

Volterra series theory: A state-of-the-art review

彭志科* and 程长明

Citation: [科学通报](#) **60**, 1874 (2015); doi: 10.1360/N972014-01056

View online: <https://engine.scichina.com/doi/10.1360/N972014-01056>

View Table of Contents: <https://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/CSB/60/20>

Published by the [《中国科学》杂志社](#)

Articles you may be interested in

[Cardiomyopathies in China: A 2018–2019 state-of-the-art review](#)

Chronic Diseases and Translational Medicine **6**, 224 (2020);

[Thermal performance of cooling strategies for asphalt pavement: A state-of-the-art review](#)

Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition) **8**, 356 (2021);

[Metallic additive manufacturing: state-of-the-art review and prospects](#)

Mechanics & Industry **13**, 89 (2012);

[Tool path generation of ultra-precision diamond turning: A state-of-the-art review](#)

Nanotechnology and Precision Engineering **2**, 118 (2019);

[Dynamic programming and optimal control for vector-valued functions: A state-of-the-art review](#)

RAIRO - Operations Research **55**, S351 (2021);

Volterra 级数理论研究进展与展望

彭志科*, 程长明

上海交通大学机械与动力工程学院, 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240

* 联系人, E-mail: z.peng@sytu.edu.cn

2014-12-01 收稿, 2015-01-14 接受, 2015-06-15 网络版发表

国家杰出青年科学基金(11125209)和国家自然科学基金(51121063, 11472170)资助

摘要 非线性问题因其普遍性受到来自包括工程、物理和数学等众多领域学者的关注. 针对非线性系统的建模、求解和分析等问题, 人们发展出了多种数学理论和方法, Volterra级数就是其中之一. 本文对Volterra级数的基本定义和由其发展而来的一些频域概念进行介绍, 并分析它和Taylor级数、Wiener级数、NARMAX模型、Hammerstein模型、Wiener模型、Wiener-Hammerstein模型、谐波平衡法、摄动法和Adomian分解等非线性模型与求解方法之间的联系; 探讨了其收敛性问题和核辨识问题研究中的挑战, 总结了这方面的研究成果和进展.

关键词

Volterra 级数
广义频率响应函数
非线性输出频率
响应函数
非线性系统辨识
收敛性

众所周知, 实际系统几乎总含有各种非线性因素. 为了分析与求解非线性系统, 人们提出了多种非线性分析方法, Volterra级数就是其中之一. 对Volterra级数理论的研究最早可追溯到1887年意大利数学家Vito Volterra关于解析泛函的工作^[1]. 后来控制论创始人MIT教授Norbert Wiener在与数学家Paul Lévy (Volterra的学生)的接触中, 对该理论产生了兴趣, 1942年他在给军方的一份密级研究报告中将Volterra级数用来分析雷达噪声对非线性接收器电路的影响^[2]. 此后, Volterra级数理论开始在来自MIT等研究机构的少数学者中间流传, 直到1957年, 它才得以作为一种普通的非线性系统分析方法得到传播和应用. 应用Volterra级数理论, 可以解释很多非线性系统所特有的现象, 但它非常复杂, 只能应用于分析一些相对简单的非线性问题, 这阻碍了其在实际中的应用. 正如一位学者所说, Volterra级数理论表面上看起来很让人着迷, 但实际应用方面的研究却进展缓慢, 这种情况一直持续到20世纪90年代. 之后, 得益于计算机技术的发展和普及, Volterra级数理论在电子工程、机电工程、控制工程、机械工

程、神经科学和生物医学工程等领域得到广泛应用. 特别是近10年来, 全球学者在Volterra级数理论及其应用方面共发表SCI检索论文近千篇, 引用上万次, 显示了该领域的研究活力和其广阔的应用前景. 虽然关于Volterra级数研究的论文数量颇多, 但相关研究著作却很少^[3-5], 也没有一篇综述性论文对其相关研究成果和现状进行总结, 这些阻碍了其相关研究成果和现状进行总结, 这些阻碍了Volterra级数的进一步推广. 为使初学者能够更好地掌握Volterra级数这个强有力的非线性问题分析方法和理论, 本文尝试着给该理论一个简洁而全面的介绍, 对其相关研究成果进行总结, 并对其应用前景给出展望.

1 基本定义

在数学上, Volterra级数本质上是对非线性时不变系统的泛函级数展开, 它也可以看作是线性系统的一维卷积在多维卷积空间上的推广, 因此, 以线性系统中的卷积运算及其相关概念为参照, 可以很好地帮助人们更好地理解Volterra级数理论.

对于线性系统, 系统输入与输出之间的线性关

引用格式: 彭志科, 程长明. Volterra 级数理论研究进展与展望. 科学通报, 2015, 60: 1874-1888

Peng Z K, Cheng C M. Volterra series theory: A state-of-the-art review (in Chinese). Chin Sci Bull, 2015, 60: 1874-1888, doi: 10.1360/N972014-01056

<https://engine.scichina.com/doi/10.1360/N972014-01056>

系在时域可表示为卷积运算:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad (1)$$

其中, $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别是系统输入和输出, $h(t)$ 是系统脉冲响应函数. 对方程(1)进行傅里叶变换, 可得到线性系统输入和输出之间频域关系表达式:

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega), \quad (2)$$

其中, $U(\omega)$, $Y(\omega)$, $H(\omega)$ 分别是 $u(t)$, $y(t)$, $h(t)$ 的傅里叶变换, $H(\omega)$ 也称为系统的频率响应函数(FRF). 对于线性系统, $H(\omega)$ 或 $h(t)$ 包含系统所有的信息.

与此相对照, 对任意连续的非线性时不变系统, 在零初始条件下, 如果系统输入信号 $u(t)$ 能量有限, 则系统响应可用Volterra级数表示^[6]. Volterra级数职是方程(1)的扩展形式, 它是一个无穷级数, 如下式所示:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t), \\ y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t-\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_n, \end{cases} \quad (3)$$

其中, 函数 $h_1(\tau)$, $h_2(\tau_1, \tau_2), \dots$, $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 是Volterra核函数, 是线性系统的一维脉冲响应函数在高维空间的推广. 另外, 一般假设系统在零平衡点附近运动, 即 $y_0(t)=0$, 这样可避免常数项输出引起输入频率间的相互耦合^[7]. 可看出, 当系统的二阶以上Volterra核均为零时, 非线性系统退化为线性系统.

对于离散的非线性时不变系统, 用Volterra级数^[8]可表示为

$$y(k) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} h_n(m_1, \dots, m_n) u(k-m_1) \dots u(k-m_n), \quad (4)$$

其中, $u(k)$, $y(k) \in \mathbb{R}$, 分别为系统的输入和输出, $h_n(m_1, \dots, m_n)$ 是离散Volterra级数的第 n 阶核函数, Volterra核函数一个显著特点是满足对称性.

如今Volterra级数广泛地应用于一些非线性模型的分析, 包括多项式非线性系统^[9]、分段线性系统^[10]、双线性系统^[11]、饱和系统^[12]、时空非线性系统^[13]、迟滞非线性系统^[14]、分数阶非线性系统^[15]. 另外, 虽然原始的Volterra级数只能描述非线性时不变系统, 但后来人们将Volterra级数的时不变核函数替换成时变核函数, 将其推广到非线性时变系统的描述^[16].

2 频域概念

众所周知, 利用频率响应函数, 可在频域对线性系统输入和输出之间的关系进行描述, 这极大地简化了线性系统的分析, 曾使线性系统研究得到飞跃式的发展. 为了在频域对非线性系统进行分析, 基于Volterra级数, 人们也尝试发展出了多个频域概念, 包括广义频率响应函数(generalized frequency response function, GFRF), 非线性输出频率响应函数(nonlinear output frequency response function, NOFRF), 输出频率响应函数(output frequency response function, OFRF)和伴随频率响应函数(associated frequency response functions, AFRF).

2.1 广义频率响应函数(GFRF)

广义频率响应函数(GFRF)是第一个基于Volterra级数发展出的频域概念, 由MIT学者George^[17]在1959年提出, 那时称为非线性频率响应函数(nonlinear frequency response function). 此后, Bussgang等人^[18]将该概念推广到多输入非线性系统的研究. Victor和Knight^[19]则在数学上对Volterra核函数的频域表示给出了更严谨的定义. 广义频率响应函数定义为Volterra核函数 $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 的多维傅立叶变换^[20], 如下所示:

$$\begin{aligned} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n, \end{aligned} \quad (5)$$

GFRF的反变换是Volterra核函数.

由于Volterra级数核函数是对称的, 因此其多维傅立叶变换也是对称的, 进而GFRF也是对称的, 例如, $H_2(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_2, \omega_1)$.

利用GFRF, 非线性系统输入输出之间关系在频域可表示为^[21]

$$\begin{cases} Y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\omega), \\ Y_n(\omega) = \frac{1/\sqrt{n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, $Y(\omega)$ 和 $U(\omega)$ 分别表示系统输出和输入频谱, $\sigma_{n\omega}$ 表示满足 $\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega$ 条件的频域积分域.

对于线性系统, 利用Laplace变换可以从动力学微分方程直接推导出系统的频率响应函数. 为了确定非线性系统的广义频率响应函数, Bedrosian和Rice^[22]提出了谐波探测法(harmonic probing method),

但该方法仅适用于受单输入激励的连续非线性系统. Worden等人^[7]将谐波探测法推广到了多输入多输出情况,使得GFRF可以用来描述多输入之间的频域耦合关系. Billings和Tsang^[23]将该方法推广到了离散系统. 对于多项式类非线性系统, Peyton-Jones和Billings^[24]基于谐波探测法提出了计算GFRF的递推算法,通过该方法可以由低到高逐次确定各阶GFRF. 后来, Swain和Billings^[25]将该递推算法推广到多输入的情况. 通过递推算法可以将复杂的计算过程转化为简单的符号运算,非常适合计算机处理,由此Billings和他的团队还开发了专门的软件包^[26,27].

2.2 非线性输出频率响应函数(NOFRF)

广义频率响应函数的一个显著特点是多维性,各阶GFRF的维数等于它的阶数. 该多维属性给对三阶以上GFRF的显示、分析和估计带来了极大的困难,这也使得人们常用二阶Volterra级数来对非线性系统进行分析. 为了克服广义频响函数在实际应用中遇到的这些困难,近年来Lang等人^[21]提出了非线性输出频率响应函数(nonlinear output frequency response function, NOFRF)概念. 相比较GFRF,各阶次NOFRF都是频率的一维函数,因此可方便地进行显示和分析,也较容易由系统输入/输出辨识得到. NOFRF定义为

$$G_n(\omega) = \frac{\int_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega}}{\int_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega}}, \quad (7)$$

其中, $\int_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega} \neq 0$.

利用NOFRF,系统输出频谱可以表示为

$$Y(\omega) = \sum_{n=1}^N Y_n(\omega) = \sum_{n=1}^N G_n(\omega) U_n(\omega), \quad (8)$$

其中

$$U_n(\omega) = \frac{1/\sqrt{n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\omega_1+\dots+\omega_n=\omega} \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega}. \quad (9)$$

对于线性系统,利用FRF,系统输入输出频谱间的关系可用图1表示;而对于非线性系统,利用NOFRF,系统输入输出之间的关系则可表示为图2.

从NOFRF的定义可以看出,它不仅与非线性系统本身的特性有关,而且与系统输入也有关,它反映的是非线性系统在特定类型输入下表现出来的频率响应特性. NOFRF最大的优点是各阶次函数都是一

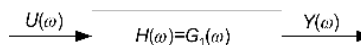


图1 线性系统输入输出频域表示

Figure 1 The relationship between output and input frequency spectrum in linear system

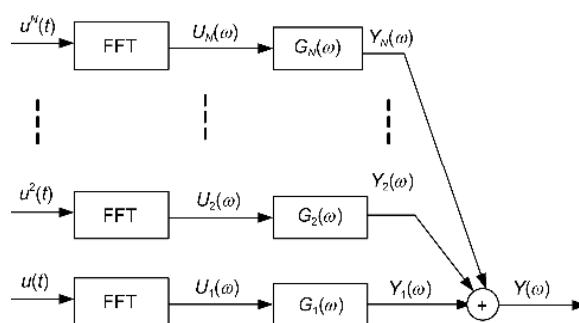


图2 非线性系统输入输出频域表示

Figure 2 The relationship between output and input frequency spectrum in nonlinear system

维的,可方便地进行显示和分析,也较容易由系统输入/输出辨识得到,因此,基于NOFRF,可以用与分析线性系统类似的方法对非线性系统进行分析. Peng和Lang等人^[9]推导出了在谐波激励下NOFRF和GFRF之间的解析关系式,进而利用NOFRF概念成功地对一大类非线性系统的次共振现象和高次谐波分量的产生现象进行了分析解释,并分析了线性阻尼对非线性系统共振的影响,研究表明线性阻尼系数的大小将决定非线性系统主共振区的出现频率. 他们还将该概念推广到了多输入多输出情况^[28]. 对于NOFRF的估计辨识,Lang和Billings^[21]还提出了一种多层次激励方法,该方法要求利用形式相同但强度不同的输入对系统进行多次激励.

2.3 输出频率响应函数(OFRF)

虽然,GFRF和NOFRF概念使得人们可以在频域对非线性系统进行分析,但是它们均不能显式地表示出系统非线性特性参数与输出频率响应之间的关系,如果能建立这两者之间的显式关系,无疑将给分析非线性参数对系统输出频率响应的影响带来方便. 为了解决该难题,Lang等人^[29]提出了输出频率响应函数(output frequency response function, OFRF)的概念,对于多项式类非线性系统,通过它可以显式地表示出系统非线性特性参数与GFRF及输出频率响应的关系.

记 C 为系统中非线性特性参数的集合, Lang等人^[29]研究表明: 系统任意阶GFRF都可以表示为关于 C 中元素的多项式函数, 例如第 n 阶GFRF可表示为

$$H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_n} \Theta_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}, \quad (10)$$

其中, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 C 中的元素; J_n 是一个 s_n 维的非负整数向量, 它当中的元素对应单项式 $\lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}$ 中各个非线性特性参数的指数; $\Theta_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 是仅与 $H_1(\cdot)$ 有关而与系统非线性特性参数无关的函数. 方程(10)给出了GFRF与系统非线性特性参数之间的显式关系.

进一步, 系统输出频率响应 $Y(\omega)$ 可表示如下:

$$Y(\omega) = H_1(\omega)U(\omega) + \sum_{n=2}^N \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in J_n} \Phi_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n}, \quad (11)$$

式中,

$$\begin{aligned} & \Phi_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \\ &= \frac{1/\sqrt{n}}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\omega_1 + \dots + \omega_n = \omega} \Theta_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \prod_{i=1}^n U(\omega_i) d\sigma_{n\omega}, \end{aligned} \quad (12)$$

方程(11)显示, 系统输出频率响应可表示为关于系统非线性特性参数的多项式函数, 式中多项式系数 $\Phi_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(n; j_1 \dots j_n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 仅与系统输入 $U(\omega)$ 及 $H_1(\cdot)$ 有关, 而与系统非线性特性参数无关, Lang称之为输出频率响应函数(OFRF).

利用OFRF可显式地表示非线性特性参数与系统输出频率响应之间的关系, 但为了利用(11)式分析前者对后者的影响, 必须先确定该式中具体包含了哪些单项式及它们对应的系数, 即输出频率响应函数. 为了确定(11)式中包含的单项式形式和数目, Jing等人^[30]提出了一个单项式提取算子; Peng和Lang^[31]也提出了另一种确定单项式形式和数目的递推算法, 它可以用简单的符号运算进行, 非常适合计算机处理. 在假定单项式形式和数目已知的条件下, Lang等人^[29]提出了基于最小二乘法的OFRF估计方法.

2.4 伴随频率响应函数(AFRF)

为了克服GFRF因多维性在实际应用中引起的困难, 除了利用NOFRF, Feijoo和Worden^[32,33]提出了伴随频率响应函数(associated frequency response functions,

AFRF)概念, 它的定义来源于非线性系统的伴随线性方程(associated linear equations, ALE), 他们的研究结论表明, 系统的第 n 阶Volterra输出可用低阶Volterra输出的组合函数作为派生线性系统的输入得到, 即,

$$Ly_n = a_n f(y_1, \dots, y_{n-1}) \quad (n=1, \dots, \infty), \quad (13)$$

方程(13)给出了ALE的定义, 各阶ALE的解为

$$y_n(t) = a_n \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau) f(y_1(\tau), \dots, y_{n-1}(\tau)) d\tau, \quad (14)$$

其中, L 表示线性微分算子, 它与阶数 n 无关, h_1 是 L 算子的Green函数, a_n 是第 n 阶ALE输入的系数.

对于二阶微分算子,

$$L = m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k, \quad (15)$$

基于各阶ALE, 可得系统各阶AFRF,

$$H_{ln}(\Omega_n) = \frac{a_n}{-m\Omega_n^2 + ic\Omega_n + k} \quad (n=1, \dots, \infty), \quad (16)$$

根据方程(16), 可知各阶AFRF具有相同的函数形式, 但它们的幅值与各阶ALE输入系数有关. 为此, Feijoo和Worden定义了非线性增益常数 K_n :

$$K_n = \frac{a_n}{a_1}. \quad (17)$$

根据方程(16)和(17), 可知任意阶AFRF可由第一阶AFRF和第 n 阶非线性增益常数 K_n 确定. 系统响应也可根据第一阶AFRF的二维Bode图和第 n 阶非线性增益常数 K_n 确定, 这极大地方便了在频域分析与设计非线性系统. 相比较GFRF, AFRF各阶函数都是线性频率响应函数, 基于它可用线性系统理论对非线性系统进行分析, 这方便了在频域分析和设计非线性系统. 此外, AFRF也表示了GFRF包含的所有信息, 根据AFRF可直接得到系统各阶GFRF. Feijoo和Worden^[34]基于AFRF, 提出了一种辨识单自由度非线性系统中线性参数和非线性参数的新算法. 进一步, Feijoo和Worden等人^[35]将ALE和AFRF推广用于多自由度非线性系统的分析、辨识和控制.

3 与其他非线性模型及方法之间的关系

为了描述非线性系统, 人们提出了多种非线性模型, 包括Taylor级数、Wiener级数、NARMAX模型、Wiener模型、Hammerstein模型、Wiener-Hammerstein模型等. 另外, 对于非线性方程的求解, 尚未发展出类似线性系统分析那样成熟的精确求解方法, 除了

某些简单的非线性微分方程,对于一般的非线性微分方程,人们无法给出精确解,为此研究人员发展出了多种近似解法^[36],包括平均法、KBM法、摄动法、多尺度法、谐波平衡法和Adomian分解法等.研究表明,Volterra级数与许多非线性系统描述模型和求解方法均存在一定的联系.

3.1 Taylor级数

Taylor级数是一种用来近似描述两个变量间非线性关系的最典型方法.给定变量 y 和 u 间关系可用函数 $y=f(u)$ 描述,如果函数 f 在某点 u_0 无限次可导,则在该点附近,变量 y 可以展开为关于变量 u 的幂级数.如果取 $u_0=0$,该级数可表示为如下形式:

$$y = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2!}u^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}u^i. \quad (18)$$

由Volterra级数定义可知,如果Volterra核函数为多维Dirac函数,即

$$h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = a_n \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \dots \delta(\tau_n), \quad (19)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为Dirac函数,则方程(3)可写为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} a_n \delta(\tau_1) \dots \delta(\tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n(t). \quad (20)$$

此时,Volterra级数退化为和Taylor级数类似的平凡级数.在Volterra级数的核函数定义中的时延 τ_i 刻画的是历史输入对当前响应的影响,而如果Volterra核函数取为(19)式,那么只有当所有的时延 $\tau_i=0$ 时,核函数 $h_i(\cdot)$ 才非0,这表明历史输入对当前响应无影响.由此看出,Volterra级数是Taylor级数的推广^[6],可看作是带有记忆效应的Taylor级数,它考虑了系统的动态特性,因此可描述动态非线性系统,而Taylor级数只能描述静态系统,因此,Volterra级数比Taylor级数有更广的应用范围.

3.2 Wiener级数

尽管Volterra级数广泛用于非线性系统的分析与设计,但在一些情况下,它也存在一些缺点,例如系统Volterra级数表示的收敛区间过于严格,以及Volterra核函数的辨识较难.正如为了避开系统幂级数表示的收敛性问题,人们提出了系统的正交函数

表示;同样为了避开系统Volterra级数表示的收敛性问题,Wiener^[37]在1958年提出了Wiener级数或Wiener G泛函.在数学上,Wiener级数本质上是对非线性时不变系统的泛函级数正交展开,它与Volterra级数有着密切的联系.它们都是对非线性系统的泛函级数展开,对于截断的Wiener级数和Volterra级数,它们可以互相表示.若已知系统的Wiener级数表示,将各阶Wiener级数相加,可得各阶Volterra级数表达式;反之,若已知系统的Volterra级数表示,可通过Gram-Schmidt正交化,可得各阶Wiener级数表达式.如果系统输入是均值为0的高斯白噪声信号,那么Volterra系统可用等价的非齐次Wiener级数表示^[38,39].另外,Rugh^[4]研究结论表明,系统的第 n 阶G泛函可用第 n 阶Volterra核函数表示.为此, Lee和Schetzen^[40]基于互相关法,提出了一种直接估计Wiener核函数的方法.另外, Palm和Pöpel^[41]给出了非线性系统满足Volterra级数和Wiener级数表示的条件,并给出了两者之间可以相互表示的充分条件,最后给出了Lee-Schetzen方法的数学理论验证.随后,他们^[42]对基于Volterra级数和Wiener级数的非线性系统辨识做了一个综述,并给出了Wiener级数辨识的局限性. Franz和Schölkopf^[38]回顾了Volterra级数和Wiener级数之间的关系,并基于再生核Hilbert空间理论对非线性系统Wiener级数核函数进行了辨识.

3.3 NARMAX模型

带外部输入的非线性自回归滑动平均模型(nonlinear autoregressive moving average model with exogenous inputs, NARMAX)最早由Leontaritis和Billings^[43]在1985年提出,它可描述的非线性系统非常广泛,定义如下:

$$y(k) = F(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-1), \dots, u(k-n_u), e(k-1), \dots, e(k-n_e)) + e(k), \quad (21)$$

其中, $u(k)$, $y(k)$ 和 $e(k)$ 分别是系统输入、输出和噪声项, n_y , n_u 和 n_e 分别是在 k 时刻,系统输出、输入与噪声项的最大采样延迟, $F(\cdot)$ 是任意非线性函数,一般取为多项式函数.

对比由(4)式定义的离散Volterra级数可看出,Volterra级数实际上可表示为当 $y(k-i)=0$ ($i=1, \dots, n_y$), $e(k-i)=0$ ($i=0, \dots, n_e$)时的NARMAX模型.因此NARMAX模型可看作是在离散Volterra级数中引入了历史时刻输出的推广.通过引入历史时刻的输出,NARMAX

模型在表示非线性系统时比Volterra级数结构更加简洁,即模型中的项数更少,这正如线性滤波器中,有限脉冲响应滤波器(FIR)和无限脉冲响应滤波器(IIR)的区别。

所有噪声项 $e(t)$ 均为0的NARMAX模型称为NARX模型,对于NARX模型,由Billings^[23]提出了计算各阶GFRF的递推公式;而对各阶GFRF进行多维反Fourier变换,可得时域Volterra核函数,因此,NARX模型与离散Volterra级数可以互相表示。在非线形系统辨识中,一种有效方法是先根据测量得到的输入/输出时域信号,辨识系统NARX模型,然后基于得到的NARX模型,计算出非线性系统的GFRF。

3.4 Wiener模型

Wiener模型由一个线性子系统和紧随其后的静态非线性子系统组成,其结构如图3所示^[44],模型中, $F(t)$ 为表示静态非线性子系统的非线性函数,常取为多项式函数。研究表明,Wiener模型实际等价于一个截断Volterra级数,它的核函数为

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = a_n h(\tau_1) \dots h(\tau_n). \quad (22)$$

因此,Wiener模型可用Volterra级数表示。Caillec^[45]基于Wiener模型盲辨识算法估计了二阶Volterra级数的输入功率谱。Chen等人^[46]基于再生核Hilbert空间理论,辨识了Wiener模型的Volterra级数核函数。Kibangou和Favier^[47]给出了并行级联Wiener系统和Volterra级数之间的关系,并根据三阶Volterra核函数辨识了并行级联Wiener系统中的线性参数以及非线性参数。

3.5 Hammerstein模型

Hammerstein模型由一个静态非线性子系统和紧随其后的线性子系统组成,其结构如图4所示^[48],其中, $F(\cdot)$ 常取为多项式函数。研究表明,Hammerstein

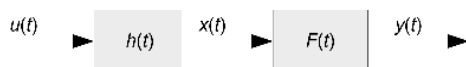


图3 Wiener模型
Figure 3 Wiener model

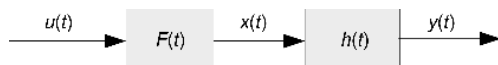


图4 Hammerstein模型
Figure 4 Hammerstein model

模型等价于一个截断Volterra级数,其核函数为

$$\begin{aligned} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) &= a_n h(\tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2) \dots \delta(\tau_1 - \tau_n) / [\Delta \tau]^{n-1} \\ &= a_n h(\tau) / [\Delta \tau]^{n-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

因此,Hammerstein非线性模型可用Volterra级数表示,只是其Volterra核函数只有对角线上的元素非0。Westwick和Kearney^[49]推导出了非线性时不变系统Hammerstein模型与Volterra级数之间的关系。Ralston和Zoubir^[50]得到了非线性时变系统两者之间的关系。Kibangou和Favier^[51]给出了Hammerstein模型的Volterra级数表示,并基于Volterra核函数辨识了Hammerstein模型的参数。

3.6 Wiener-Hammerstein模型

Wiener-Hammerstein模型^[52]包含两个线性子系统和一个非线性子系统,在非线形子系统的前面和后面各有一个线性子系统,如图5所示。相较于Wiener或Hammerstein模型,Wiener-Hammerstein模型可以描述更为广泛的非线性系统,Wiener和Hammerstein模型都是Wiener-Hammerstein模型的特定形式。

研究表明,Wiener-Hammerstein非线性模型也可用Volterra级数表示,其Volterra核函数为

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = a_n \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(\tau_1 - \tau) \dots h(\tau_n - \tau) d\tau. \quad (24)$$

Kibangou和Favier^[52]给出了Wiener-Hammerstein模型的Volterra级数表示,并根据Wiener-Hammerstein模型的对角Volterra核函数辨识它的非对角元素。Tan和Godfrey^[53]基于测得的二阶Volterra频域核函数,利用频域线性插值算法辨识了Wiener-Hammerstein模型的线性子系统。

3.7 与非线性方程求解方法之间的联系

理论上,给定非线性系统的运动微分方程,通过Volterra级数或者由它发展而来的频域概念,如GFRF和NOFRF等,可以求得系统输出响应的解析解。而另一方面,通过一些近似求解方法,如平均

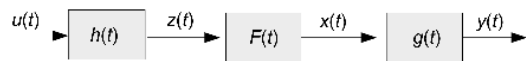


图5 Wiener-Hammerstein模型
Figure 5 Wiener-Hammerstein model

法、KBM法、摄动法、多尺度法、谐波平衡法和Adomian分解法等也可以求得非线性系统的响应. 对于Volterra级数和一些近似求解方法间存在的联系, 近年来人们进行了研究.

Peng 和 Lang^[54] 研究了NOFRF和谐波平衡法(harmonic balance method, HBM)之间的关系, 理论上证明了, 当Volterra级数收敛时, 由NOFRF给出的非线性系统响应是谐波平衡法的一个解. 另外, 研究表明这两种方法各有优劣, 例如HBM方法可以得到非线性领域中典型的跳跃现象, 但它受计算量的限制, 不能准确求得高次谐波分量的值. 而Volterra级数可以准确求出各个谐波分量的值, 但不能够得到跳跃现象. 图6(a)和(b)分别显示了NOFRF和HBM给出的Duffing振子受迫响应第三阶谐波的计算结果与Runge-Kutta方法结果之间的比较, 可看出HBM结果成功地预测了跳跃现象, 而在该区域NOFRF结果没能收敛.

摄动法是求解弱非线性方程的经典定量方法之一, 而Volterra级数是一种可表征弱非线性系统的经典数学模型. 从不同的角度, 摄动法和Volterra级数都能为一大类弱非线性系统给出近似解, 其中前者属于数值计算方法而后者属于函数逼近方法. 一些学者对于两者之间内在联系或相似性做了研究. Vannucci等人^[55]的研究表明, 对于非线性薛定谔方程原始摄动法和Volterra级数给出的解是完全一致的; 在研究模拟集成电路的非线性失真问题时, Buonomo和Schiavo^[56]发现这两种方法会给出完全相同的解. 彭志科等人^[57]研究了Volterra级数和摄动法在多项式非线性系统分析中的内在关系, 结果表明,

对于受迫多项式非线性系统, 只有当其线性派生系统是阻尼耗散系统时, 由对系统输入进行小参数摄动求得的稳态输出响应才和由Volterra级数给出的解完全一致, 该研究结论意味着: Volterra级数并不能表示任意的多项式非线性系统, 而仅适合表征线性派生系统是阻尼耗散系统的多项式非线性系统. 图7给出了用摄动法、Volterra级数和Runge-Kutta方法计算得到的线性派生系统分别为阻尼耗散系统和能量保守系统的非线性系统的输出响应结果之间的比较, 可看出, 在阻尼耗散情况下3种方法计算得到的结果完全一致, 而在能量保守情况下, Volterra级数和摄动法均不能计算得到系统的精确响应.

Adomian分解^[58]是一种求解非线性方程, 包括代数方程、微分方程以及积分方程的有效工具, 它可以以解析的形式提供一个无穷级数近似解. Guo等人^[59]研究了Adomian分解与Volterra级数之间的关系, 研究结果表明Volterra级数可被看作是Adomian分解的一种特定形式. 因此, 当非线性系统存在收敛的Volterra级数表示形式时, 可以用Adomian分解计算系统的Volterra核函数, 从而得到系统的Volterra级数表示. 图8给出Duffing振子的仿真输出以及基于Adomian分解辨识得到的Volterra核函数的预测输出, 可以看出, 仅前几阶就可以较好地预测系统的输出, 并且随着阶数的增大, 预测的效果越好.

4 Volterra级数收敛性问题

Volterra级数是无穷级数, 存在收敛性问题. 与Taylor级数类似, 只有当系统输入幅值在一定范围内, Volterra级数才能够收敛. Volterra级数的收敛性

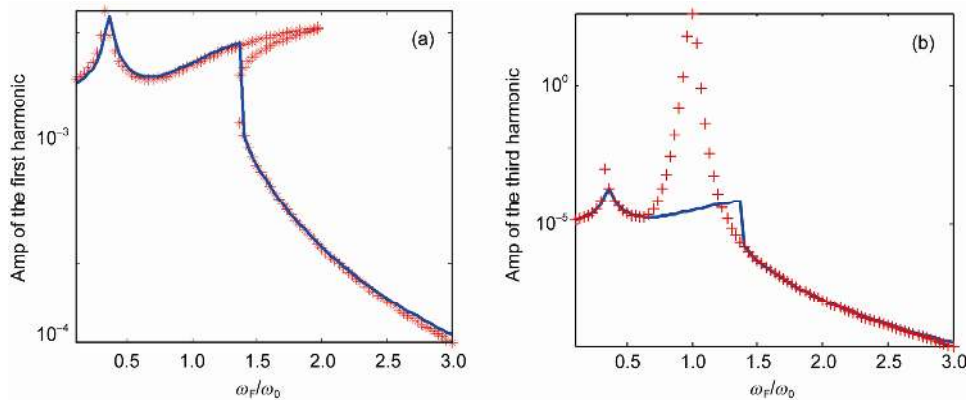


图6 (网络版彩色)HBM(a), NOFRF(b)和Runge-Kutta结果比较. *为HBM结果; +为NOFRF结果; 实线均为Runge-Kutta结果
Figure 6 (Color online) Comparison between the HBM(a), NOFRF(b) and the Runge-Kutta method. *, HBM; +, NOFRF, solid, Runge-Kutta

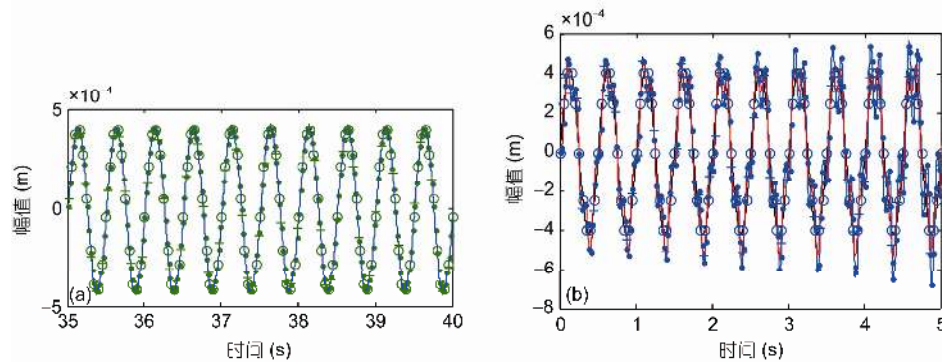


图7 (网络版彩色) 3种方法得到的稳态响应(•, 摄动法; ○, Volterra级数; +, Runge-Kutta). (a) 线性派生系统为阻尼耗散系统; (b) 线性派生系统为能量保守系统

Figure 7 (Color online) The steady responses (•, RP method; ○, Volterra Series; +, Runge-Kutta method). (a) The damped dissipative derived linear system; (b) the undamped conservative derived linear system

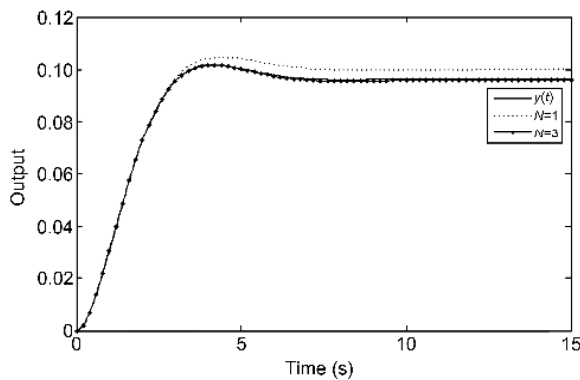


图8 仿真和预测的Volterra级数输出

Figure 8 The simulated and predicted Volterra outputs

问题研究很重要, 它包括两方面内容, 一是判断Volterra级数是否收敛, 二是如果收敛, 收敛律如何? 前一个问题的解决可用以判断给定非线性系统是否可表示为一个Volterra级数; 而后一个问题的解决可用以逼近精度的分析, 在给定逼近精度要求时, 选择Volterra级数的截断阶数. Volterra级数收敛性问题是挑战性的难题, 许多研究人员对此进行了大量研究, 但至今还没有统一的方法能确定Volterra级数的收敛区间, 现有方法给出的判定准则均比较保守, 仅能确定比较粗糙的收敛域.

Volterra级数收敛性问题的早期研究主要是美国学者Boyd, Chua^[6,60]和Sandberg^[61], 他们的基本思路是寻找一个比Volterra级数收敛条件更强的幂级数的收敛域. 假设系统输入满足:

$$|u(t)| < K, \quad (25)$$

并且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \cdots d\tau_n \leq a_n. \quad (26)$$

那么, 根据Volterra级数表示, 系统输出满足以下条件:

$$|y(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n K^n. \quad (27)$$

显然, 如果方程(27)右边的幂级数收敛, 则Volterra级数必然收敛. 该收敛条件非常严格, 是Volterra级数收敛的充分不必要条件, 该方法需要知道各阶Volterra核函数的上界, 并且准则比较保守. 借鉴该方法思路, 人们对Volterra级数的收敛性问题进行了进一步研究. Sandberg^[62]得到了 $p+1$ 阶Volterra级数截断后的误差边界, 该结论为研究非线性系统Volterra级数表示的收敛性提供了良好的基础. Czarniak和Kudrewicz^[63]给出了非线性时不变网络存在收敛Volterra级数表示的充分条件, 并给出了收敛域半径的计算公式. Billings和Lang^[64,65]推导出了非线性系统输出频谱的边界值和各阶GFRF及输入谱值间的表达式, 分析了后两者对前者的影响, 给出了输出幅值谱的上界, 该研究结论为确定系统输入幅值的边界提供了良好的基础. Thouverez^[66]利用谐波平衡法和Volterra级数分析方法确定了谐波激励输入幅值的上界. 对于受谐波激励的Duffing振子, Tomlinson^[67]、Chatterjee^[68]和Peng^[69]等人分别研究了其Volterra级数表示的收敛性问题, 给出了不同的准则以确定输入幅值的上界, 其中前两种方法应用了GFRF概念, 而Peng的方法利用了NOFRF概念, 并且因为Peng的方法考虑了各阶NOFRF的次共振因素, 因而能比其他2种方法给出更精确的收敛域. Li和Billings^[70]研究

了二阶非线性系统受谐波激励时Volterra级数表示的收敛性问题,并给出了一个选择输入幅值的简单准则;另外,他们将Barrett^[71]基于无穷范数边界法推出Volterra级数收敛条件的时域方法推广到了频域,以确定输入幅值的边界条件^[72].针对单输入非线性系统,Hélie等人^[73]研究了Volterra级数表示的收敛半径以及截断Volterra级数的截断误差边界,他们还研究了多种范数下系统输入的边界.Glass和Franchek^[74]研究了正弦输入描述函数Volterra级数表示的收敛性问题,研究表明Volterra级数收敛的谐波输入上界是频率以及微分方程系数的函数.针对NARX非线性模型,Jing等人^[75]研究了GFRF以及输出频谱的边界特性,研究表明它们的边界均可以表示为关于第一阶GFRF的多项式函数,该多项式函数的系数由NARX模型的参数确定.基于该结论,可方便研究系统输出频谱与系统参数之间的关系,他们还在此基础上提出了输入幅值上界的确定准则;后续,Xiao等人^[76]推导出了输出频谱上界的表达式,并根据该表达式,研究了NARX模型的参数化收敛边界条件.

5 Volterra核函数辨识

利用Volterra级数对系统进行建模的关键是辨识其核函数,其可以是时域核函数和频域核函数,时域核函数通常称为Volterra核函数,频域核函数通常称为GFRF.针对这两类核函数的辨识,人们发展了不同方法.

5.1 Volterra时域核函数辨识

Volterra核函数辨识存在一个难点,即待辨识核函数项的数目非常大,例如,对于一个具有 N 个采样记忆长度的系统,表示系统的第 P 阶核函数需要 N^P 个参数.因此,用Volterra级数对系统进行建模,需要用很多参数表示Volterra核函数.为了克服该问题,Schetzen^[77]利用互相关法辨识系统的Wiener级数核——Volterra核函数的变形,但该方法要求系统输入必须是白噪声.Glentis和Koukoulas^[78]的研究结论表明,当且仅当输入信号功率谱值非0的点数大于等于系统记忆长度 m 时,受0均值高斯激励的非线性系统的Volterra级数表示存在唯一解.基于该结论,他们设计了合理的激励信号,并基于多通道嵌入方法提出了一种有效辨识Volterra时域核函数的新方法.Reed和Hawksford^[79]根据改进的二进制最大编码序

列辨识得到系统的Wiener级数,再根据辨识的Wiener级数得到系统的Volterra级数.Nowak和Van Veen^[80]研究了Volterra滤波器辨识的激励条件,研究表明高斯白噪声激励和确定的伪随机激励均可以用于辨识有限阶Volterra滤波器,其中伪随机激励比白噪声激励下的辨识结果精确.Nowak^[81]利用惩罚最小二乘算法得到了系统的Volterra级数表示以及高阶统计量.Cheng^[82]利用独立同分布循环对称零均值复高斯随机变量的一些特性,提出了一种辨识前5阶Volterra核函数的最优算法.该算法可被推广用于当输入为独立同分布的矩形M-QAM信号或M-PSK信号时的非线性系统辨识,但此时只能辨识得到最优的前3阶Volterra核函数.Mathews^[8]基于Gram-Schmidt正交法提出了一种对正交相关的高斯输入信号进行正交化的新方法,利用该方法可以辨识任意阶以及任意记忆长度的截断Volterra系统.Nowak和Veen^[83]利用伪随机多电平序列激励设计了一种计算效率较高的最小二乘辨识算法,该算法可以避免对数据矩阵求逆,提高了计算效率和精度.Wray和Green^[84]给出了人工神经网络与Volterra级数等价的条件,并利用人工神经网络辨识了系统的Volterra核函数,数值仿真验证了该Volterra核函数辨识方法的有效性.Sigrist等人^[85]基于LMS变形方法或带误差变量方法,根据均带加性高斯白噪声的输入/输出数据,辨识了非线性系统二阶Volterra级数表示的核函数.欧文和韩崇昭^[86]对Volterra级数进行三阶截断近似,将Volterra核的求解问题转化为一个标准的最小二乘问题,并通过QR分解进行参数估计,在利用Householder变换实现矩阵P的QR分解过程,提出了利用输入向量对输出向量的影响因子进行P阵的列选择,进一步简化了算法,减少了Volterra级数核函数辨识中的待辨识参数,提高了Volterra核函数辨识精度.

为了减少Volterra核函数待辨识参数的数量,一种常见的方法是将待辨识的核函数用一组函数基展开,这样可将核函数的辨识问题转化为少数几个展开系数的估计问题.例如,Marmarelis^[87]用一组Laguerre函数基表示核函数.Moodi等人^[88]用Laguerre和小波包函数表示生物系统的核函数.Da Rosa^[89]用Kautz函数基表示核函数.Asyali和Juusola^[90]利用Meixner函数展开Volterra核函数,辨识得到了带时间延迟非线性系统的Volterra模型.Gardner等人^[91]基于信号的循环平稳性辨识得到了系统的Volterra模型.

Campello和Favier^[92]将Fu和Dumont^[93]提出的关于线性系统辨识最优Laguerre基展开方法推广到了非线性系统的Volterra级数辨识当中,通过将Volterra核函数利用最优Laguerre基展开可降低Laguerre基函数的数量,并提高辨识精度. Hacioğlu和Williamson^[94]基于固定极点展开技术,提出了一种新的Volterra级数辨识方法,该方法有效降低了待辨识参数的数量,提高了辨识效率. 以上方法的本质是用一组相对紧支的全局或局部支撑的基函数表示系统的核函数. 该方法的另一个优点是它仅要求输入信号具有一定的频率带宽,并不需要特定的输入形式.

在基于基函数展开的Volterra核函数辨识方法中,小波基变换因其具有很多其它基变换方法所不具备的优点,如紧支性、正交性和多尺度性等,其应用尤为广泛. Chou^[95]利用正交小波基得到了Green函数的稀疏表达形式. Wei^[96]利用小波函数辨识得到了非参数NARX模型. Coca和Billings^[97]利用半正交小波方法从噪声污染的数据中辨识得到了系统的NARMAX模型. 当用小波函数展开Volterra核函数时,小波系数是非时变的,因此Volterra核函数是非时变小波系数的线性方程. 基于以上小波分析的优点, Kurdila^[98]利用一组双正交小波基辨识得到了降阶的Volterra级数模型,该文中所用的小波基具有双正交、对称或反对称、紧支撑等特点,然而双正交小波没有具体的数学表达式,这给双正交小波基的积分带来了一定的困难. 为了克服这个问题, Prazenica^[99]构造了三角小波基用于展开二阶Volterra核函数,该三角小波函数具有正交、紧支撑、对称或反对称等优点,然而该三角小波基函数是分段的常数,不能构造光滑的核函数,并且该三角小波基函数只适用于分析二阶核函数,将其推广分析更高阶的核函数具有一定的困难. 最近, Prazenica^[100]进一步提出了一种利用多小波函数辨识第一、二、三阶Volterra核函数的方法,其中该多小波函数通过对经典有限单元基函数进行缠绕得到. Prazenica的研究结论显示基于多小波展开的Volterra核函数辨识方法能够很好地估计出一类弱非线性系统的低阶核函数. 但Prazenica提出的Volterra核函数辨识方法必须同时辨识系统的第一、二、三阶核函数,该要求降低了辨识的精度. 为了克服这个问题, Cheng等人^[101]提出了一种新的多次激励下基于小波基展开的Volterra核函数辨识方法. 最近, Cheng等人^[102]基于小波基展开

法辨识得到了非线性分布参数系统的时空Volterra核函数.

5.2 Volterra频域核函数辨识

Volterra时域核的傅里叶变换形式被称作Volterra频域核,或广义频域响应函数(GFRF), Volterra频域核提供了从频域分析非线性系统的方法. 用Volterra频域核函数分析非线性系统的一个关键问题就是要首先计算或辨识得到系统的Volterra频域核函数. 为了计算系统的Volterra频域核函数,许多研究人员做了广泛的研究. 例如, Bedrosian和Rice^[22]研究了如何在谐波输入和高斯噪声输入下求得Volterra系统的GFRF; Worden^[7]将此概念推广到多输入非线性系统的研究; Billings和Peyton Jones^[24]则对Volterra非线性系统研究中常用的谐波探试法(harmonic probing method)做了归纳总结,并由此提出了一种递推方法计算动力学方程的GFRF,随后Billings又将该递推方法推广到多输入的情形,该方法可以用符号运算方式由计算机进行操作,这一定程度上方便了GFRF的应用. 遗憾的是求解系统GFRF的前提条件是要知道非线性系统的微分方程. 实际工程当中,特别是对于比较复杂的非线性系统,很难直接得到非线性系统的动力学方程.

为了避开先得到系统的非线性动力学方程,再计算系统GFRF的困难,研究人员研究了基于系统输入/输出数据对系统GFRF进行辨识的方法. 该方法是基于“黑箱”辨识原理,不用了解系统的内部机理及物理特性,只根据系统的输入/输出数据进行辨识,因此更具有实用性. 例如, Fakhouri^[103]利用有色高斯激励信号辨识非线性系统的频域核函数. Evans和Rees^[104]对利用周期多音信号激励辨识Volterra频域核函数做了个总结,并依据信号波峰因素最小化目标设计了新的周期多音信号以更好地辨识Volterra频域核函数. Boyd和Tang^[105]通过设计周期多音信号辨识了电声换能器的二阶频域核函数;随后, Chua和Liao^[106]拓展了该方法,通过合理设计多音信号辨识了更高阶的频域核函数;进一步, Chua和Liao^[107]提出了一种确定最高阶重要项的方法. Nam和Powers^[108]利用高阶谱分析方法辨识系统Volterra频域核函数. Bicken等人^[109]用随机多音激励辨识了系统的二阶Volterra频域核函数. Pavlenko等人^[110]通过利用激励幅值插值的方法辨识系统的Volterra频域核

函数. Li等人^[111]提出了一种基于时域分析的Volterra频域核函数辨识方法,该方法能计算出Volterra频域核函数在激励的谐波频率成分及其倍频成分处的值. 韩海涛^[112]对多谐波激励下Volterra频域核的输出特性进行了研究,从理论上推导出了Volterra频域核的辨识公式. 进一步, Han等人^[113]将该Volterra频域核函数辨识算法推广到了多输入多输出系统. 另外, Németh等人^[114]假定系统的Volterra频域核函数是局部光滑的,并利用插值法辨识系统的Volterra频域核函数. Tseng等人^[115]在混合域——时域和频域的混合,辨识得到了系统的前两阶Volterra频域核函数.

借助GFRF的辨识,人们尝试反过来辨识非线性系统的动力学方程. 例如, Billings和Li^[116]提出可首先根据系统的输入/输出数据辨识系统的NARX模型,然后基于核不变法(kernel invariance method)^[117],逐步辨识出系统的各阶GFRF,最后基于各阶GFRF,辨识得到系统的非线性微分方程. 该辨识算法首先辨识系统的线性模型,然后辨识系统的二阶非线性项,以此递推下去. 由于该算法从最低阶项开始辨识,逐渐辨识较高阶的项,如果辨识得到的模型足够表示待辨识系统,则停止选项,所以该辨识算法可以有效地降低模型的复杂程度. Billings和Swain^[118]将该辨识算法推广到了多输入多输出非线性系统. 基于工具变量和正交广义最小二乘法, Li等人^[119]进一步提出了一种辨识非线性连续时间模型的新方法,该辨识算法是一种无偏估计算法. 另外,为了能够辨识非线性分布参数系统的非线性偏微分方程或CML模型(coupled map lattice, CML)^[120], Guo和Billings^[13]通过调整NARMAX模型的辨识算法,辨识得到了非线性

分布参数系统的非线性偏微分方程.

6 结论与展望

本文总结了Volterra级数理论及其应用方面的研究进展,包括介绍了Volterra级数的基本定义和其相关的一些频域概念;分析了它和Taylor级数、Wiener级数、NARMAX模型、Hammerstein模型、Wiener模型、Wiener-Hammerstein模型、谐波平衡法、摄动法和Adomian分解等非线性模型与求解方法之间的联系;探讨了其收敛性问题和核辨识问题研究中的挑战. 经过过去几十年对Volterra级数的研究,人们虽然取得了一定的进展,但还面临很多挑战. 例如,Volterra级数收敛性问题仍是个挑战性难题,至今还没有统一的方法能确定Volterra级数的收敛区间,现有方法仅能给出一些较简单系统的判定准则,且该准则均比较保守,仅能确定比较粗糙的收敛域;系统Volterra级数表示的核函数数量非常大,虽然人们经过研究,提出了一些有效的方法降低Volterra核函数待辨识参数的数量,但数量依然比较大,这影响了Volterra核函数辨识的效率,给系统的在线辨识带来了困难;其次,现阶段利用Volterra级数对非线性系统进行分析和建模还停留在仿真或实验室阶段,若将其用于对实际系统设计和分析,需要考虑更多的实际因素;另外,现有大量的商业软件和功能强大的软件包对线性系统的频率响应特性其进行分析和辨识,在此基础上进行系统设计和优化;但对于非线性系统则缺乏相应的软件包,可预见Volterra级数及其发展而来的频域概念将在这方面发挥重要的作用.

参考文献

- 1 Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations. New York: Dover Publications, 1959
- 2 Wiener N. Response of a non-linear device to noise. Radiation Lab MIT, 1942
- 3 Schetzen M. The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems. Malabar: Krieger, 1980
- 4 Rugh W J. Nonlinear System Theory: The Volterra-Wiener Approach. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1980
- 5 Mathews V J, Sicuranza G L. Polynomial Signal Processing. New York: Wiley, 2000
- 6 Boyd S, Chua L O. Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series. IEEE Trans Circuits Syst, 1985, CAS-32: 1150-1161
- 7 Worden K, Manson G, Tomlinson G R. Harmonic probing algorithm for the multi-input Volterra series. J Sound Vib, 1997, 201: 67-84
- 8 Mathews V J. Adaptive Volterra filters using orthogonal structures. IEEE Signal Proc Lett, 1996, 3: 307-309
- 9 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A. Resonances and resonant frequencies for a class of nonlinear systems. J Sound Vib, 2007, 300: 993-1014
- 10 Zhu A, Draxler P J, Hsia C, et al. Digital predistortion for envelope-tracking power amplifiers using decomposed piecewise volterra series. IEEE Trans Microw Theory, 2008, 56: 2237-2247

- 11 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A, et al. Analysis of bilinear oscillators under harmonic loading using nonlinear output frequency response functions. *Int J Mech Sci*, 2007, 49: 1213–1225
- 12 Hélie T. Volterra series and state transformation for real-time simulations of audio circuits including saturations: Application to the moog ladder filter. *IEEE Trans Audio Speech*, 2010, 18: 747–759
- 13 Guo L Z, Billings S A, Coca D. Identification of partial differential equation models for a class of multiscale spatio-temporal dynamical systems. *Int J Control*, 2010, 83: 40–48
- 14 Irving A D. Dynamical hysteresis in communications: A Volterra functional approach. *IET Signal Proc*, 2008, 2: 75–86
- 15 Hélie T, Hasler M. Volterra series for solving weakly non-linear partial differential equations: Application to a dissipative Burgers' equation. *Int J Control*, 2004, 77: 1071–1082
- 16 Yuan F, Opal A. Distortion analysis of periodically switched nonlinear circuits using time-varying Volterra series. *IEEE Trans Circuits-I*, 2001, 48: 726–738
- 17 George D. Continuous Nonlinear Systems. MIT RLE Technical Report, No 355, 1959
- 18 Bussgang J J, Ehrman L, Graham J W. Analysis of nonlinear systems with multiple inputs. *Proc IEEE*, 1974, 62: 1088–1119
- 19 Victor J D, Knight B W. Nonlinear analysis with an arbitrary stimulus ensemble. *Quart Appl Math*, 1979, 37: 113–136
- 20 Lang Z Q, Billings S A. Output frequency characteristics of nonlinear systems. *Int J Control*, 1996, 64: 1049–1067
- 21 Lang Z Q, Billings S A. Energy transfer properties of non-linear systems in the frequency domain. *Int J Control*, 2005, 78: 345–362
- 22 Bedrosian E, Rice S O. The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and Gaussian inputs. *Proc IEEE*, 1971, 59: 1688–1707
- 23 Billings S, Tsang K. Spectral analysis for non-linear systems. Part I: Parametric non-linear spectral analysis. *Mech Syst Signal Process*, 1989, 3: 319–339
- 24 Billings S A, Peyton Jones J C. Mapping nonlinear integro-differential equations into the frequency domain. *Int J Control*, 1990, 52: 863–879
- 25 Swain A K, Billings S A. Generalized frequency response function matrix for MIMO non-linear systems. *Int J Control*, 2001, 74: 829–844
- 26 Yue R, Billings S A, Lang Z Q. An investigation into the characteristics of non-linear frequency response functions. Part 1: Understanding the higher dimensional frequency spaces. *Int J Control*, 2005, 78: 1031–1044
- 27 Yue R, Billings S A, Lang Z Q. An investigation into the characteristics of non-linear frequency response functions. Part 2: New analysis methods based on symbolic expansions and graphical techniques. *Int J Control*, 2005, 78: 1130–1149
- 28 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A. Non-linear output frequency response functions for multi-input non-linear Volterra systems. *Int J Control*, 2007, 80: 843–855
- 29 Lang Z Q, Billings S A, Yue R, et al. Output frequency response function of nonlinear Volterra systems. *Automatica*, 2007, 43: 805–816
- 30 Jing X J, Lang Z Q, Billings S A. Parametric characteristic analysis for generalized frequency response functions of nonlinear systems. *Circ Syst Signal Process*, 2009, 28: 699–733
- 31 Peng Z K, Lang Z Q. The effects of nonlinearity on the output frequency response of a passive engine mount. *J Sound Vib*, 2008, 318: 313–328
- 32 Feijoo J A V, Worden K, Stanway R. Associated linear equations for volterra operators. *Mech Syst Signal Process*, 2005, 19: 57–69
- 33 Feijoo J A V, Worden K, Stanway R. Analysis of time-invariant systems in the time and frequency domain by associated linear equations (ALEs). *Mech Syst Signal Process*, 2006, 20: 896–919
- 34 Feijoo J A V, Worden K, Stanway R. System identification using associated linear equations. *Mech Syst Signal Process*, 2004, 18: 431–455
- 35 Feijoo J A V, Worden K, Garcia P M, et al. Analysis of MDOF nonlinear systems using associated linear equations. *Mech Syst Signal Process*, 2010, 24: 2824–2843
- 36 Schmidt G, Tondl A. Non-linear Vibrations. Cambridge: Cambridge University Press, 1986
- 37 Wiener N. Nonlinear Problems in Random Theory. New York: Wiley, 1958
- 38 Franz M O, Schölkopf B. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression. *Neural Comput*, 2006, 18: 3097–3118
- 39 Korenberg M J, Hunter I W. The identification of nonlinear biological systems: Volterra kernel approaches. *Ann Biomed Eng*, 1996, 24: 250–268
- 40 Lee Y W, Schetzen M. Measurement of the Wiener kernels of a non-linear system by cross-correlation. *Int J Control*, 1965, 2: 237–254
- 41 Palm G, Poggio T. The Volterra representation and the Wiener expansion: Validity and pitfalls. *SIAM J Appl Math*, 1977, 33: 195–216
- 42 Palm G, Pöpel B. Volterra representation and Wiener-like identification of nonlinear systems: Scope and limitations. *Q Rev Biophys*, 1985, 18: 135–164

- 43 Leontaritis I, Billings S. Input-output parametric models for non-linear systems Part I: Deterministic non-linear systems. *Int J Control*, 1985, 41: 303–328
- 44 Mzyk G. Parametric versus nonparametric approach to wiener systems identification. *Lect Notes Contr Inform Sci*, 2010, 404: 111–125
- 45 Le Caillec J M. Spectral inversion of second order Volterra models based on the blind identification of Wiener models. *Signal Process*, 2011, 91: 2541–2555
- 46 Chen Y, Liu Z Y, Zhang H J. Research and simulation of Volterra series kernel identification on Wiener model. In: *Proceedings of 2nd Conference on Environmental Science and Information Application Technology*, Wuhan, China, 2010. 95–98
- 47 Kibangou A Y, Favier G. Identification of parallel-cascade Wiener systems using joint diagonalization of third-order Volterra kernel slices. *IEEE Signal Process Lett*, 2009, 16: 188–191
- 48 Bai E W, Fu M. A blind approach to Hammerstein model identification. *IEEE Trans Signal Process*, 2002, 50: 1610–1619
- 49 Westwick D T, Kearney R E. Nonparametric identification of nonlinear biomedical systems, Part I: Theory. *Crit Rev Biomed Eng*, 1998, 26: 153–226
- 50 Ralston J C, Zoubir A M. Identification of time-varying Hammerstein systems. In: *Proceedings of the 1995 20th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Part 2 (of 5)*, Detroit, MI, USA, 1995. 1685–1688
- 51 Kibangou A Y, Favier G. Tensor analysis-based model structure determination and parameter estimation for block-oriented nonlinear systems. *IEEE J-STSP*, 2010, 4: 514–525
- 52 Kibangou A Y, Favier G. Wiener-Hammerstein systems modeling using diagonal Volterra kernels coefficients. *IEEE Signal Process Lett*, 2006, 13: 381–384
- 53 Tan A H, Godfrey K. Identification of Wiener-Hammerstein models using linear interpolation in the frequency domain (LIFRED). *IEEE Trans Instrum Meas*, 2002, 51: 509–521
- 54 Peng Z K, Lang Z Q, Billings S A, et al. Comparisons between harmonic balance and nonlinear output frequency response function in nonlinear system analysis. *J Sound Vib*, 2008, 311: 56–73
- 55 Vannucci A, Serena P, Bononi A. The RP method: A new tool for the iterative solution of the linear Schrödinger equation. *J Lightwave Technol*, 2002, 20: 1102–1112
- 56 Buonomo A, Schiavo A L. Perturbation analysis of nonlinear distortion in analog integrated circuits. *IEEE Trans Circuits-I*, 2005, 52: 1620–1631
- 57 Peng Z K, Meng G, Zhang W M. A study about the relationship between the Volterra series and the perturbation method. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2013, 43: 494–499 [彭志科, 孟光, 张文明. Volterra级数与摄动法的内在关系研究. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2013, 43: 494–499]
- 58 Abdel-Halim Hassan I H. Comparison differential transformation technique with Adomian decomposition method for linear and nonlinear initial value problems. *Chaos Soliton Fract*, 2008, 36: 53–65
- 59 Guo Y Z, Guo L Z, Billings S A, et al. Volterra series approximation of a class of nonlinear dynamical systems using the Adomian decomposition Method. *Nonlinear Dyn*, 2013, 74: 359–371
- 60 Boyd S, Chua L O, Desoer C A. Analytical foundations of volterra series. *IMA J Math Control I*, 1984, 1: 243–282
- 61 Sandberg I W. Discrete-space Volterra series representations with truncation bounds. *Multidim Syst Sign Process*, 2003, 14: 411–421, 427
- 62 Sandberg I W. Bounds for discrete-time volterra series representations. *IEEE Trans Circuits-I*, 1999, 46: 135–139
- 63 Czarniak A, Kudrewicz J. Convergence of Volterra series for nonlinear networks. *IEEE Trans Circuits Syst*, 1984, CAS-31: 751–752
- 64 Billings S A, Lang Z Q. A bound for the magnitude characteristics of nonlinear output frequency response functions: Part 1. Analysis and computation. *Int J Control*, 1996, 65: 309–328
- 65 Billings S A, Lang Z Q. A bound for the magnitude characteristics of nonlinear output frequency response functions: Part 2. Practical computation of the bound for systems described by the nonlinear autoregressive model with exogenous input. *Int J Control*, 1996, 65: 365–384
- 66 Thouverez F. A new convergence criteria of Volterra series for harmonic inputs. In: *Proceedings of the 1998 16th International Modal Analysis Conference, Part 1 (of 2)*, Santa Barbara, CA, USA, 1998, 1: 723–727
- 67 Tomlinson G R, Manson G. A simple criterion for establishing an upper limit to the harmonic excitation level of the duffing oscillator using the Volterra series. *J Sound Vib*, 1996, 190: 751–762
- 68 Chatterjee A, Vyas N S. Convergence analysis of Volterra series response of nonlinear systems subjected to harmonic excitation. *J Sound Vib*, 2000, 236: 339–358
- 69 Peng Z K, Lang Z Q. On the convergence of the Volterra-series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations. *J Sound Vib*, 2007, 305: 322–332
- 70 Li L, Billings S A. On the convergence of the Volterra series response of quadratically nonlinear systems using a frequency domain analysis. In: *Proceedings of 2010 IEEE 10th International Conference on Signal Processing*, Beijing, China, 2010. 155–158

- 71 Barrett J F. The use of Volterra series to find region of stability of a non-linear differential equation. *Int J Control*, 1965, 1: 209–216
- 72 Li L M, Billings S A. Analysis of nonlinear oscillators using Volterra series in the frequency domain. *J Sound Vib*, 2011, 330: 337–355
- 73 Hélie T, Laroche B. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear-analytic single-input systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2011, 56: 2062–2072
- 74 Glass J W, Franchek M A. Convergence and computation of describing functions using a recursive Volterra series. *Int J Robust Nonlin*, 2004, 14: 1469–1488
- 75 Jing X J, Lang Z Q, Billings S A. Magnitude bounds of generalized frequency response functions for nonlinear Volterra systems described by NARX model. *Automatica*, 2008, 44: 838–845
- 76 Xiao Z, Jing X, Cheng L. Parameterized convergence bounds for volterra series expansion of NARX models. *IEEE Trans Signal Process*, 2013, 61: 5026–5038
- 77 Schetzen M. A Theory of non-linear system identification. *Int J Control*, 1974, 20: 577–592
- 78 Glentis G O, Koukoulas P, Kalouptsidis N. Efficient algorithms for Volterra system identification. *IEEE Trans Signal Process*, 1999, 47: 3042–3057
- 79 Reed M, Hawksford M. Identification of discrete Volterra series using maximum length sequences. *IEE P-Circ Dev Syst*, 1996, 143: 241–248
- 80 Nowak R D, Van Veen B D. Random and pseudorandom inputs for Volterra filter identification. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, 42: 2124–2135
- 81 Nowak R D. Penalized least squares estimation of volterra filters and higher order statistics. *IEEE Trans Signal Process*, 1998, 46: 419–428
- 82 Cheng C H. Optimal Volterra kernel estimation algorithms for a nonlinear communication system for PSK and QAM inputs. *IEEE Trans Signal Process*, 2001, 49: 147–163
- 83 Toker O, Emara-Shabaik H E. Pseudo-random multilevel sequences: Spectral properties and identification of Hammerstein systems. *IMA J Math Control I*, 2004, 21: 183–205
- 84 Wray J, Green G G R. Calculation of the Volterra kernels of non-linear dynamic systems using an artificial neural network. *Biol Cybern*, 1994, 71: 187–195
- 85 Sigrist Z, Grivel E, Alcoverro B. Estimating second-order Volterra system parameters from noisy measurements based on an LMS variant or an errors-in-variables method. *Signal Process*, 2012, 92: 1010–1020
- 86 Ou W, Han C Z. Solution to the Dimension Disaster in the Identification of Volterra Series. *J Xi'an Jiaotong University*, 2001, 35: 658–660 [欧文, 韩崇昭. Volterra泛函级数辨识中维数灾难的一种解决方法. *西安交通大学学报*, 2001, 35: 658–660]
- 87 Marmarelis V Z. Identification of nonlinear biological systems using Laguerre expansions of kernels. *Ann Biomed Eng*, 1993, 21: 573–589
- 88 Moodi H, Bustan D. On identification of nonlinear systems using Volterra kernels expansion on Laguerre and wavelet function. In: *Proceedings of 2010 Chinese Control and Decision Conference, Xuzhou, China, 2010*. 1141–1145
- 89 da Rosa A, Campello R J, Amaral W C. Choice of free parameters in expansions of discrete-time Volterra models using Kautz functions. *Automatica*, 2007, 43: 1084–1091
- 90 Asyali M H, Juusola M. Use of Meixner functions in estimation of Volterra kernels of nonlinear systems with delay. *IEEE Trans Bio-med Eng*, 2005, 52: 229–237
- 91 Gardner W A, Archer T L. Exploitation of cyclostationarity for identifying the Volterra kernels of nonlinear systems. *IEEE Trans Inform Theory*, 1993, 39: 535–542
- 92 Campello R J G B, Favier G, Do Amaral W C. Optimal expansions of discrete-time Volterra models using Laguerre functions. *Automatica*, 2004, 40: 815–822
- 93 Fu Y, Dumont G. An optimum time scale for discrete Laguerre network. *IEEE Trans Automat Contr*, 1993, 38: 934–938
- 94 Hacıoğlu R, Williamson G A. Reduced complexity Volterra models for nonlinear system identification. *Eurasip J Appl Sig P*, 2001, 2001: 257–265
- 95 Chou K C, Guthart G S. Representation of Green's function integral operators using wavelet transforms. *J Vib Control*, 2000, 6: 19–48
- 96 Wei H L, Billings S A, Balikhin M. Wavelet based non-parametric NARX models for nonlinear input-output system identification. *Int J Syst Sci*, 2006, 37: 1089–1096
- 97 Coca D, Billings S A. Non-linear system identification using wavelet multiresolution models. *Int J Control*, 2001, 74: 1718–1736
- 98 Kurdila A J, Prazenica R J, Rediniotis O, et al. Multiresolution methods for reduced-order models for dynamical systems. *J Guid Control Dynam*, 2001, 24: 193–200
- 99 Prazenica R J, Kurdila A J. Volterra kernel identification using triangular wavelets. *J Vib Control*, 2004, 10: 597–622
- 100 Prazenica R J, Kurdila A J. Multiwavelet constructions and Volterra kernel identification. *Nonlinear Dynam*, 2006, 43: 277–310
- 101 Cheng C M, Peng Z K, Zhang W M, et al. Wavelet basis expansion-based Volterra kernel function identification through multilevel excitations. *Nonlinear Dyn*, 2014, 76: 985–999
- 102 Cheng C M, Dong X J, Peng Z K, et al. Wavelet basis expansion-based spatio-temporal Volterra kernels identification for nonlinear distributed parameter systems. *Nonlinear Dyn*, 2014, 76: 985–999

- 103 Fakhouri S. Identification of the Volterra kernels of nonlinear systems. *IEE Proc-D*, 1980, 127: 296–304
- 104 Evans C, Rees D, Jones L, et al. Periodic signals for measuring nonlinear Volterra kernels. *IEEE Trans Instrum Meas*, 1996, 45: 362–371
- 105 Boyd S, Tang Y S, Chua L O. Measuring Volterra kernels. *IEEE Trans Circ Syst*, 1983, CAS-30: 571–577
- 106 Chua L O, Liao Y. Measuring Volterra kernels (II). *Int J Circ Theor App*, 1989, 17: 151–190
- 107 Chua L O, Liao Y. Measuring Volterra kernels III: How to estimate the highest significant order. *Int J Circ Theor App*, 1991, 19: 189–209
- 108 Nam S W, Powers E J. Application of higher order spectral analysis to cubically nonlinear system identification. *IEEE Trans Signal Process*, 1994, 42: 1746–1765
- 109 Bicken G, Carey G F, Stearman R O. Frequency domain kernel estimation for 2nd-order Volterra models using random multi-tone excitation. *VLSI Des*, 2002, 15: 701–713
- 110 Pavlenko V, Pavlenko S, Speranskyy V. Interpolation method of nonlinear dynamical systems identification based on volterra model in frequency domain. In: *Proceedings of the 2013 IEEE 7th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems*, 2013. 173–178
- 111 Li L M, Billings S A. Estimation of generalized frequency response functions for quadratically and cubically nonlinear systems. *J Sound Vib*, 2011, 330: 461–470
- 112 Han H T, Ma H G, Cao J F, et al. A non-parametric identification method of Volterra frequency domain kernels for MIMO nonlinear system. *J Xi'an Jiaotong University*, 2012, 46: 66–71 [韩海涛, 马红光, 曹建福, 等. 多输入多输出非线性系统Volterra频域核的非参数辨识方法. *西安交通大学学报*, 2012, 46: 66–71]
- 113 Han H, Ma H, Xu D, et al. Non-linear parameter estimation in multi-degree-of-freedom systems using multi-input Volterra series. *J Sound Vib*, 2013, 332: 2562–2574
- 114 Németh J G, Kollár I, Schoukens J. Identification of Volterra kernels using interpolation. *IEEE Trans Instrum Meas*, 2002, 51: 770–775
- 115 Tseng C H. A mixed-domain method for identification of quadratically nonlinear systems. *IEEE Trans Signal Process*, 1997, 45: 1013–1024
- 116 Billings S A, Li L M. Reconstruction of linear and non-linear continuous-time system models from input/output data using the kernel invariance algorithm. *J Sound Vib*, 2000, 233: 877–896
- 117 Zhao X, Marmarelis V Z. On the relation between continuous and discrete nonlinear parametric models. *Automatica*, 1997, 33: 81–84
- 118 Billings S A, Swain A K. Reconstruction of multiple-input multiple-output non-linear differential equation models from the generalized frequency response function matrix. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. J Syst Control Eng*, 2000, 214: 35–51
- 119 Li L M, Billings S A. Continuous-time system identification using shifted Chebyshev polynomials. *Int J Syst Sci*, 2001, 32: 303–306
- 120 Billings S A, Coca D. Identification of coupled map lattice models of deterministic distributed parameter systems. *Int J Syst Sci*, 2002, 33: 623–634

Volterra series theory: A state-of-the-art review

PENG ZhiKe & CHENG ChangMing

State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Because many real-world systems are inherently nonlinear in nature, nonlinear problems have received considerable interest and attention from engineers, physicists, mathematicians, and other scientists. Many mathematical theories and methods have been developed to model, solve, and analyze nonlinear problems and systems. One such method uses the Volterra series, which describes the nonlinear relationship between system input and output. This is a powerful mathematical tool for the analysis of nonlinear systems, and is essentially an extension of the standard convolution description of linear systems. This paper introduces the basic definition of the Volterra series, together with some frequency domain concepts derived from the Volterra series. The connection between the Volterra series and other nonlinear system description models and nonlinear problem solving methods is discussed, including the Taylor series, Wiener series, NARMAX model, Hammerstein model, Wiener model, Wiener-Hammerstein model, harmonic balance method, perturbation method, and Adomian decomposition method. Challenging problems and the state-of-the-art in series convergence research and kernel identification studies are comprehensively introduced.

Volterra series, general frequency response function, nonlinear output frequency response function, nonlinear system identification, convergence

doi: 10.1360/N972014-01056