3$ — avec le cas de la quartique dans \mathbf{P}^4 , qui n'admet qu'un nombre fini d'automorphismes birationnels ([I-M]).

6.5. Le théorème 6.3 montre que le groupe des cycles de X , et sa structure de Hodge si $k = \mathbf{C}$, sont déterminés par la donnée de la courbe discriminante C et du pseudo-revêtement π . On se propose maintenant de montrer que cette donnée est en fait équivalente à celle de la variété X . Il s'agit là d'un résultat de nature assez élémentaire; convenablement formulé, il ne dépend pas de la parité de $\dim(X)$. On considère donc une variété non-singulière X , intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}^n ($n \geq 3$); on garde les notations de (6.0) et (6.2).

LEMME 6.6. — (i) Si p est un point non-singulier de C , la quadrique Q_p a un unique point singulier s ; la tangente en p à C correspond au pinceau des quadriques de Π passant par s .

(ii) Si p est un point double de C , Q_p admet une droite singulière l . L'ensemble des quadriques de Π tangentes à l est constitué de deux pinceaux, qui correspondent aux deux droites du cône tangent à C en p . Les quadriques de l'un de ces pinceaux (resp. de l'autre) sont tangentes à l en un point fixe p_1 (resp. p_2), et l'on a $p_1 \neq p_2$.

Démonstration. — Choisissons un système de coordonnées (λ, μ, ν) dans Π tel que $p = (0, 0, 1)$. L'équation de la quadrique générique de Π s'écrit :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} A_{ij} X_i X_j = 0,$$

les A_{ij} étant des formes linéaires en λ, μ, ν . La courbe C est définie par l'annulation du discriminant $\Delta = \det(A_{ij})$.

Supposons d'abord que p soit un point non-singulier de C ; alors Q_p a un unique point singulier s [1.2 (iii)]. Dans un système de coordonnées convenable, l'équation de Q_p s'écrit : $\sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$. Le développement de Δ en p devient (on fait $\nu = 1$) :

$$\Delta = A_{00} + (\text{termes de degré } \geq 2 \text{ en } \lambda, \mu).$$

L'équation de la tangente en p est $A_{00} = 0$. Or un point q de Π annule A_{00} si et seulement si $s \in Q_q$, d'où (i).

Si maintenant p est un point double de C , la quadrique Q_p admet une droite singulière l [1.2 (iii)]; on peut supposer que l'équation de Q_p est $\sum_{i=2}^n X_i^2 = 0$. De plus le pinceau de quadriques (de dimension 0) induit sur l par Π n'a pas de point fixe (un tel point serait un point singulier de X); on peut donc supposer que son équation s'écrit $\lambda X_0^2 + \mu X_1^2 = 0$. Alors le développement de Δ en p est :

$$\Delta = \lambda\mu + (\text{termes de degré } \geq 3 \text{ en } \lambda, \mu),$$

de sorte que l'équation du cône tangent en p est $\lambda\mu = 0$. Par ailleurs, les quadriques de Π tangentes à l sont celles qui induisent sur l un point double : ce sont donc celles pour lesquelles $\lambda = 0$, qui sont tangentes à l au point $(1, 0, \dots, 0)$, et celles pour lesquelles $\mu = 0$, tangentes au point $(0, 1, 0, \dots, 0)$. Ceci prouve (ii).

6.7. Notons C_{reg} l'ouvert de lissité de C , et $f : N \rightarrow C$ la normalisation de C . L'application qui à un point p de C_{reg} fait correspondre la tangente en p à C se prolonge en un morphisme $d : N \rightarrow \check{\Pi}$, dit morphisme polaire. Si p' est un point de N , on dira encore que la droite $d(p')$ est la tangente à C en p' ; si p est un point double de C , et $f^{-1}(p) = \{p', p''\}$, la réunion des tangentes à C en p' et p'' constitue le cône tangent à C en p .

Par ailleurs, en associant à un point p de C_{reg} le point singulier de Q_p , on obtient un morphisme de C_{reg} dans \mathbf{P}^n , qui se prolonge en un morphisme :

$$s : N \rightarrow \mathbf{P}^n.$$

LEMME 6.8. — *Si C ne contient pas de droites, s est un plongement. Plus généralement, écrivons $C = C_0 \cup l_1 \cup \dots \cup l_m$, où les l_i sont des droites et C_0 ne contient pas de droites. Soit N_0 la normalisée de C_0 , de sorte que $N = N_0 \amalg l_1 \amalg \dots \amalg l_m$. Alors la restriction de s à N_0 est un plongement, tandis que $s(l_i)$ est réduit à un point ($i = 1, \dots, m$). Les variétés $s(N_0)$, $s(l_1)$, \dots , $s(l_m)$ sont disjointes.*

Démonstration. — 6.8.1. Supposons que C contienne une droite l ; toutes les quadriques du pinceau correspondant sont donc singulières. Par le théorème de Bertini (d'ailleurs élémentaire dans ce cas) la variété $s(l)$ est contenue dans l'intersection des quadriques du pinceau. Si elle était de dimension ≥ 1 , elle aurait une intersection non vide avec la quadrique Q_p , pour $p \notin l$; les points d'intersection seraient des points singuliers de X , ce qui est impossible. Donc $s(l)$ est réduit à un point.

6.8.2. Considérons maintenant un point double p de C ; posons $f^{-1}(p) = \{p', p''\}$. Si t est un point non-singulier de C , on a vu [6.6 (i)] que les quadriques du pinceau correspondant à la tangente à C en t contiennent $s(t)$; par spécialisation, on en déduit que les quadriques du pinceau correspondant à la tangente à C en p' (6.7) contiennent $s(p')$. Par suite, avec les notations de [6.6 (ii)], on a $s(p') = p_1$, $s(p'') = p_2$, donc $s(p') \neq s(p'')$.

6.8.3. Supposons qu'il existe deux points (fermés) distincts p', q' de N tels que $s(p') = s(q')$, et que p' et q' ne soient pas contenus dans le transformé strict d'une droite $l \subset C$. Posons $f(p') = p, f(q') = q$; d'après (6.8.2) on a $p \neq q$. Le point $s(p')$ est singulier pour Q_p et Q_q , donc pour toutes les quadriques du pinceau engendré par Q_p et Q_q ; autrement dit, la droite pq est contenue dans C . Notons l son transformé strict dans N . Vu l'hypothèse, un des deux points p', q' n'appartient pas à l ; supposons donc que $p' \notin l$. Alors p est un point double de C ; notons p'' le second point de N au-dessus de p , de sorte que $p'' \in l$. Si $q' \in l$, on a $s(q') = s(p'')$ d'après (6.8.1) et $s(p') \neq s(p'')$, d'où contradiction. Si $q' \notin l$, q est un point double de C ; les droites singulières de Q_p et Q_q ne sont pas confondues (sans quoi X serait singulière), leur seul point commun est donc $s(p')$; on arrive de nouveau à $s(p') \neq s(q')$, d'où contradiction.

6.8.4. On a prouvé ainsi que la restriction de s à N_0 est injective et que les variétés $s(N_0); s(l_1), \dots, s(l_n)$ sont disjointes. Il reste à montrer que $s|_{N_0}$ est un plongement. Or si $x \in s(N_0)$, le point $s^{-1}(x) = (\lambda, \mu, \nu)$ est défini par des équations linéaires en λ, μ, ν , à coefficients linéaires en les coordonnées de x . On en déduit immédiatement qu'il existe un morphisme $s^{-1} : s(N_0) \rightarrow N_0$, d'où le lemme.

6.9. On notera $\mathcal{O}_C(1)$ le faisceau induit sur C par $\mathcal{O}_\Pi(1)$, et $H = f^* \mathcal{O}_C(1)$. Considérons le morphisme polaire (6.7) $d : N \rightarrow \check{\Pi}$. Il induit sur N une série linéaire de dimension (projective) deux, qu'on appelle la série polaire. Si l'équation de C est $F(X, Y, T) = 0$, cette série est découpée par les courbes d'équation $\lambda F'_X + \mu F'_Y + \nu F'_T = 0$, qui sont des courbes adjointes de degré n ; elle est donc définie par un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $H^0(N, \omega_N \otimes H^{\otimes 2})$ (rappelons en effet que la série canonique ω_N est découpée par les courbes adjointes de degré $n-2$). Géométriquement, le diviseur correspondant à un point p de Π est formé des points q de N tels que la tangente à C en q (6.7) passe par p ; on l'appelle le diviseur polaire de p .

D'autre part, comme $s(N) \cap X = \emptyset$, la série linéaire de quadriques Π , restreinte via s , définit un morphisme $e : N \rightarrow \check{\Pi}$. La proposition suivante n'est alors qu'une reformulation du lemme 6.6.

PROPOSITION 6.10. — *Le morphisme $e : N \rightarrow \check{\Pi}$, défini par la série linéaire $s^* \Pi$, coïncide avec le morphisme polaire. En particulier, on a $a : s^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \cong \omega_N \otimes H^2$, et pour tout $p \in \Pi$, la quadrique Q_p découpe sur N (via le morphisme s) le diviseur polaire de p .*

Remarques 6.11. — (i) La donnée du morphisme polaire $d : N \rightarrow \check{\Pi}$ revient à celle d'une application linéaire projective $d^* : \Pi \rightarrow \check{\mathbb{P}}(H^0(N, \omega_N \otimes H^2))$ (si V est un espace vectoriel, on note suivant Grothendieck $\check{\mathbb{P}}(V)$ l'espace projectif des hyperplans de V , et $\check{\mathbb{P}}(V) = \check{\mathbb{P}}(\check{V})$ l'espace des droites de V).

L'élément $d^*(p)$ sera appelé l'élément polaire de p . On remarquera que si N a plusieurs composantes N_1, \dots, N_k (c'est-à-dire si C n'est pas irréductible), la donnée de l'élément polaire de p est plus précise que celle du diviseur polaire de p , qui est un élément de $\prod_i \check{\mathbb{P}}(H^0(N_i, \omega_{N_i} \otimes (H|_{N_i})^2))$.

(ii) On peut décrire explicitement l'homomorphisme

$$s^* : H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(2)) \rightarrow H^0(N, \omega_N \otimes H^2)$$

de la manière suivante.

Écrivons l'équation de la quadrique $Q_p : \sum A_{ij} X_i X_j = 0$, où les A_{ij} sont des formes linéaires en les coordonnées de p . Considérons la matrice $(M_{ij}) = \Lambda^n(A_{ij})$ formée des mineurs d'ordre n . Si p est un point non-singulier de C , la matrice (A_{ij}) est de rang n et la matrice (M_{ij}) est donc de rang 1; comme elle est symétrique, on voit immédiatement que

$$M_{ij} = S_i S_j \quad \text{pour tous } i, j \quad \text{avec } (S_0, \dots, S_n) = s(p).$$

On en déduit que la quadrique $X_i X_j = 0$ induit sur N (via s) le diviseur découpé par la courbe adjointe de degré n d'équation $M_{ij} = 0$.

6.12. Il résulte de (6.10) que

$$s^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) = M \otimes H,$$

où M est un faisceau inversible sur N tel que $M^2 \cong \omega_N$.

Un tel faisceau s'appelle classiquement une « thêta-caractéristique » de N (cf. [M 3]). On a donc associé à la variété $X \subset \mathbf{P}^n$ un couple (C, M) , où :

- C est une courbe plane stable, de degré $(n+1)$;
- M est une thêta-caractéristique sur la normalisée N de C .

Cette donnée a un caractère fonctoriel : si X' est une autre intersection de trois quadriques, d'invariants associés (C', M') et si $g : X \rightarrow X'$ est un isomorphisme projectif [i. e. $g^* \mathcal{O}_{X'}(1) = \mathcal{O}_X(1)$], alors g induit un isomorphisme $\gamma : C \rightarrow C'$ tel que $(\bar{\gamma})^* M' = M$ (on note $\bar{\gamma}$ l'extension de γ aux courbes normalisées). Notons que si $n = 4$ ou $n \geq 6$, tout isomorphisme $X \rightarrow X'$ est projectif.

La thêta-caractéristique M n'est pas arbitraire :

LEMME 6.12. – (i) On a $H^0(N, M) = (0)$.

(ii) L'application de restriction $s^* : H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \rightarrow H^0(N, M \otimes H)$ est un isomorphisme.

Démonstration. – Choisissons une droite l de Π transverse à C , de sorte que : $C \cap l = \{p_0, \dots, p_n\}$ où les p_i sont des points distincts de C_{reg} . Pour prouver (i), il suffit de montrer que les $(n+1)$ sommets des cônes Q_{p_0}, \dots, Q_{p_n} ne sont pas contenus dans un hyperplan. Considérons le pinceau de quadriques défini par l . Il est engendré par deux quadriques non-singulières, d'équations $F = 0, G = 0$, telles que l'équation $\det(F - tG) = 0$ a toutes ses racines de multiplicité 1. Il est alors classique (voir par exemple ([H-P], § 13), ou mieux, faire l'exercice), que les deux quadriques sont simultanément diagonalisables; c'est-à-dire que dans une base convenable on peut écrire :

$$F = \sum X_i^2, \quad G = \sum \alpha_i X_i^2, \quad \alpha_i \neq \alpha_j.$$

Il est immédiat que les sommets des cônes du pinceau sont les $(n+1)$ points $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$, qui ne sont pas contenus dans un même hyperplan. Ceci prouve (i), et aussi le fait que $s(N)$ n'est pas contenu dans un hyperplan de \mathbf{P}^n , autrement dit que l'application $s^* : H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)) \rightarrow H^0(N, M \otimes H)$ est injective. Mais comme $H^0(N, M \otimes H^{-1}) = (0)$, le théorème de Riemann-Roch montre que

$$\dim H^0(N, M \otimes H) = n+1,$$

d'où le lemme.

6.13. On va voir que si n est pair ($n = 2m$), la donnée de M est équivalente à celle du pseudo-revêtement π .

Considérons sur N le faisceau inversible $\eta = H^{m-1} \otimes M^{-1}$; il vérifie :

$$\eta^2 = H^{2m-2} \otimes M^{-2} = f^* \omega_C \otimes \omega_N^{-1} = \mathcal{O}_N(\Sigma),$$

où Σ est le diviseur somme des points de N dont l'image dans C est singulière; ω_C désigne le faisceau dualisant de C , isomorphe à $\mathcal{O}_C(2m-2)$.

Il existe une section r de $H^0(N, \eta^2)$ dont le diviseur des zéros est Σ ; cette condition détermine r uniquement, à un automorphisme du faisceau η près. On associe à (η, r) un revêtement d'ordre deux de N , ramifié aux points de Σ , qui est bien déterminé à isomorphisme près; il est défini par la formule :

$$\tilde{N}_0 = \text{Spec}(\mathcal{O}_N \oplus \eta^{-1}),$$

la structure d'algèbre sur $\mathcal{O}_N \oplus \eta^{-1}$ étant définie par

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb' \cdot r, ab' + a' b).$$

En identifiant les points de \tilde{N}_0 situés au-dessus d'un même point singulier de C , on obtient un pseudo-revêtement $\pi_0 : \tilde{C}_0 \rightarrow C$. La donnée de π_0 est clairement équivalente à celle de M .

LEMME 6.14. — *Les pseudo-revêtements π_0 et π sont isomorphes.*

Démonstration. — Soit K l'anneau des fonctions rationnelles sur N : c'est le produit des corps de fonctions des composantes de N . Il suffit de montrer que les revêtements ramifiés de N correspondant à π_0 et π sont isomorphes, ou encore que les extensions quadratiques de K qu'ils définissent sont isomorphes.

Écrivons comme d'habitude l'équation de la quadrique générique de Π sous la forme $\sum_{i,j} A_{ij} X_i X_j = 0$, où les A_{ij} sont des formes linéaires sur Π ; soit L une forme linéaire sur Π , telle que C ne contienne pas la droite $L = 0$. On peut supposer que l'hyperplan $X_0 = 0$ de \mathbf{P}^{2m} ne contient aucune composante de $s(N)$; alors [6.11 (ii)] le mineur diagonal d'ordre n M_{00} ne s'annule identiquement sur aucune composante de C , et si l'on pose $\varphi = M_{00}/L^{2m} \in K$, l'extension quadratique associée à π est $K(\sqrt{\varphi})$ (1.6).

Par ailleurs, pour déterminer l'extension quadratique K_0 de \tilde{K} associée à π_0 , il suffit de mettre en évidence une fonction rationnelle ψ sur N telle que

$$\operatorname{div}(\psi) = 2A - 2B + \Sigma \quad \text{avec } A \geq 0, \quad B \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_N(B-A) = \eta;$$

On aura alors $\tilde{K}_0 = K(\sqrt{\psi})$. Or il résulte aussitôt de [6.11 (ii)] que l'on peut prendre $\psi = \varphi$, avec :

$$A = \text{diviseur des zéros de } s^* X_0;$$

$$B = m \text{ (diviseur des zéros de } f^* L).$$

Le lemme en résulte.

6.15. Revenons au cas général : $X \subset \mathbf{P}^n$ avec n quelconque ≥ 3 . Notre but est de montrer que l'on peut reconstituer X à partir de (C, M) . Introduisons la courbe $\Gamma \subset \Pi \times \mathbf{P}^n$:

$$\Gamma = \{(p, x), x \text{ est un point singulier de } Q_p\}.$$

Notons r_1, r_2 les projections de $\Pi \times \mathbf{P}^n$ sur Π, \mathbf{P}^n ; on a $r_1(\Gamma) = C$, et l'on pose $r_2(\Gamma) = S$, de sorte que $S \subset \mathbf{P}^n$ est le lieu des points singuliers des quadriques de Π .

Si C est non-singulière, r_1 et r_2 induisent des isomorphismes de Γ sur C et de Γ sur S , et l'on a $S = s(C)$. En général, la courbe Γ est isomorphe à la réunion de N et de droites l'_p , pour tout $p \in \operatorname{Sing}(C)$, joignant les points p' et p'' de N qui se projettent sur p ; le morphisme $r_2 : \Gamma \rightarrow S$ contracte les transformés stricts dans Γ des droites contenues dans C . La courbe S est la réunion, dans \mathbf{P}^n , de la variété $s(N)$ et des droites l_p ($p \in \operatorname{Sing}(C)$) joignant les points $s(p')$ et $s(p'')$, avec $\{p', p''\} = f^{-1}(p)$. Il importe de noter que la courbe $S \subset \mathbf{P}^n$ est déterminée par C et par le morphisme $s : N \rightarrow \mathbf{P}^n$.

LEMME 6.16. — *L'application de restriction :*

$$H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(2)) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Posons $P = \Pi \times \mathbf{P}^n$; pour $a, b \in \mathbf{Z}$, nous noterons $\mathcal{O}_P(a, b)$ le faisceau inversible sur P défini par

$$\mathcal{O}_P(a, b) = r_1^* \mathcal{O}_\Pi(a) \otimes r_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(b)$$

et $\mathcal{O}_\Gamma(a, b)$ la restriction de $\mathcal{O}_P(a, b)$ à Γ .

La projection r_2 induit une injection :

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(2)) \rightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(0, 2)).$$

Pour prouver le lemme, il suffit donc de démontrer que l'application de restriction :

$$H^0(P, \mathcal{O}_P(0, 2)) \rightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(0, 2))$$

est un isomorphisme.

Or la courbe Γ est intersection complète dans $\Pi \times \mathbf{P}^n$; en effet, si l'équation de la quadrique générique de Π s'écrit $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$, Γ est définie dans $\Pi \times \mathbf{P}^n$ par les $(n+1)$ équations :

$$\lambda P'_{X_i} + \mu Q'_{X_i} + \nu R'_{X_i} = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Posons $E = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1, -1)]^{n+1}$; le complexe de Koszul :

$$0 \rightarrow \Lambda^{n+1} E \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^2 E \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow 0$$

est une résolution de \mathcal{O}_{Γ} . Tensorisant avec $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(0,2)$, on trouve une résolution K . de $\mathcal{O}_{\Gamma}(0,2)$, avec :

$$K_p = \Lambda^p E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(0, 2) = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-p, -p+2)]^{\binom{n+1}{p}}.$$

La suite spectrale d'hypercohomologie du complexe K . s'écrit :

$$E_1^{pq} = H^q(\mathbf{P}, K_{-p}) \Rightarrow H^{p+q}(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma}(0, 2)).$$

Cette suite spectrale est extrêmement dégénérée puisqu'en appliquant la formule de Künneth on trouve $H^q(\mathbf{P}, K_{-p}) = 0$ sauf pour $p = 0, q = 0$. Par suite l'« edge-homomorphisme » $H^0(\mathbf{P}, K_0) \rightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_{\Gamma}(0,2))$ est un isomorphisme, ce qui prouve le lemme.

6.17. Si C est non-singulière, la quadrique Q_p est donc la seule quadrique de \mathbf{P}^n qui découpe sur $s(C)$ le diviseur polaire de p : comme le plongement s est déterminé par la thêta-caractéristique M (6.12), on récupère ainsi X — à isomorphisme près — à partir de (C, M) . Dans le cas général, il faudra considérer l'élément polaire de p au lieu du diviseur polaire [6.11 (i)]. En outre, soit l une droite contenue dans S , c'est-à-dire une droite singulière d'une quadrique $Q_p, p \in \text{Sing}(C)$. L'intersection $l \cap s(N)$ est composée de deux points distincts p_1, p_2 , qui sont les deux points doubles du pinceau induit sur l par le réseau Π (6.8.2). Une quadrique quelconque $Q_q (q \in \Pi)$ découpe sur l deux points qui sont conjugués harmoniques par rapport à p_1, p_2 . Inversement :

PROPOSITION 6.18. — *Soit p un point de Π . La quadrique Q_p est l'unique quadrique de \mathbf{P}^n qui induit sur N (via s) l'élément polaire de p [6.11 (i)] et qui découpe sur chaque droite $l \subset S$ deux points conjugués harmoniques par rapport aux deux points de $l \cap s(N)$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe une quadrique $Q \neq Q_p$ possédant la propriété énoncée dans la proposition. Comme Q et Q_p induisent le même élément dans $\check{P}(H^0(N, \omega_N \otimes H^2))$, il existe une quadrique Q' qui appartient au pinceau engendré par Q et Q_p , et qui contient $s(N)$. Comme aucune quadrique de \mathbf{P}^n ne contient S (6.16), il existe une droite $l \subset S$ qui n'est pas contenue dans Q' . Mais alors Q' découpe sur l les deux points p_1, p_2 de $l \cap s(N)$, qui ne sont pas conjugués harmoniques par rapport à eux-mêmes. Or par hypothèse Q et Q_p découpent sur l deux points conjugués harmoniques par rapport à p_1 et p_2 , il en est donc de même pour Q' : il y a contradiction.

PROPOSITION 6.19. — *Soit X (resp. X') une variété non-singulière, intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}^n ; soient (C, M) (resp. C', M') la courbe discriminante et la*

thêta-caractéristique associées. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\gamma : C \rightarrow C'$ tel que $(\bar{\gamma})^* M' = M$ (on note $\bar{\gamma}$ l'extension de γ aux normalisées); alors il existe un isomorphisme projectif $g : X \rightarrow X'$ qui induit l'isomorphisme γ (6.12). Si C est irréductible, cet isomorphisme g est unique; en particulier, le groupe des automorphismes projectifs de X est isomorphe au groupe des automorphismes de C qui fixent M . En général, le groupe des automorphismes projectifs de X est extension du groupe des automorphismes de C fixant M par le groupe $(\mathbb{Z}/2)^{c-1}$, où c est le nombre de composantes irréductibles de C .

Démonstration. — Au cours de cette démonstration, on utilise les notations habituelles N, S, Π, Q_p, \dots pour les données associées à X ; on note N', S', Π', Q'_p les données correspondantes pour X' .

6.19.1. Remarquons d'abord que γ est induit par un isomorphisme $\tilde{\gamma} : \Pi \rightarrow \Pi'$. En effet si $n = 3$ le plongement de C dans Π (resp. de C' dans Π') est défini par le faisceau dualisant; si $n \geq 4$, on applique (4.8). L'isomorphisme γ détermine (à multiplication par un scalaire près) un isomorphisme $\lambda : \bar{\gamma}^* H' \rightarrow H$.

Choisissons un isomorphisme $u : \bar{\gamma}^*(M' \otimes H') \rightarrow M \otimes H$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\gamma}^*(M' \otimes H')^2 & \xrightarrow{\sim} & \bar{\gamma}^*(\omega_{N'} \otimes H'^2) \\ \downarrow u^2 & & \downarrow \bar{\gamma}^* \otimes \lambda^2 \\ (M \otimes H)^2 & \xrightarrow{\sim} & \omega_N \otimes H^2 \end{array}$$

Notons P (resp. P') l'espace projectif \mathbb{P}^n contenant X (resp. X'), et s (resp. s') le morphisme de N dans P (resp. de N' dans P') défini en 6.7. On déduit de u un isomorphisme $\hat{u} : H^0(M' \otimes H') \rightarrow H^0(M \otimes H)$, d'où, compte tenu de 6.12, un isomorphisme $h : P \rightarrow P'$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} N \xrightarrow{s} \mathbb{P} & & H^0(P', \mathcal{O}_{P'}(2)) \xrightarrow{s'^*} H^0(N', \omega_{N'} \otimes H'^2) \\ \downarrow \bar{\gamma} \quad \downarrow h & & \downarrow h^* \quad \downarrow \bar{\gamma}^* \otimes \lambda^2 \\ N' \xrightarrow{s'} \mathbb{P}' & & H^0(P, \mathcal{O}_P(2)) \xrightarrow{s^*} H^0(N, \omega_N \otimes H^2) \end{array}$$

Par ailleurs il est clair que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{d} & \Pi \\ \downarrow \bar{\gamma} & & \downarrow \tilde{\gamma} \\ N' & \xrightarrow{d'} & \Pi' \end{array}$$

est commutatif, de sorte que $\bar{\gamma}$ transforme l'élément polaire [6.11 (i)] d'un point $p \in \Pi$ en l'élément polaire du point $\tilde{\gamma}(p)$. Par suite la quadrique $h(Q_p)$ découpe sur $s'(N)$ l'élément polaire de $\tilde{\gamma}(p)$; de plus, si l' est une droite contenue dans s' , $l = h^{-1}(l')$ est une droite contenue dans S , et l'on a : $h^{-1}(l' \cap s'(N')) = l \cap s(N)$, de sorte que $h(Q_p)$ découpe sur l' deux points qui sont conjugués harmoniques par rapport à $l' \cap s'(N')$. Il résulte alors de (6.18) que $h(Q_p) = Q'_{\tilde{\gamma}(p)}$, donc $h(X) = X'$, et la restriction de h à X induit un isomorphisme g de X sur X' .

6.19.2. Étudions maintenant l'unicité de g . On peut supposer que $X' = X$, et que g est un automorphisme projectif de X qui induit l'identité sur C . Si g est la restriction à X d'un automorphisme h de P , on a donc $h(Q_p) = Q_p$ pour tout $p \in \Pi$, et $h \circ s = s$.

Soient N_1, \dots, N_c les composantes de N ; posons $V_i = H^0(N_i, (M \otimes H)|_{N_i})$, de sorte que $H^0(N, M \otimes H) = \bigoplus_i V_i$. L'automorphisme h provient d'un automorphisme h' de $H^0(N, M \otimes H)$, déterminé à multiplication scalaire près. Comme h induit l'identité sur $s(N)$, on a $h'(V_i) = V_i$ pour tout i , et la restriction de h' à V_i est la multiplication par un scalaire α_i .

Soit p un point de $\Pi - C$, et soit $F = 0$ l'équation de la quadrique Q_p . Cette quadrique ne contient aucune des variétés $s(N_i)$; il en résulte que dans la décomposition :

$$H^0(P, \mathcal{O}_P(2)) \simeq S^2 H^0(N, M \otimes H) = \sum_i S^2 V_i \oplus \sum_{i < j} V_i \otimes V_j,$$

la projection de F sur chacun des facteurs $S^2 V_i$ est non nulle. Comme $h(Q_p) = Q_p$, on en conclut que tous les α_i^2 sont égaux; on peut les supposer égaux à 1, de sorte que $\alpha_i = \pm 1$. Inversement, considérons l'automorphisme h' de $H^0(N, M \otimes H)$ qui opère sur chaque facteur V_i par multiplication par α_i , avec $\alpha_i = \pm 1$. Soit u l'automorphisme du faisceau $M \otimes H$ qui coïncide sur N_i avec la multiplication par α_i . On a $\bar{u} = h'$ (notation de 6.19.1) et $u^2 = 1$, de sorte que h' définit un automorphisme h de P tel que $h(X) = X$. Ainsi les automorphismes de P qui préservent les quadriques Q_p sont obtenus à partir des suites $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq c}$, avec $\alpha_i = \pm 1$; deux suites (α_i) et (α'_i) distinctes définissent le même automorphisme de P si et seulement si $\alpha'_i = -\alpha_i$ pour tout i . La proposition en résulte immédiatement.

Remarque 6.19.3. — La démonstration donne en fait un résultat plus intrinsèque. La donnée de X détermine un isomorphisme $\lambda : M^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \omega_N$, bien défini à multiplication par un scalaire près. Appelons automorphisme du triple (C, M, λ) la donnée d'un automorphisme γ de C et d'un isomorphisme $V : \bar{\gamma}^* M \rightarrow M$ tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\gamma}^* M^2 & \xrightarrow{\bar{\gamma}^* \lambda} & \bar{\gamma}^* \omega_N \\ \downarrow V^{\otimes 2} & & \downarrow d\bar{\gamma} \\ M^2 & \xrightarrow{\lambda} & \omega_N \end{array}$$

soit commutatif; la composition de ces automorphismes se définit de manière évidente. Notons ε l'automorphisme de (C, M, λ) défini par l'application identique de C et la multiplication par -1 sur M ; alors le groupe des automorphismes projectifs de X est isomorphe au quotient du groupe des automorphismes de (C, M, λ) par le sous-groupe $\{1, \varepsilon\}$.

Exemple 6.20. — Prenons pour X l'intersection des quadriques d'équations :

$$(6.20) \quad \sum \alpha_i X_i^2 = 0, \quad \sum \beta_i X_i^2 = 0, \quad \sum \gamma_i X_i^2 = 0.$$

On vérifie facilement que X est non-singulière si et seulement si tous les déterminants :

$$M_{ijk} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_j & \beta_j & \gamma_j \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{vmatrix}$$

sont non nuls, ce qu'on supposera.

La courbe C est alors la réunion des (n+1) droites l_i d'équations :

$$(l_i) : \lambda\alpha_i + \mu\beta_i + \nu\gamma_i = 0, \quad (i = 0, \dots, n);$$

ces droites ont la propriété qu'il en passe au plus deux par n'importe quel point du plan. Si l'on considère $T = \{l_0, \dots, l_n\}$ comme un ensemble de points dans le plan projectif dual $\check{\Pi}$, il revient au même de dire que trois points distincts de T ne sont pas alignés.

Inversement, étant donné un ensemble T de (n+1) points l_i dans $\check{\Pi}$, tel que trois points distincts de T ne soient pas alignés, il existe une intersection de trois quadriques diagonales admettant comme courbe discriminante $C = \bigcup_i l_i$: si $l_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, il suffit de prendre les trois équations (6.20). La donnée de M est superflue dans ce cas, puisqu'il n'existe qu'une seule thêta-caractéristique sur \mathbf{P}^1 , à savoir le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)$. Par suite on déduit de la proposition 6.19 que la donnée, à isomorphisme projectif près, de la variété non-singulière X, intersection complète de 3 quadriques simultanément diagonalisables, est équivalente à la donnée d'un ensemble T de (n+1) points de $\check{\Pi}$, tels que trois points distincts de T ne soient pas alignés; le groupe des automorphismes projectifs de X est extension par $(\mathbf{Z}/2)^n$ du groupe des automorphismes u de $\check{\Pi}$ tels que $u(T) = T$.

6.21. La proposition (6.19) montre que l'application qui associe à la classe d'isomorphisme de la variété X la classe d'isomorphisme de (C, M) est injective. On va montrer à présent que cette application est bijective, à condition bien sur d'imposer la condition $H^0(N, M) = (0)$ (6.12). La démonstration est inspirée de [Di].

Rappelons que la quadrique duale d'une quadrique non-singulière Q dans \mathbf{P}^n est la quadrique (non-singulière) dans $\check{\mathbf{P}}^n$ formée des hyperplans tangents à Q. Si Q admet un point singulier s, on définit encore la quadrique duale de Q comme l'hyperplan \check{s} (formé des hyperplans passant par s) compté avec multiplicité 2 : c'est une quadrique de rang 1. Si le lieu singulier de Q est de dimension ≥ 1 , nous dirons par abus de langage que la quadrique duale de Q est l'espace $\check{\mathbf{P}}^n$ tout entier, et nous le considérerons comme une quadrique de rang 0. Si l'équation de Q s'écrit $\sum A_{ij} X_i X_j = 0$, la quadrique duale de Q est donc définie dans tous les cas par la matrice des mineurs d'ordre n de la matrice (A_{ij}) .

LEMME 6.22. — Soient Π un plan projectif, et R un diviseur dans $\Pi \times \mathbf{P}^n$ défini par une équation :

$$\sum B_{ij} T_i T_j = 0,$$

où les B_{ij} sont des polynômes homogènes de degré n sur Π . Si $r : \mathbb{R} \rightarrow \Pi$ est la première projection, on note R_p la quadrique $r^{-1}(p)$, pour $p \in \Pi$. On suppose que :

- (i) la quadrique générique R_η est non-singulière;
- (ii) il existe une courbe réduite de degré $(n+1)D \subset \Pi$, sans point de multiplicité $(n+1)$, telle que pour $d \in D$, la quadrique R_d soit de rang ≤ 1 .

Alors il existe un réseau de quadriques Q_p ($p \in \Pi$) dans $\check{\mathbb{P}}^n$ telle que pour tout p dans Π , R_p soit la quadrique duale de Q_p ; la quadrique générique Q_η est non-singulière, et la courbe discriminante du réseau $(Q_p)_{p \in \Pi}$ est égale à D .

Démonstration. — Soit $F = 0$ l'équation de D . Les mineurs d'ordre 2 de la matrice B_{ij} s'annulent sur D , donc sont divisibles par F . Montrons par récurrence sur r que les mineurs d'ordre r sont divisibles par F^{r-1} . Soit B_r une matrice carrée d'ordre r extraite de (B_{ij}) ; par hypothèse de récurrence F^{r-2} divise la matrice des cofacteurs $\Lambda^{r-1} B_r$, donc $F^{r-(r-2)}$ divise son déterminant. Or $\det(\Lambda^{r-1} B_r) = (\det(B_r))^{r-1}$; comme F est produit de facteurs premiers distincts, on en déduit que F^{r-1} divise $\det(B_r)$. Ainsi tout mineur d'ordre r de (B_{ij}) est divisible par F^{r-1} . En considérant les degrés, on voit que les mineurs d'ordre n de la matrice (B_{ij}) s'écrivent :

$$M_{ij} = F^{n-1} \cdot A_{ij},$$

où les A_{ij} sont des formes linéaires sur Π ; on voit de même que

$$\det(B_{ij}) = k \cdot F^n,$$

où k est un scalaire $\neq 0$ [à cause de (i)].

On en déduit aussitôt que

$$\det(A_{ij}) = k^n \cdot F;$$

le fait que D n'a pas de point $(n+1)$ -uple assure que les A_{ij} ne s'annulent simultanément en aucun point de Π , donc que la matrice (A_{ij}) définit un réseau de quadriques Q_p ($p \in \Pi$) dans \mathbb{P}^n . Il résulte des formules précédentes que la matrice des mineurs d'ordre n de (A_{ij}) est égale à $k^{n-1} \cdot (B_{ij})$, c'est-à-dire que R_p est la quadrique duale de Q_p pour tout p dans Π .

PROPOSITION 6.23. — Soient C une courbe plane stable de degré $n+1$ ($n \geq 3$), M une thêta-caractéristique sur la normalisée N de C , telle que $H^0(N, M) = (0)$. Il existe une variété non-singulière X , intersection complète de 3 quadriques dans \mathbb{P}^n , telle que C soit isomorphe à la courbe discriminante de X et M à la thêta-caractéristique associée à X . La variété X est alors unique à isomorphisme près.

Démonstration : La dernière phrase n'est qu'un rappel de la proposition (6.19).

6.23.1. Notons Π le plan projectif qui contient C , H l'image réciproque sur N du faisceau $\mathcal{O}_\Pi(1)$, $P = \mathbb{P}(H^0(N, M \otimes H))$.

Considérons l'application naturelle :

$$\varphi : S^2 H^0(N, M \otimes H) \rightarrow H^0(N, \omega_N \otimes H^2).$$

L'espace $H^0(N, \omega_N \otimes H^2)$ s'identifie canoniquement à l'espace V_n des polynômes homogènes de degré n sur Π qui s'annulent aux points de $\text{Sing}(C)$ (courbes adjointes de degré n), de sorte que φ s'identifie à une application quadratique sur $H^0(N, M \otimes H)$ à valeurs dans V_n ; elle définit donc un diviseur R dans $\Pi \times \check{P}$ qui a les propriétés de degré énoncées dans le lemme 6.22; on va montrer qu'il vérifie les conditions (i) et (ii) de ce lemme.

6.23.2. Soit p un point de C ; dire que l'élément $\varphi(t \otimes t)$ s'annule en p signifie que $t(p) = 0$. La quadrique R_p est donc égale à l'hyperplan H_p compté avec multiplicité 2, H_p étant la projectivisation de l'hyperplan dans $H^0(N, M \otimes H)$ formé des sections qui s'annulent en p .

6.23.3. La condition (ii) est donc satisfaite; vérifions (i). Choisissons une droite $l \subset \Pi$ qui coupe C en $(n+1)$ points non-singuliers distincts p_0, \dots, p_n . Comme $H^0(N, M) = (0)$, il n'existe pas de section non nulle de $H^0(N, M \otimes H)$ qui s'annule en p_0, \dots, p_n ; par suite il existe une base t_0, \dots, t_n de $H^0(N, M \otimes H)$ telle que

$$t_i(p_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j; \quad t_i(p_i) \neq 0.$$

Pour $i \neq j$, le polynôme de degré $n\varphi(t_i \otimes t_j)$ s'annule en p_0, \dots, p_n , donc sur tout point de l . Le polynôme $\varphi(t_i \otimes t_i)$ s'annule en les n points $p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$, mais pas en p_i ; il en résulte qu'il ne s'annule en aucun point de l distinct des p_j . Soit q un point de l distinct des p_j ; dans la base (t_i) , l'équation de la quadrique R_q se met sous forme diagonale, les coefficients diagonaux étant tous non nuls. La quadrique R_q est donc non-singulière, ce qui prouve (i).

6.23.4. Le lemme 6.22 nous fournit donc un réseau de quadriques $(Q_p)_{p \in \Pi}$, avec $Q_p \subset P$, dont la courbe discriminante est égale à C . Si $p \in C_{\text{reg}}$, la quadrique Q_p a un seul point singulier $s(p)$, puisque sa quadrique duale est de rang 1. L'application $p \mapsto s(p)$ se prolonge en un morphisme $s : N \rightarrow P$. Considérons d'autre part le morphisme $e : N \rightarrow P$ défini par le système linéaire sans points fixes $H^0(N, M \otimes H)$. Il résulte de (6.23.2) que $e = s$. On va montrer que l'intersection des quadriques Q_p ($p \in \Pi$) est une variété non-singulière X de codimension 3 dans P ; l'égalité $e = s$ entraînera alors que $M = s^* \mathcal{O}_P(1) \otimes H^{-1}$ est la thêta-caractéristique associée à X , et la proposition sera démontrée.

6.23.5. Considérons le morphisme e . Écrivons N comme union disjointe :

$$N = N_0 \cup l_1 \cup \dots \cup l_m,$$

où $f(l_i)$ est une droite contenue dans C , et $f(N_0)$ ne contient pas de droites. La restriction de $M \otimes H$ à l_i est le faisceau trivial \mathcal{O}_{l_i} , de sorte que $e(l_i)$ est réduit à un point. Si deux points distincts p, q de N n'appartiennent pas à une même droite l_i , on a

$$H^0(N, H(-p-q)) \neq (0), \quad \text{d'où } H^0(N, M \otimes H^{-1}(p+q)) = (0),$$

et par Riemann-Roch :

$$\dim H^0(N, M \otimes H(-p-q)) = \dim H^0(N, M \otimes H) - 2,$$

par conséquent $e(p) \neq e(q)$. En particulier, si p est un point double de C et $f^{-1}(p) = \{p', p''\}$ on a $e(p') \neq e(p'')$.

6.23.6. Montrons maintenant que X est non-singulière de codimension 3.

Il suffit de montrer qu'en tout point x de X , il existe trois quadriques Q_p telles que les hyperplans tangents en x à ces quadriques soient linéairement indépendants. Si ce n'est pas le cas, il existe une quadrique Q_p ($p \in \Pi$) qui est singulière en x . On vérifie immédiatement que p est alors un point singulier de C , et que ce ne peut être un point double ordinaire que si le lieu singulier de Q_p est réduit à $\{x\}$. Mais dans ce cas on a $s(p') = s(p'') = x$ (avec $f(p') = f(p'') = p$), ce qui contredit 6.23.5. Ceci achève la preuve de la proposition.

6.24. *Remarque : Réseaux de coniques.* — Il est clair qu'il revient au même de se donner la variété $X \subset \mathbf{P}^n$ ou le réseau de quadriques qui la contiennent; on aurait donc pu formuler les propositions 6.19 et 6.23 en termes de réseaux de quadriques, un isomorphisme de deux réseaux étant, par définition, un isomorphisme des espaces \mathbf{P}^n correspondants qui transforme chaque quadrique du premier réseau en une quadrique du second. Cette formulation a l'avantage de s'étendre au cas des réseaux de coniques dans \mathbf{P}^2 , comme on le vérifie immédiatement; il faut considérer les réseaux sans point fixe, c'est-à-dire tels que l'intersection des coniques du réseau est vide. On obtient que la donnée à isomorphisme près d'un tel réseau est équivalente à la donnée, à isomorphisme projectif près, d'une cubique plane n'ayant que des points doubles ordinaires, munie d'un pseudo-revêtement.

Examinons d'abord les cas spéciaux où la courbe discriminante C est singulière : le pseudo-revêtement est déterminé par C dans ce cas. On peut donc énoncer :

PROPOSITION 6.25. — *Il existe, à isomorphisme près, trois réseaux de coniques sans points fixes contenant une conique de rang 1 (i. e. une droite double). Ce sont :*

— le réseau diagonal, d'équation :

$$\lambda X_0^2 + \mu X_1^2 + \nu X_2^2 = 0.$$

Le groupe d'automorphismes de ce réseau est l'image dans $\text{PGL}(3)$ du groupe des matrices monomiales (= matrices ayant exactement un élément $\neq 0$ dans chaque ligne et chaque colonne).

— le réseau d'équation :

$$\lambda X_0^2 + \mu X_1^2 + \nu(X_0 X_1 - X_2^2) = 0,$$

dont la courbe discriminante est réunion d'une droite et d'une conique. Son groupe d'automorphismes est le produit semi-direct de $\mathbf{Z}/2$ par \mathbf{G}_m ; ces groupes opèrent par les automorphismes :

$$(X_0, X_1, X_2) \mapsto (X_1, X_0, X_2),$$

et

$$(X_0, X_1, X_2) \mapsto (\alpha X_0, \alpha^{-1} X_1, X_2) \quad \alpha \in \mathbf{G}_m.$$

– le réseau d'équation

$$\lambda X_0^2 + \mu X_1 X_2 + \nu(X_1^2 + X_2^2 + X_0 X_1) = 0,$$

dont la courbe discriminante est une cubique à point double C . Le groupe d'automorphismes de ce réseau est isomorphe au groupe des automorphismes de C , lui-même isomorphe à \mathfrak{S}_3 (groupe de permutation des trois points d'inflexion de C).

Passons au cas où la courbe C est non-singulière. Il revient au même de se donner une cubique non-singulière munie d'un revêtement double non trivial, à isomorphisme projectif près, ou une courbe elliptique munie d'un point d'ordre 2, à isomorphisme près; en utilisant la classification de ces dernières, on arrive au résultat suivant :

PROPOSITION 6.26. — Soit Π un réseau de coniques sans point fixe, ne contenant pas de coniques de rang 1. Alors une et une seule des deux possibilités suivantes est réalisée :

(i) il existe un scalaire $t \neq 0, 4$, uniquement déterminé, tel que Π soit isomorphe au réseau Π_t d'équation :

$$2\lambda X_0 X_1 + \mu(tX_1^2 - X_2^2) + \nu(X_0^2 + tX_1^2 + 2X_1 X_2) = 0.$$

Ces réseaux admettent 18 automorphismes.

(ii) Π est isomorphe au réseau d'équation :

$$2\lambda X_0 X_1 + \mu(X_1^2 - X_2^2) + \nu(X_0^2 + 2X_1 X_2) = 0.$$

Ce réseau admet 36 automorphismes.

Remarque 6.27. — On sait ([M 3]) que les thêta-caractéristiques M sur une courbe lisse se répartissent en deux classes, stables par déformation, suivant la parité de $\dim H^0(C, M)$. On a associé une situation géométrique aux thêta-caractéristiques paires, du moins à celles pour lesquelles le « thêta-null » correspondant ne s'annule pas; on peut se demander s'il existe un phénomène analogue pour les caractéristiques impaires. La réponse est oui : les fibrés en quadriques correspondant sont les hypersurfaces cubiques dans \mathbf{P}^n contenant un \mathbf{P}^{n-3} (1.4.2). Indiquons sans démonstration les principaux résultats.

Soit X une hypersurface cubique dans \mathbf{P}^n contenant un sous-espace projectif L de dimension $(n-3)$. Désignons par P l'espace \mathbf{P}^n éclaté le long de L , et par \hat{X} le transformé strict de X dans P ; on supposera toujours que \hat{X} est lisse.

La projection de centre L fait de \hat{X} un fibré en quadriques (1.4.2); la courbe discriminante C est de degré $(n+1)$. L'application qui à un point de C_{reg} associe le point singulier de la quadrique correspondante se prolonge en un morphisme s de la normalisée N de C dans \mathbf{P}^n ; ce morphisme contracte en un point les droites contenues dans C , et sa restriction au reste de N est un plongement. On a

$$s^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(2) \cong \omega_N \otimes H.$$

Considérons l'application

$$s^* : H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(2)) \rightarrow H^0(N, \omega_N \otimes H^2).$$

La série polaire de X définit un sous-espace V de $H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(2))$, de dimension $(n+1)$; le sous-espace s^*V de $H^0(N, \omega_N \otimes H^2)$ est de dimension 3 : c'est la série polaire de C .

On a $s^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1) = M \otimes H$, où M est une thêta-caractéristique sur N , et

$$\dim H^0(N, M) = 1.$$

Étant donné une courbe plane stable C , de degré $(n+1)$, et une thêta-caractéristique M sur la normalisée de C , avec $h^0(M) = 1$, il existe une hypersurface cubique X dans \mathbf{P}^n , contenant un \mathbf{P}^{n-3} , telle que la courbe discriminante et la thêta-caractéristique associées à X soient (C, M) ; X est alors déterminé à isomorphisme près.

CHAPITRE VII

Le problème de Torelli

7.1. Le théorème de Torelli original affirme que deux courbes dont les jacobiniennes sont isomorphes (en tant que variétés abéliennes polarisées) sont isomorphes. Convenablement énoncé, le problème peut être posé pour les variétés de dimension supérieure; on aura par exemple :

PROBLÈME DE TORELLI POUR LES INTERSECTIONS DE TROIS QUADRIQUES DANS \mathbf{P}^{2n} . — Soit X (resp. X') une variété lisse sur C , intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}_C^{2n} ; on suppose que les jacobiniennes intermédiaires JX et JX' , munies de leur polarisation, sont isomorphes. Est-ce que X est isomorphe à X' ?

Un problème analogue (mais différent) est le problème de Torelli local : Soient X une intersection complète lisse de trois quadriques dans \mathbf{P}^{2n} , \mathcal{X}_1 (resp. \mathcal{X}_2) une déformation de X au-dessus de $\text{Spec}(C[T]/(T^2))$ (voir 7.3.1 plus loin pour une définition précise). Si les déformations correspondantes de JX sont isomorphes, est-ce que \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 sont isomorphes?

Compte tenu des résultats du chapitre VI, ces problèmes se reformulent en termes de variétés de Prym. Notons \mathcal{R}_g l'espace des modules (grossier) des courbes lisses de genre g munies d'un revêtement étale double, et \mathcal{A}_{g-1} l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $(g-1)$; le but de ce chapitre est l'étude de l'application :

$$\text{Prym} : \mathcal{R}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}.$$

LE PROBLÈME DE TORELLI LOCAL POUR LES VARIÉTÉS DE PRYM. — 7.2. Dans cette partie, on va étudier l'application tangente au morphisme « Prym ». Les espaces \mathcal{R}_g et \mathcal{A}_{g-1} , étant des espaces de modules grossiers, ont des singularités dues aux automorphismes

des objets qu'ils classifient; plutôt que ces espaces, il faut considérer les foncteurs correspondants :

$$R_g : S \mapsto \{ \text{classes d'isomorphisme de courbes de genre } g \text{ sur } S \text{ (lisses)} \\ + \text{ revêtement étale double} \}.$$

$$A_{g-1} : S \mapsto \{ \text{classes d'isomorphisme de } S\text{-schémas abéliens principalement} \\ \text{polarisés de dimension } (g-1) \}.$$

L'application Prym définit un morphisme de foncteurs $Pr : R_g \rightarrow A_{g-1}$, dont il s'agit de calculer l'application tangente en un point $(C, \pi) \in R_g(k)$. (Les foncteurs considérés sont des foncteurs contravariants sur la catégorie des k -schémas, donc covariants sur la catégorie des k -anneaux; rappelons que l'espace tangent $T_{F,p}$ à un tel foncteur F , en un point $p \in F(k)$, est défini de la façon suivante : notons R l'anneau $k[\varepsilon]$, avec $\varepsilon^2 = 0$, et $a : R \rightarrow k$ l'augmentation naturelle, d'où un morphisme $u = F(a) : F(R) \rightarrow F(k)$; alors $T_{F,p} = u^{-1}(p)$.)

7.3. Nous aurons besoin de quelques rappels sur les déformations et l'application de Kodaira-Spencer.

7.3.1. Si V est une variété projective et lisse sur k , et $(S, 0)$ un k -schéma pointé (i. e. muni d'un point base rationnel 0), une déformation de V sur $(S, 0)$ est un morphisme propre et lisse $p : X \rightarrow S$, tel que X_0 soit isomorphe à V .

7.3.2. Soit $p : X \rightarrow (S, 0)$ une déformation de V . Considérons la suite exacte des espaces tangents :

$$0 \rightarrow T_{X/S} \rightarrow T_X \xrightarrow{T_p} p^* T_S \rightarrow 0.$$

Par restriction à $X_0 = V$, on obtient une nouvelle suite exacte :

$$0 \rightarrow T_V \rightarrow (T_X)|_V \rightarrow \mathcal{O}_V \otimes_k T_0 \rightarrow 0,$$

T_0 désignant l'espace tangent à S en 0 .

En appliquant la suite exacte de cohomologie, on obtient une application :

$$k_{X/S} : T_0 \rightarrow H^1(V, T_V),$$

qui est l'application de Kodaira-Spencer de la déformation.

Signalons la propriété de compatibilité suivante, dont la vérification est immédiate. :

LEMME 7.3.3. — Soient $X \rightarrow (S, 0)$ (resp. $Y \rightarrow (S, 0)$) une déformation d'une variété V (resp. W), $\bar{u} : X \rightarrow Y$ un S -morphisme, de sorte que \bar{u}_0 s'identifie à un morphisme $u : V \rightarrow W$. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & H^1(V, T_V) & \\ \nearrow k_{X/S} & & \searrow T_u \\ T_0 & & H^1(V, u^* T_W) \\ \searrow k_{Y/S} & & \nearrow u^* \\ & H^1(W, T_W) & \end{array}$$

7.3.4. L'application de Kodaira-Spencer permet de calculer dans les espaces tangents aux espaces de modules :

Notons Def_V le foncteur qui associe à tout k -schéma pointé $(S, 0)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de V au-dessus de $(S, 0)$. Soit $p : X \rightarrow (S, 0)$ une telle déformation, d'où un morphisme $u : S \rightarrow \text{Def}_V$. Alors l'espace tangent au foncteur Def_V en l'unique point de $\text{Def}_V(k)$ est naturellement isomorphe à $H^1(V, T_V)$, et l'application tangente :

$$Tu : T_{S,0} \rightarrow T_{\text{Def}_V} \cong H^1(V, T_V)$$

s'identifie à $k_{X/S}$.

7.3.5. Cet énoncé ne s'applique pas directement au foncteur A_{g-1} . Soit V une variété abélienne principalement polarisée; notons A_V le foncteur qui associe à un k -schéma pointé $(S, 0)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de S -schémas abéliens principalement polarisés dont la fibre en 0 est isomorphe à V . Alors le morphisme naturel : $A_V \rightarrow \text{Def}_V$ est net, c'est-à-dire qu'il induit une injection sur les espaces tangents. L'image de T_{A_V} dans $T_{\text{Def}_V} = H^1(V, T_V)$ se décrit de la manière suivante : notons t_V (resp. $t_{\hat{V}}$) l'espace tangent à l'origine de la variété abélienne V (resp. de la variété abélienne duale \hat{V}). Comme $T_V = \mathcal{O}_V \otimes_k t_V$, et comme $H^1(V, \mathcal{O}_V)$ s'identifie canoniquement à $t_{\hat{V}}$, l'espace $H^1(V, T_V)$ est canoniquement isomorphe à $t_V \otimes t_{\hat{V}}$; de plus la polarisation de V fournit un isomorphisme de t_V sur $t_{\hat{V}}$, ce qui permet d'identifier T_{Def_V} à $t_V^{\otimes 2}$. Dans ces conditions, l'image de T_{A_V} dans T_{Def_V} s'identifie au sous-espace $S^2 t_V$ de $t_V^{\otimes 2}$ formé des tenseurs symétriques.

7.4. Revenons au calcul de l'application tangente au morphisme $\text{Pr} : R_g \rightarrow A_{g-1}$ (7.2). Soient C une courbe lisse de genre g , $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement étale double, défini par un faisceau inversible η tel que $\eta^2 = \mathcal{O}_C$; soit P la variété de Prym associée à (\tilde{C}, C) . Si l'involution ι de \tilde{C} opère sur un espace vectoriel V , on notera V^+ (resp. V^-) le sous-espace propre relatif à la valeur propre $+1$ (resp. -1). Pour toute variété abélienne A , on notera t_A l'espace tangent à l'origine de A .

On a vu (7.3.5) que l'espace tangent à A_{g-1} au point P est canoniquement isomorphe à $S^2 t_P$; comme $P = (\text{Ker}(1 + \iota))^0 \subset \text{JC}$, on a

$$t_P = (t_{\tilde{C}})^- = H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})^-,$$

d'où par dualité de Serre :

$$\check{t}_P = H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^- = H^0(C, \omega_C \otimes \eta).$$

D'autre part, notons M_g le foncteur défini par : $M_g(S) = \{ \text{classes d'isomorphisme de courbes de genre } g \text{ lisses sur } S \}$.

Le morphisme d'oubli $R_g \rightarrow M_g$ est étale, de sorte que l'espace tangent à R_g en (C, π) est isomorphe à $H^1(C, T_C)$; son dual est donc isomorphe à $H^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$. On voit finalement que l'application cotangente à Pr s'identifie canoniquement à une application :

$$d\text{Pr} : S^2 H^0(C, \omega_C \otimes \eta) \rightarrow H^0(C, \omega_C^2).$$

PROPOSITION 7.5. — Avec les identifications précédentes, l'application cotangente à Pr s'identifie à l'application naturelle :

$$\varphi_{C,\eta} : S^2 H^0(C, \omega_C \otimes \eta) \rightarrow H^0(C, \omega_C^2),$$

déduite de l'isomorphisme $(\omega_C \otimes \eta)^2 \xrightarrow{\sim} \omega_C^2$.

Démonstration. 7.5.1. — On sait qu'il existe une déformation $\mathcal{C} \rightarrow (S, 0)$ de C telle que l'application $k_{\mathcal{C}/S}$ soit un isomorphisme (on peut prendre pour S un « espace de modules fin » des courbes de genre g munies d'une rigidification). De plus, quitte à remplacer S par un revêtement étale, on peut supposer que π se prolonge en un revêtement étale $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$. On associe à $\tilde{\pi}$ un schéma de Prym \mathcal{P} sur S , d'où un morphisme $S \rightarrow A_{\mathbb{P}}$ (7.3.5) dont on veut calculer l'application tangente; d'après (7.3.5), il revient au même de calculer l'application tangente du morphisme $S \rightarrow \text{Def}_{\mathbb{P}}$, c'est-à-dire encore l'application de Kodaira-Spencer $k_{\mathcal{P}/S}$.

Le S -schéma en groupes $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{C}}/S)$ est réunion disjointe des schémas $J^k \tilde{\mathcal{C}}$ paramétrant les faisceaux inversibles de degré k ; il existe un morphisme canonique l de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $J^1 \tilde{\mathcal{C}}$. Quitte à faire une extension étale de S , on peut supposer qu'il existe un isomorphisme v de $J^1 \tilde{\mathcal{C}}$ sur $J^0 \tilde{\mathcal{C}}$, d'où un morphisme composé :

$$\bar{u} : \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{l} J^1 \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{v} J^0 \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{1^{-1}} \mathcal{P}.$$

On note $u = \bar{u}_0 : \tilde{C} \rightarrow P$. On déduit de 7.3.3 appliqué au morphisme $\bar{u} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{P}$, un diagramme commutatif :

$$7.5.1. \quad \begin{array}{ccc} & H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) & \\ \nearrow k_{\tilde{\mathcal{C}}/S} & & \searrow T_u \\ T_0 & & H^1(\tilde{C}, u^* T_P) \\ \searrow k_{\mathcal{P}/S} & & \nearrow u^* \\ & H^1(P, T_P) & \end{array}$$

(on note T_0 l'espace tangent à S en 0).

7.5.2. Calcul de u^* . — Comme $T_P = \mathcal{O}_P \otimes_k t_P$, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(P, T_P) & \xrightarrow{u^*} & H^1(\tilde{C}, u^* T_P) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^1(P, \mathcal{O}_P) \otimes t_P & \xrightarrow{u^* \otimes 1} & H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \otimes t_P \end{array}$$

Il suffit donc de calculer $u^* : H^1(P, \mathcal{O}_P) \rightarrow H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$. Si l'on identifie $H^1(P, \mathcal{O}_P)$ à $t_{\hat{P}}$ et $H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ à $t_{J\tilde{C}}$, l'homomorphisme u^* correspond à l'application tangente à l'origine de $\hat{u} : \hat{P} \rightarrow J\tilde{C}$.

LEMME 7.5.3. — Notons $\rho : P \rightarrow \hat{P}$ l'isomorphisme déduit de la polarisation principale de P , et m le plongement naturel de P dans $J\tilde{C}$. on a alors $\hat{u} = -m \rho^{-1}$.

Démonstration. — Notons $\theta : \tilde{J}\tilde{C} \rightarrow \widehat{J}\tilde{C}$ l'isomorphisme déduit de la polarisation principale de $\tilde{J}\tilde{C}$; on a par définition : $2\rho = \hat{m}\theta m$ ([M 1]). Soit $t : \tilde{C} \rightarrow \tilde{J}\tilde{C}$ le morphisme $(vl)_0$ (7.5.1) : il existe un faisceau inversible L de degré -1 sur \tilde{C} tel que $t(x) = cl[L(x)]$ pour tout $x \in \tilde{C}$.

Notons $p : \tilde{J}\tilde{C} \rightarrow P$ l'épimorphisme tel que $mp = 1 - \iota$. On a par définition $u = pt$ d'où $\hat{u} = \hat{t}p$. On sait que $\hat{t} = -\theta^{-1}$ ([L 2]); on a donc :

$$\begin{aligned} 2\hat{u}\rho &= -2\theta^{-1}\hat{p}\rho = -\theta^{-1}\hat{p}\hat{m}\theta m, \\ &= -\theta^{-1}(1-\hat{\iota})\theta m, \\ &= -(1-\iota)m = -2m, \quad \text{d'où le lemme.} \end{aligned}$$

7.5.4. *Calcul de Tu .* — Il est plus commode de calculer le transposé de Tu . La dualité de Serre nous fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\tilde{C}, u^*T_P)^\vee & \xrightarrow{\sim} & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}} \otimes u^*\Omega_P^1) \\ \downarrow t_{Tu} & & \downarrow 1 \otimes du \\ H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}})^\vee & \xrightarrow{\sim} & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}} \otimes \omega_{\tilde{C}}) \end{array}$$

Comme le faisceau Ω_P^1 est libre, l'espace $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}} \otimes u^*\Omega_P^1)$ s'identifie canoniquement à $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) \otimes H^0(\tilde{C}, u^*\Omega_P^1)$. Or il résulte du lemme 7.5.3 que du induit un isomorphisme de $H^0(\tilde{C}, u^*\Omega_P^1)$ sur $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^\vee$; on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}} \otimes u^*\Omega_P^1) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) \otimes H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^\vee \\ \downarrow 1 \otimes du & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ & & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^{\otimes 2}) \end{array}$$

où $\tilde{\varphi}$ est l'application évidente.

7.5.5. *Calcul de $k_{\tilde{\mathcal{G}}/S}$.* — D'après 7.3.3 appliqué à $\bar{\pi}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & k_{\tilde{\mathcal{G}}/S} & H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) \\ T_0 & \nearrow & \searrow T\pi \\ & k_{\mathcal{G}/S} & H^1(C, T_C) \\ & & \nearrow \pi^* \\ & & H^1(\tilde{C}, \pi^*T_C) \end{array}$$

Or $T\pi$ est un isomorphisme, et l'on a

$$H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}}) \cong H^1(\tilde{C}, \pi^*T_C) = H^1(C, T_C) \oplus H^1(C, T_C \otimes \eta),$$

d'où une injection $j : H^1(C, T_C) \rightarrow H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}})$, dont l'image est le sous-espace $H^1(\tilde{C}, T_{\tilde{C}})^\oplus$. Il résulte de ce qui précède que si l'on identifie T_0 à $H^1(C, T_C)$ par $k_{\mathcal{G}/S}$, l'application $k_{\tilde{\mathcal{G}}/S}$ s'identifie à j .

7.5.6. *Démonstration de la proposition 7.5.* — Dualisons le diagramme (7.5.1). En tenant compte des calculs précédents, on arrive à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{\varphi} & \rightarrow & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^2) \\
 & & & & \searrow p^+ \\
 H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) \otimes H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^- & & & & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^2)^+ \\
 & \searrow p^- \otimes 1 & & & \nearrow t_{k\mathcal{P}/S} \\
 & & & & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^- \otimes H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^-
 \end{array}$$

où p^+ (resp. p^-) désigne la projection sur le sous-espace propre relatif à la valeur propre $+1$ (resp. -1).

On déduit immédiatement de ce diagramme que — compte tenu des identifications précédentes — l'application $t_{k\mathcal{P}/S}$ n'est autre que l'application naturelle de $(H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^-)^{\otimes 2}$ dans $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^2)^+$. Celle-ci se factorise par $S^2(H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^-)$, et l'application obtenue est la différentielle du morphisme $\text{Pr} : R_g \rightarrow A_{g-1}$ au point (C, π) . La proposition résulte alors du carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 S^2(H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^-) & \longrightarrow & H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}^2)^+ \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 S^2 H^0(C, \omega_C \otimes \eta) & \xrightarrow{\varphi_{C, \eta}} & H^0(C, \omega_C^2)
 \end{array}$$

7.6. Le problème de Torelli local pour les variétés de Prym est donc équivalent à la question suivante : étant donné une courbe C et un faisceau inversible η sur C tel que $\eta^2 = \mathcal{O}_C$ ($\eta \neq \mathcal{O}_C$), l'application $\varphi_{C, \eta} : S^2 H^0(C, \omega_C \otimes \eta) \rightarrow H^0(C, \omega_C^2)$ est-elle surjective? Compte tenu des dimensions des espaces considérés, la question n'a de sens que si C est de genre ≥ 6 , ce qu'on supposera. L'exemple suivant montre que la réponse n'est pas toujours positive.

PROPOSITION 7.7. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le faisceau $\omega_C \otimes \eta$ n'est pas très ample;*
- (ii) *Il existe 4 points a, b, c, d de C tels que $\eta = \mathcal{O}_C(a+b-c-d)$.*

Si ces conditions sont réalisées, l'application $\varphi_{C, \eta}$ n'est pas surjective.

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate par Riemann-Roch. Dans cette situation, il existe deux points a, b de C tels que toute section de $H^0(C, \omega_C \otimes \eta)$ qui s'annule en a s'annule aussi en b . On en déduit que toute section de $H^0(C, \omega_C^2)$ qui appartient à l'image de $\varphi_{C, \eta}$, et qui s'annule en a , s'annule en b ; comme ω_C^2 est très ample, l'application $\varphi_{C, \eta}$ ne peut être surjective.

PROPOSITION 7.8. — *Soient C, X deux courbes lisses sur k , $p : C \rightarrow X$ un revêtement double ramifié, de sorte que $C = \text{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \delta^{-1})$ pour un faisceau inversible δ sur X . Soit ε un faisceau inversible sur X tel que $\varepsilon^2 = \mathcal{O}_X$; posons $\eta = p^* \varepsilon$. On suppose que X n'est pas hyperelliptique, et que $H^1(X, \delta) = (0)$.*

- (i) Si $\deg(\delta) \geq 3$, l'application $\varphi_{C, \eta}$ est surjective.
(ii) Supposons X de genre 3, $\deg(\delta) = 2$ et $H^0(X, \delta \otimes \varepsilon) = (0)$. Alors $\varphi_{C, \eta}$ est surjective.

En particulier pour tout $g \geq 7$ il existe une courbe C de genre g et un faisceau η sur C , avec $\eta^2 = \mathcal{O}_C$, tels que l'application $\varphi_{C, \eta}$ soit surjective.

Démonstration. — 7.8.1. Notons σ l'involution de C qui échange les deux feuillets du revêtement p . L'involution σ opère sur $H^0(C, \omega_C \otimes \eta)$ et sur $H^0(C, \omega_C^2)$; comme $\omega_C = p^*(\omega_X \otimes \delta)$, on trouve deux décompositions en somme directe :

$$H^0(C, \omega_C \otimes \eta) = H^0(X, \omega_X \otimes \varepsilon) \oplus H^0(X, \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon),$$

$$H^0(C, \omega_C^2) = H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta^2) \oplus H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta),$$

où le premier facteur de la somme directe (resp. le second) est le sous-espace propre relatif à la valeur propre $+1$ (resp. -1).

Dès lors l'application $\varphi_{C, \eta}$ apparaît comme la somme directe des deux applications :

$$\varphi_1 : S^2 H^0(X, \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon) \oplus S^2 H^0(X, \omega_X \otimes \varepsilon) \rightarrow H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta^2),$$

$$\varphi_2 : H^0(X, \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon) \otimes H^0(X, \omega_X \otimes \varepsilon) \rightarrow H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta).$$

7.8.2. Dans les situations (i) et (ii), montrons que φ_2 est surjective. Comme X n'est pas hyperelliptique, on voit par Riemann-Roch que le faisceau $\omega_X \otimes \varepsilon$ est engendré par ses sections globales; il existe alors deux telles sections s, t qui l'engendrent, d'où une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\omega_X \otimes \varepsilon)^{-1} \xrightarrow{(t, -s)} \mathcal{O}_X^2 \xrightarrow{(s, t)} \omega_X \otimes \varepsilon \rightarrow 0.$$

En prenant le produit tensoriel de cette suite avec $\omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon$, puis la suite exacte de cohomologie associée, on trouve :

$$(7.8.2) \quad 0 \rightarrow H^0(X, \delta) \rightarrow H^0(X, \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon)^2 \xrightarrow{(s, t)} H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta) \rightarrow H^1(X, \delta) \rightarrow 0.$$

Comme $H^1(X, \delta) = 0$ par hypothèse, on obtient la surjectivité de φ_2 (c'est le « lemme de Castelnuovo », cf. [M 4], th. 2).

7.8.3. Dans le cas (i), on a $\deg(\omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon) \geq 2p_a(X) + 1$; d'après ([M 4], th. 6), ceci entraîne que l'application naturelle :

$$S^2 H^0(X, \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon) \rightarrow H^0(X, \omega_X^2 \otimes \delta^2)$$

est surjective. Par suite φ_1 est surjective, et donc aussi $\varphi_{C, \eta}$.

7.8.4. Dans le cas (ii), l'hypothèse $H^0(X, \delta \otimes \varepsilon) = 0$ équivaut à dire que le faisceau $L = \omega_X \otimes \delta \otimes \varepsilon$ est très ample, c'est-à-dire définit un plongement $j : X \rightarrow \mathbf{P}^3$. Il suffit de montrer que l'application naturelle de $S^2 H^0(X, L)$ dans $H^0(X, L^2)$ est surjective, ou encore que c'est un isomorphisme (les deux espaces ayant même dimension); ce qui revient à dire que la courbe $j(C)$ n'est pas contenue dans une quadrique de \mathbf{P}^3 . Supposons que $j(C)$ soit contenue dans une quadrique Q , nécessairement irréductible.

La quadrique Q possède deux systèmes de génératrices (qui sont confondus si Q a un point singulier). Ceux-ci découpent sur X deux séries linéaires; il existe donc deux faisceaux inversibles L_1, L_2 sur X , tels que

$$L = L_1 \otimes L_2, \quad \dim H^0(X, L_1) \geq 2, \quad \dim H^0(X, L_2) \geq 2.$$

Comme X n'est pas hyperelliptique par hypothèse, on doit avoir

$$\deg(L_1) = \deg(L_2) = 3,$$

d'où :

$$L_1 = \omega_X(-p_1), \quad L_2 = \omega_X(-p_2) \quad \text{avec } p_1, p_2 \in X.$$

Mais alors on trouve :

$$L = \omega_X^2(-p_1 - p_2) = \omega_X(q_1 + q_2), \quad \text{avec } \mathcal{O}_X(p_1 + p_2 + q_1 + q_2) = \omega_X;$$

ceci entraîne que le faisceau L n'est pas très ample, d'où une contradiction : l'assertion (ii) est démontrée.

7.8.5. Fixons une courbe X de genre 3, non hyperelliptique, un faisceau inversible ε tel que $\varepsilon^2 = \mathcal{O}_X$, et un entier $d \geq 2$. Un faisceau inversible générique δ de degré d vérifie $H^1(X, \delta) = 0$, et aussi $H^0(X, \delta \otimes \varepsilon) = 0$ si $d = 2$. En choisissant un tel δ , et une section de $H^0(X, \delta^2)$ n'ayant que des zéros simples, on définit un revêtement $p : C \rightarrow X$ vérifiant les hypothèses de (i) [ou de (ii) si $d = 2$]; l'application $\varphi_{C, \eta}$ est donc surjective (avec $\eta = p^* \varepsilon$). Le genre de C est $d+5$; cela justifie la dernière assertion de la proposition.

Remarque 7.9. — Supposons que X soit de genre 3 (non hyperelliptique). On a alors $\dim H^0(X, \omega_X \otimes \varepsilon) = 2$; il résulte alors de la suite exacte (7.8.2) que la condition $H^1(X, \delta) = 0$ est nécessaire pour la surjectivité de φ_2 . En choisissant δ de façon que $H^1(X, \delta) \neq 0$ [ce qui impose $\deg(\delta) \leq 4$], on obtient donc des contre-exemples au problème de Torelli local pour lesquels le faisceau $\omega_C \otimes \eta$ est très ample. On peut obtenir d'autres contre-exemples de ce type, de genre arbitrairement grand, en considérant des revêtements triples de courbes hyperelliptiques. Ces exemples suggèrent qu'on ne peut raisonnablement espérer obtenir une liste complète des paires (C, η) pour lesquelles l'application $\varphi_{C, \eta}$ n'est pas surjective.

Les résultats du chapitre VI permettent de résoudre le problème dans un autre cas particulier :

PROPOSITION 7.10. — Soient C une courbe plane lisse de degré $2m+1$ (avec $m \geq 2$), η un faisceau inversible sur C tel que $\eta^2 = \mathcal{O}_C$ et $H^0(C, \mathcal{O}_C(m-1) \otimes \eta) = (0)$. Alors l'application $\varphi_{C, \eta} : S^2 H^0(C, \omega_C \otimes \eta) \rightarrow H^0(C, \omega_C^2)$ est surjective.

Démonstration. — D'après (6.23), il existe une variété lisse X , intersection complète de 3 quadriques dans \mathbf{P}^{2m} , et un isomorphisme du plan contenant C sur le réseau Π des quadriques contenant X , tels que $C \subset \Pi$ s'identifie à la courbe discriminante de X et que $\mathcal{O}_C(m-1) \otimes \eta$ soit la thêta-caractéristique associée à X . On peut donc appliquer

à C les constructions de 6.15; comme C est lisse, la courbe $\Gamma \subset \Pi \times \mathbf{P}^n$ est isomorphe à C . Le faisceau

$$\omega_C \otimes \eta = \mathcal{O}_C(m-2) \otimes (\mathcal{O}_C(m) \otimes \eta)$$

s'identifie par cet isomorphisme au faisceau noté $\mathcal{O}_\Gamma(m-2,1)$ dans 6.16.

Avec les notations de 6.16, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^2 H^0(P, \mathcal{O}_P(m-2, 1)) & \xrightarrow{\varphi_P} & H^0(P, \mathcal{O}_P(2m-4, 2)) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ S^2 H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(m-2, 1)) & \xrightarrow{\varphi_\Gamma} & H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(2m-4, 2)) \end{array}$$

Il s'agit de prouver la surjectivité de la flèche φ_Γ ; comme la flèche φ_P est clairement surjective, il suffit de montrer que l'application de restriction :

$$\beta : H^0(P, \mathcal{O}_P(2m-4, 2)) \rightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(2m-4, 2))$$

est surjective. On notera $r = 2m-4$.

On trouve comme en 6.16 une résolution L de $\mathcal{O}_\Gamma(r, 2)$, avec :

$$L_p = [\mathcal{O}_P(r-p, 2-p)]^{\binom{n+1}{p}}$$

La suite spectrale d'hypercohomologie du complexe L s'écrit :

$$E_1^{pq} = H^q(P, L_{-p}) \Rightarrow H^{p+q}(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(r, 2)).$$

La formule de Künneth montre que $H^q(P, L_{-p}) = 0$ sauf pour $q = 0, p = 0, -1$ ou -2 . On en déduit que l'edge-homomorphisme $H^0(P, L_0) \rightarrow H^0(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma(r, 2))$ est surjectif, d'où la proposition.

Le cas $m = 2$ de la proposition 7.10 montre qu'il existe une courbe C de genre 6, et un faisceau inversible η vérifiant $\eta^2 = \mathcal{O}_C$, tel que l'application $\varphi_{C, \eta}$ est surjective. Il résulte de ceci et de (7.8) que le morphisme $R_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$ pour $g \geq 6$ est non ramifié sur un ouvert de R_g . On en déduit le :

COROLLAIRE 7.11 (théorème de Wirtinger). — *Le morphisme Prym : $\mathcal{R}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$ (7.1) est quasi-fini au point générique de \mathcal{R}_g pour $g \geq 6$. En particulier, le lieu dans \mathcal{A}_{g-1} des variétés de Prym est de dimension $3g-3$.*

Pour donner un sens à la seconde assertion, il faut soit accepter les variétés de Prym associées aux courbes stables — on sait alors ([B]) que le lieu des variétés de Prym est un fermé irréductible \mathcal{P} de \mathcal{A}_{g-1} — soit définir la dimension d'un sous-ensemble comme la dimension de son adhérence. L'ensemble des variétés de Prym associées à des courbes lisses est constructible et dense dans \mathcal{P} , donc contient un ouvert non vide; j'ignore s'il est ouvert dans \mathcal{P} .

Le théorème de Torelli local pour les intersections de trois quadriques. — Soit X une variété lisse, intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}_C^n (n pair). Associons à toute

déformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ de X le S -schéma abélien principalement polarisé $J \mathcal{X}$ [0.2.3 (ii)]; on obtient ainsi un morphisme de foncteurs :

$$t : \text{Def}_X \rightarrow A_g \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{2}(n+1)(n-2).$$

PROPOSITION 7.12. — *Supposons que X soit ordinaire, c'est-à-dire que la courbe discriminante C associée à X soit non-singulière. Alors le morphisme $t : \text{Def}_X \rightarrow A_g$ est non ramifié.*

On peut démontrer cette proposition (même sans supposer X ordinaire) en utilisant les méthodes de [G 3]; mais nous l'obtiendrons ici comme conséquence du théorème de Torelli local pour les variétés de Prym associées aux courbes planes de degré impair (7.10)

Le théorème étant bien connu pour $n = 4$ (c'est le théorème de Torelli classique pour une courbe de genre 5), on peut supposer $n \geq 6$. Notons $\text{Def}_{X/\mathbb{P}^n}$ le foncteur des déformations de X comme sous-schéma de \mathbb{P}^n ; posons $S = \text{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon])$, avec $\varepsilon^2 = 0$.

LEMME 7.12.1. — *L'application naturelle $\text{Def}_{X/\mathbb{P}^n}(S) \rightarrow \text{Def}_X(S)$ est surjective, et deux éléments de $\text{Def}_{X/\mathbb{P}^n}(S)$ qui ont même image dans $\text{Def}_X(S)$ diffèrent par un automorphisme de \mathbb{P}_S^n .*

Démonstration. — L'application considérée s'identifie au cobord :

$$\partial : H^0(X, N_{X/\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^1(X, T_X),$$

déduit de la suite exacte :

$$0 \rightarrow T_X \rightarrow (T_{\mathbb{P}^n})|_X \rightarrow N_{X/\mathbb{P}^n} \rightarrow 0.$$

Pour montrer la surjectivité de ∂ , il suffit de montrer que $H^1(X, (T_{\mathbb{P}^n})|_X) = 0$; compte tenu de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(1)^{n+1} \rightarrow (T_{\mathbb{P}^n})|_X \rightarrow 0,$$

il suffit de voir que $H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X(1)) = 0$, ce qui est élémentaire.

La même suite exacte montre que la restriction

$$H^0(\mathbb{P}^n, T_{\mathbb{P}^n}) \rightarrow H^0(X, (T_{\mathbb{P}^n})|_X)$$

est un isomorphisme, ce qui entraîne la dernière assertion du lemme.

7.12.2. En associant à toute déformation de X sur S dans \mathbb{P}_S^n la courbe discriminante au-dessus de S , on obtient une application :

$$\text{Def}_{X/\mathbb{P}^n}(S) \rightarrow \text{Def}_C(S).$$

D'après 7.12.1, celle-ci passe au quotient et définit une flèche $d : \text{Def}_X(S) \rightarrow \text{Def}_C(S)$. L'application :

$$t_S : \text{Def}_X(S) \rightarrow A_g(S),$$

se factorise en

$$t_S : \text{Def}_X(S) \xrightarrow{d} \text{Def}_C(S) \xrightarrow{\text{Pr}_S} A_g(S).$$

D'après (7.5) et (7.10), l'application Pr_S est injective, de sorte que l'injectivité de t_S est équivalente à celle de d .

Notons Dpl_C le sous-foncteur de Def_C qui classe les déformations planes de C (on dit qu'une déformation $\mathcal{C} \rightarrow T$ de C est plane s'il existe une T -immersion de \mathcal{C} dans \mathbb{P}_T^2 qui prolonge l'immersion de C dans Π). L'image de d est contenue dans $\text{Dpl}_C(S)$. L'espace tangent $\text{Dpl}_C(S)$ s'identifie à l'image du cobord :

$$\partial : H^0(X, N_{C/\Pi}) \rightarrow H^1(C, T_C).$$

Un calcul facile montre que

$$\dim H^1(X, T_X) = \dim \text{Im } \partial = \frac{1}{2}(n^2 + 5n - 12).$$

Par suite il suffit de montrer que $\text{Im } d = \text{Dpl}_C(S)$, c'est-à-dire que toute déformation plane de C au-dessus de $S = \text{Spec } C[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2 = 0$) peut s'obtenir comme courbe discriminante d'une déformation de X au-dessus de S .

Supposons que X soit défini dans \mathbb{P}^n par les trois équations de degré 2 $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Une déformation \mathcal{X} de X au-dessus de S sera définie dans \mathbb{P}_S^n par les équations :

$$P + \varepsilon A = Q + \varepsilon B = R + \varepsilon C = 0,$$

où A, B, C sont des formes quadratiques sur \mathbb{P}^n .

L'équation de la courbe discriminante de \mathcal{X} est alors :

$$F_\varepsilon = \det(\lambda P + \mu Q + \nu R + \varepsilon(\lambda A + \mu B + \nu C)) = 0.$$

Si $M, N \in M_{n+1}(C)$ sont deux matrices quelconques, on a

$$\det(M + \varepsilon N) = \det(M) + \varepsilon \cdot \text{Tr}(\Lambda^n M \cdot N),$$

donc si l'on désigne par M_{ij} la matrice des mineurs d'ordre n de la matrice $(\lambda P + \mu Q + \nu R)$, et si l'on écrit $(l_{ij}) = \lambda A + \mu B + \nu C$, on trouve :

$$F_\varepsilon = F + \varepsilon \sum_{i,j} M_{ij} l_{ij}, \quad \text{avec } F = \det(\lambda P + \mu Q + \nu R).$$

Il faut montrer que l'on obtient ainsi n'importe quelle déformation de F , c'est-à-dire que l'application :

$$H^0(\Pi, \mathcal{O}_\Pi(1))^{(n+1)^2} \xrightarrow{(M_{ij})} H^0(\Pi, \mathcal{O}_\Pi(n+1))$$

est surjective; or on a vu [6.11 (ii) et 6.16] que les M_{ij} engendrent l'espace $H^0(\Pi, \mathcal{O}_\Pi(n))$. Le résultat s'ensuit immédiatement.

LE PROBLÈME DE TORELLI (GLOBAL) POUR LES VARIÉTÉS DE PRYM. — Il s'agit de savoir si l'application Prym : $\mathcal{R}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$ (7.1) est injective. Nous n'avons ici qu'un résultat négatif.

CONTRE-EXEMPLE 7.13. — Pour $g \leq 10$, l'application Prym : $\mathcal{R}_g \rightarrow \mathcal{A}_{g-1}$ n'est pas injective.

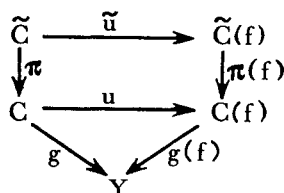
Démonstration. — Ce contre-exemple est une conséquence du théorème de Recillas ([Re]), dont on va rappeler l'énoncé.

On dira qu'un revêtement (ramifié) est simple si chaque fibre a au plus un point de ramification, d'indice de ramification 1.

Soient X, Y deux courbes lisses, $f : X \rightarrow Y$ un revêtement ramifié simple; considérons le produit symétrique fibré $S_Y^2(X)$, quotient de $X \times_Y X$ par l'involution qui échange les facteurs. Il est réunion de la diagonale (isomorphe à X) et d'une courbe lisse $\tilde{C}(f)$, qui est un revêtement ramifié de Y . Si le revêtement f est de degré 4, il existe une Y -involution naturelle ι sur $\tilde{C}(f)$: si $y \in Y$ n'est pas un point de ramification de f , un point de $\tilde{C}(f)$, s'identifie à un sous-ensemble à deux éléments A de la fibre $f^{-1}(y)$, et l'on a $\iota A = f^{-1}(y) - A$. Cette involution n'a pas de points fixes; par suite la courbe $C(f) = \tilde{C}(f)/(\iota)$ est lisse, et l'application naturelle $\pi(f) : \tilde{C}(f) \rightarrow C(f)$ est un revêtement étale de degré 2. La projection de $\tilde{C}(f)$ sur Y définit par passage au quotient un revêtement ramifié simple $g(f) : C(f) \rightarrow Y$ de degré 3. Le diviseur de ramification de $g(f)$ (sur Y) est égal à celui de f .

THÉORÈME DE RECILLAS. — (i) Soit $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ un revêtement ramifié simple de degré 4. La variété de Prym associée au revêtement $\pi(f)$ est isomorphe (en tant que variété abélienne polarisée) à la jacobienne JX .

(ii) Soient $g : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ un revêtement ramifié simple de degré 3, et $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement étale double. Il existe un revêtement ramifié simple de degré 4 $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ tel qu'on ait un diagramme commutatif :



où u et u sont des isomorphismes. De plus, le revêtement f est déterminé à isomorphisme près par cette condition.

Démonstration de 7.13. — Compte tenu de (i) et de l'assertion d'unicité de (ii), il suffit d'exhiber, pour tout $g \leq 9$, une courbe lisse X de genre g , telle qu'il existe deux revêtements ramifiés simples de degré 4 $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ et $f' : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, non isomorphes. En effet les revêtements doubles $\pi(f)$ et $\pi(f')$ seront alors non isomorphes, mais les variétés de Prym associées seront toutes deux isomorphes à JX .

Traisons d'abord le cas $g = 9$. Prenons pour X l'intersection dans \mathbf{P}^3 d'une quadrique non-singulière Q et d'une quartique non-singulière assez générale F . Alors X est une courbe lisse de genre 9. Les deux systèmes de génératrices de Q découpent sur X deux séries linéaires distinctes g_4^1 , auxquelles correspondent deux revêtement ramifiés f (resp. f') : $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ de degré 4. Il faut vérifier : (a) que ces revêtements sont simples; (b) qu'ils ne sont pas isomorphes.

La propriété (a) signifie que Q ne contient pas de droite qui soit bitangente à F , ou qui ait un contact d'ordre > 2 avec F en un point. Or la variété de ces droites est de dimension ≤ 2 , tandis que le sous-espace des quadriques contenant une droite est de codimension 3 dans l'espace projectif des quadriques de \mathbf{P}^3 . On en déduit que pour F fixée, un choix générique de Q donne des revêtements f et f' simples.

Pour que f et f' ne soient pas isomorphes, il suffit que X n'ait pas d'automorphisme autre que l'identité. Dans l'espace des modules des courbes de genre 9, les courbes intersections complètes d'une quadrique et d'une quartique forment un ensemble constructible, dont l'adhérence est de dimension 18; d'autre part le lieu des courbes admettant un automorphisme non trivial est une sous-variété fermée, dont la composante de plus grande dimension est la variété des courbes hyperelliptiques, qui est de dimension 17. Par conséquent, pour un choix générique de Q et F la courbe X n'a pas d'automorphisme non trivial, donc répond à la question.

L'argument qui précède s'applique aussi au cas $g \leq 8$: on choisit Q et F de façon que $Q \cap F$ ait un ou plusieurs points doubles ordinaires, et on prend pour X la normalisée de $Q \cap F$.

Remarque 7.14. — En utilisant (4.10.4), on peut donner un exemple de deux courbes lisses C, C' de genre 9, munies de revêtements étales doubles π, π' , telles que :

- les paires (C, π) et (C', π') ne soient pas isomorphes;
- les variétés de Prym associées P et P' soient isomorphes;
- P (et donc P') ne soit pas isomorphe à une jacobienne.

Dans cet exemple la courbe C (resp. C') est la normalisée d'une courbe plane de degré 6 ayant un point double ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] S. S. ABHYANKAR, *Resolution of Singularities of Embedded Algebraic Surfaces*, Academic Press 1966.
- [A-M] A. ANDREOTTI and A. MAYER, *On Period Relations for Abelian Integrals on Algebraic Curves* (*Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa*, vol. 21, 1971).
- [Ar-M] M. ARTIN and D. MUMFORD, *Some Elementary Examples of Unirational Varieties which are not Rational* (*Proc. London Math. Soc.* (3), vol. 25, 1972, p. 75-95).
- [B] A. BEAUVILLE, *Prym Varieties and Schottky Problem* (*Inventiones Math.*, vol. 41, Fasc 2, 1977).
- [C-G] C. H. CLEMENS and P. A. GRIFFITHS, *The Intermediate Jacobian of the Cubic Threefold* (*Ann. of Math.*, vol. 95, 1972, p. 281-356).
- [D] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge II* (*Publ. Math., I.H.E.S.*, n° 40).
- [Di] A. C. DIXON, *Note on the Reduction of a Ternary Quantic to a Symmetrical Determinant* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 11, 1902, p. 350-351).
- [EGA] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique* (*Publ. Math. I.H.E.S.*).
- [F 1] G. FANO, *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche*, Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936.
- [F 2] G. FANO, *Sulle sezioni spaziali della varietà grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni* (*Rend. Accad. Lincei* (6), vol. 11, 1^{er} sem. 1930, p. 329).
- [G 1] P. A. GRIFFITHS, *Periods of Integrals on Algebraic Manifolds* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 76, 1970, p. 228-296).

- [G 2] P. A. GRIFFITHS, *Some Transcendental Methods in the Study of Algebraic Cycles (Proc. of the Maryland Conference on Complex Analysis, Lecture Notes in Math., vol. 185, Springer-Verlag).*
- [G 3] P. A. GRIFFITHS, *On the Periods of Certain Rational Integrals: I and II (Ann. of Math., vol. 90, n° 3, 1969, p. 460-541).*
- [H] F. HIRZEBRUCH, *Topological Methods in Algebraic Geometry* (3^e édition), Springer-Verlag.
- [Ho] W. HOYT, *On Products and Algebraic Families of Jacobian Varieties (Ann. of Math., vol. 77, 1963, p. 415-423).*
- [H-P] HODGE and PEDOE, *Methods of Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 1947.
- [I-M] V. A. ISKOVSKI and Y. MANIN, *Three-Dimensional Quartics and Counterexamples to the Lüroth Problem (Mat. Sbornik, vol. 86, n° 1, 1971).*
- [L 1] S. LANG, *On Quasi-Algebraic Closure (Ann. of Math., vol. 55, 1952, p. 373-390).*
- [L 2] S. LANG, *Abelian Varieties*, Interscience Wiley, New York, 1959.
- [L-M-S] LASCU, MUMFORD and SCOTT, *The Self-Intersection Formula and the "Formule-Clef" (Proc. of the Cambridge Philosophical Society, vol. 78, 1975, p. 117-123).*
- [M 1] D. MUMFORD, *Prym Varieties I (Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 1974).*
- [M 2] D. MUMFORD, *Further Comments on Boundary Points (Woods Hole Summer Institute in Algebraic Geometry, 1964).*
- [M 3] D. MUMFORD, *Theta Characteristics of an Algebraic Curve (Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., vol. 4, 1971).*
- [M 4] D. MUMFORD, *Varieties Defined by Quadratic Equations (C.I.M.E., Varenna, 1969).*
- [M 5] D. MUMFORD, *Abelian varieties*, Oxford University Press, (1970).
- [Mu 1] J. P. MURRE, *Algebraic Equivalence Modulo Rational Equivalence on a Cubic Threefold (Compositio Math., vol. 25, 1972).*
- [Mu 2] J. P. MURRE, *Reduction of the Proof of the Non-Rationality of a Non-Singular Cubic Threefold to a Result of Mumford (Compositio Math., vol. 27, 1973).*
- [Mu 3] J. P. MURRE, *Some Results on Cubic Threefolds, dans Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds (Lecture Notes, n° 412, Springer-Verlag).*
- [R] L. ROTH, *Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue (Rend. Acc. Lincei (8), vol. 9, 1950, p. 246).*
- [Re] S. REILLAS, *Jacobians of Curves with g_4^1 's are the Prym's of Trigonal Curves (Bol. de la Soc. Mat. Mexicana, vol. 19, n° 1, 1974).*
- [S] P. SAMUEL, *Relations d'équivalence en géométrie algébrique (Proc. Inter. Congress Math., Edimbourg, 1958, p. 470-487).*
- [Sem C] Séminaire Cartan 1957-1958 (10^e année) : *Fonctions automorphes.*
- [Sem Ch] Séminaire Chevalley 1958 (2^e année) : *Anneaux de Chow et applications.*
- [SGA] A. GROTHENDIECK et coll., Séminaire de Géométrie algébrique (*Lecture Notes*, Springer-Verlag).
- [S-R] J. G. SEMPLE et L. ROTH, *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford, Clarendon, 1949.
- [T 1] A. N. TJURIN, *On the Intersections of Quadrics (Russian Math. Surveys, vol. 30, n° 6, 1975).*
- [T 2] A. N. TJURIN, *The Geometry of the Poincaré Theta-Divisor of a Prym Variety [Izvestia Mat., 39, n° 5, 1975 (en russe)].*
- [Z] S. ZUCKER, *Generalized Intermediate Jacobians and the Theorem on Normal Functions (Inventiones Math., vol. 33, 1976, p. 185-222).*

(Manuscrit reçu le 17 février 1977.)

Arnaud BEAUVILLE,
 Université d'Angers,
 Faculté des Sciences,
 Boulevard Lavoisier,
 49045 Angers Cedex.