Commun. math. Phys. 22, 44—50 (1971)

Vecteurs totalisateurs d'une algèbre de von Neumann

J. Dixmier et O. Maréchal
Université de Paris VI

Reçu le 16 février 1971

Abstract. We prove that the set of cyclic vectors for a von Neumann algebra in a Hilbert space H is a G_δ set, which is empty or dense. We obtain some corollaries, for instance: if $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots)$ is a sequence of von Neumann algebras in H, and if each $\mathscr{A}_n$ has a cyclic vector and a separating vector, then there exists a vector in H which is cyclic and separating for each $\mathscr{A}_n$. For algebras of local observables, we improve the known results connecting the infinite type of the algebras and the existence of cyclic and separating vectors.

Notations et définitions. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre de von Neumann sur l'espace hilbertien H, on note $Tot(\mathscr{A})$ (resp. $Sep(\mathscr{A})$) l'ensemble des vecteurs totalisateurs (resp. séparateurs) de $\mathscr{A}$. On note $Inv(\mathscr{A})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ est finie ainsi que son commutant, on note $C_{\mathscr{A}}$ la fonction de liaison de $\mathscr{A}$ ([4], Chap. III, § 6). Si $M \subset H$ et $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(H)$, on note $[\mathscr{A}M]$ le projecteur sur le sous-espace vectoriel fermé engendré par les Ax ($A \in \mathscr{A}$, $x \in M$). Si U et V sont des isométries partielles, on dit que U domine V lorsque: 1) Ker $U \subset$ Ker V; 2) U coincide avec V sur le sous-espace initial de V.

Soit Ω l'ensemble des ouverts bornés dans l'espace de Minkowski $M = \boldsymbol{R}^4$. Soient $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \Omega$. On écrira $\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ et s'il existe $\mathcal{O} \in \Omega$ tel que: 1) $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_2$; 2) $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_1$ sont causalement disjoints.

1. Densité des vecteurs totalisateurs

Lemme 1. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann et $U \in \mathscr{A}$ une isométrie partielle. Il existe un projecteur G du centre de $\mathscr{A}$ tel que U_G soit dominée par une isométrie de $\mathscr{A}_G$ et U_{1-G} par une coisométrie de $\mathscr{A}_{1-G}$.*

Soit E (resp. F) le projecteur initial (resp. final) de U. Il existe ([4], Chap. III, § 1, Th. 1) un projecteur G du centre de $\mathscr{A}$ tel que $(1-E)G \prec (1-F)G$ et $(1-E)(1-G) \succ (1-F)(1-G)$. Soit V une isométrie partielle de $\mathscr{A}$ de projecteur initial $(1-E)G$ et dont le projecteur final est majoré par $(1-F)G$. Alors $(U+V)_G$ est une isométrie de $\mathscr{A}_G$ qui domine U_G. De même, si V_1 est une isométrie partielle de $\mathscr{A}$

de projecteur final $(1-F)(1-G)$ et dont le projecteur initial est majoré par $(1-E)(1-G)$, alors $(U+V_1)_{1-G}$ est une coisométrie de $\mathscr{A}_{1-G}$ qui domine U_{1-G}.

Lemme 2. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann proprement infinie et $U \in \mathscr{A}$ une isométrie. Alors U est limite forte d'une suite d'unitaires de $\mathscr{A}$.*

Soit F le projecteur final de U. Soit $(E_1, E_2, \ldots)$ une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux, équivalents à 1, de somme 1 ([4], Chap. III, § 8, Cor. 2 du Th. 1). Soit $E'_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et soit F'_n le projecteur final de UE'_n. On a $1-E'_n \geqq E_{n+1} \sim 1$ donc $1-E'_n \sim 1$, donc $F-F'_n \sim 1$; par suite $1-F'_n \geqq F-F'_n \sim 1$ et finalement $1-E'_n \sim 1-F'_n$. Soit $V_n \in \mathscr{A}$ une isométrie partielle de projecteur initial $1-E'_n$ et de projecteur final $1-F'_n$. Alors UE'_n+V_n est un unitaire de $\mathscr{A}$. Comme $E'_n \to 1$ fortement et que UE'_n+V_n coincide avec U sur l'image de E'_n, on a $UE'_n+V_n \to U$ fortement.

Lemme 3. *Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann proprement infinie et $U \in \mathscr{A}$ une coisométrie. Alors U est limite forte d'une suite d'éléments inversibles de $\mathscr{A}$.*

Soit E le projecteur initial de U. Comme le projecteur final de U est 1, on a $E \sim 1$, donc E est proprement infini. Donc il existe une suite $(E_1, E_2, \ldots)$ de projecteurs de $\mathscr{A}$, deux à deux orthogonaux, de somme E, équivalents à E donc à 1. Soit $E'_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$ et soit F'_n le projecteur final de UE'_n. On a $E-E'_n \geqq E_{n+1} \sim 1$ donc $1-E'_n \sim 1$ et $1-F'_n \sim E-E'_n \sim 1$ d'où $1-E'_n \sim 1-F'_n$. Soit $V_n \in \mathscr{A}$ une isométrie partielle admettant $1-E'_n$ comme projecteur initial et $1-F'_n$ comme projecteur final. Alors $UE'_n+(1/n)\,V_n \in Inv(\mathscr{A})$. Comme $E'_n \to E$ fortement, $UE'_n+(1/n)\,V_n \to U$ fortement.

Proposition 1. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann. Tout élément de $\mathscr{A}$ est limite forte d'une suite d'éléments inversibles de $\mathscr{A}$.*

(Pour la topologie normique, le résultat est très différent; cf. [5], Th. 1.)

Soit $A \in \mathscr{A}$ et soit $A = UR$ sa décomposition polaire avec U partiellement isométrique et $R \geqq 0$. On a $U \in \mathscr{A}$ et $R \in \mathscr{A}$. Pour toute isométrie partielle V dominant U, on a encore $A = VR$. D'après la théorie spectrale, R est limite normique d'une suite d'hermitiens inversibles de $\mathscr{A}$; il suffit donc de montrer que, pour toute isométrie partielle U de $\mathscr{A}$, il existe une isométrie partielle V de $\mathscr{A}$ dominant U et telle que V soit limite forte d'une suite d'éléments inversibles de $\mathscr{A}$. D'autre part, puisque $\mathscr{A}$ est produit d'une algèbre finie et d'une algèbre proprement infinie, il suffit de démontrer le résultat dans le cas où $\mathscr{A}$ est soit finie, soit proprement infinie. Si $\mathscr{A}$ est finie, cela résulte du Lemme 1 et du fait que les isométries et les coisométries de $\mathscr{A}$ sont unitaires ([4], Chap. III, § 1, Prop. 3). Si $\mathscr{A}$ est proprement infinie, cela résulte des Lemmes 1, 2, 3.

Lemme 4. *Soient H un espace hilbertien et $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann dans H. Les ensembles $Tot(\mathscr{A})$ et $Sep(\mathscr{A})$ sont des G_δ de H.*

Si $Tot(\mathscr{A}) = \emptyset$, $Tot(\mathscr{A})$ est un G_δ. Supposons qu'il existe un $x_0 \in Tot(\mathscr{A})$. Pour $A \in \mathscr{A}$ et $n = 1, 2, \ldots$, soit $\omega(A, n)$ l'ouvert de H défini par $\omega(A, n) = \{x \in H \mid \|Ax - x_0\| < 1/n\}$. Un élément y de H appartient à $Tot(\mathscr{A})$ si et seulement si, pour tout n, il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $y \in \omega(A, n)$. Autrement dit,

$$Tot(\mathscr{A}) = \bigcap_{n \geqq 1} \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \omega(A, n)$$

de sorte que $Tot(\mathscr{A})$ est un G_δ. En remplaçant $\mathscr{A}$ par $\mathscr{A}'$, on voit que $Sep(\mathscr{A})$ est aussi un G_δ.

Proposition 2. *Soient H un espace hilbertien et $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ une algèbre de von Neumann sur H, l'algèbre $\mathscr{A}_1$ étant proprement infinie et $\mathscr{A}_2$ finie. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$Tot(\mathscr{A}) \neq \emptyset$.*

(ii) *$Tot(\mathscr{A})$ est un G_δ dense dans H.*

(iii) *$\mathscr{A}'$ est de genre dénombrable, $\mathscr{A}_2'$ est finie et $C_{\mathscr{A}_2} \leqq 1$.*

(L'équivalence de (i) et (iii) est déjà connue, mais nous en rappelons la démonstration.)

Soit $H = H_1 \oplus H_2$, l'algèbre $\mathscr{A}_1$ opérant dans H_1 et $\mathscr{A}_2$ dans H_2. On a $Tot(\mathscr{A}) \neq \emptyset$ (resp. $Tot(\mathscr{A})$ est dense dans H) si et seulement si $Tot(\mathscr{A}_1) \neq \emptyset$ et $Tot(\mathscr{A}_2) \neq \emptyset$ (resp. $Tot(\mathscr{A}_1)$ est dense dans H_1 et $Tot(\mathscr{A}_2)$ dense dans H_2).

(i) $\Rightarrow$ (iii). Si $Tot(\mathscr{A}) \neq \emptyset$, $\mathscr{A}'$ est de genre dénombrable et il existe un vecteur x totalisateur pour $\mathscr{A}_2$. Puisque $\mathscr{A}_2$ est finie, le projecteur $[\mathscr{A}_2' x]$ est fini, donc $[\mathscr{A}_2 x]$ est fini ([4], Chap. III, § 2, Prop. 3). Mais $[\mathscr{A}_2 x] = 1_{H_2}$ donc $\mathscr{A}_2'$ est finie. D'après [4], Chap. III, § 6, Prop. 3, on a $C_{\mathscr{A}_2} \leqq 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons vérifiée la condition (iii). D'après [4], Chap. III, § 6, Prop. 3 et § 8, Cor. 11 du Th. 1, on a $Tot(\mathscr{A}) \neq \emptyset$. Soit $x \in Tot(\mathscr{A})$. D'après la Prop. 1, l'ensemble des Tx où $T \in Inv(\mathscr{A})$ est dense dans H. Or si $x \in Tot(\mathscr{A})$ et $T \in Inv(\mathscr{A})$, on a $Tx \in Tot(\mathscr{A})$; en effet $\mathscr{A} = \mathscr{A} T$, donc $[\mathscr{A} Tx] = [\mathscr{A} x] = 1$. Donc $Tot(\mathscr{A})$ est dense dans H et d'après le Lemme 4 c'est un G_δ.

(ii) $\Rightarrow$ (i). C'est évident.

Corollaire 1. *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la Prop. 2, les 3 conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$Tot(\mathscr{A}) \neq \emptyset$ et $Sep(\mathscr{A}) \neq \emptyset$.*

(ii) *$Tot(\mathscr{A}) \cap Sep(\mathscr{A})$ est un G_δ dense dans H.*

(iii) *$\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont de genre dénombrable, $\mathscr{A}_1'$ est proprement infinie, $\mathscr{A}_2'$ est finie, et $C_{\mathscr{A}_2} = 1$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Cela résulte de la Prop. 2 appliquée à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ et du fait que, H étant un espace de Baire, l'intersection de deux G_δ denses est un G_δ dense.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons vérifiée la condition (ii) et soit $\mathscr{A}_1 = \mathscr{B} \times \mathscr{C}$ avec $\mathscr{B}'$ proprement infinie et $\mathscr{C}'$ finie. D'après la Prop. 2 appliquée à $\mathscr{A}'$, l'algèbre $\mathscr{C}$ est finie, donc $\mathscr{C} = 0$ de sorte que $\mathscr{A}_1' = \mathscr{B}'$ est proprement infinie. La Prop. 2 appliquée à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ prouve que $\mathscr{A}_2'$ est finie et que $C_{\mathscr{A}_2} = 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Cela résulte de la Prop. 2 appliquée à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$.

Corollaire 2. *Soient H un espace hilbertien et $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots)$ une suite d'algèbres de von Neumann opérant sur H. Les 2 conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout n, on a $Tot(\mathscr{A}_n) \neq \emptyset$ (resp.* (i') *Pour tout n, on a $Tot(\mathscr{A}_n) \neq \emptyset$ et $Sep(\mathscr{A}_n) \neq \emptyset$).*

(ii) *$\bigcap_{n \geqq 1} Tot(\mathscr{A}_n)$ est un G_δ dense dans H (resp.* (ii') *$\bigcap_{n \geqq 1} (Tot(\mathscr{A}_n) \cap Sep(\mathscr{A}_n))$ est un G_δ dense dans H).*

Cela résulte de la Prop. 2 puisque dans un espace de Baire une intersection dénombrable de G_δ denses est un G_δ dense.

Remarque 1. On retrouve ainsi le Th. 13 de [6].

Remarque 2. Si $\mathscr{A}_2 = 0$ et si H est séparable, on peut démontrer l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) de la Prop. 2 en observant que $\mathscr{A}$ contient un facteur de type I_∞ et en appliquant le cor. 2.11 de [2].

2. Algèbres d'observables locales

La partie (ii) de la proposition suivante améliore le Th. 1 de [6].

Proposition 3. *Soient Ω l'ensemble des ouverts bornés de $\boldsymbol{R}^4$, et H un espace hilbertien. Soit $\mathcal{O} \mapsto \mathscr{R}(\mathcal{O})$ une application de Ω dans l'ensemble des algèbres de von Neumann opérant sur H. On suppose vérifiées les 2 conditions suivantes:*

a) *Si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, on a $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{R}(\mathcal{O}_2)$.*

b) *Si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont causalement disjoints, $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)$ et $\mathscr{R}(\mathcal{O}_2)$ sont permutables.*

Alors

(i) *Si les $\mathscr{R}(\mathcal{O})$ sont proprement infinies et les $\mathscr{R}(\mathcal{O})'$ de genre dénombrable, l'ensemble des vecteurs totalisateurs et séparateurs à la fois pour chaque $\mathscr{R}(\mathcal{O})$ est un G_δ dense dans H.*

(ii) *Si chaque $\mathscr{R}(\mathcal{O})$ possède un vecteur totalisateur, il existe un projecteur unique G possédant les propriétés suivantes:*

α) *G appartient au centre de toutes les algèbres $\mathscr{R}(\mathcal{O})$;*

β) pour tous $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1 \in \Omega$, on a $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G = \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$ et $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ est commutative;
γ) pour tout $\mathcal{O} \in \Omega$ l'algèbre $\mathscr{R}(\mathcal{O})_{1-G}$ est proprement infinie.

Démonstration de (i). Soit Ω' l'ensemble dénombrable des boules ouvertes dans $\boldsymbol{R}^4$ de rayon rationnel et dont le centre a ses coordonnées rationnelles. Posons $K = \bigcap_{\mathcal{O} \in \Omega'} Tot(\mathscr{R}(\mathcal{O}))$. Pour tout $\mathcal{O} \in \Omega$, il existe $\mathcal{O}_1 \in \Omega'$ tel que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, donc $K = \bigcap_{\mathcal{O} \in \Omega} Tot(\mathscr{R}(\mathcal{O}))$. Puisque $\mathscr{R}(\mathcal{O})$ est proprement infinie, $Tot(\mathscr{R}(\mathcal{O}))$ est non vide d'après la Prop. 2. D'après le cor. 2, K est un G_δ dense. Mais pour tout $\mathcal{O} \in \Omega$, il existe $\mathcal{O}_1 \in \Omega'$ tel que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_1$ soient causalement disjoints. Comme $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1) \subset \mathscr{R}(\mathcal{O})'$, tout élément de K est séparateur pour $\mathscr{R}(\mathcal{O})$. On a donc prouvé (i) et on voit aussi que, sous l'hypothèse (ii), il existe un vecteur totalisateur et séparateur pour chaque $\mathscr{R}(\mathcal{O})$.

Dans la suite, nous nous donnerons un vecteur x totalisateur et séparateur à la fois pour chaque $\mathscr{R}(\mathcal{O})$. Pour dèmontrer (ii), prouvons d'abord les lemmes suivants:

Lemme 5. *Soient $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1 \in \Omega$ avec $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. Soient P un projecteur de $\mathscr{R}(\mathcal{O}) \cap \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'$, Q son support central dans $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'$. Alors P est équivalent à Q relativement à $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'$.*

La démonstration est calquée sur celle de [3], Th. 2.5.b

On a $Q = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' P H] = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' P \mathscr{R}(\mathcal{O})' x] = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' \mathscr{R}(\mathcal{O})' P x] = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' P x]$. D'autre part, $Q = [Q \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' x] = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' Q x]$. On a donc $[\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' P x] = [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' Q x]$. D'après [4], Chap. III, § 1, Cor. du Th. 2, on en déduit que, relativement à $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'$, on a $[\mathscr{R}(\mathcal{O}_1) P x] \sim [\mathscr{R}(\mathcal{O}_1) Q x]$, c'est-à-dire $P \sim Q$.

Lemme 6. *Soient $\mathcal{O} \in \Omega$ et G un projecteur du centre de $\mathscr{R}(\mathcal{O})$ tel que $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ soit finie. Alors:*

(i) *$\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ est commutative.*

(ii) *Pour tout $\mathcal{O}_1 \in \Omega$, on a $G \in \mathscr{R}(\mathcal{O}_1) \cap \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'$ et $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G = \mathscr{R}(\mathcal{O})_G$.*

Supposons d'abord que $\mathcal{O}_1 > \mathcal{O}$. Le vecteur Gx est totalisateur pour $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ donc aussi pour $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$. D'autre part $[\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' G x] = [G \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)' x] = G$ ce qui montre que Gx est totalisateur pour $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)'_G$ donc séparateur pour $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$. Les algèbres $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$ et $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ ont donc un vecteur totalisateur et séparateur commun. L'algèbre $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ est finie et $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G \subset \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$. D'après [6], Lemme 2, cela entraîne $\mathscr{R}(\mathcal{O})_G = \mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G$. Soit G_1 le support central de G dans $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)$. D'après [3] th. 2.5.b on a $G \sim G_1$ relativement à $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)$. (Dans [3], Th. 2.5, est faite une hypothèse supplémentaire sur l'algèbre de Von Neumann engendrée par les $\mathscr{R}(\mathcal{O})$. Mais cette hypothèse n'intervient pas dans la démonstration du résultat cité.). Puisque $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)_G = \mathscr{R}(\mathcal{O})_G$ est une algèbre finie, le projecteur G est fini relativement à $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)$, donc G_1 est fini et comme $G \leqq G_1$ ceci entraîne $G = G_1$. Donc G appartient au centre de $\mathscr{R}(\mathcal{O}_1)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. On a $G \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'$, on peut donc considérer l'algèbre $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$. Le vecteur Gx, étant séparateur pour $\mathcal{R}(\mathcal{O})_G$ est aussi séparateur pour $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$. D'autre part $[\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)\,Gx] = [G\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)\,x] = G$ donc Gx est totalisateur pour $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$. Le Lemme 2 de [6] permet donc encore de conclure que $\mathcal{R}(\mathcal{O})_G = \mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$. L'algèbre $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$ est donc finie, et comme elle admet un vecteur totalisateur et séparateur, elle est standard ([4], Chap. III, § 1, Th. 5) de sorte que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'_G$ est finie. Le projecteur G est donc un projecteur fini de $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'$. Le Lemme 5 permet de conclure comme précédemment que G est égal à son support central dans $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'$, donc G appartient au centre de $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'$.

Soit maintenant $\mathcal{O}_1$ un élément quelconque de Ω. Il existe $\mathcal{O}_2 \in \Omega$ tel que $\mathcal{O}_2 > (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O})$. En appliquant successivement les deux résultats précédents, on en déduit que $G \in \mathcal{R}(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{R}(\mathcal{O}_1)'$, et que $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G = \mathcal{R}(\mathcal{O})_G$. La propriété (b) de la Prop. 3 entraîne que $\mathcal{R}(\mathcal{O})_G$ est commutative.

Démonstration de (ii).

L'unicité de G est évidente. Prouvons l'existence.

Soit G le plus grand projecteur, dans l'intersection des centres des algèbres $\mathcal{R}(\mathcal{O})$, tel que les $\mathcal{R}(\mathcal{O})_G$ soient commutatives. D'après le lemme 6, on a $\mathcal{R}(\mathcal{O})_G = \mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_G$ pour tous $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1 \in \Omega$. Montrons par l'absurde que pour tout $\mathcal{O} \in \Omega$ l'algèbre $\mathcal{R}(\mathcal{O})_{1-G}$ est proprement infinie. Dans le cas contraire, il existerait un projecteur non nul $G_1 \leqq 1 - G$ appartenant au centre de $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{O})_{G_1}$ soit finie. D'après le Lemme 6, pour tout $\mathcal{O}_1 \in \Omega$, G_1 appartiendrait au centre de $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)$, et $\mathcal{R}(\mathcal{O}_1)_{G_1}$ serait commutative. Cela contredirait la maximalité de G.

Remarque 3. Conservons les hypothèses de la Prop. 3. Supposons en outre qu'il existe un vecteur totalisateur et séparateur pour toutes les algèbres $\mathcal{R}(\mathcal{O})$, et que l'algèbre de von Neumann engendrée par les $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ soit un facteur, ce qui est le cas dans certaines situations intéressantes (cf. [I] Prop. 2, Cor. I et [3], Th. 2. I). Alors d'après la Prop. 3, ou bien $\dim H = 1$, ou bien chaque $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ est proprement infinie.

Nous remercions M. Lévy-Nahas pour ses suggestions utiles dans la démonstration de la Prop. 3.

Ajouté en épreuves: Pour des raisonnements analogues à ceux des lemmes 1–3, voir H. Choda, An extremal property of the polar decomposition in von Neumann algebras. Proc. Japan Acad. 46, 341–344 (1970).

Bibliographie

1. Araki, H.: On the algebra of all local observables. Prog. Theor. Phys. **32** (5), 844—854 (1964).
2. — Woods, E. J.: A classification of factors. Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ. Ser. A, Vol. **4**, 51—130 (1968).

3. Borchers, H.: Lectures in Quantum Field Theory. Princeton, 1965—1966.
4. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien 2^{eme} ed. Paris: Gauthier-Villars 1969.
5. Feldman, J., Kadison, R. V.: The closure of the regular operators in a ring of operators. Proc. Am. Math. Soc. **5**, 909—916 (1954).
6. Kadison, R.V.: Remarks on the type of von Neumann algebras of local observables in quantum field theory. J. Math. Phys. **4**, 1511—1516 (1963).

J. Dixmier
64 rue Gay-Lussac
Paris (5)
France

O. Maréchal
Résidence Ronsard
1 rue de la Pléiade
94 L'Hay-les-Roses, France